

Automatique linéaire 1

Cadre du cours : étude des systèmes linéaires continus.

Plan du cours :

- I. Introduction, Définitions, Position du problème.
- II. Modélisation des systèmes linéaires.
- III. Stabilité des systèmes asservis.
- IV. Performances des systèmes asservis.
- V. Correction des systèmes asservis.

Chap I - Introduction, définitions, Position du problème

I.1. Introduction.

Définition : L'automatique est la discipline scientifique qui étudie les systèmes dynamiques, les signaux et l'information, à des fins de conduite ou de prise de décision.

Une entrée :

θ , angle de rotation du volant

Une sortie :

d , distance des roues au bord de la route

Une consigne ou commande :

d_0 , distance désirée

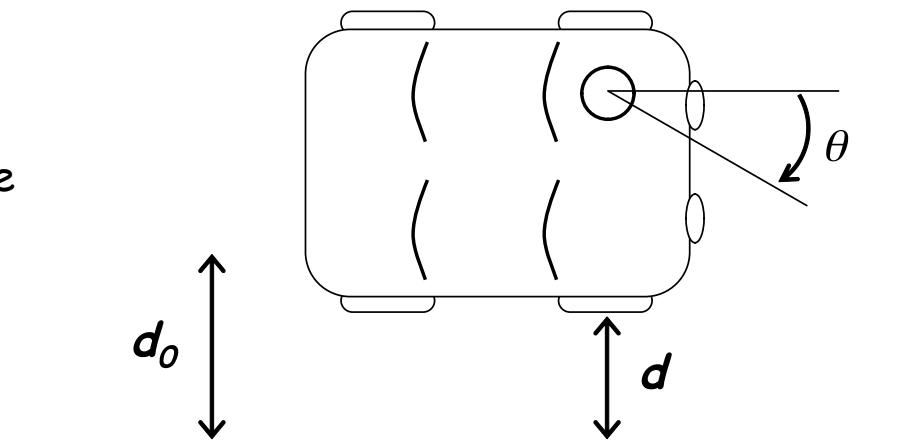
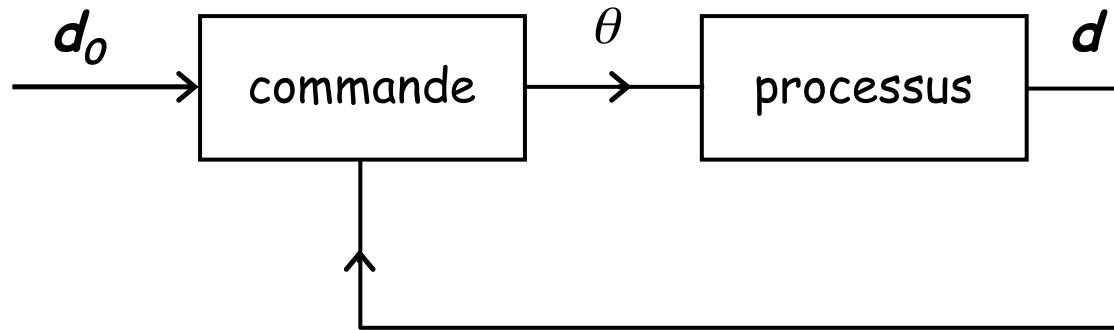


Schéma fonctionnel d'un asservissement en boucle fermée



A gauche:
les entrées
A droite:
les sorties

La **commande** produit le signal de pilotage
du processus (ou système) à partir des
entrées et des sorties

Ici, système monovariable (description
multivariable plus complexe)

Domaine d'application ?

Industrie manufacturière, la chimie, la robotique, la mécanique, l'électronique, l'aéronautique, l'économétrie, etc.

Objectifs de cours.

Etude des systèmes linéaires, continus, invariants dans le temps.

Automatique *classique* (20^{ème} siècle).

Pré requis

"Mathématique du signal" 1^{er} semestre :

- les signaux types (Dirac, échelon de Heavyside, etc.),
- le théorème de convolution,
- et le formalisme de Laplace.

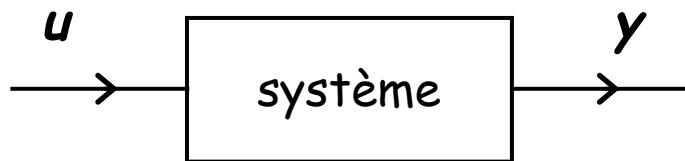
Définition 1 : On appelle **modèle** d'un système (ou processus) la **loi** qui relie l'entrée (cause) à la sortie (effet).

Définition 2 : On distingue deux régimes dans le comportement des systèmes :

- le **régime permanent** ou **établi**, caractérisant la réponse stabilisée du système à une entrée quelconque,
- le **régime transitoire**, caractérisant l'évolution de la réponse avant que le régime permanent ne soit atteint.

Le **régime statique** est le régime permanent dans le cas où l'entrée est constante.

Définition 3 : Un système est **causal** si sa sortie $y(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $u(t)$ pour $t \leq t_0$



Définition 4 : Un système à **temps invariant** a un modèle identique à tout instant (un retard τ ne change pas la loi du modèle) :

$$u(t) \xrightarrow{\text{système}} y(t)$$

$$u(t - \tau) \xrightarrow{\text{système}} y(t - \tau)$$

Définition 5 : Un système est dit **instantané** si à un instant donné sa sortie ne dépend que de l'excitation à cet instant :

$$y(t) = a.u(t)$$

Définition 6 : Un système est **stable** si et seulement si toute entrée bornée génère une sortie bornée.

Définition 7 : Un système est **linéaire** s'il satisfait au principe de superposition :

$$a.u_1(t) + b.u_2(t) \xrightarrow{\text{syst. linéaire}} a.y_1(t) + b.y_2(t)$$

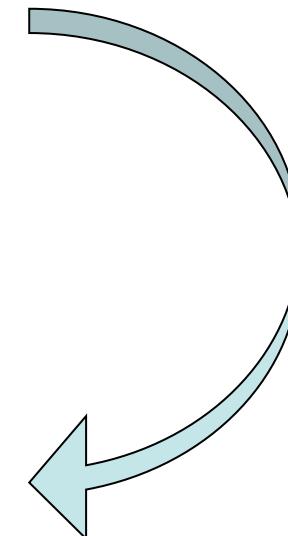
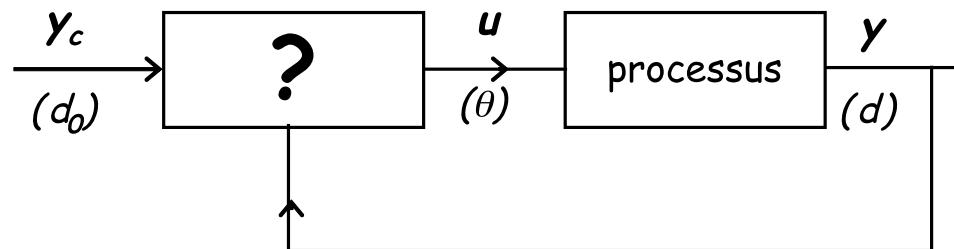
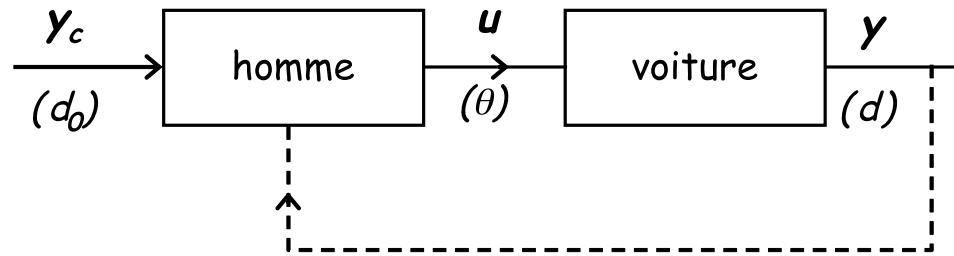
Ce cours traite des systèmes causals, linéaires et à temps invariant ; les S.L.T.I.

Les systèmes étudiés sont analogiques, leurs signaux d'entrée et de sortie sont continus à la fois en temps et en amplitude.

La relation qui lie leur entrée et leur sortie est dès lors une **équation différentielle linéaire à coefficients constants**.

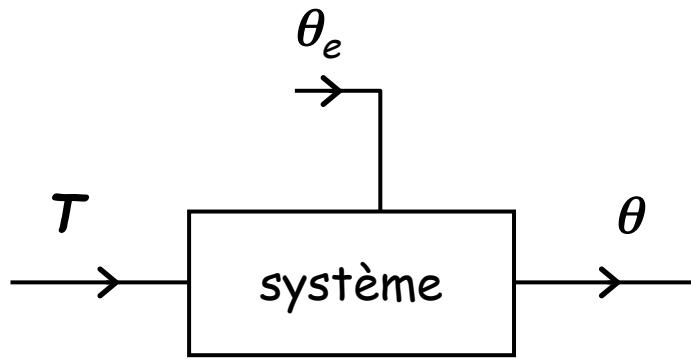
I.3. Position du problème

a - La commande automatique, ou comment remplacer l'homme.



b - La boucle d'asservissement.

Considérons le système de chauffage central d'un immeuble :



θ température intérieure

T température de l'eau chaude envoyée dans les radiateurs

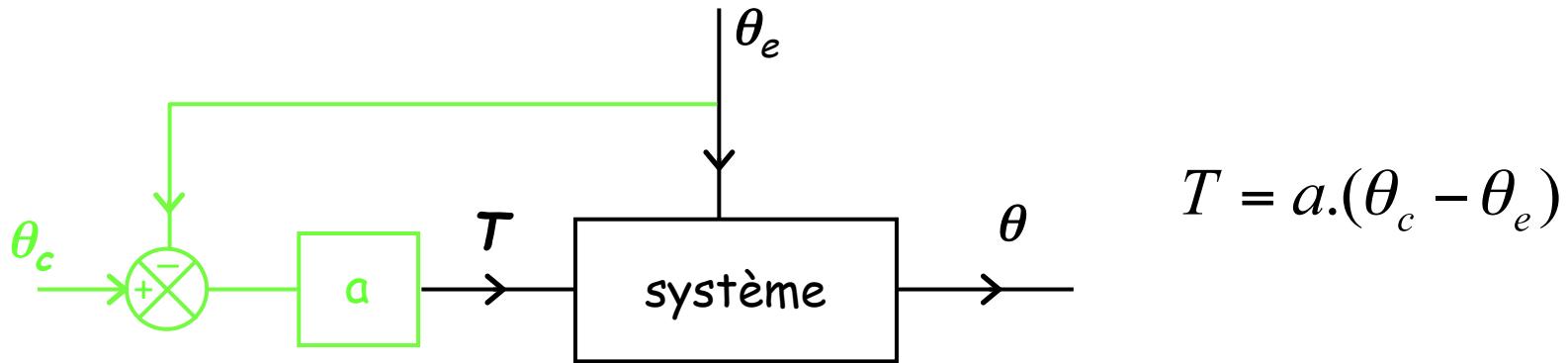
θ_e température extérieure (perturbation)

Réglage manuel de T pour obtenir une température donnée $\theta_c = 19^\circ\text{C}$

Nouveau réglage à chaque variation de θ_e

I.3. Position du problème

1^{ère} tentative de réglage automatique en boucle ouverte :

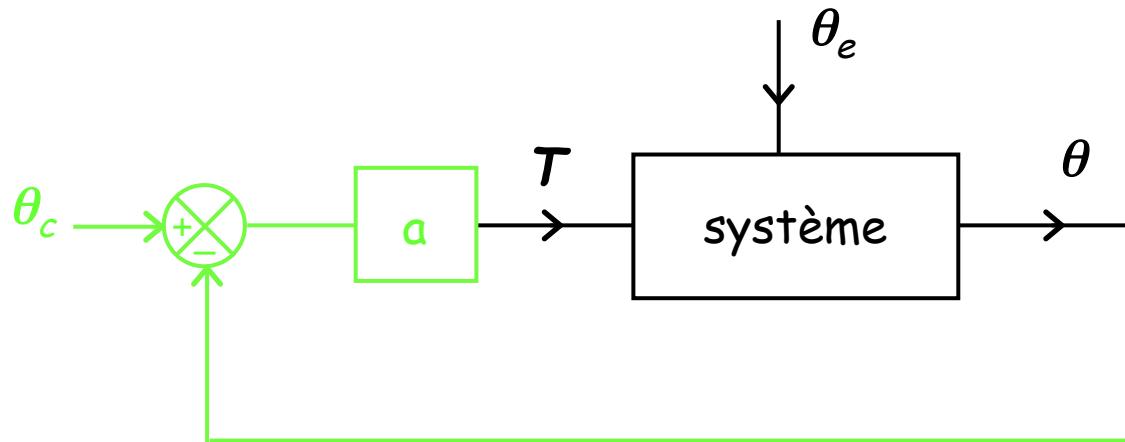


$$T = a \cdot (\theta_c - \theta_e)$$

Inconvénient : par temps froid et ensoleillé, la température intérieure θ va s'élever sans que pour autant la température de l'eau des radiateurs T ne soit réduite puisqu'elle ne dépend que de θ_e .

→ ouverture des fenêtres par les résidents.

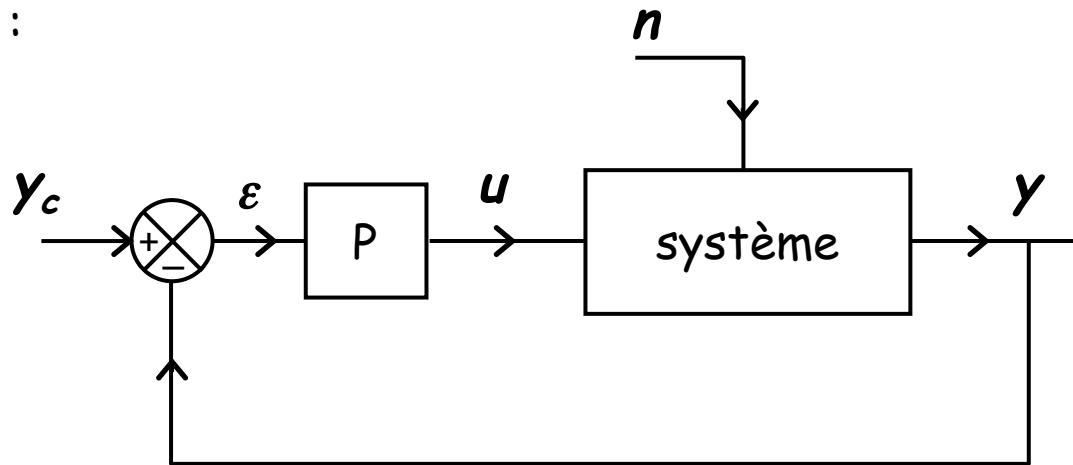
Solution : asservissement en boucle fermée :



$$T = a(\theta_c - \theta)$$

I.3. Position du problème

Généralisation :



y_c : consigne (ici température affichée sur le thermostat θ_c)

y : sortie, ou image de la sortie obtenue par un capteur

u : commande ou action

ε : erreur ou écart $\varepsilon = y_c - y$

n : perturbation extérieure

P : système automatique de commande

loi de commande
 $u = P(\varepsilon)$

I.3. Position du problème

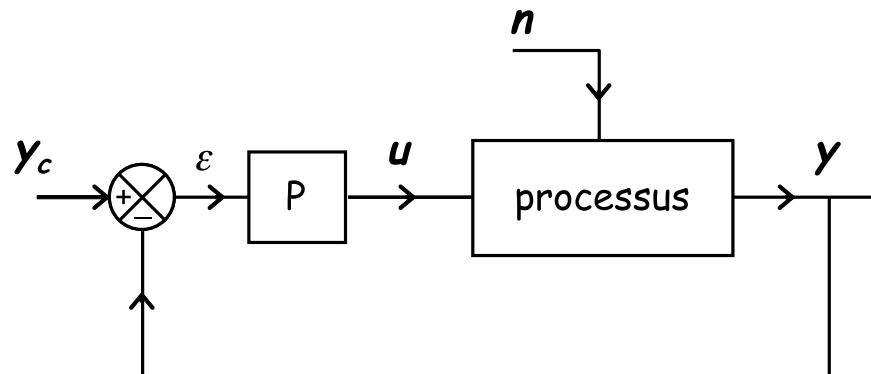
c - Qualités d'un asservissement, nécessité de la boucle fermée.

Elles sont au nombre de 3 : stabilité, précision, rapidité.

Stabilité.

Si on considère une loi de commande telle que :

$$u = K \cdot (y_c - y)$$



Pour K grand, une petite valeur de l'erreur $\varepsilon = y_c - y > 0$ suffit à créer une commande u élevée.

La correction apportée peut alors être telle que la consigne soit dépassée $y > y_c$ et que $|\varepsilon'| = |y_c - y| > \varepsilon$; entraînant une correction inverse elle aussi disproportionnée \Rightarrow apparition d'oscillations divergentes = instabilité.

Stabilité (suite).

Autres sources possibles d'instabilité :

- retard d'exécution des ordres reçus,
- contre réaction positive ($\varepsilon = y_c + y$).

Précision.

L'écart ε entre la consigne y_c et la sortie y mesure la précision du système.

Dans le cas d'une loi de commande proportionnelle du type $u = K \cdot \varepsilon$, l'obtention d'une bonne précision nécessite d'avoir un gain élevée.

De même une perturbation n sera d'autant plus efficacement corrigée (erreur résiduelle faible) que K sera grand.



On a vu qu'un grand K peut être source d'instabilité.
Stabilité et précision sont des paramètres potentiellement contradictoires.

I.3. Position du problème

Rapidité.

La rapidité d'un processus peut se mesurer par le temps de sa réponse à un échelon de commande (cf. Cha IV).

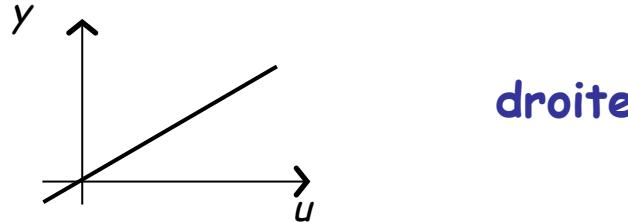
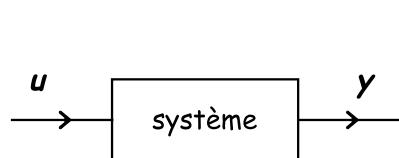
D'une façon générale, la synthèse d'un asservissement résulte d'un **compromis** stabilité - précision - rapidité.

L'automatisation des processus requiert l'utilisation d'une boucle fermée (rétroaction), celle-ci est nécessaire afin de pouvoir :

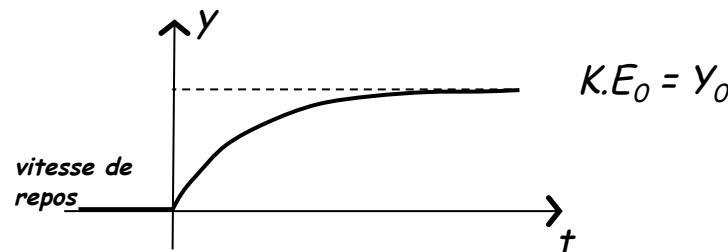
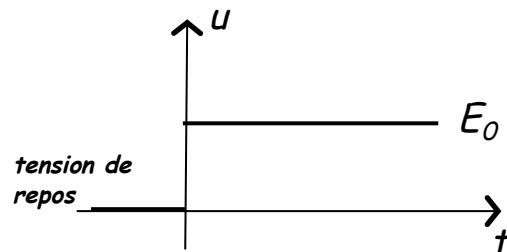
- stabiliser un système instable en boucle ouverte,
- compenser des perturbations externes,
- compenser des incertitudes liées au système lui-même (vieillissement, imprécision du modèle, etc.).

Chap II - Modélisation des systèmes linéaires

Caractéristique statique (en régime permanent) d'un système linéaire :



Comportement dynamique (en régime transitoire) :



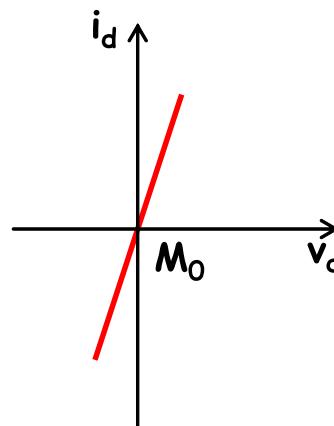
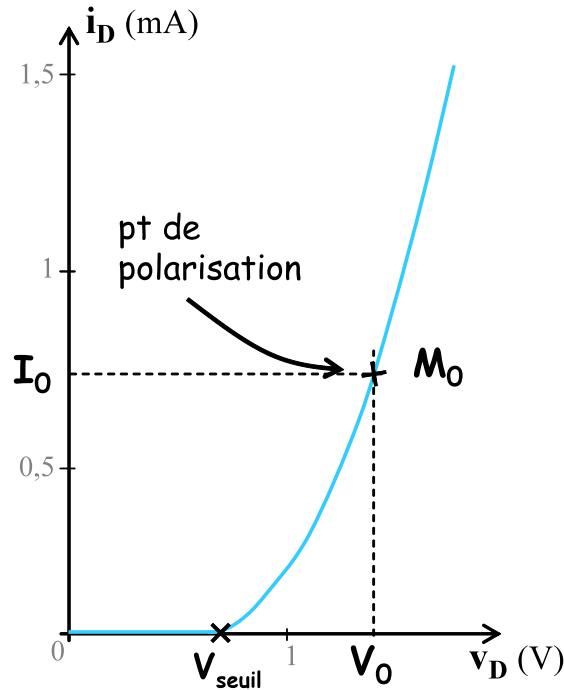
Comportement modélisé par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants (S.L.T.I.).

Cha II - Modélisation des systèmes linéaires



Les systèmes physiques (réels) ne sont pas nécessairement linéaires.

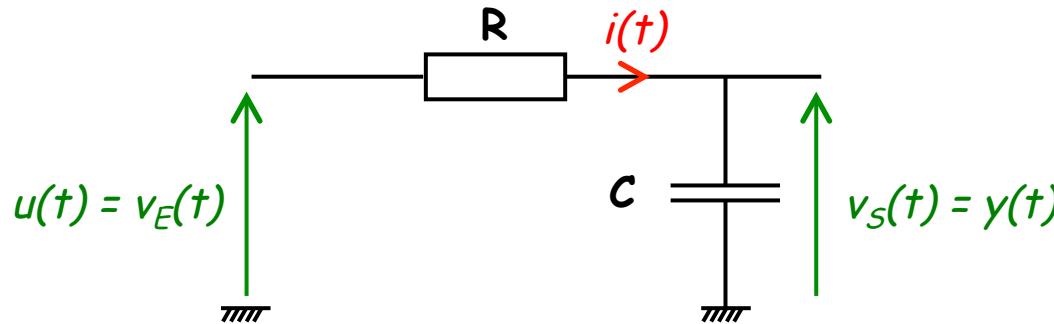
➡ Linéarisation autour du point de repos.



II.1. Système du 1^{er} ordre

Définition 8 : Un système est dit du 1^{er} ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du 1er ordre.

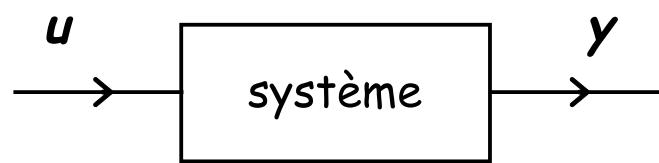
Exemple :



$$\Rightarrow RC \cdot \frac{dv_S(t)}{dt} + v_S(t) = v_E(t)$$

II.1. Système du 1^{er} ordre

Forme générale d'une équation différentielle du 1^{er} ordre :



$$\tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot u(t)$$

| τ constante de temps du système
| K gain statique

a - Fonction de transfert.

Définition 9 : La fonction de transfert (ou transmittance) d'un système linéaire est le rapport entre la transformée de Laplace de sa sortie et celle de son entrée, en considérant des conditions initiales nulles.

a - Fonction de transfert (suite).

$$\tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K.u(t)$$

 \downarrow TL

$$\tau [pY(p) - y(0^-)] + Y(p) = K.U(p)$$

$$Y(p) = \frac{K}{1 + \tau.p} U(p) + \frac{\tau}{1 + \tau.p} y(0^-)$$

Soit :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

En annulant les C.I.

a - Fonction de transfert (suite).

Rappel : la réponse impulsionnelle (i.e. réponse à un Dirac), $h(t)$, d'un S.L.T.I. vérifie :

$$y(t) = (u * h)(t)$$

soit

$$Y(p) = H(p).U(p)$$

➡ Résolution des eq. diff. en représentation de Laplace.
(connaissant $H(p)$)

II.1. Système du 1^{er} ordre

b - Réponse impulsionnelle.

$$u(t) = A_0 \cdot \delta(t)$$



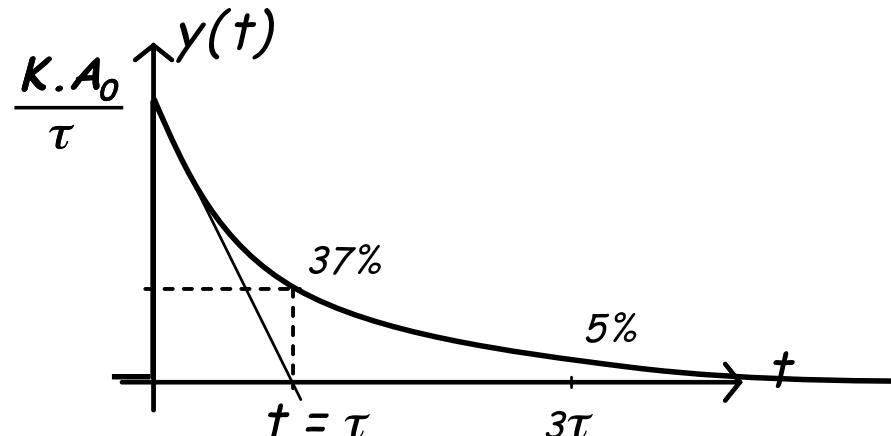
$$U(p) = A_0$$



$$y(t) = \frac{K \cdot A_0}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$



$$Y(p) = \frac{K \cdot A_0}{1 + \tau \cdot p}$$



II.1. Système du 1^{er} ordre

c - Réponse indicielle (à un échelon).

$$u(t) = A_0 \cdot \Gamma(t)$$



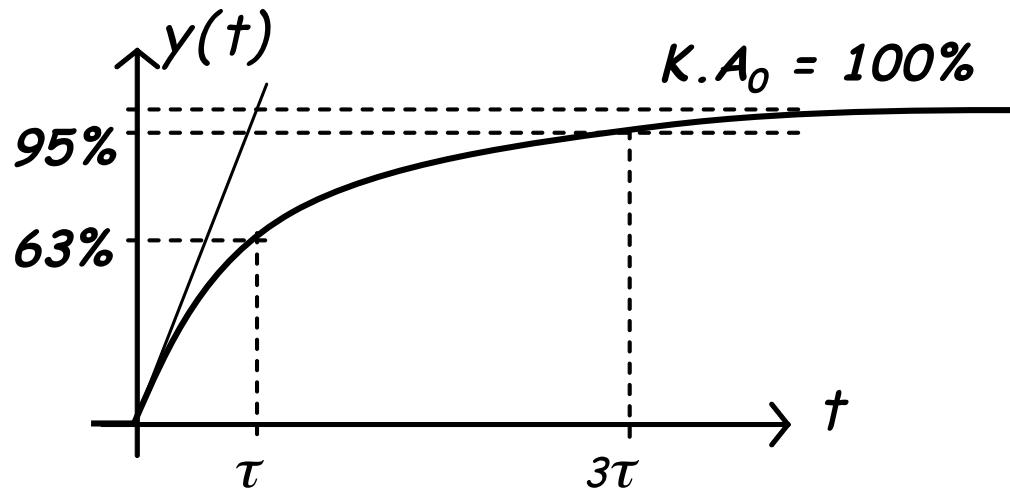
$$U(p) = A_0 / p$$



$$y(t) = K \cdot A_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$



$$Y(p) = \frac{K \cdot A_0}{p(1 + \tau \cdot p)}$$



II.1. Système du 1^{er} ordre

d - Réponse à une rampe.

$$u(t) = a \cdot t$$



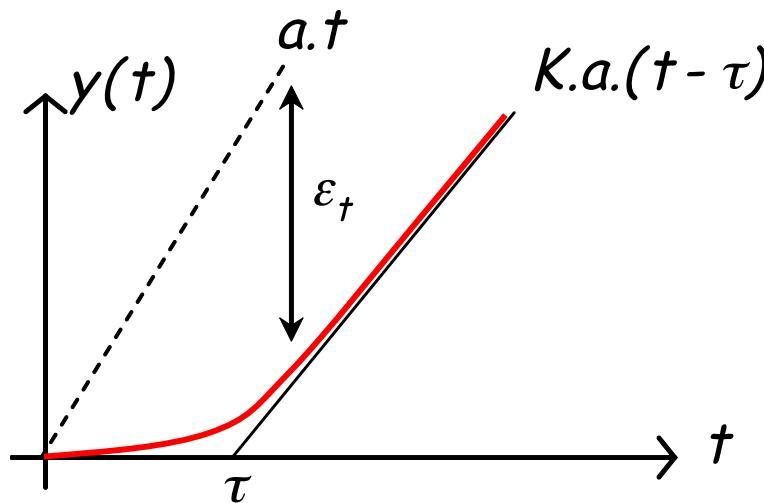
$$U(p) = a / p^2$$



$$y(t) = K \cdot a \cdot (t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau})$$



$$y(p) = \frac{K \cdot a}{p^2(1 + \tau \cdot p)}$$



Pour $K = 1$:

$$\varepsilon_t = a \cdot \tau$$

erreur de trainage

II.1. Système du 1^{er} ordre

e - Réponse harmonique.

Réponse à une sinusoïde permanente : $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$

le régime transitoire étant éteint

$$\rightarrow y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

d'après $\underline{Y}(j\omega) = \underline{H}(j\omega) \underline{U}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \cdot \underline{U}(j\omega)$

$$\left| \begin{array}{l} Y_m = |\underline{Y}(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cdot U_m \\ \varphi = \text{Arg}(\underline{Y}(j\omega)) = -\text{Arctan}(\omega\tau) \end{array} \right.$$

Intérêt ?

L'étude des propriétés fréquentielles des systèmes linéaires permet d'en déduire les propriétés dynamiques temporelles (c'est-à-dire leur évolution dans le temps en fonction des actions subies).

Diagramme de Bode :

Le diagramme de Bode d'une fonction de transfert comporte deux courbes :

- son module exprimé en décibels (dB),

$$H_{dB} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|$$

- et sa phase,

$$\text{Arg}(H(j\omega))$$

tracées en fonction de la pulsation ω (axe gradué suivant une échelle log.).

Décomposition $H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$:

⇒

$$\left| \begin{array}{l} H_{dB} = H_1 \text{ } dB + H_2 \text{ } dB \\ \text{Arg } H = \text{Arg } H_1 + \text{Arg } H_2 \end{array} \right.$$

II.1. Système du 1^{er} ordre

Diagramme de Bode (suite) :

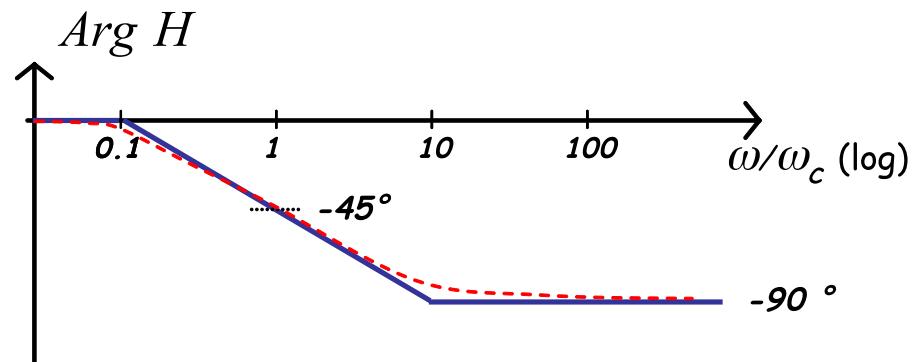
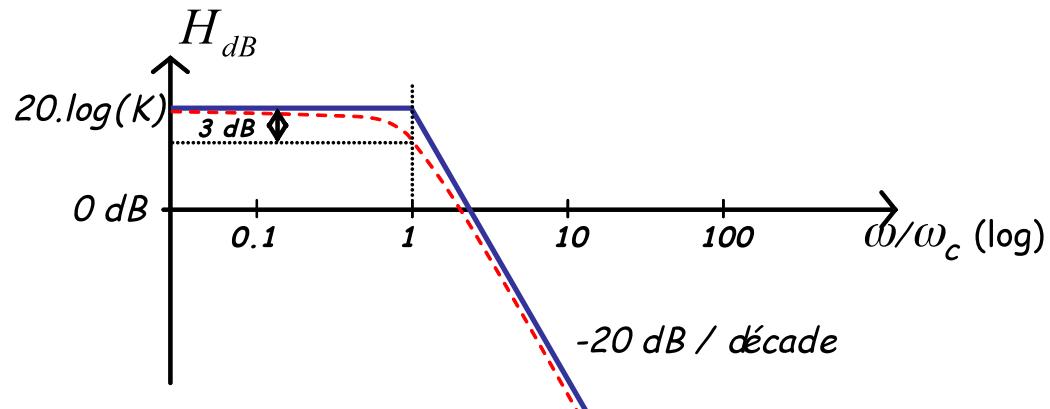
$$H_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right)$$

-20 dB par décade



-6 dB par octave

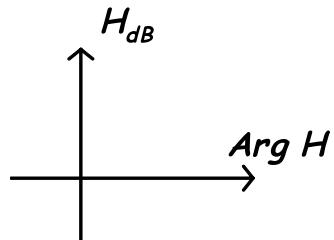
$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan(\omega\tau)$$



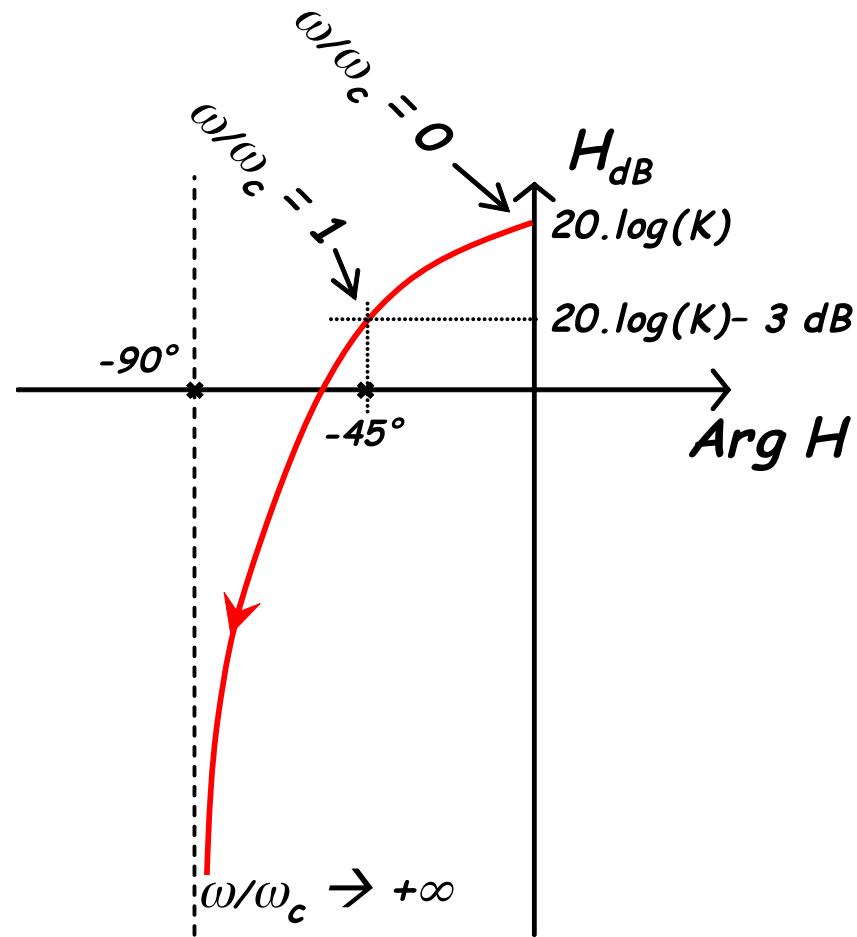
II.1. Système du 1^{er} ordre

Représentation de Black :

Représentation de $H(j\omega)$ dans le lieu de Black :



tracé pour ω : $0 \rightarrow +\infty$

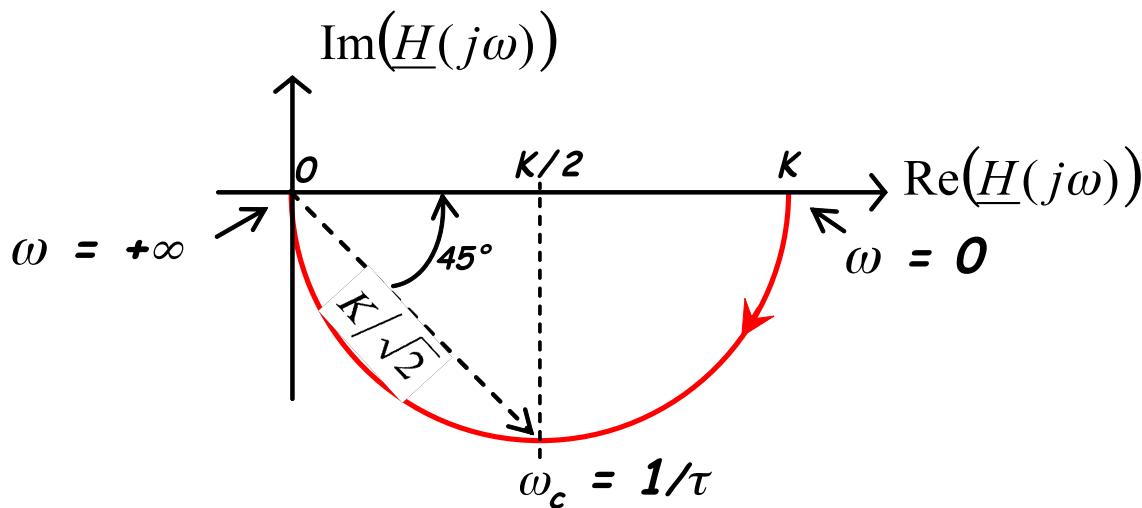
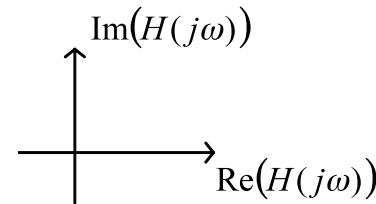


II.1. Système du 1^{er} ordre

Représentation de Nyquist :

Représentation de $H(j\omega)$ dans le lieu de Nyquist

tracé pour $\omega : 0 \rightarrow +\infty$



pour $\omega = \omega_c = 1/\tau$
pulsation de coupure

$$|H(j\omega)| = K / \sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\pi / 4$$

II.1. Système du 1^{er} ordre

f - Relation temps - fréquence.

D'après $\omega_c = 1/\tau \rightarrow f_c = 1/2\pi\tau$

En notant t_m le temps mis par la réponse à un échelon d'un système du 1^{er} ordre pour atteindre 90% de sa valeur finale on démontre :

$$t_m = 2,2\tau$$

On obtient : $t_m \cdot f_c = 0,35$

→ Un système à large bande passante est un système rapide.

II.2. Système du 2nd ordre

Définition 10 : Un système est dit du 2nd ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du 2^{ème} ordre.
(on prendra toujours un 2nd membre indépendant de $u'(t)$)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot y(t) = K\omega_0^2 \cdot u(t)$$

K	gain statique
m	coefficient d'amortissement (ξ)
ω_0	pulsation propre non amortie

a - Fonction de transfert.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

b - Réponse indicielle.

$$u(t) = \Gamma(t)$$



$$U(p) = \frac{1}{p}$$



$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

- Régime apériodique : $m > 1$.

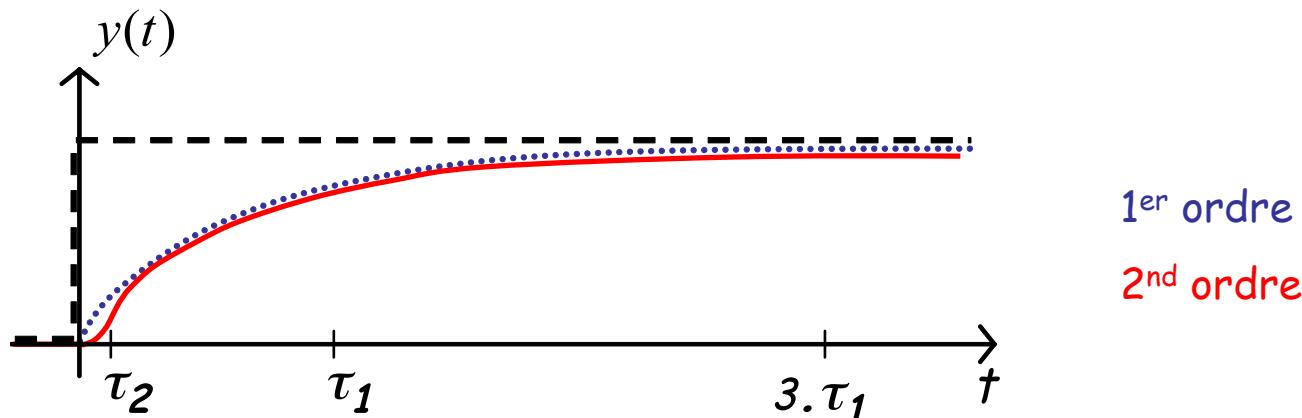
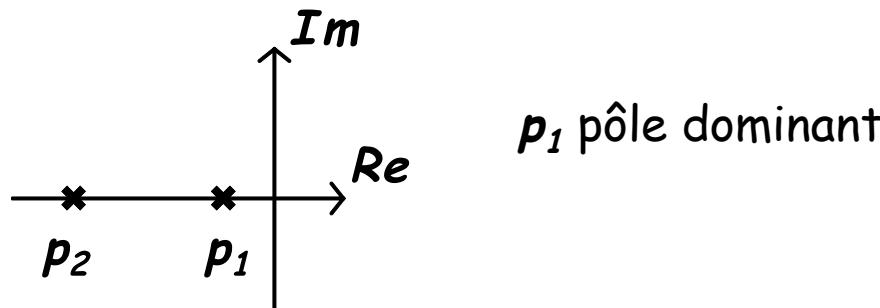
⋮

$$Y(p) = K \cdot \left[\frac{1}{p} + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{1}{p - p_2} \right]$$

b - Réponse indicielle (suite).

$$\Rightarrow y(t) = K \cdot \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \cdot e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t} \right]$$

- pour : $m \gg 1$



II.2. Système du 2nd ordre

- $tr_{5\%}$ pour $m \gg 1$

$$\frac{tr_{5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{3m}{\pi}$$

- Régime critique : $m = 1$.

⋮

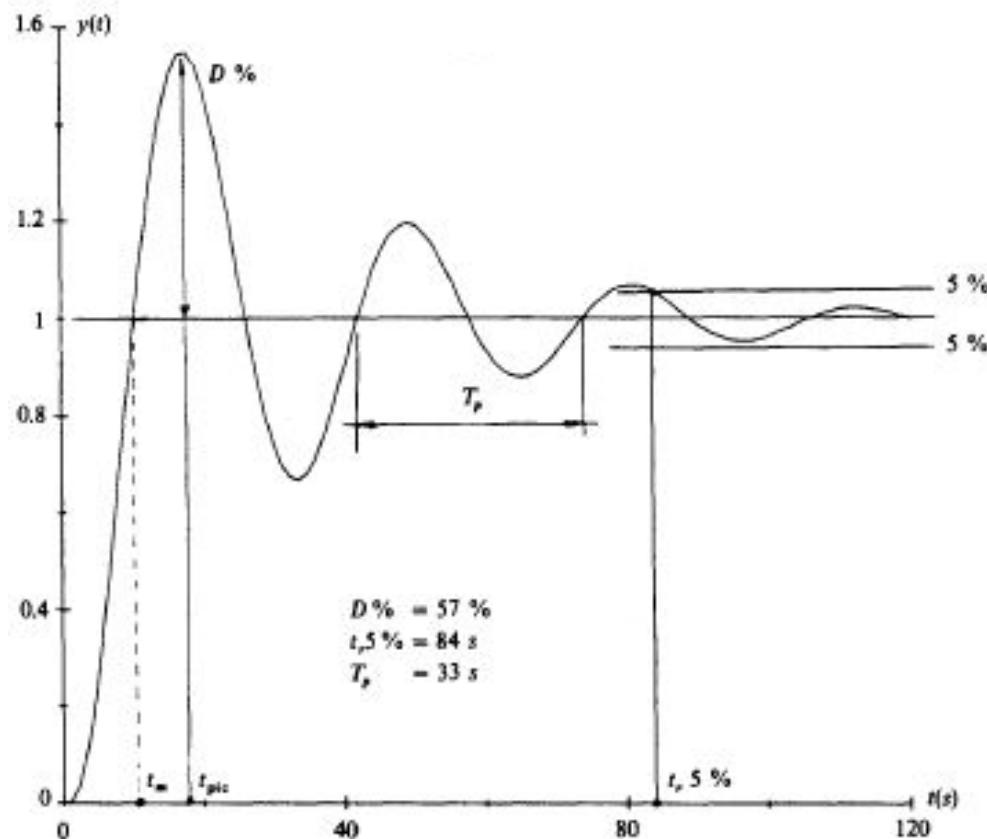
$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p.(p + \omega_0)^2} = \frac{K}{p.(1 + p/\omega_0)^2}$$

$$y(t) = K \cdot \left[1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right]$$

II.2. Système du 2nd ordre

- Régime pseudopériodique : $m < 1$.

$0 < m < 1 \quad y(t) = K \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \varphi) \right] \quad tq \varphi = \text{Arccos}(m)$

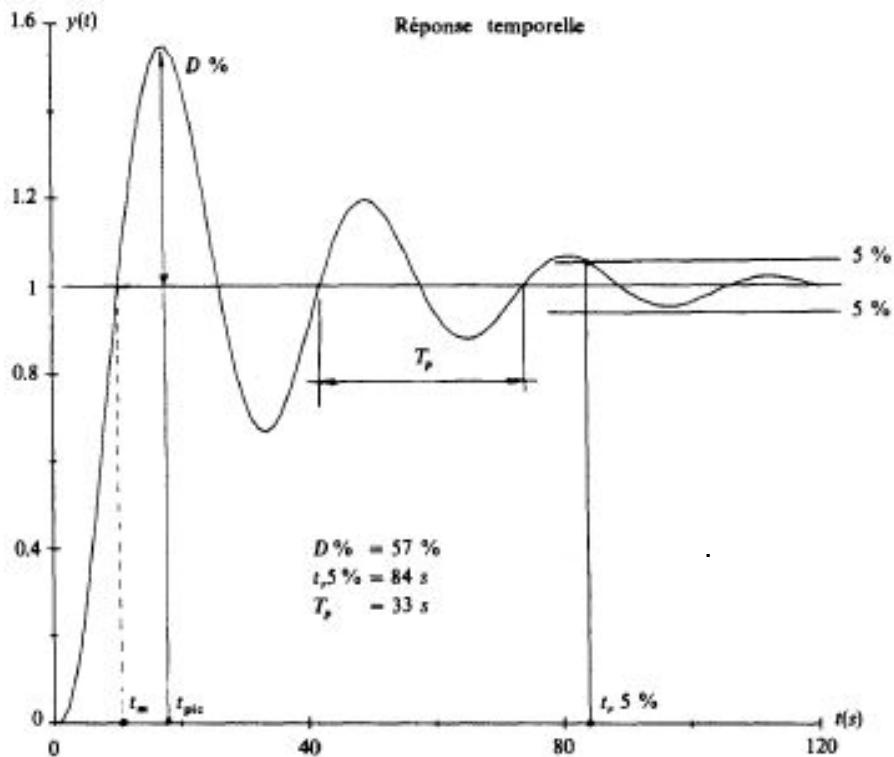


$$K = 1$$

$$\omega_0 = 0,22 \text{ rad/s}$$

$$m = 0,18$$

II.2. Système du 2nd ordre



Pseudo période :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

Dépassemens :

$$D_k = K e^{\frac{-mk\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

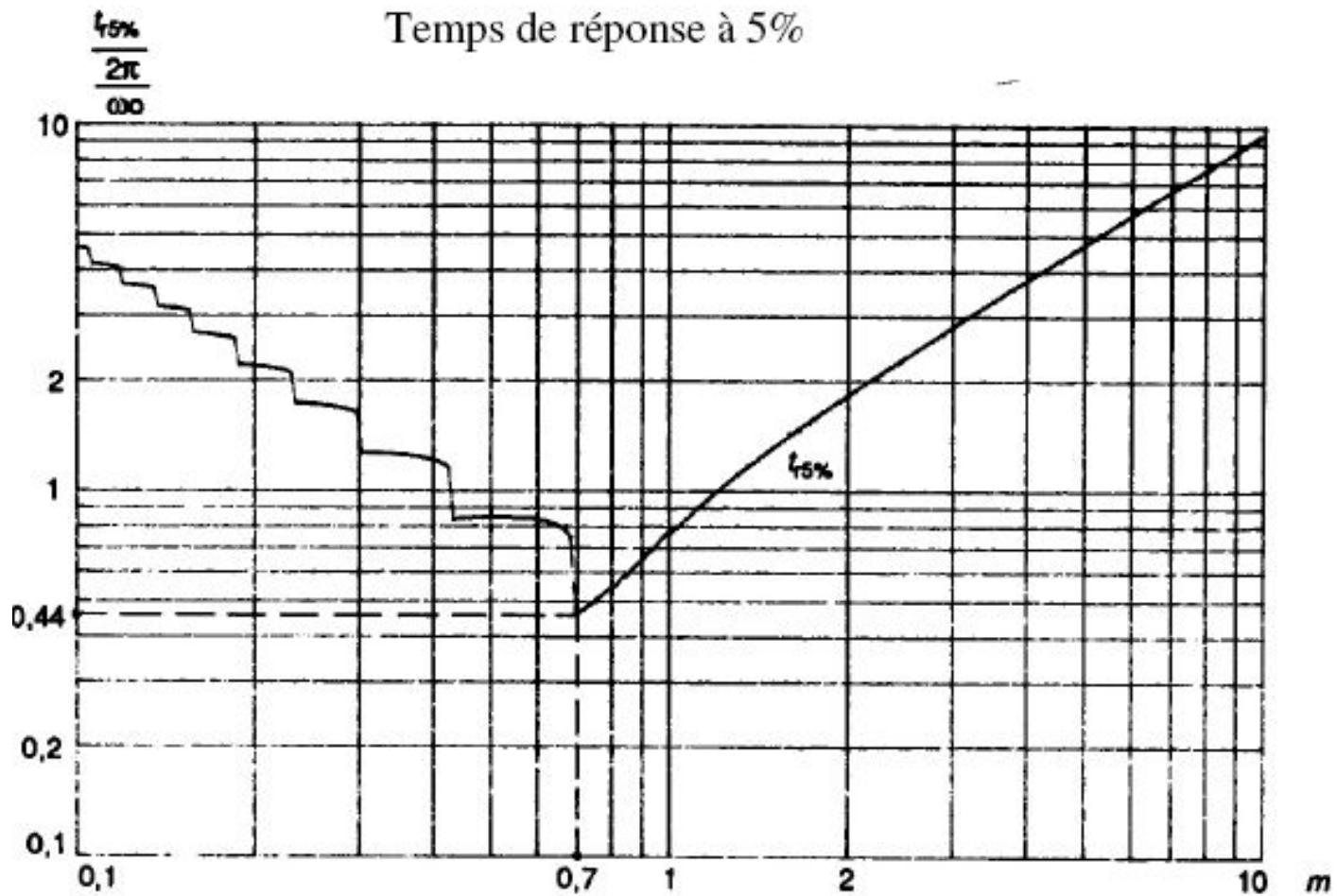
La valeur minimale de D_k est obtenue pour :

$$m = \sqrt{2}/2 \approx 0,7$$

II.2. Système du 2nd ordre

- temps de réponse à 5% : $tr_{5\%}$

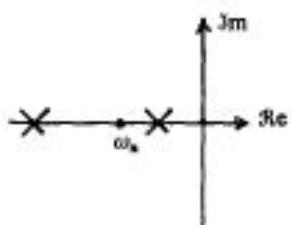
minimal pour
 $m = 0,7$



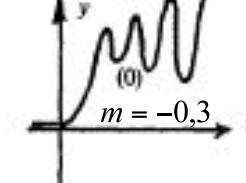
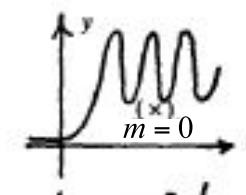
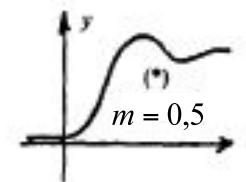
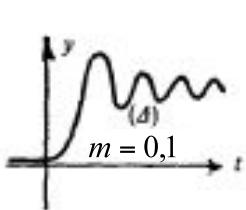
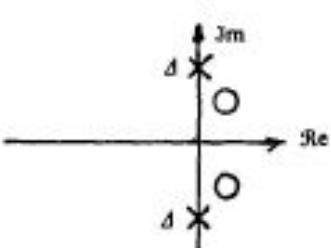
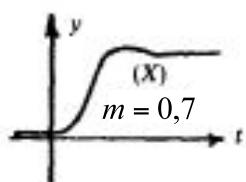
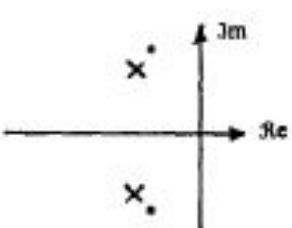
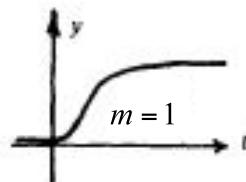
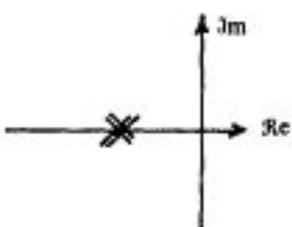
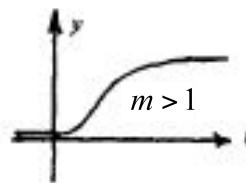
II.2. Système du 2nd ordre

Bilan :

Position des pôles



Réponse indicielles



c - Réponse harmonique.

Réponse à une sinusoïde permanente : $u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$

le régime transitoire étant éteint

$$\Rightarrow y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{Y}(j\omega) = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{U}(j\omega)$$

Avec $\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + 2j m \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

II.2. Système du 2nd ordre

Etude asymptotique :

Pour $\omega \rightarrow 0$

$$\underline{H}(j\omega) = K$$

d'où

$$H_{dB} = 20 \log|K|$$

$$\operatorname{Arg} H = 0$$

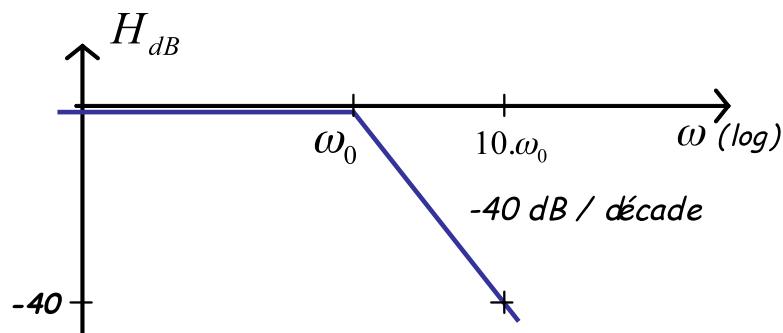
Pour $\omega \rightarrow +\infty$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-K}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

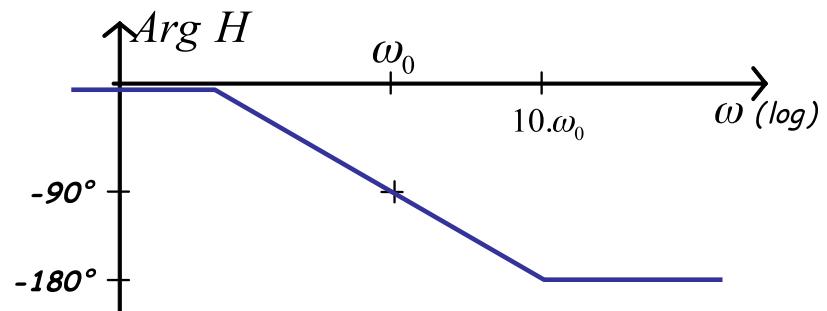
d'où

$$H_{dB} = 20 \log|K| - 40 \log(\omega/\omega_0)$$

$$\operatorname{Arg} H = -\pi$$



$$K = 1$$

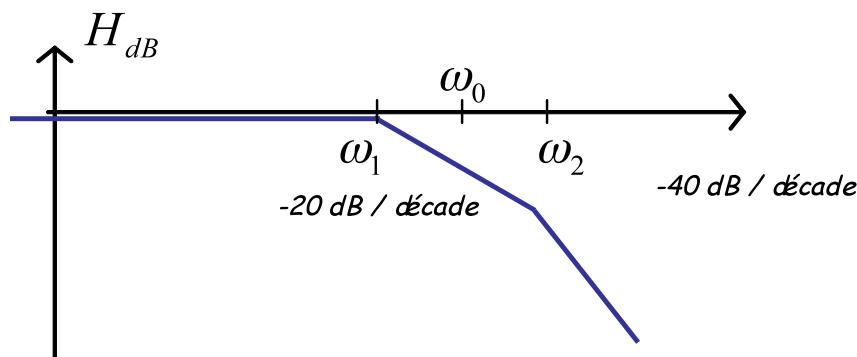


II.2. Système du 2nd ordre

- Pour $m > 1$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)}$$

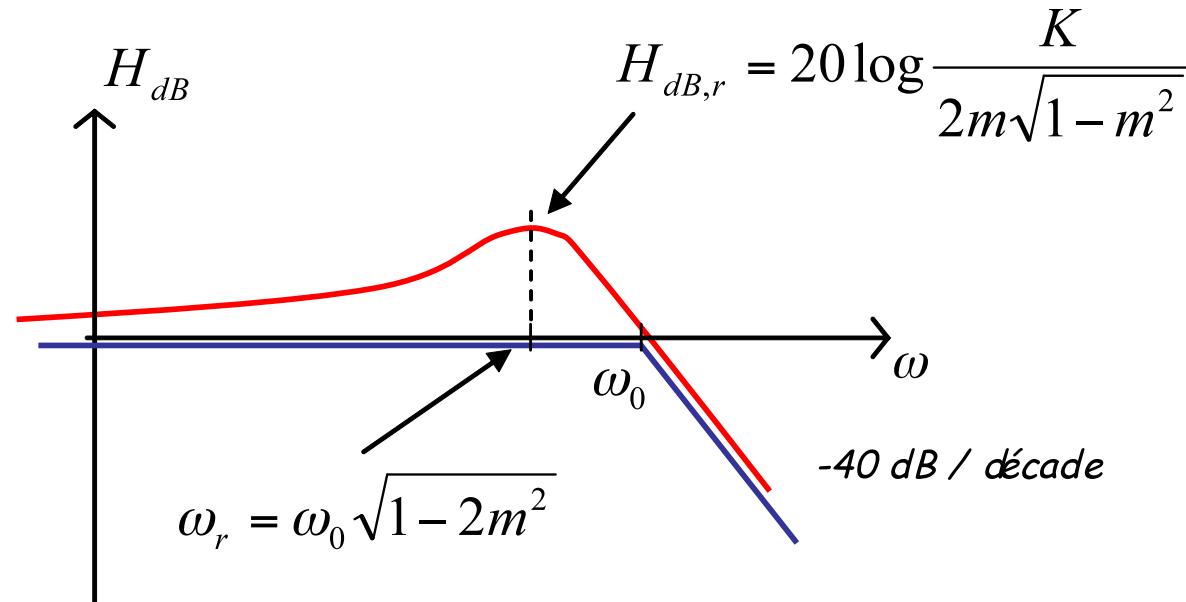
$$\left| \begin{array}{l} \omega_{1,2} = m\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \\ \omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2 \end{array} \right.$$



II.2. Système du 2nd ordre

- Pour $m < 1$:

- Pour $0 < m < \sqrt{2}/2$: apparition d'un phénomène de résonnance.



- Pour $\sqrt{2}/2 < m < 1$: pas de résonnance.

c - Réponse harmonique (suite).

Facteur qualité du système.

Pour $\omega = \omega_0$, on a :

$$|H(j\omega_0)| = \frac{K}{2m}$$

$$\operatorname{Arg} H = -\pi/2$$

On note

$$Q = \frac{1}{2m}$$

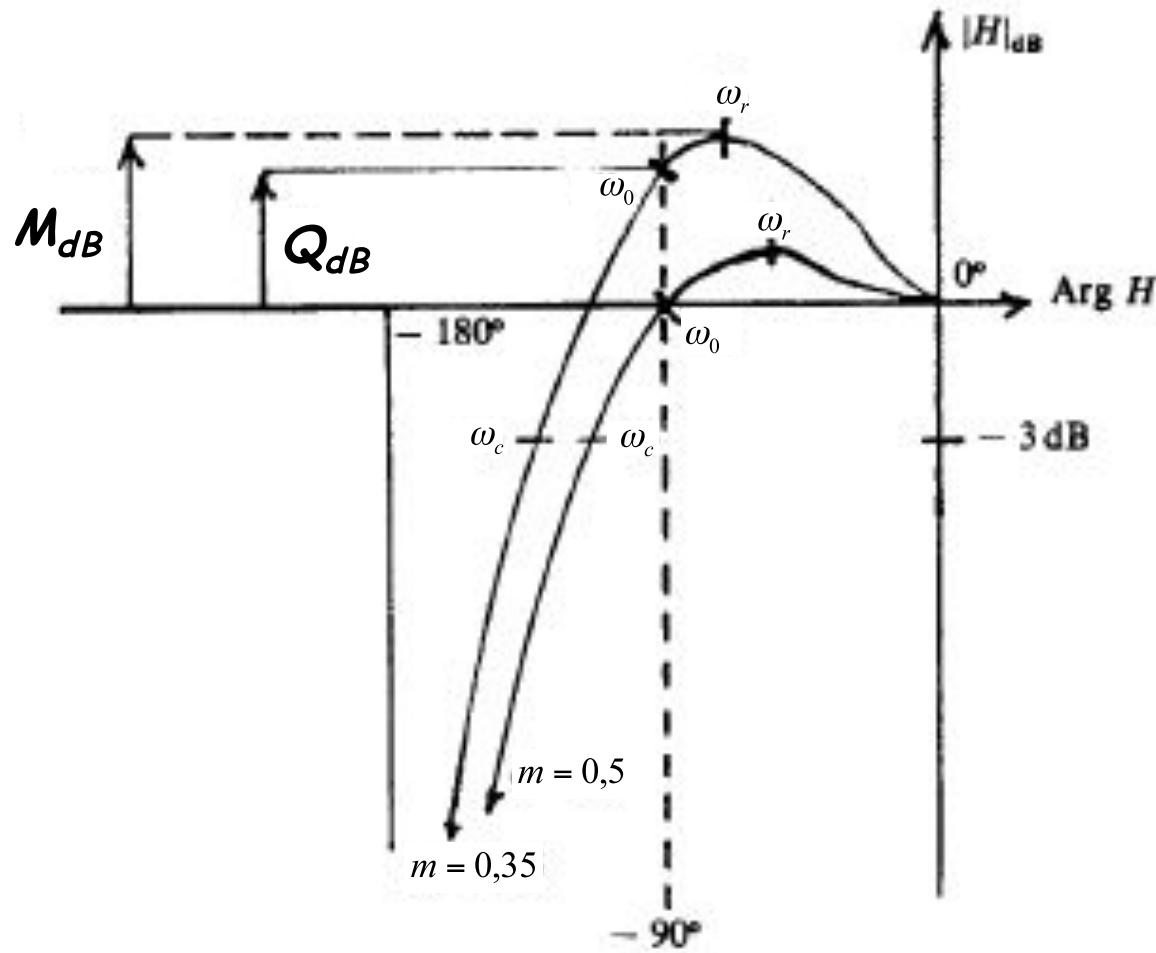
Facteur de résonnance du système (si pertinent).

Pour $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$ on a : $|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2m\sqrt{1 - m^2}}$

On note

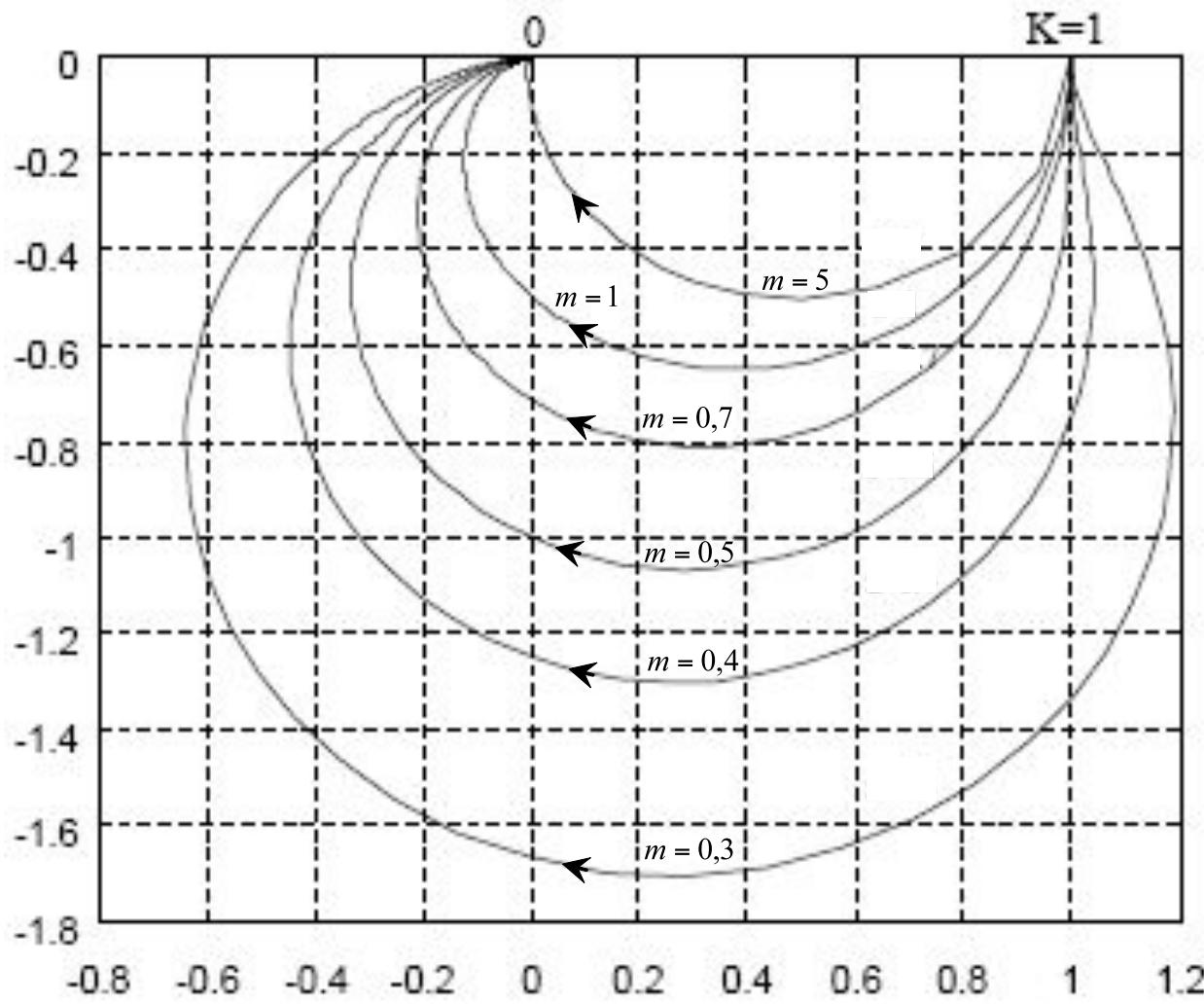
$$M = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

Représentation de Black.



II.2. Système du 2nd ordre

Représentation de Nyquist.



II.3. Systèmes d'ordre supérieur à deux

Equation différentielle représentative d'un système linéaire d'ordre n supérieur à 2 :

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m}$$

a_i, b_i coefficients constants réels,
 $n \geq m$, pour les systèmes physiques (principe de causalité).

Soit par TL (C.I. nulles) :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Les racines de $N(p)$ sont les **zéros** de $H(p)$.

Les racines de $D(p)$ sont les **pôles** de $H(p)$.

II.3. Systèmes d'ordre supérieur à deux

Les pôles de $H(p)$ sont soit réels, soit complexes conjugués (les a_i étant réels).

$$\Rightarrow D(p) = a_n \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \dots (p - p_n)$$

D'où :

$$H(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i}$$

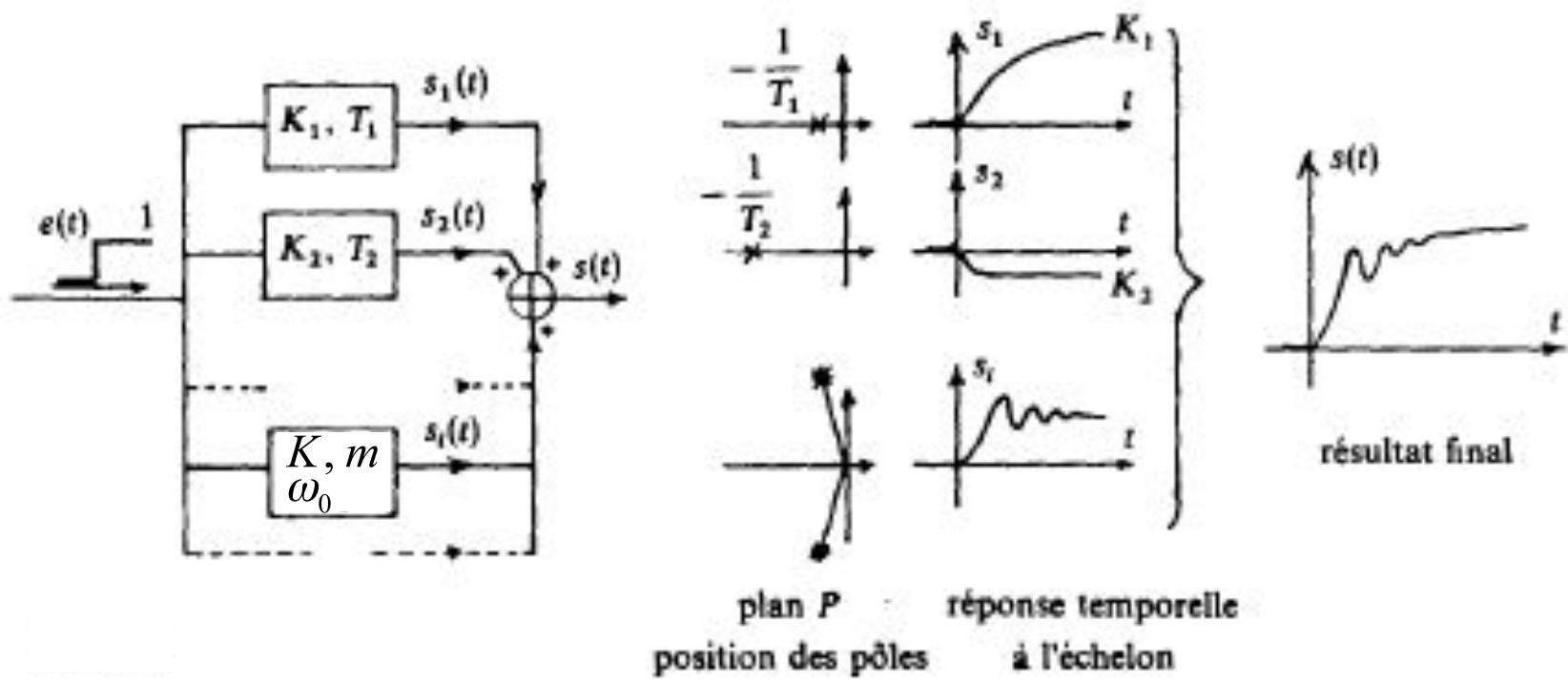
Décomposition additive en sous systèmes du 1^{er} et du 2^{ème} ordre.

Par application du théorème de superposition on obtient la réponse à un échelon d'un système d'ordre $n > 2$:

... / ...

II.3. Systèmes d'ordre supérieur à deux

Réponse à un échelon :



En termes de stabilité, il suffit d'un seul pôle à partie réelle positive pour entraîner l'instabilité de l'ensemble.

II.3. Systèmes d'ordre supérieur à deux

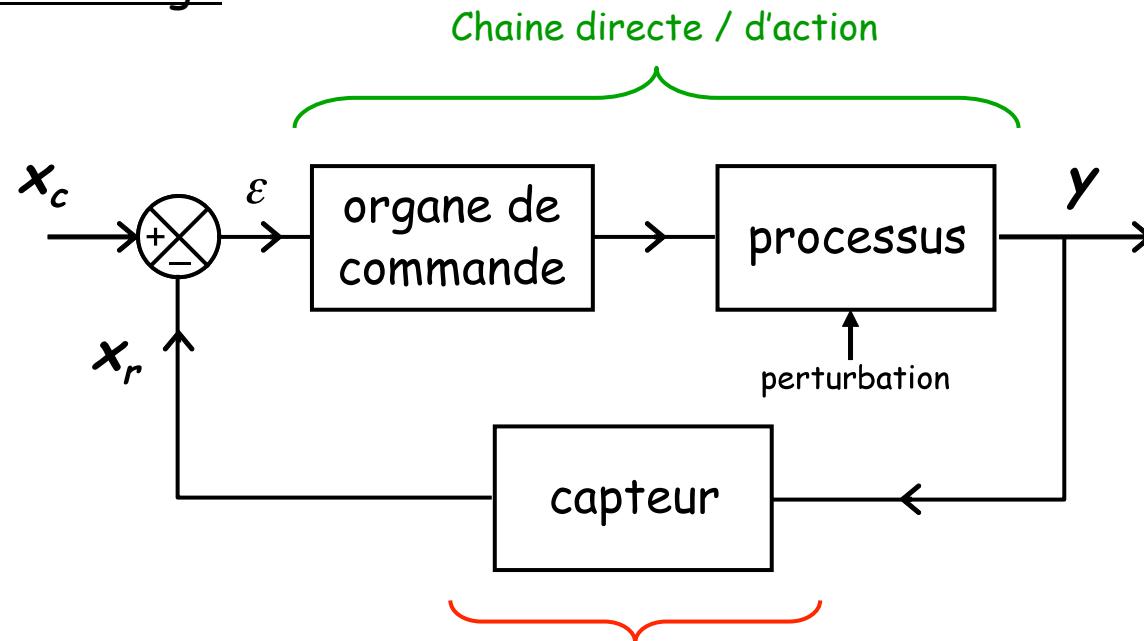
Pôles dominants :

pôles situés près de l'axe imaginaire

(ctes de temps élevées et amortissement faible)

III.1. Schéma général d'un asservissement.

a - Notion de bouclage.



x_c : consigne

Chaine de retour

y : sortie

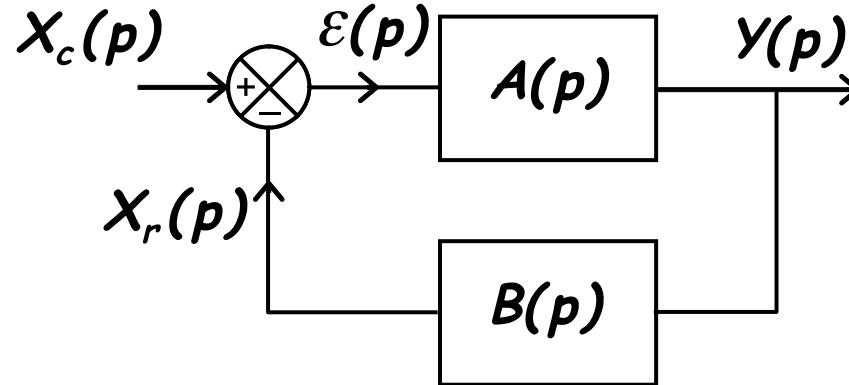
x_r : grandeur de retour (image de y)

ε : erreur

III.1. Schéma général d'un asservissement

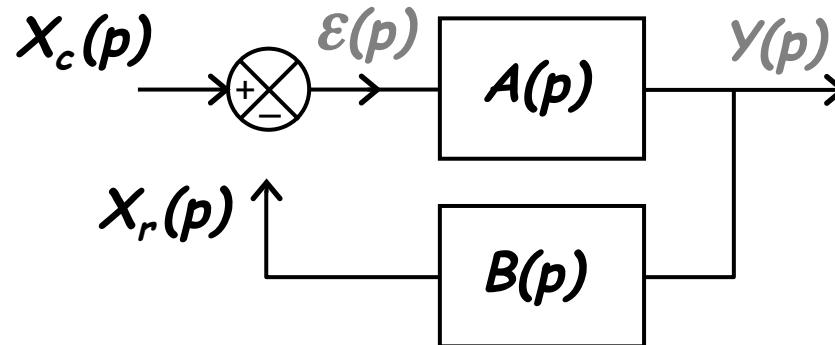
b - Fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée.

Représentation d'un asservissement sous forme de schéma bloc.



III.1. Schéma général d'un asservissement

Fonctions de transfert en boucle ouverte (FTBO).

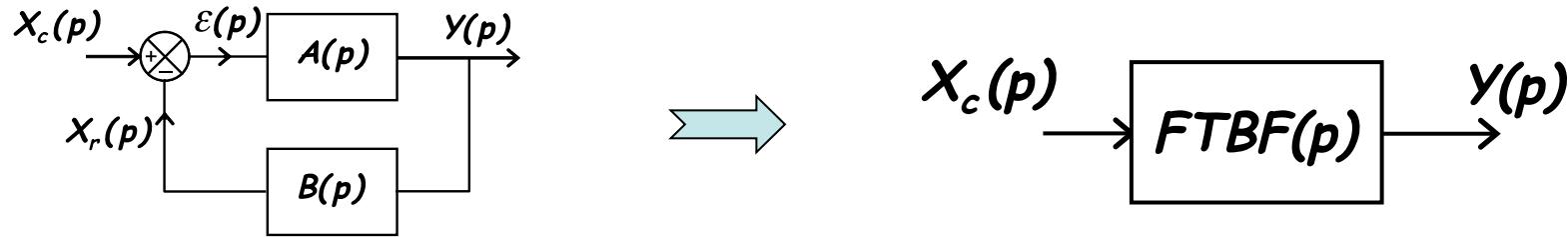


$$FTBO = T(p) = \frac{X_r(p)}{X_c(p)}$$

$$FTBO = T(p) = A(p).B(p)$$

III.1. Schéma général d'un asservissement

Fonctions de transfert en boucle fermé (FTBF).



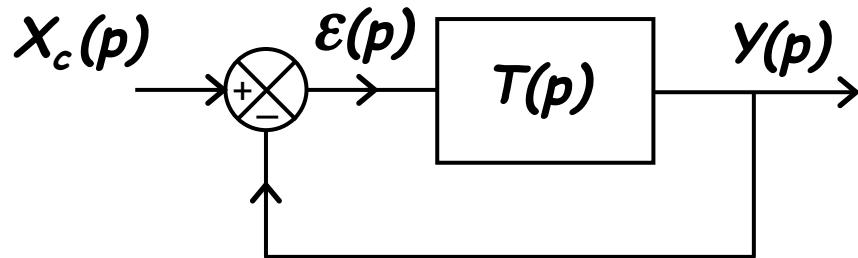
$$FTBF = H(p) = \frac{Y(p)}{X_c(p)}$$

⋮

$$FTBF = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)} = \frac{A(p)}{1 + FTBO}$$

III.1. Schéma général d'un asservissement

FTBF d'un asservissement à retour unitaire.



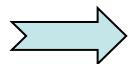
$$FTBO = T(p) = A(p)$$

$$FTBF = H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Cadre : asservissement à retour unitaire.

$$H(p) = \frac{T(p)}{1+T(p)}$$



$$G_{BF}(\omega) = \frac{G_{BO}(\omega)}{\sqrt{G_{BO}^2(\omega) + 1 + 2.G_{BO}(\omega).\cos\phi_{BO}(\omega)}}$$

$$\phi_{BF}(\omega) = \arctan \frac{\sin\phi_{BO}(\omega)}{G_{BO}(\omega) + \cos\phi_{BO}(\omega)}$$

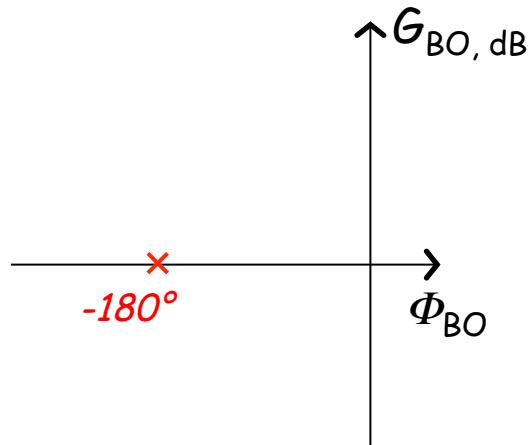
Connaissant le FTBO (G_{BO} , ϕ_{BO}) pour un ω donné on en déduit la FTBF (G_{BF} , ϕ_{BF}).

III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

a - Abaque de Black Nichols.

L'abaque de Black-Nichols permet de repérer par un système de doubles coordonnées les valeurs de la FTBO et de la FTBF correspondante (pour un retour unitaire uniquement) dans le plan de Black.

Dans



On trace les courbes :

isomodules $G_{BF \text{ dB}} = \text{cte}$ et

isophases $\phi_{BF} = \text{cte}$ de la FTBF.

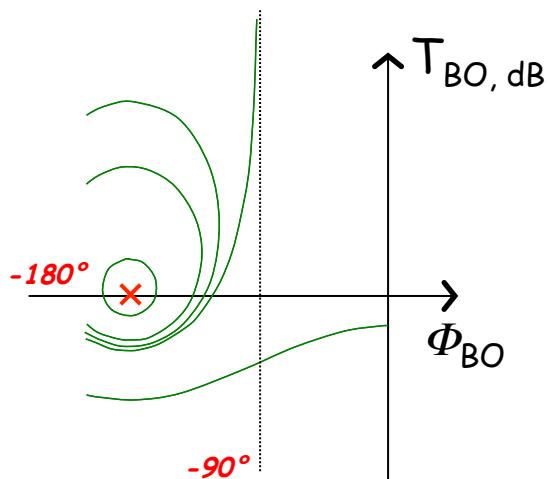
III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Ayant établi

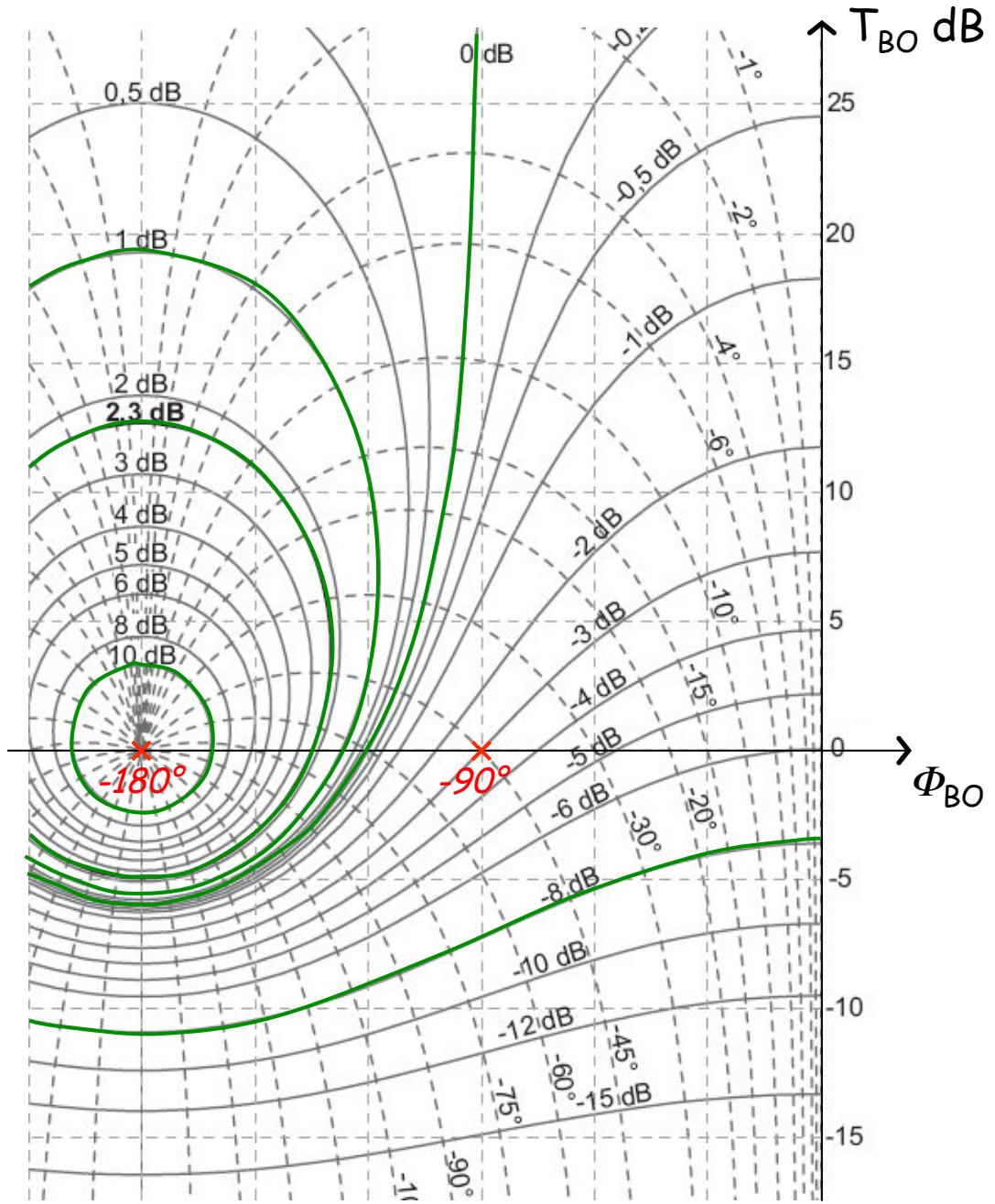
$$G_{BO} = \frac{G_{BF}}{\sqrt{G_{BF}^2 - 2.G_{BF}.\cos\phi_{BF} + 1}}$$

$$\phi_{BO} = \arctan \frac{\sin\phi_{BF}}{\cos\phi_{BF} - G_{BF}}$$

Isomodules : tracé de $G_{BF \text{ dB}} = \text{cte}$ en faisant varier ϕ_{BF} .

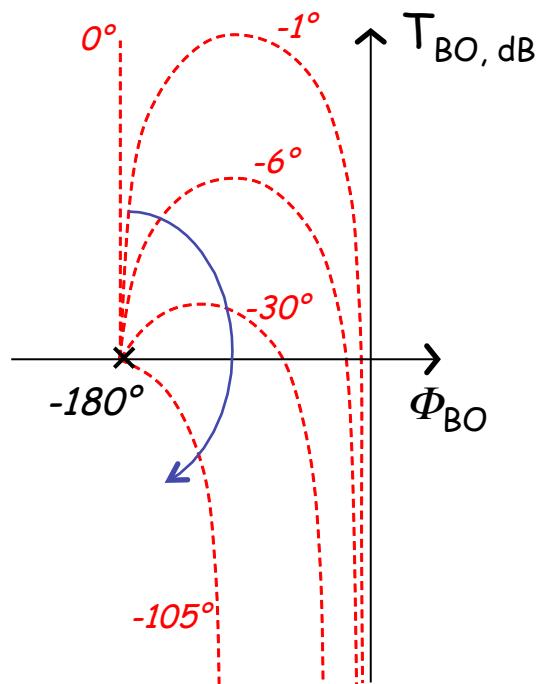


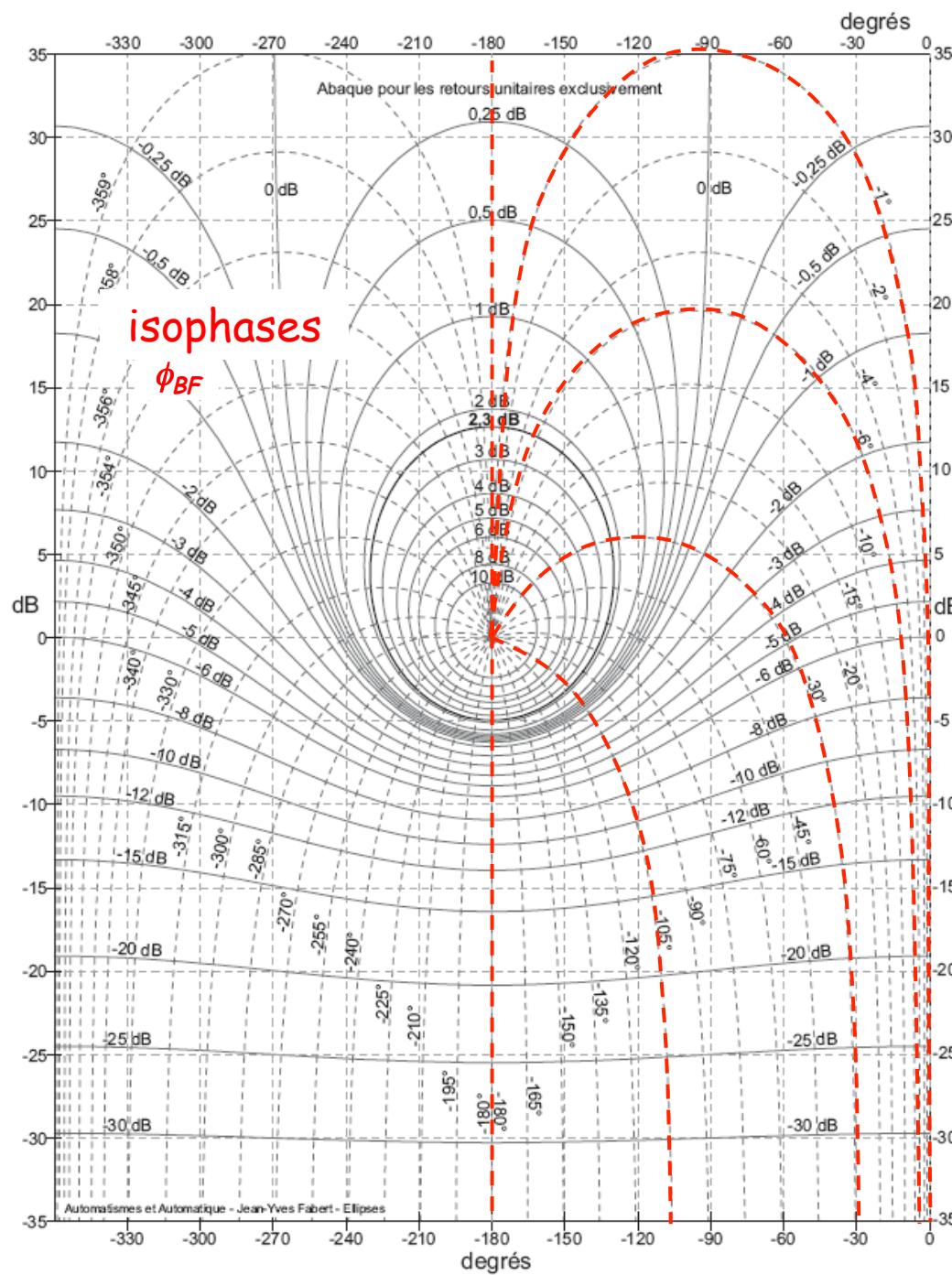
isomodules
 $H_{BF} \text{ dB}$



III.2. Interprétation géométrique du passage BO \rightarrow BF

Isophases : tracé de $\phi_{BF} = \text{cte}$ en faisant varier $G_{BF \text{ dB}}$.

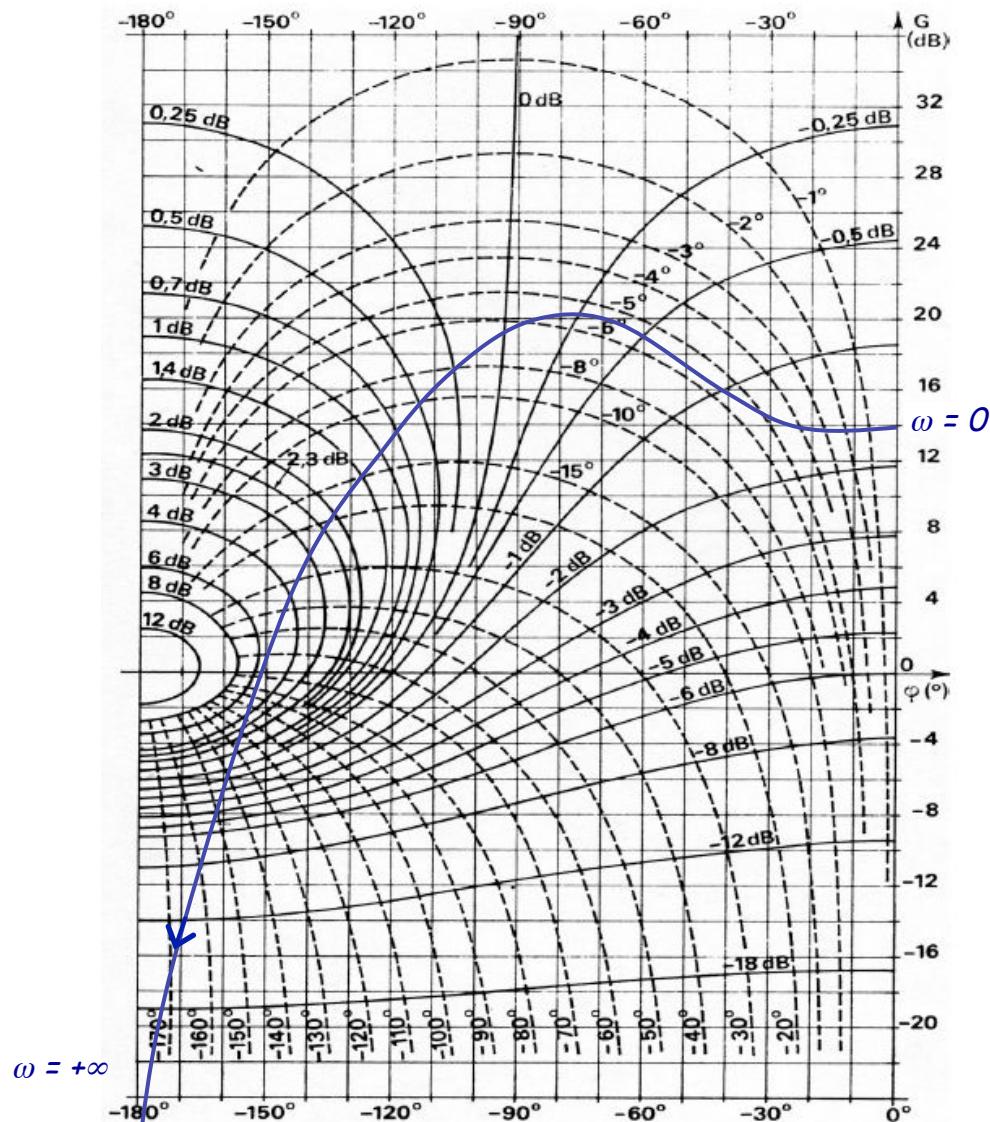




III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Lecture de l'abaque de Black Nichols.

FTBO

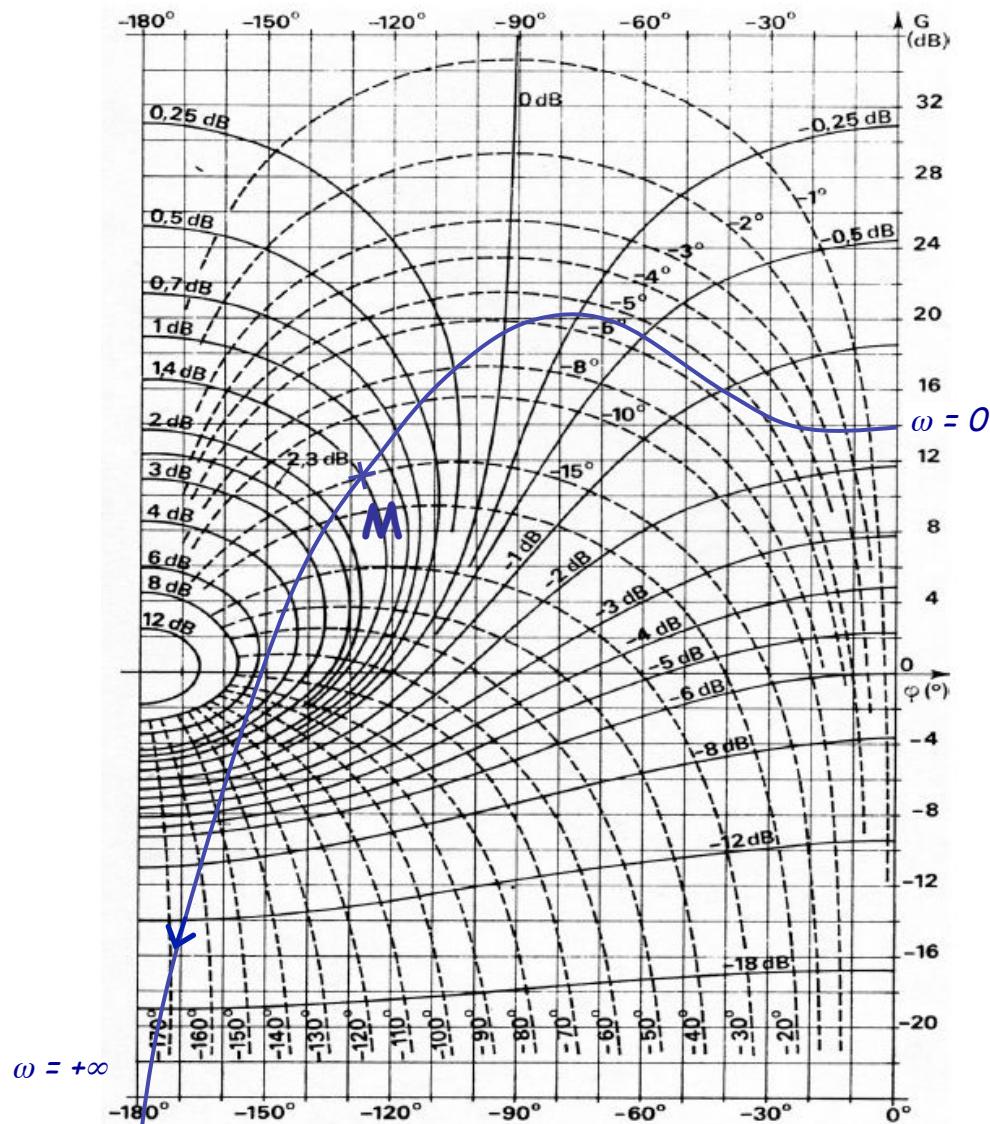


III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Lecture de l'abaque de Black Nichols.

FTBO

pour $\omega = \omega_M$



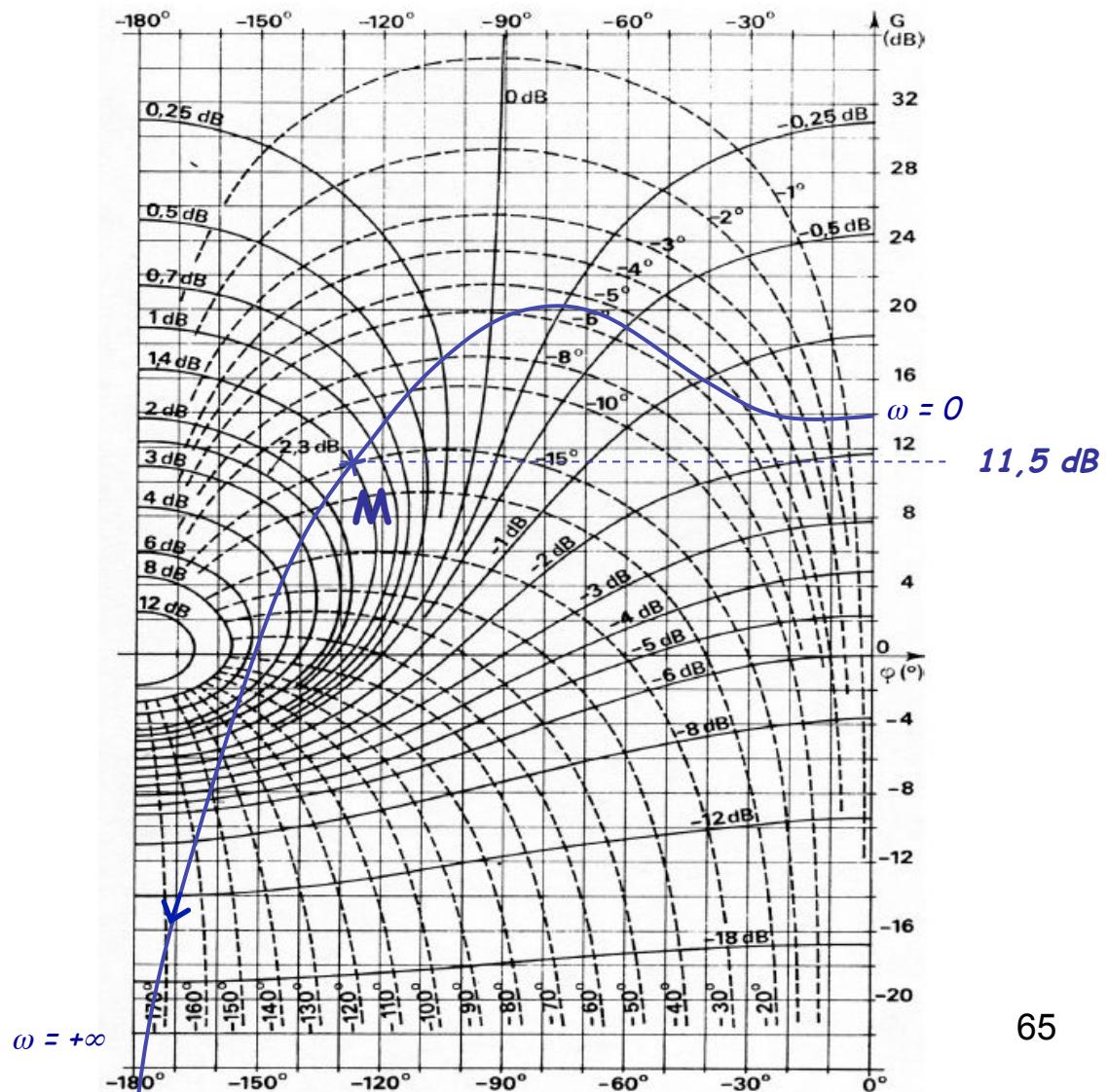
III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Lecture de l'abaque de Black Nichols.

FTBO

pour $\omega = \omega_M$

$G_{BO, dB} = 11,5 dB$



III.2. Interprétation géométrique du passage BO \rightarrow BF

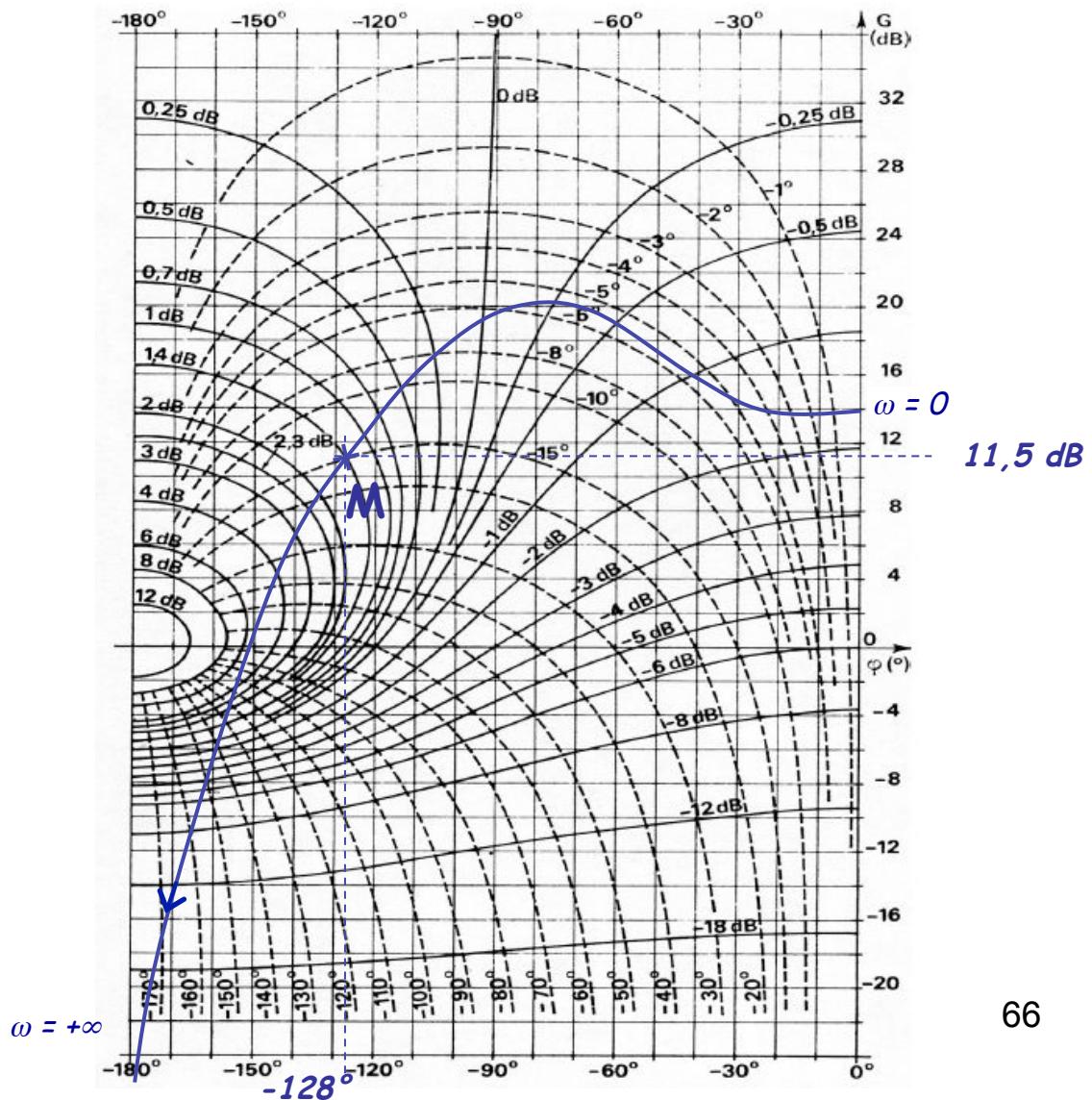
Lecture de l'abaque de Black Nichols.

FTBO

pour $\omega = \omega_M$

$$G_{BO, dB} = 11,5 \text{ dB}$$

$$\phi_{BO} = -128^\circ$$



III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Lecture de l'abaque de Black Nichols.

FTBO

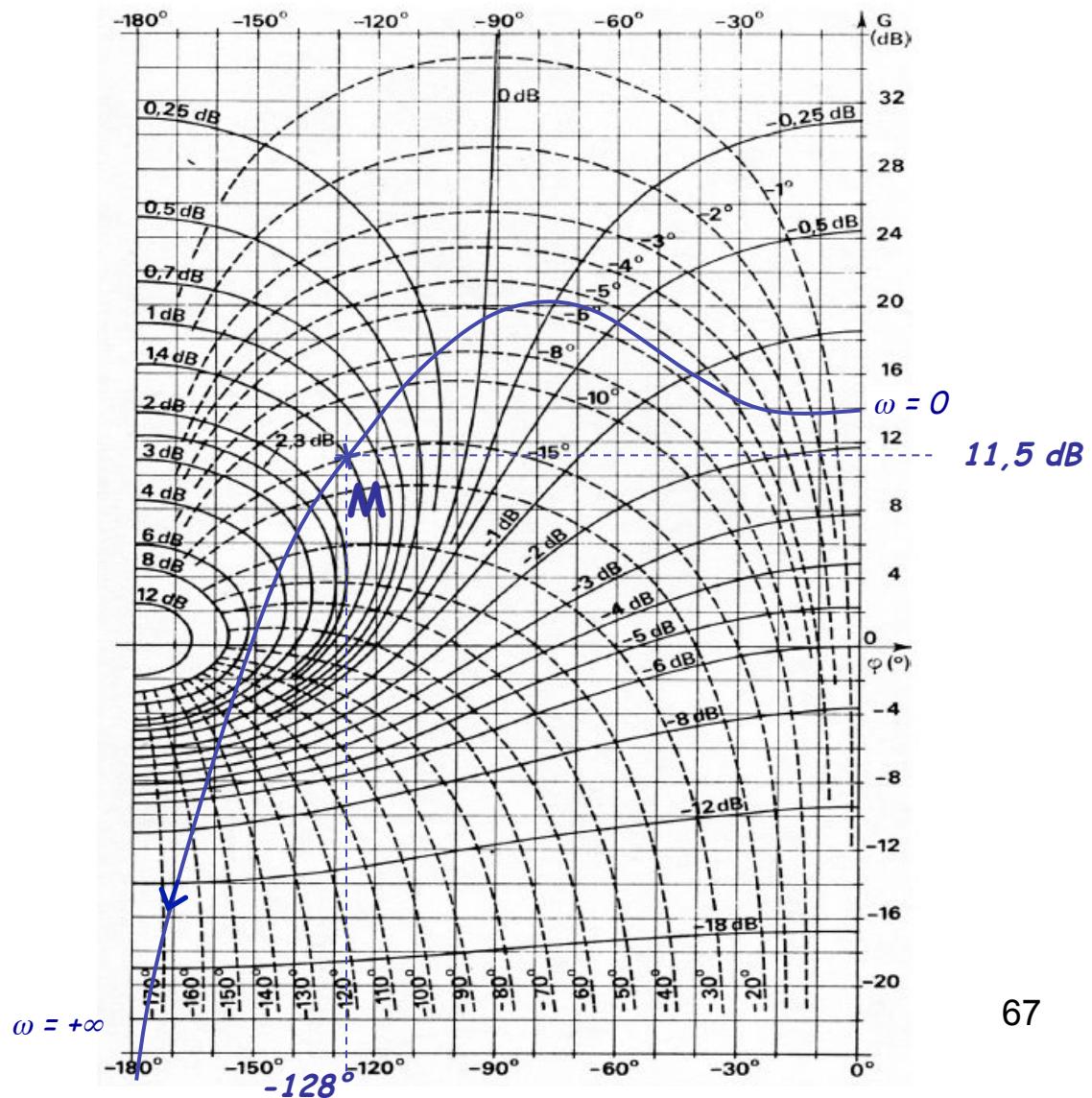
pour $\omega = \omega_M$

$$G_{BO, dB} = 11,5 \text{ dB}$$

$$\phi_{BO} = -128^\circ$$

FTBF

pour $\omega = \omega_M$



III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Lecture de l'abaque de Black Nichols.

FTBO

pour $\omega = \omega_M$

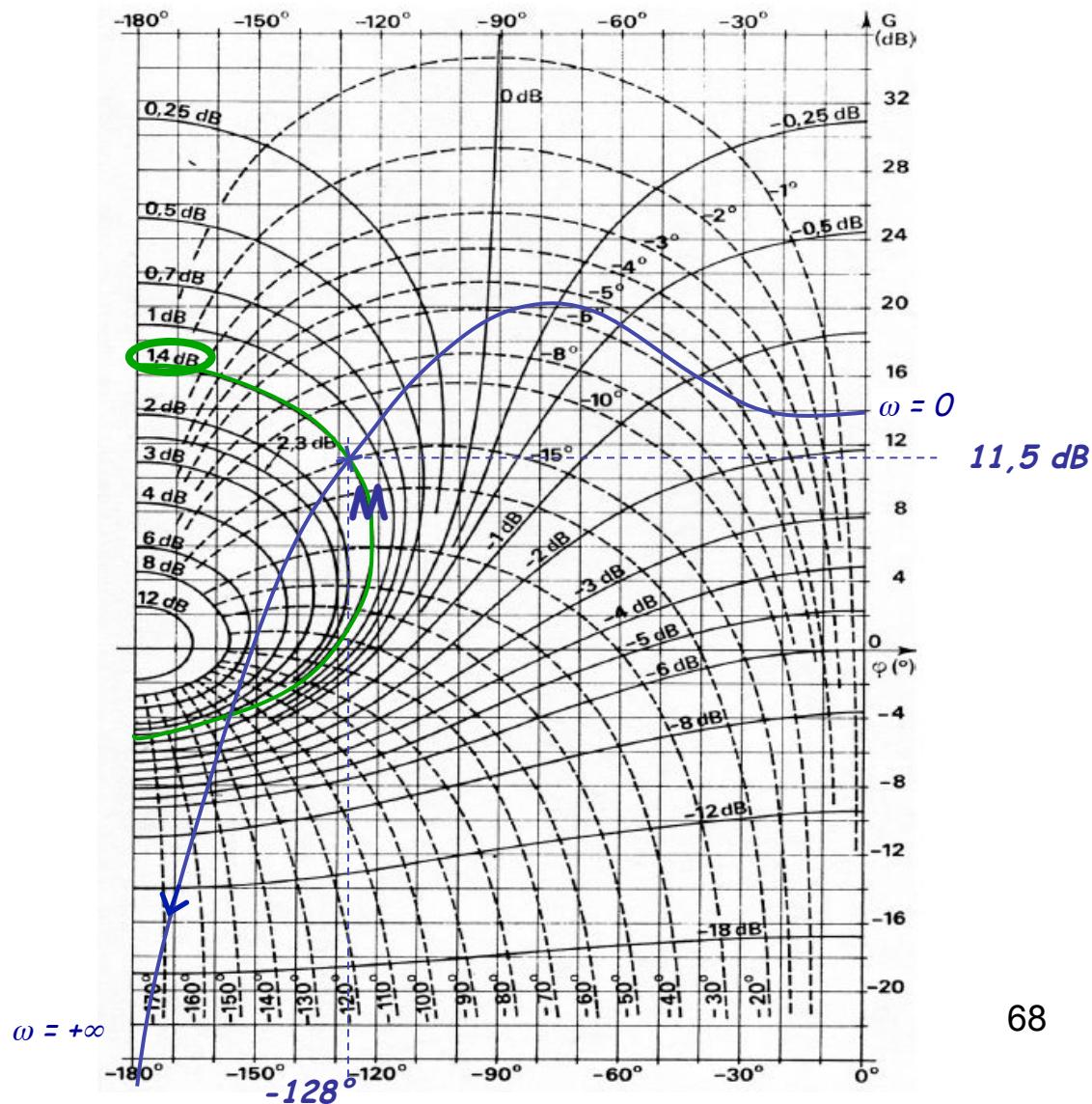
$$G_{BO, dB} = 11,5 \text{ dB}$$

$$\phi_{BO} = -128^\circ$$

FTBF

pour $\omega = \omega_M$

$$G_{BF, dB} = 1,4 \text{ dB}$$



III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

Lecture de l'abaque de Black Nichols.

FTBO

pour $\omega = \omega_M$

$$G_{BO, dB} = 11,5 \text{ dB}$$

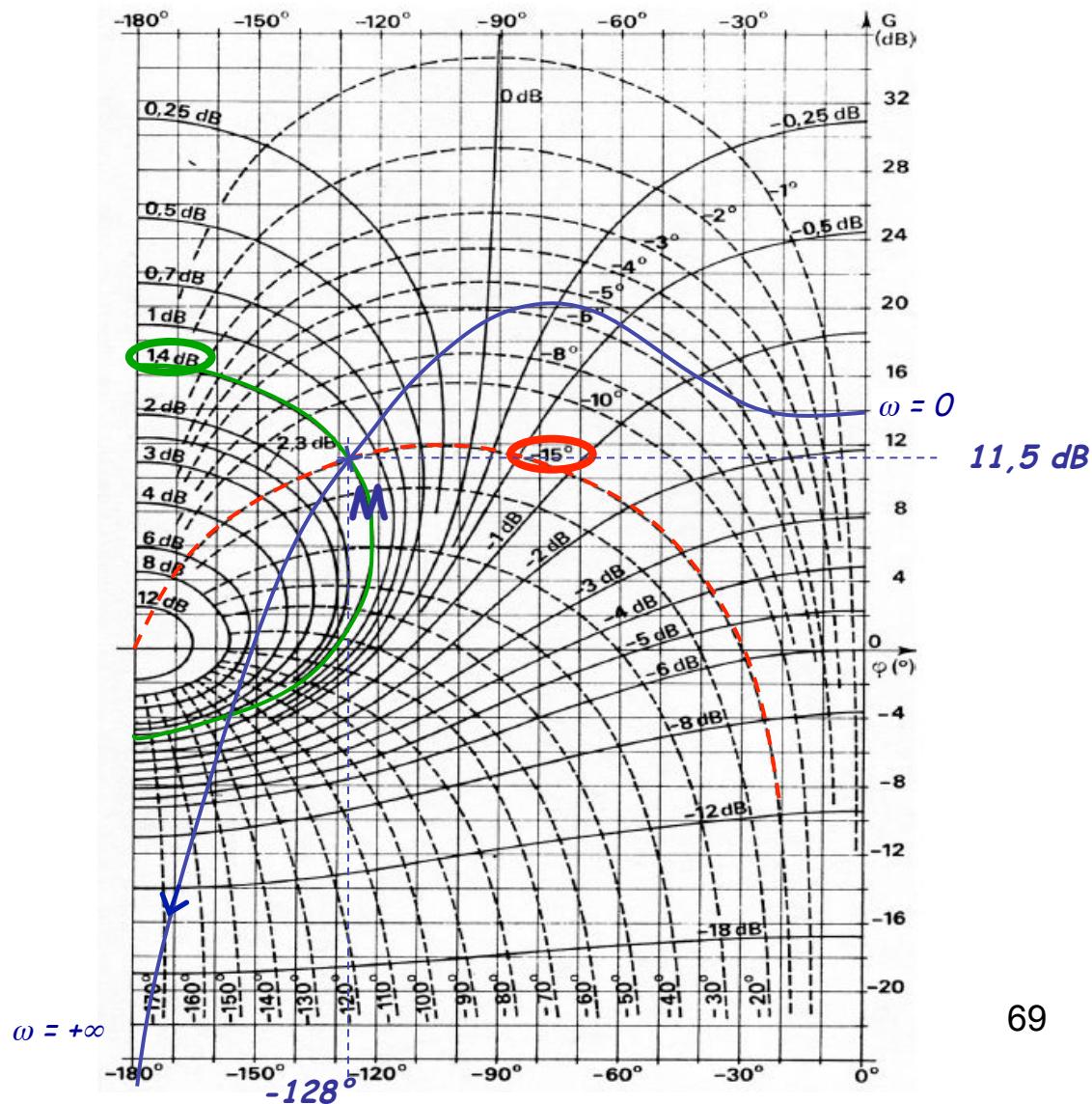
$$\phi_{BO} = -128^\circ$$

FTBF

pour $\omega = \omega_M$

$$G_{BF, dB} = 1,4 \text{ dB}$$

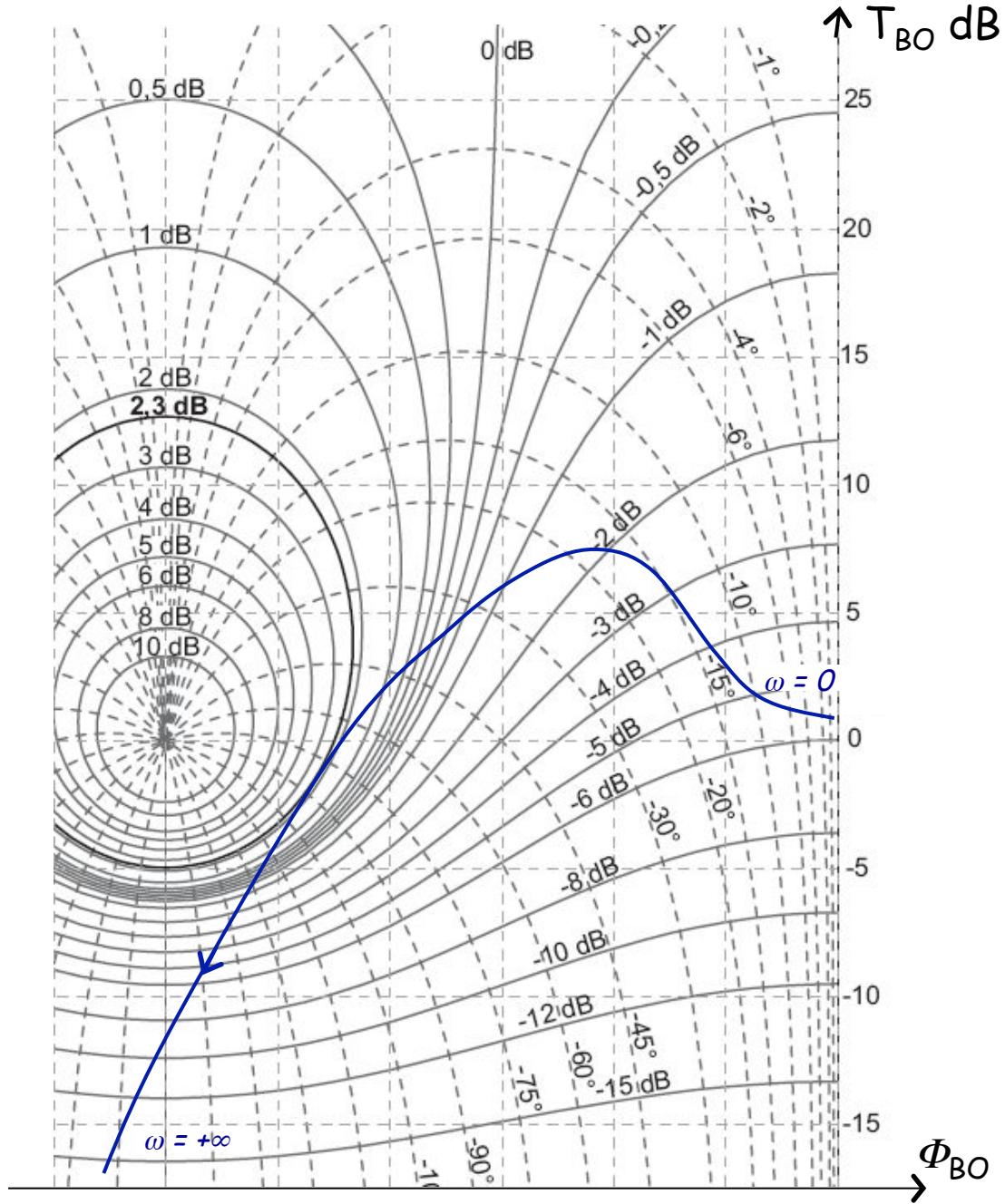
$$\phi_{BO} = -15^\circ$$



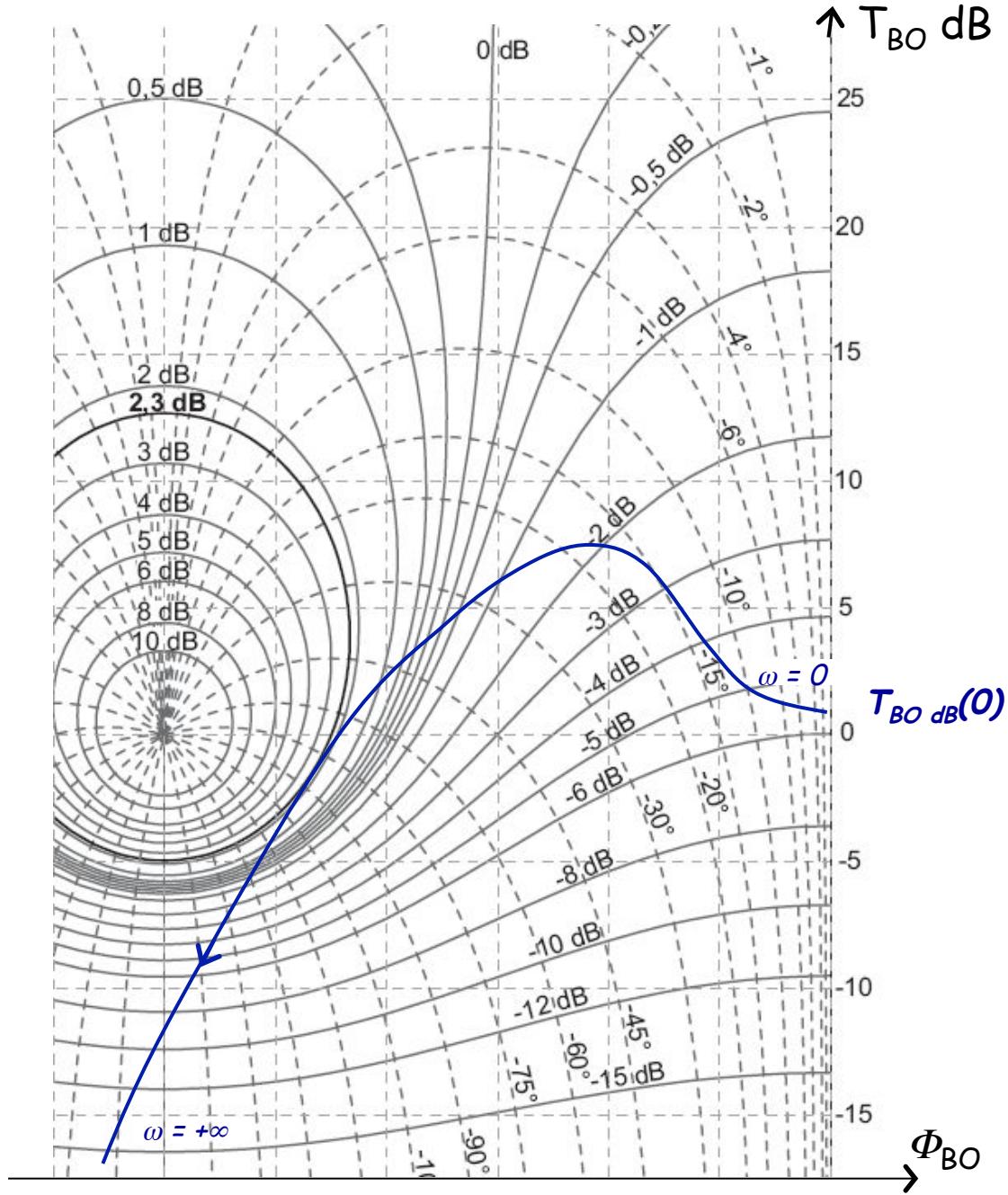
III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

b - Analyse des résonances.

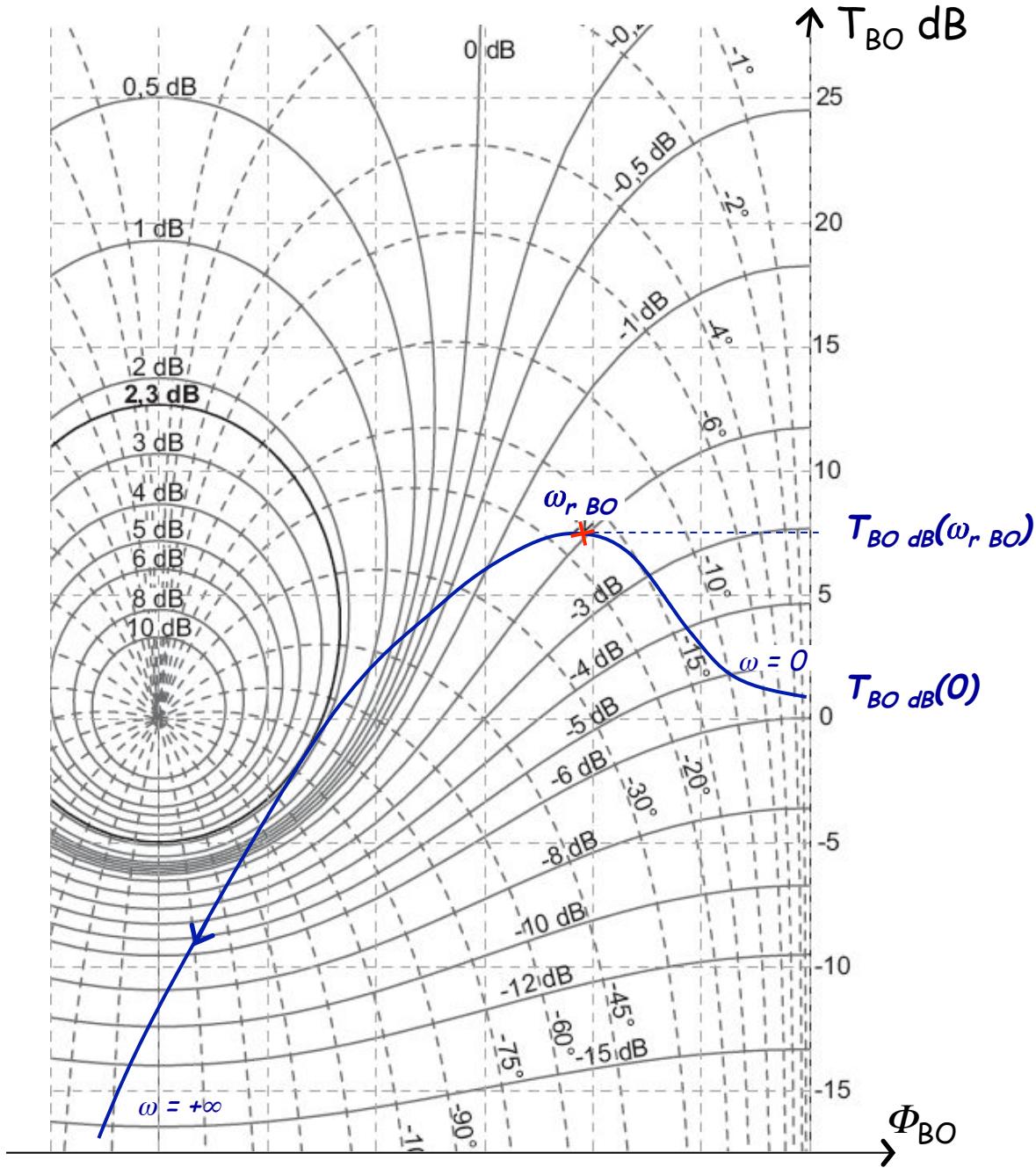
FTBO



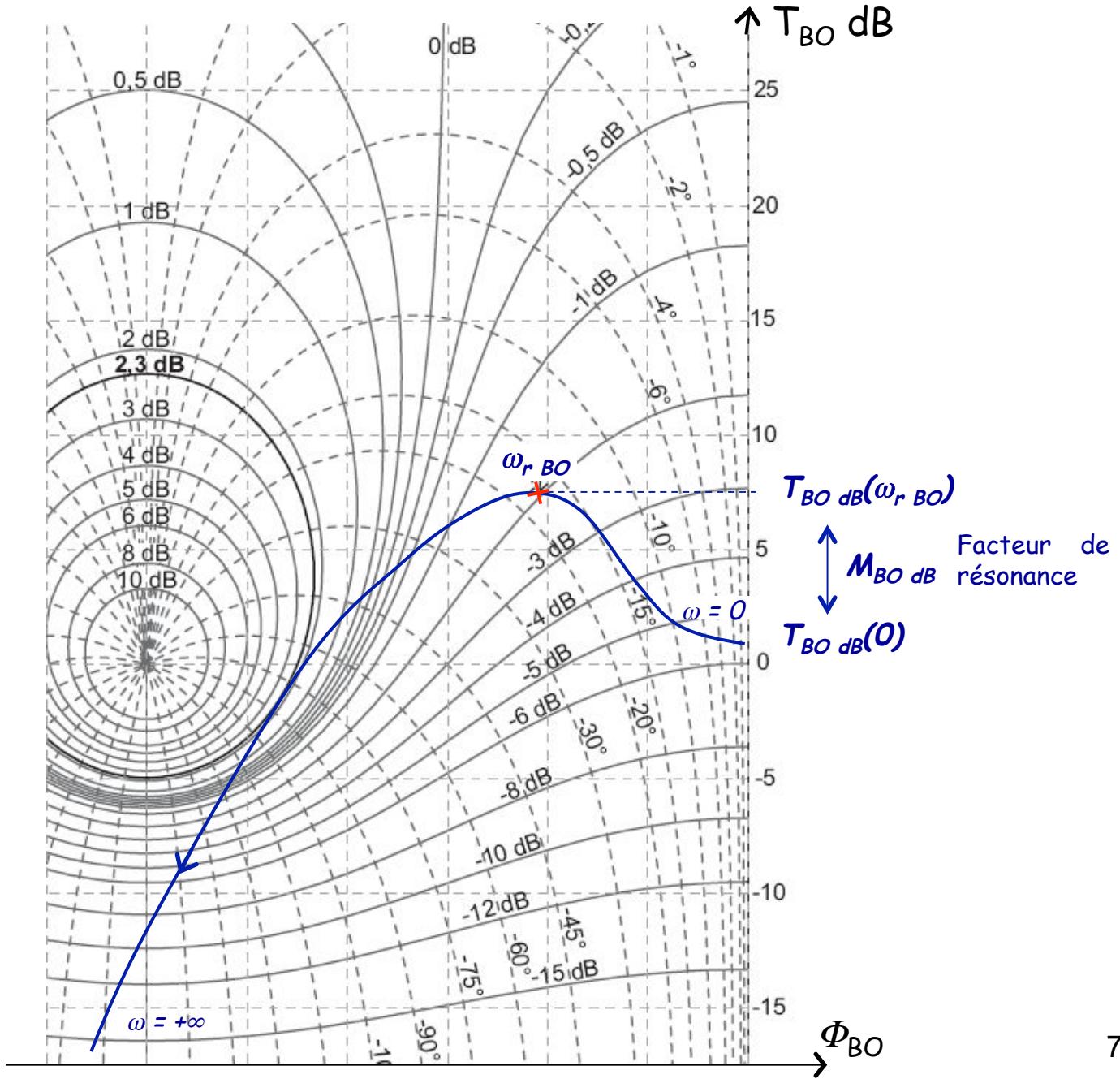
FTBO



FTBO

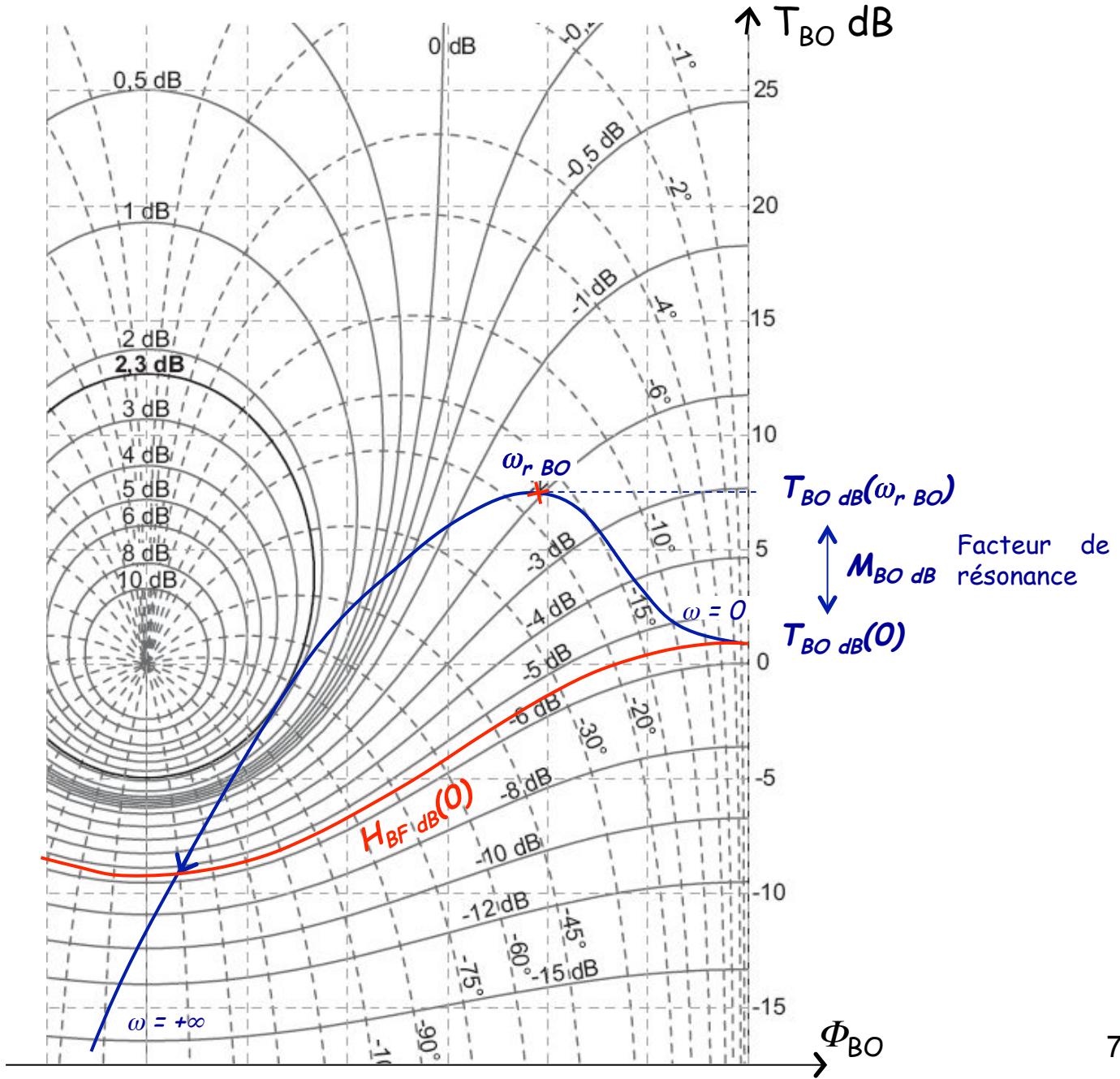


FTBO



FTBO

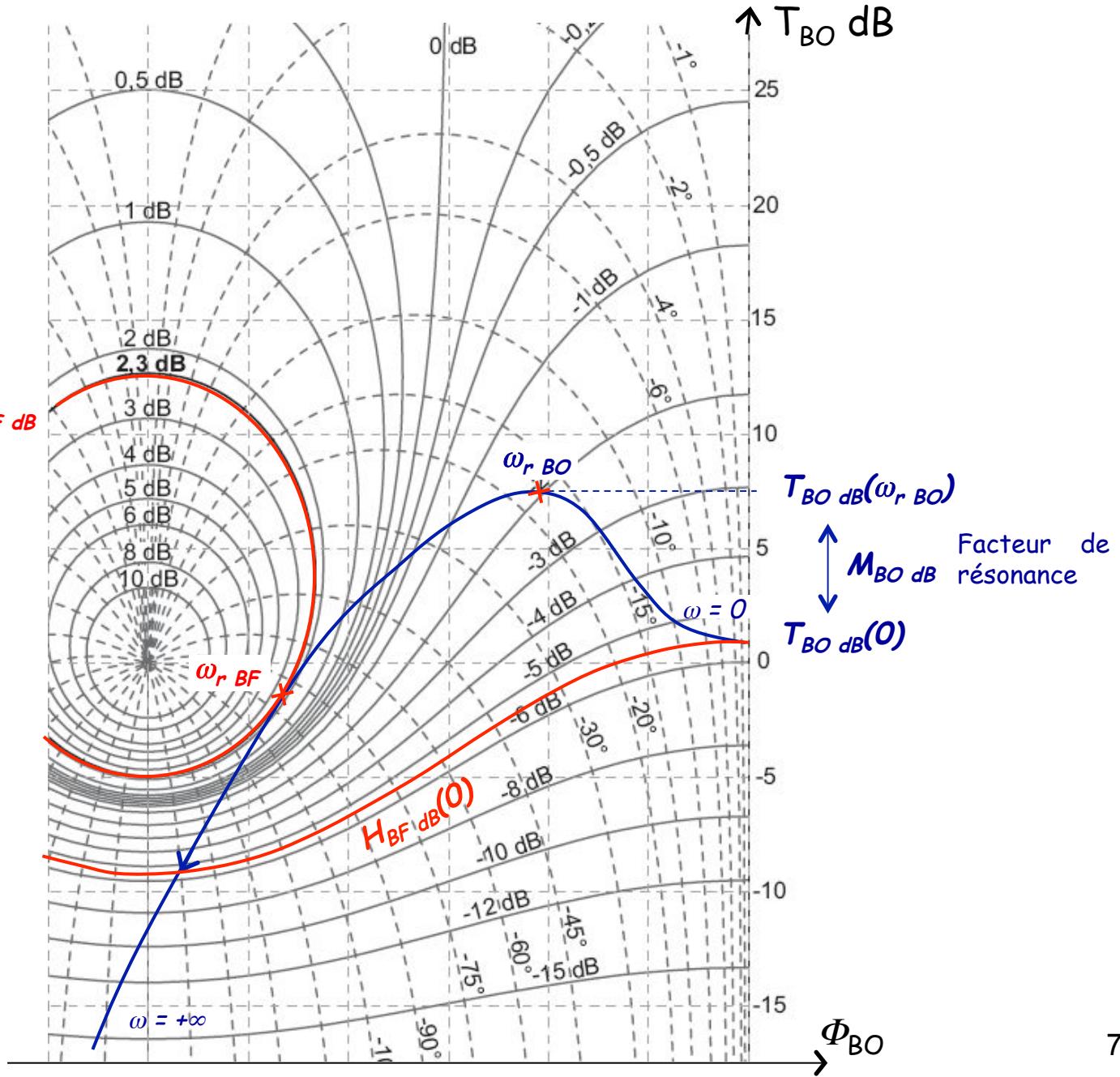
FTBF



FTBO

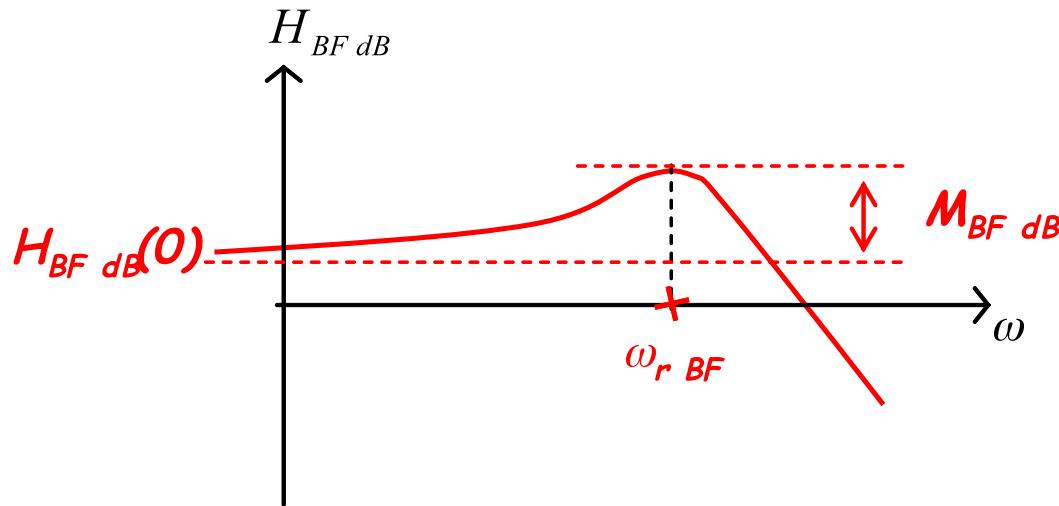
FTBF

$$H_{BF \text{ dB}}(0) + M_{BF \text{ dB}}$$



III.2. Interprétation géométrique du passage BO \rightarrow BF

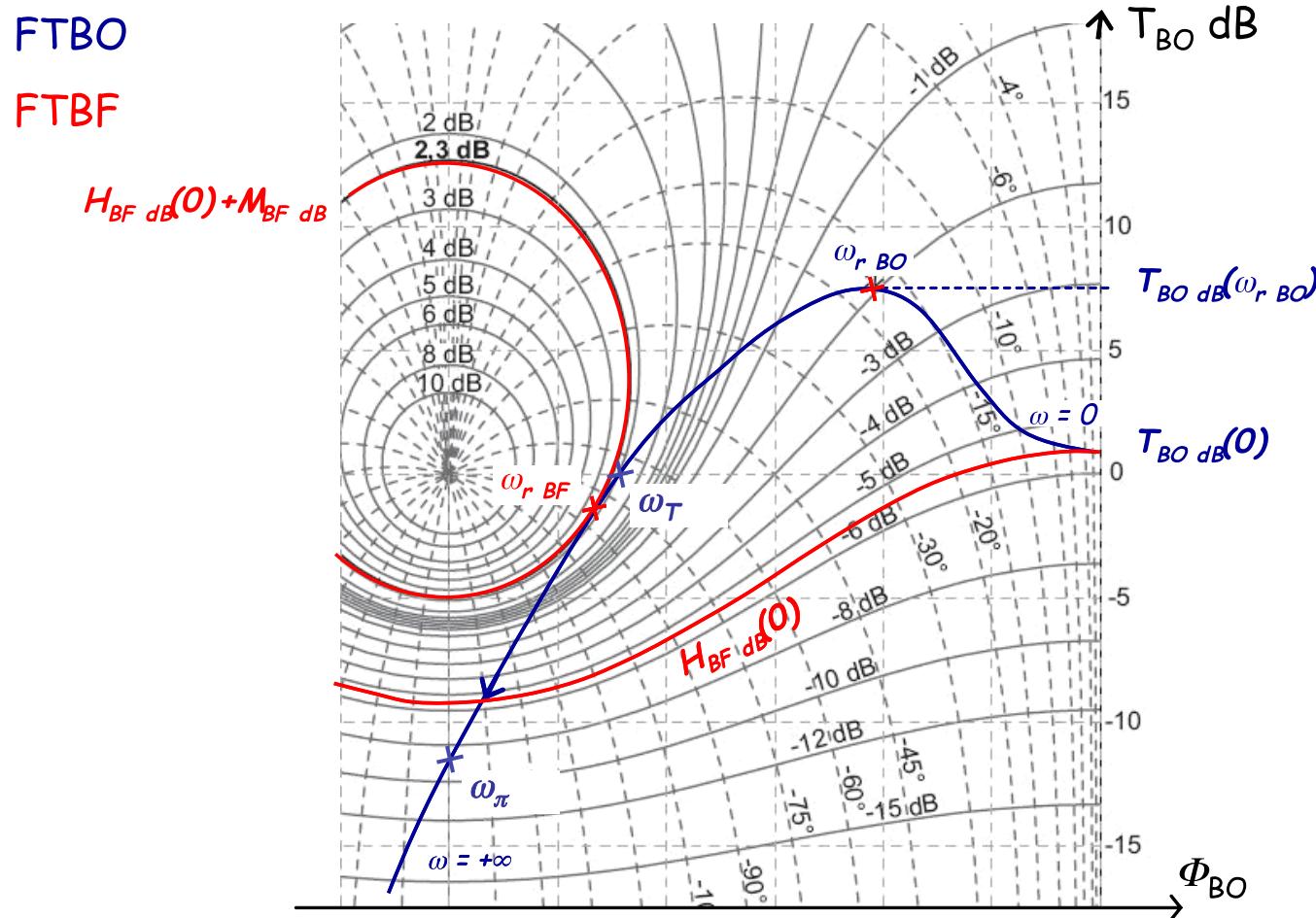
b - Analyse des résonances (suite).



III.2. Interprétation géométrique du passage BO \rightarrow BF

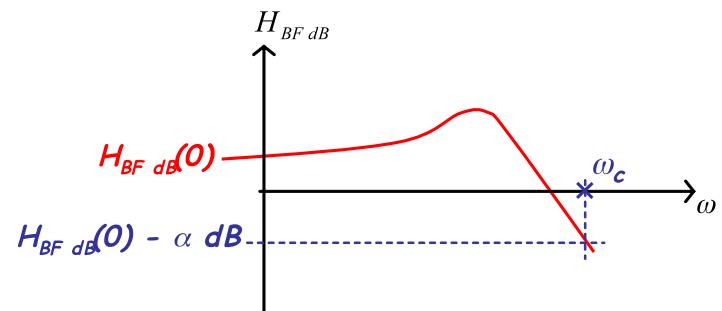
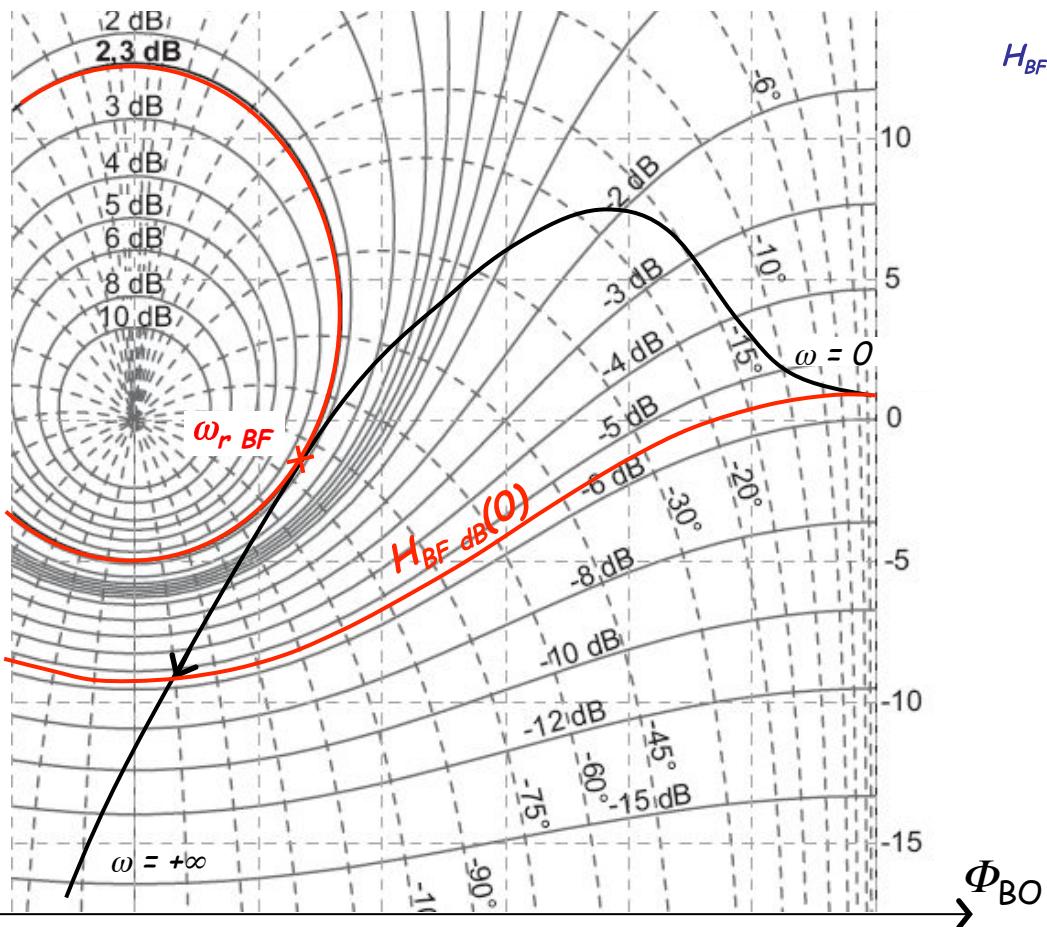
ω_T : la pulsation de transition telle que $T_{BO\ dB}(\omega_T) = 0 \text{ dB}$

ω_π : telle que $\phi_{BO}(\omega_\pi) = -180^\circ$



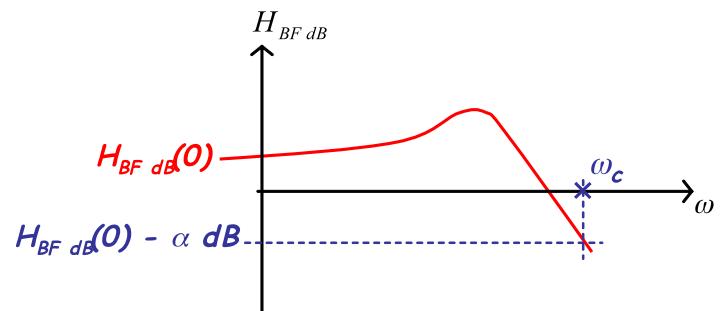
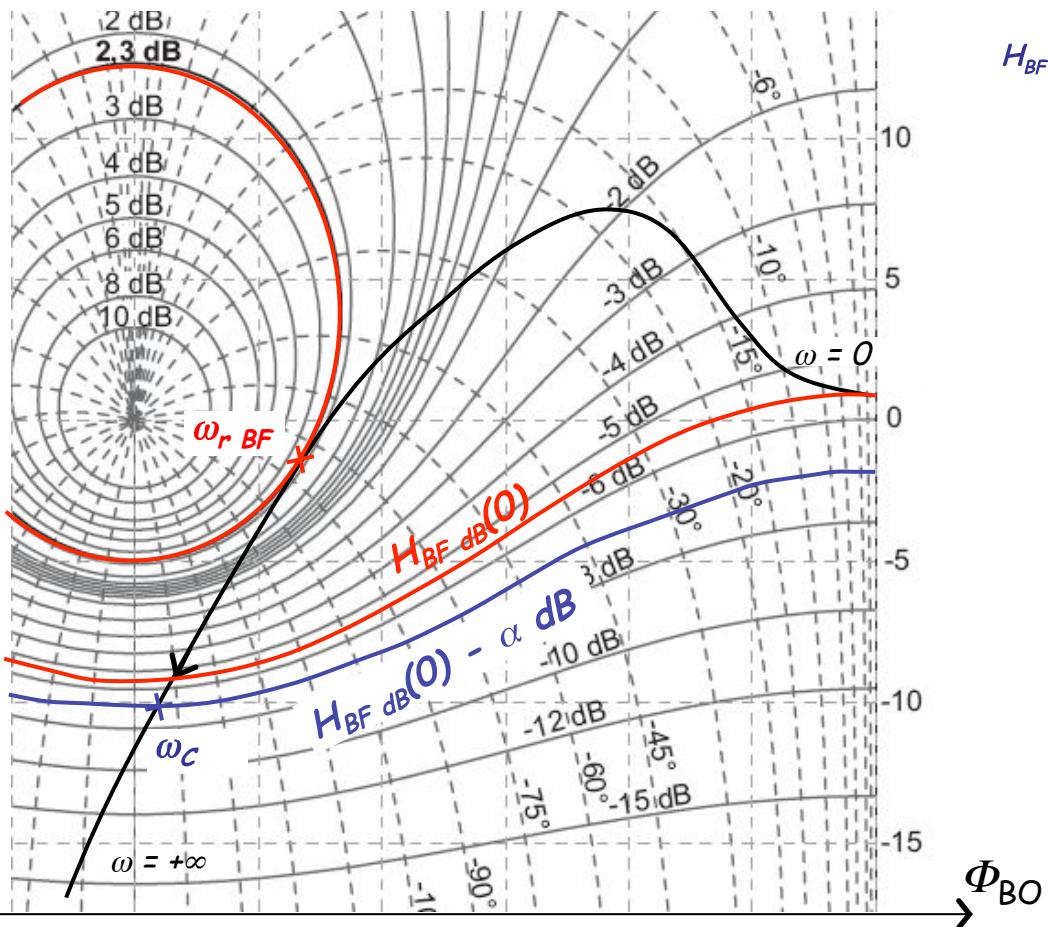
III.2. Interprétation géométrique du passage BO \rightarrow BF

c - Bande passante en boucle fermée.



III.2. Interprétation géométrique du passage BO → BF

c - Bande passante en boucle fermée.



III.3. Réponse impulsionale d'un système bouclé en régime linéaire

L'étude de la réponse impulsionale d'un système bouclé permet d'aborder la question de la stabilité.

Définition 6 ?

$$\text{FTBF : } H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

D'après $x_c(t) = \delta(t) \xrightarrow{TL} X_C(p) = 1$

On a $Y(p) = H(p).1 = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$

Que l'on exprime sous la forme

$$Y(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

III.3. Réponse impulsionale d'un système bouclé en régime linéaire

Lors du retour dans le domaine temporel, on a pour chaque pôle p_i de $H(p)$:

$$\frac{A_i}{p - p_i} \xrightarrow{TL^{-1}} A_i e^{p_i t}$$

Pour que ces exponentielles ne divergent pas vers $+\infty$ il faut que la partie réelle de chaque p_i soit strictement négative.

Conclusion : un système de transmittance $H(p)$ est stable ssi tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative (cad que les zéros de $D(p) = 1 + T(p)$ sont à $\text{Re} < 0$)

La connaissance de la FTBO permet de conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

III.4. Le critère de Routh (critère algébrique).

On considère un système de FTBF :

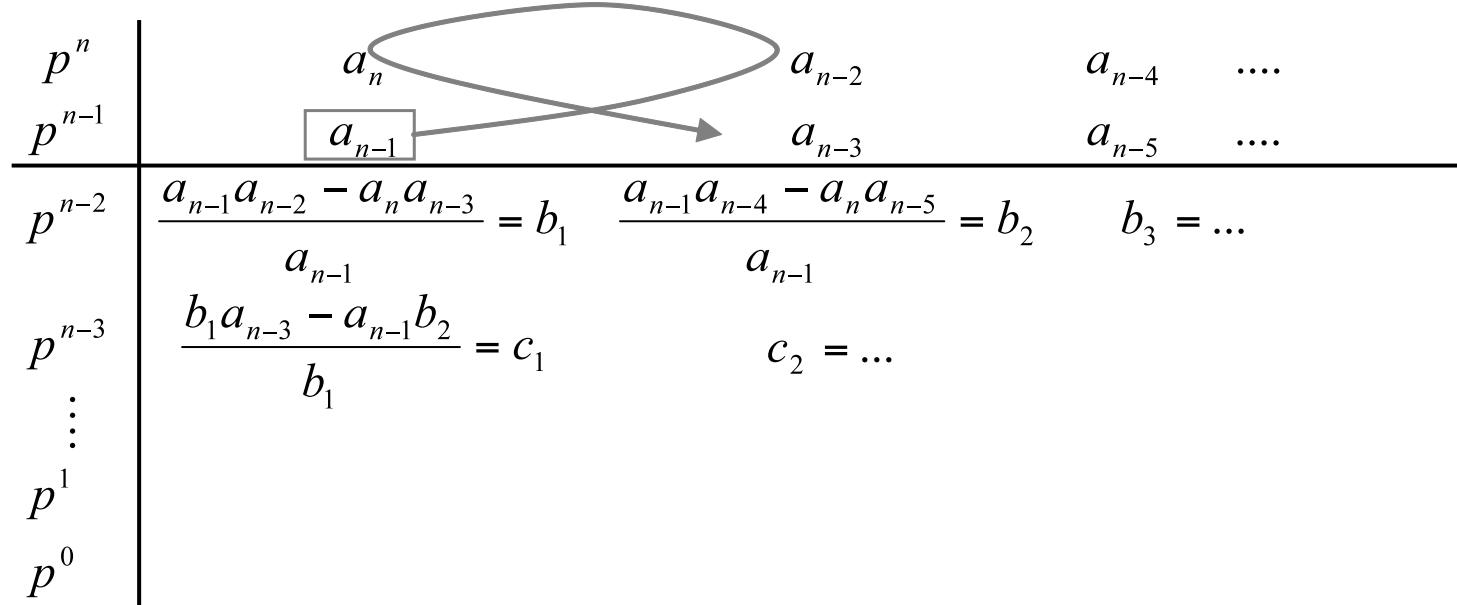
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Le critère de stabilité de Routh se décompose en 2 conditions :

- Une cond. nécessaire : la stabilité exige que tous les a_i soient de même signe et non nuls.
- Une cond. Nécessaire et suffisante :
stable (i.e. les zéros de $D(p)$, cad les pôles de $H(p)$),
 O) ssi tous les termes de la 1^{ère} colonne du tableau de Routh sont de même signe.

le syst. est
sont tous à $Re < 0$
de Routh sont

III.4. Le critère de Routh (critère algébrique).

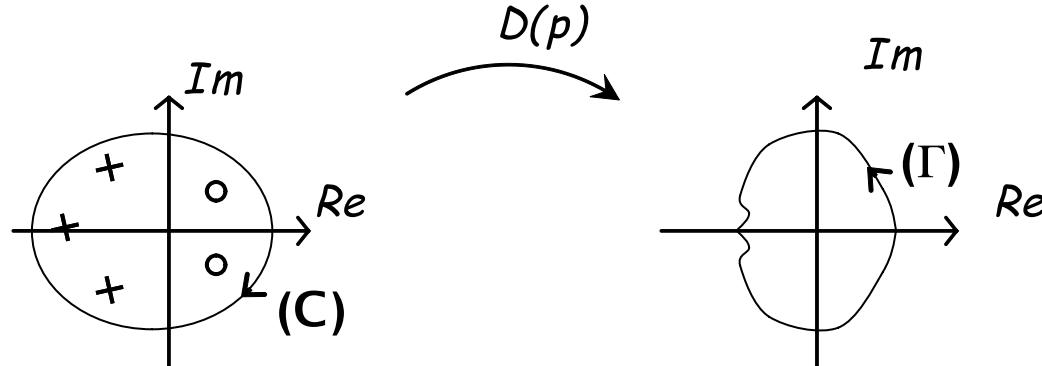


III.5. Les critères géométriques de stabilité

a - Le critère de Nyquist.

Théorème de Cauchy : si un point d'affixe p , décrit dans le sens horaire un contour fermé (C), à l'intérieur duquel on trouve P pôles et Z zéros d'une fraction rationnelle $D(p)$, alors la courbe (Γ) transformée de (C) par $D(p)$ fait N tours (comptés positivement dans le sens horaire) autour de l'origine avec

$$N = Z - P$$

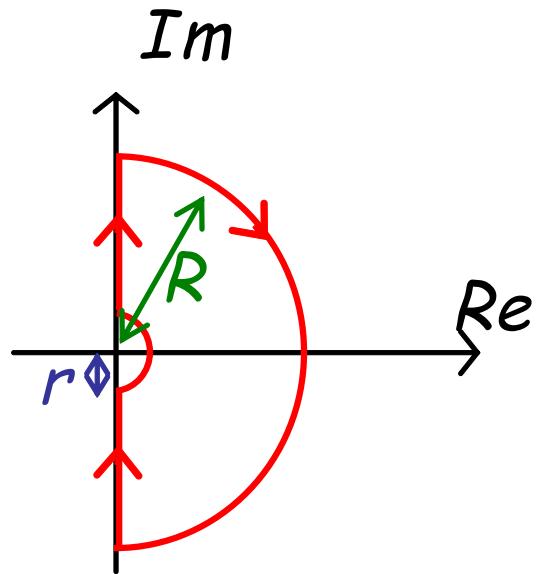


- + pôles de $D(p)$
- o zéros de $D(p)$

$$\begin{aligned} N &= Z - P \\ N &= 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

III.5. Les critères géométriques de stabilité

Contour de *Bromwich* :



III.5. Les critères géométriques de stabilité

Th. Cauchy → si p décrit (C) , le contour de Bromwich, alors $1 + T(p)$ décrit une courbe fermée (Γ) faisant N tours dans le sens horaire autour de l'origine avec : $N = Z^+ - P^+$

P^+ = pôles à partie réelle > 0 de $1 + T(p)$

Z^+ = zéros à partie réelle > 0 de $T(p)$

P_{BO}^+ = pôles instables de la boucle ouverte

Z^+ = zéros à partie réelle > 0 de $1 + T(p)$

Z^+ = pôles à partie réelle > 0 de $\frac{A(p)}{1 + T(p)}$

P_{BF}^+ = pôles instables de la boucle fermée



$$N = P_{BF}^+ - P_{BO}^+$$

III.5. Les critères géométriques de stabilité

Critère de Nyquist :

lorsque p décrit le contour de Bromwich (C) dans le sens horaire, $T(p)$ (la FTBO) décrit une courbe (Γ) dans le plan complexe. Le système est stable en BF ssi le nombre de tours de (Γ) autour du point critique **-1** comptés dans le sens horaire est égal à moins le nb de pôles instables de $T(p)$ (pôles $Re > 0$ de la FTBO).

Pour un syst. Stable en BO, le système est stable en BF si (Γ) n'entoure pas le point critique.

La connaissance de la FTBO permet de conclure sur la stabilité du système en boucle fermée.

III.5. Les critères géométriques de stabilité

b - Le critère du revers.

Conditions d'application :

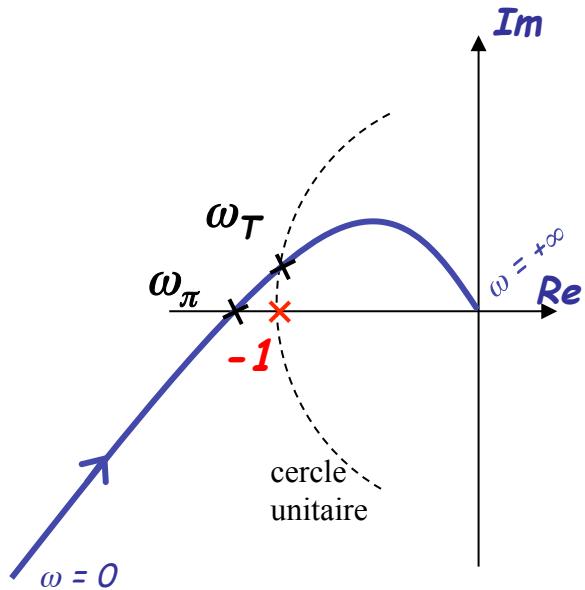
- syst. stable en BO,
- ordre > 1 ,
- $T(p)$ à phase minimale (pas de zéro à $Re > 0$),
- le rapport des coeff. de plus bas d° du num. et du den. est positif.

Critère du revers :

pour un syst. vérifiant les cond. d'application, si le lieu de Nyquist de la FTBO décrit dans le sens des pulsations croissantes ($0^\circ \rightarrow +\infty$), laisse le point critique à sa **gauche** alors le système sera stable en BF.

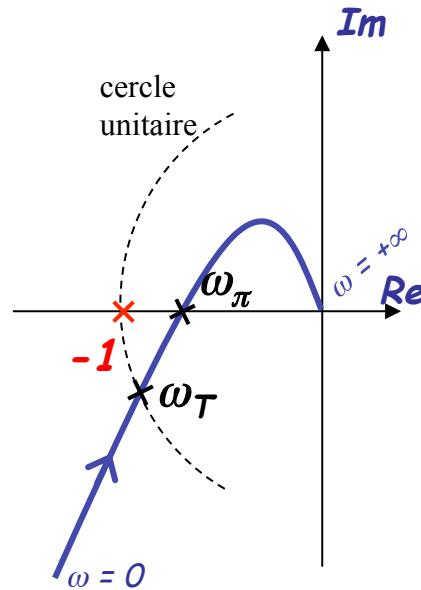
III.5. Les critères géométriques de stabilité

b - Le critère du revers.



Instable

$$\omega_\pi < \omega_T$$



Stable

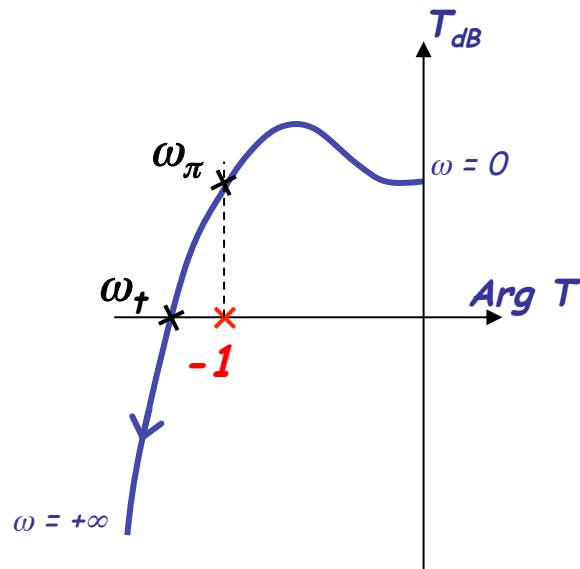
$$\omega_T < \omega_\pi$$

III.5. Les critères géométriques de stabilité

b - Le critère du revers (suite).

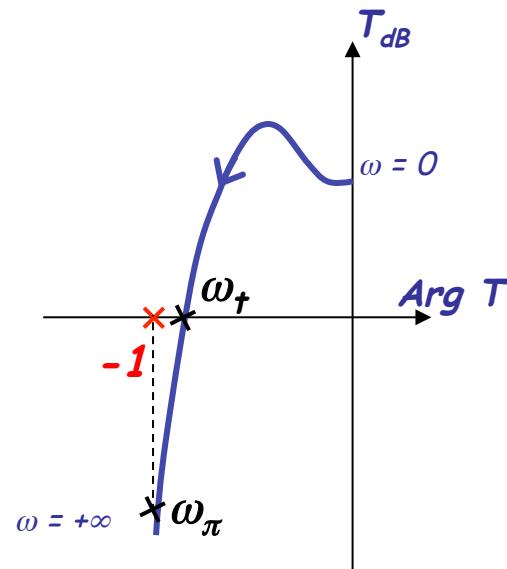
Critère du revers dans le plan de Black :

pour un syst. en BO vérifiant les cond. d'application, si son lieu dans le plan de Black décrit dans le sens des pulsations croissantes ($0^+ \rightarrow +\infty$), laisse le point critique à sa **droite** alors le système sera stable en BF.



Instable

$$\omega_\pi < \omega_t$$

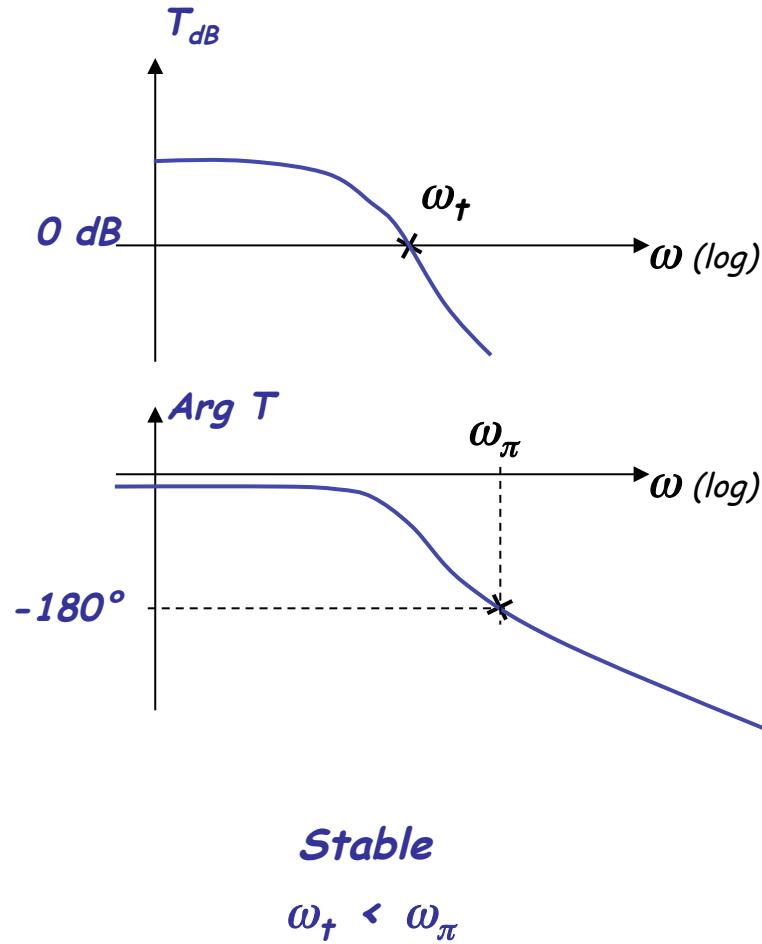
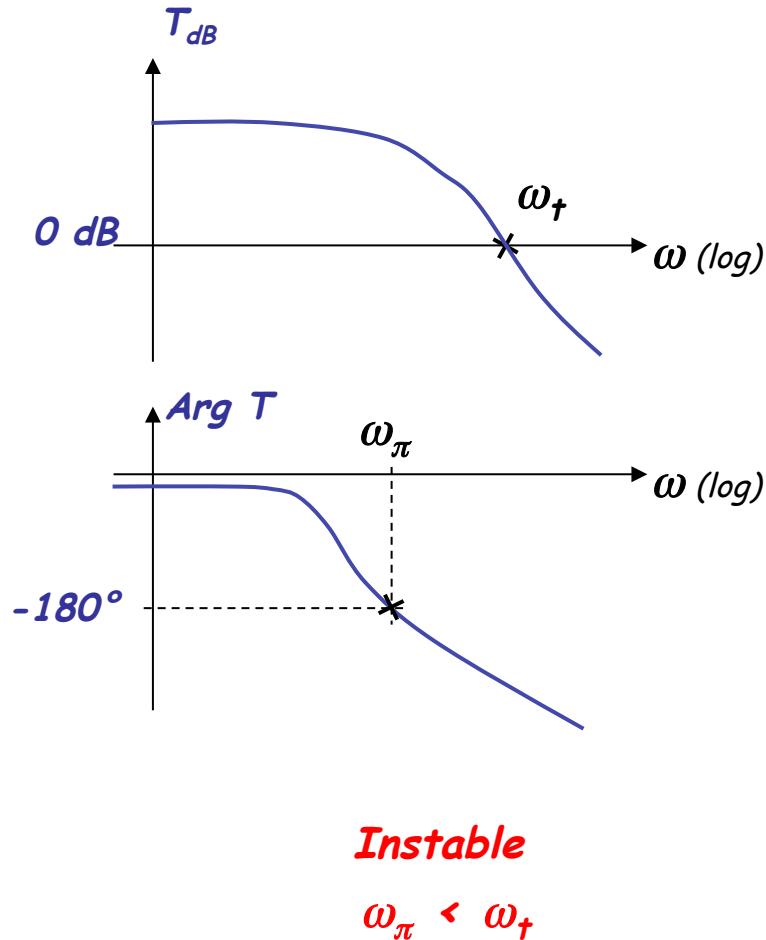


Stable

$$\omega_t < \omega_\pi$$

III.5. Les critères géométriques de stabilité

Illustration sur les diagrammes de Bode.

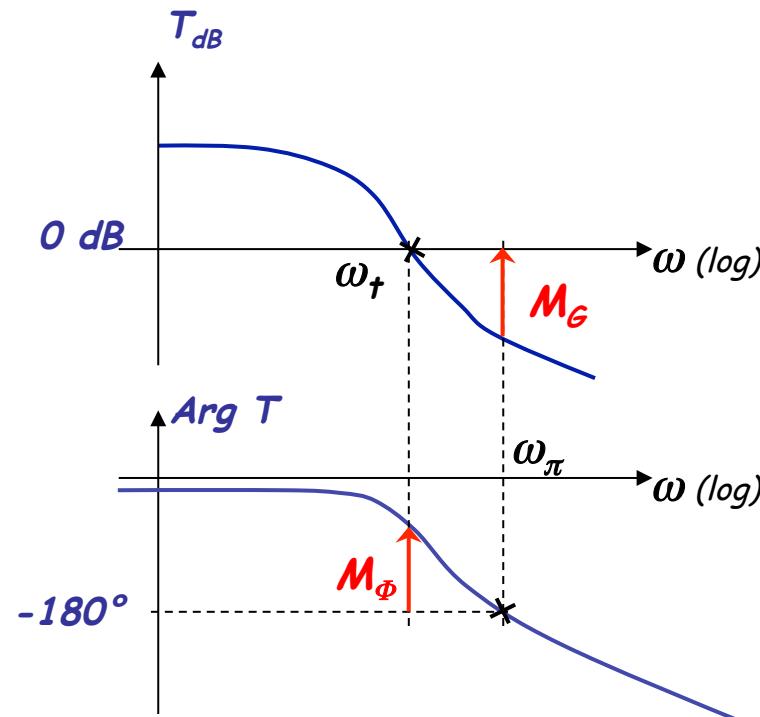
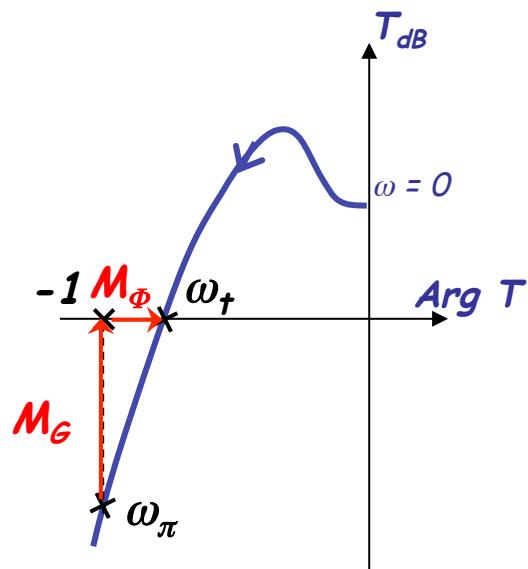


III.5. Les critères géométriques de stabilité

c - Marges de stabilité.

- Marge de phase : $M_\phi = \text{Arg}[T(p = j\omega_T)] + 180^\circ$

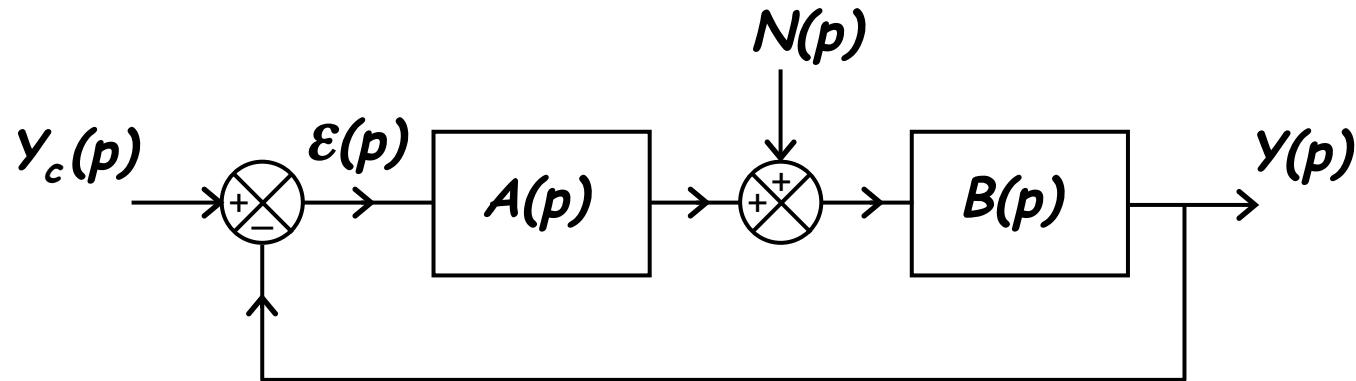
- Marge de gain : $M_G = -|T(p = j\omega_\pi)|_{dB}$



Cha IV - Performances des systèmes asservis

IV.1. Précision des systèmes asservis.

Définition 11 : Estimer la précision d'un système asservi c'est mesurer ou prédire l'évolution temporelle de l'écart entre la consigne d'entrée et la sortie du système ($\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$).



$$\Rightarrow Y(p) = \underbrace{\frac{T(p)}{1+T(p)} \cdot Y_c(p)}_{FTBF} + \frac{B(p)}{1+T(p)} \cdot N(p)$$

IV.1. Précision des systèmes asservis

a - Précision statique (en poursuite) - Erreur en régime permanent.

Erreur en régime permanent :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = Y_c(p) - Y(p)$$

$$\varepsilon(p) = Y_c(p) - \frac{T(p)}{1 + T(p)} \cdot Y_c(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{Y_c(p)}{1 + T(p)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot Y_c(p)}{1 + T(p)}}$$

IV.1. Précision des systèmes asservis

a - Précision statique (en poursuite) - Erreur en régime permanent (suite).

Classe du système :

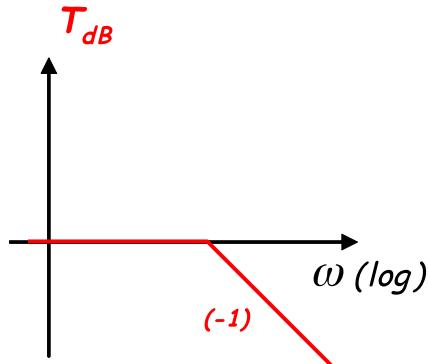
$$FTBO: \quad T(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + b_1 p + \dots}{1 + a_1 p + \dots}$$

α : classe du système

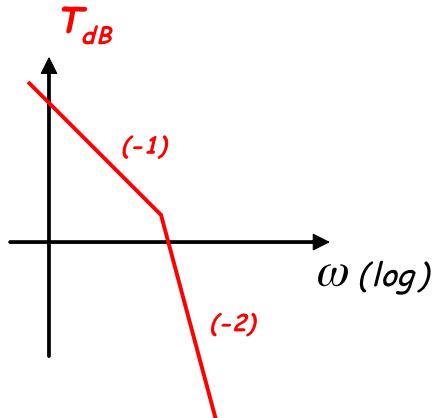
nbre intégrations pures dans la BO

On a alors : $\lim_{p \rightarrow 0} T(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^\alpha}$

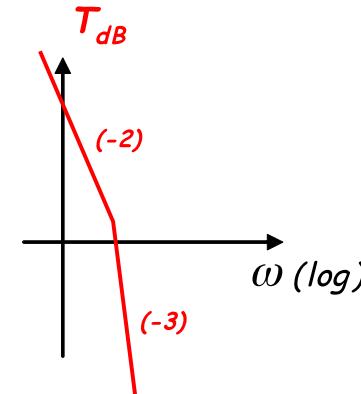
$\alpha = 0$



$\alpha = 1$



$\alpha = 2$



IV.1. Précision des systèmes asservis

Réponse à un échelon de consigne (erreur de position) :

$$y_c(t) = \Gamma(t) \quad \xrightarrow{TL} \quad Y_c(p) = 1/p$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + T(p)} \cong \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{1 + K}$$

Pour $\alpha \geq 1$:

$$\varepsilon_s = 0$$

Un système qui possède au moins un intégrateur ($\alpha \geq 1$) en boucle ouverte a une erreur de position nulle.

IV.1. Précision des systèmes asservis

Réponse à une rampe (erreur de traînage) :

$$y_c(t) = t \quad \xrightarrow{TL} \quad Y_c(p) = 1/p^2 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\varepsilon_s \rightarrow +\infty$$

Pour $\alpha = 1$:

$$\varepsilon_s = 1/K$$

Pour $\alpha \geq 2$:

$$\varepsilon_s = 0$$

Un système qui possède au moins deux intégrateurs ($\alpha \geq 2$) en boucle ouverte a une erreur de traînage nulle.

IV.1. Précision des systèmes asservis

Réponse à une parabolique (erreur en accélération) :

$$y_c(t) = t^2/2 \quad \xrightarrow{TL} \quad Y_c(p) = 1/p^3 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$$

Pour $\alpha = 0$ ou 1 :

$$\varepsilon_s \rightarrow +\infty$$

Pour $\alpha = 2$:

$$\varepsilon_s = 1/K$$

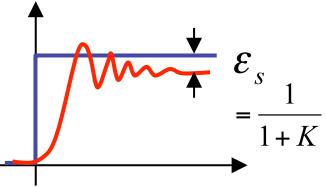
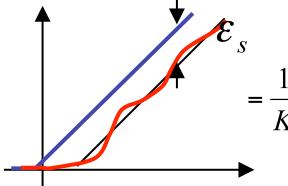
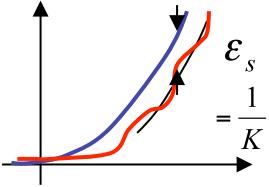
Pour $\alpha \geq 3$:

$$\varepsilon_s = 0$$

Un système qui possède au moins trois intégrateurs ($\alpha \geq 3$) en boucle ouverte a une erreur d'accélération nulle.

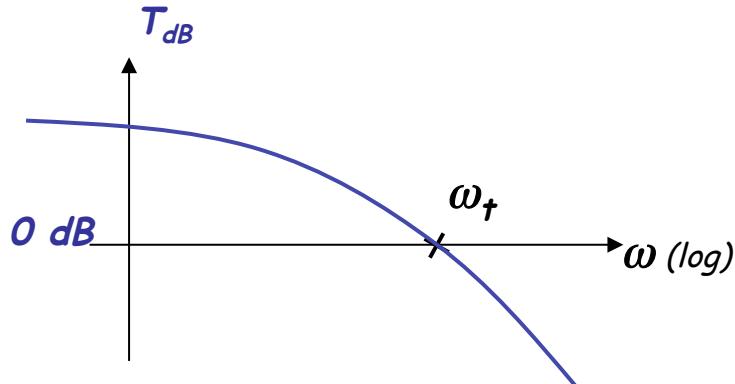
IV.1. Précision des systèmes asservis

a - Précision statique (en poursuite) - Erreur en régime permanent (suite).

<i>Classe α =</i>	0	1	2
<i>erreur de position (échelon)</i>	 $\varepsilon_s = \frac{1}{1+K}$	0	0
<i>erreur de traînage (rampe)</i>	∞	 $\varepsilon_s = \frac{1}{K}$	0
<i>Erreur d'accélération</i>	∞	∞	 $\varepsilon_s = \frac{1}{K}$

IV.1. Précision des systèmes asservis

b - Précision dynamique en poursuite.

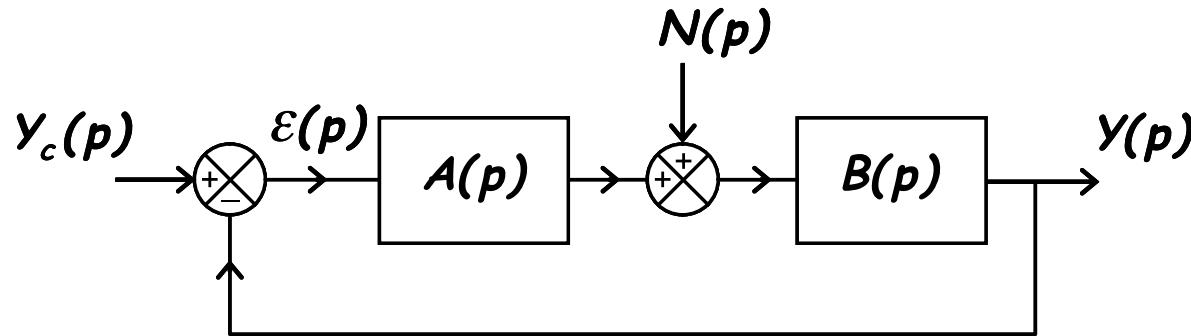


$$\frac{\varepsilon(p)}{Y_c(p)} = \frac{1}{1 + T(p)}$$

Ainsi, plus la pulsation de transition (i.e. la bande passante) d'un système est grande, meilleure est sa précision sur une large bande de fréquence (on avait déjà établi qu'une large bande passante entraîne un faible temps de réponse).

IV.1. Précision des systèmes asservis

c - Précision statique en régulation (c.à.d. en présence de perturbations).



$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + T(p)} \cdot Y_c(p) - \underbrace{\frac{B(p)}{1 + T(p)} \cdot N(p)}_{\text{erreur en régulation}}$$

En considérant $Y_c(p) = 0$ et en faisant abstraction du signe :

$$\varepsilon(p) = \frac{B(p)}{1 + T(p)} \cdot N(p)$$

IV.1. Précision des systèmes asservis

c - Précision statique en régulation (suite).

Pour une perturbation assimilable à un échelon unitaire : $N(p) = 1/p$

On a :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{B(p)}{1 + T(p)} \cdot \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{B(p)}{1 + T(p)}$$

En considérant pour $p \rightarrow 0$ que l'on peut écrire :

$$A(p) = \frac{K_A}{p^{\alpha_A}} \quad \text{et} \quad B(p) = \frac{K_B}{p^{\alpha_B}}$$

On obtient :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_B}{p^{\alpha_B} + \frac{K_A K_B}{p^{\alpha_A}}}$$

IV.1. Précision des systèmes asservis

c - Précision statique en régulation (suite).

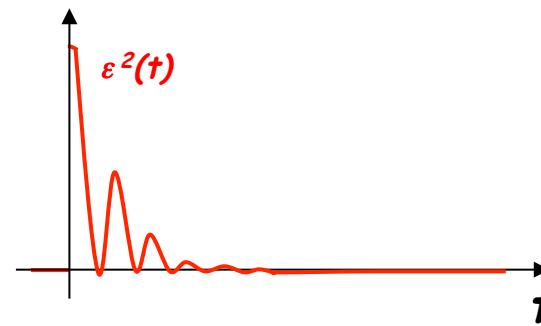
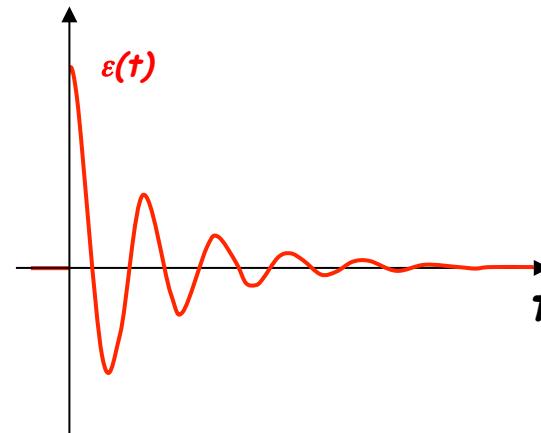
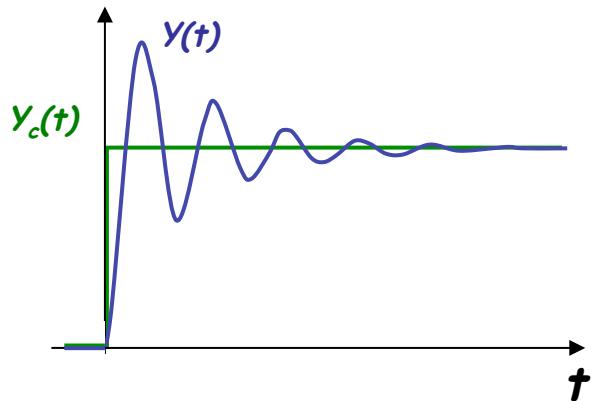
	$\alpha_A = 0$	$\alpha_A = 1, 2, \dots$
$\alpha_B = 0$	$\varepsilon_s = \frac{K_B}{1 + K_A K_B}$	0
$\alpha_B = 1, 2, \dots$	$\varepsilon_s = \frac{1}{K_A}$	0

L'erreur statique engendrée par une perturbation assimilable à un échelon est nulle s'il existe au moins une intégration en amont.

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_B}{p^{\alpha_B} + \frac{K_A K_B}{p^{\alpha_A}}}$$

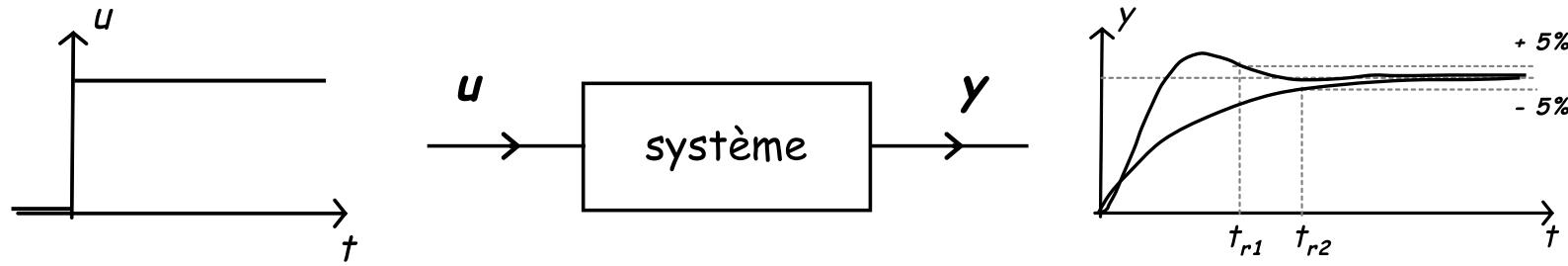
IV.1. Précision des systèmes asservis

d - Critères de performance.



IV.2. Rapidité des systèmes asservis

Le **temps de réponse à 5%** exprime le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent à $\pm 5\%$ près (*et y rester*).

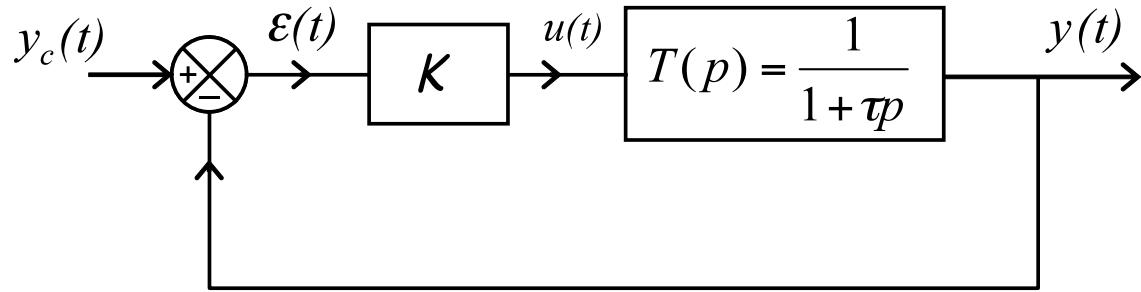


Pour un 1^{er} ordre, on a établi : $t_m \cdot f_c = 0,35$

D'une façon générale : l'amélioration de la rapidité (propriété temporelle) d'un système par l'élargissement de sa bande passante (propriété fréquentielle).

IV.2. Rapidité des systèmes asservis

Illustration - Asservissement d'un 1^{er} ordre :



D'où la FTBF :

$$H(p) = \frac{K.T(p)}{1 + K.T(p)} = \dots = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p} \quad 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

$$\left| \begin{array}{l} K_1 = K / (1 + K) \quad \text{et} \quad \tau_1 = \tau / (1 + K) \end{array} \right.$$

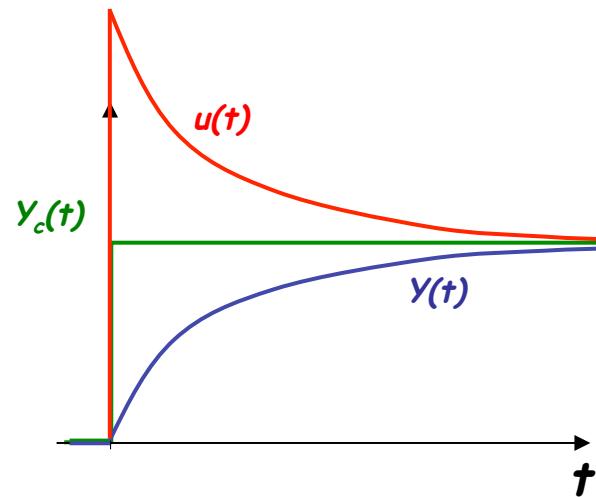
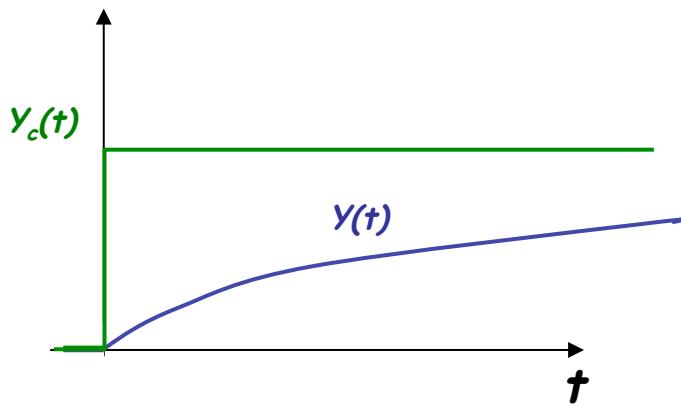
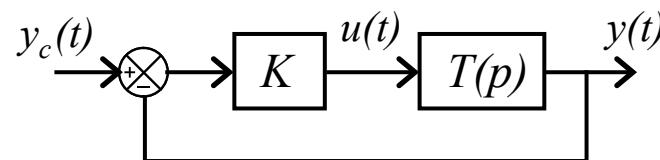
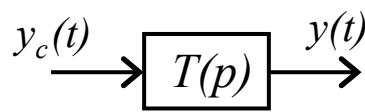
Coupure en BF :

$$\omega_{c1} = 1/\tau_1 = (1 + K) \cdot \omega_c \quad \text{avec } \omega_c = 1/\tau$$

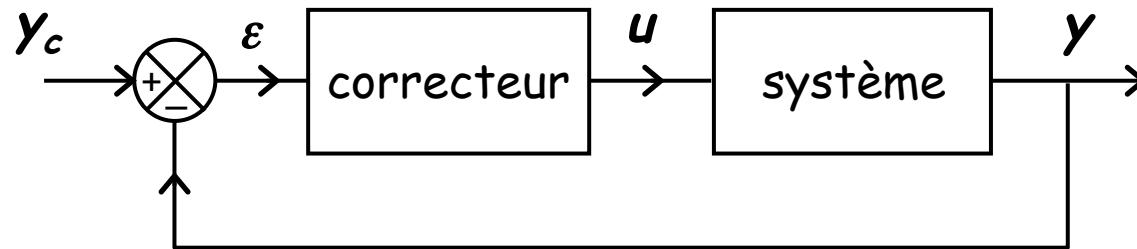
IV.2. Rapidité des systèmes asservis



Les propriétés intrinsèques de $T(p)$ ne sont pas modifiées par le passage en BF



V.1. Introduction.



Il existe plusieurs types de lois de commande :

- Tous ou rien,
- Proportionnelle,
- Dérivée,
- Intégrale,

Ou toute combinaison des lois précédentes (P.I.D. la plus utilisée).

a - La commande tous ou rien :

La plus basique :

- pour $\varepsilon > 0$, c.à.d. $y < y_c$, on envoie $u = U_{MAX}$,
- pour $\varepsilon < 0$, c.à.d. $y > y_c$, on envoie $u = 0$.

b - La commande proportionnelle :

L'action u est dosée à proportion du résultat à atteindre et donc de l'erreur ε .

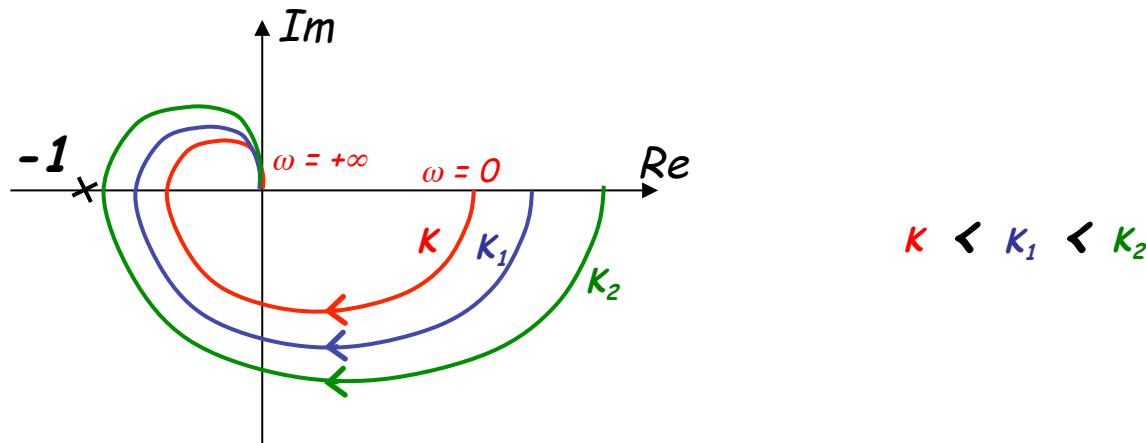
On prend :

$$u = K \cdot \varepsilon = K \cdot (y - y_c)$$

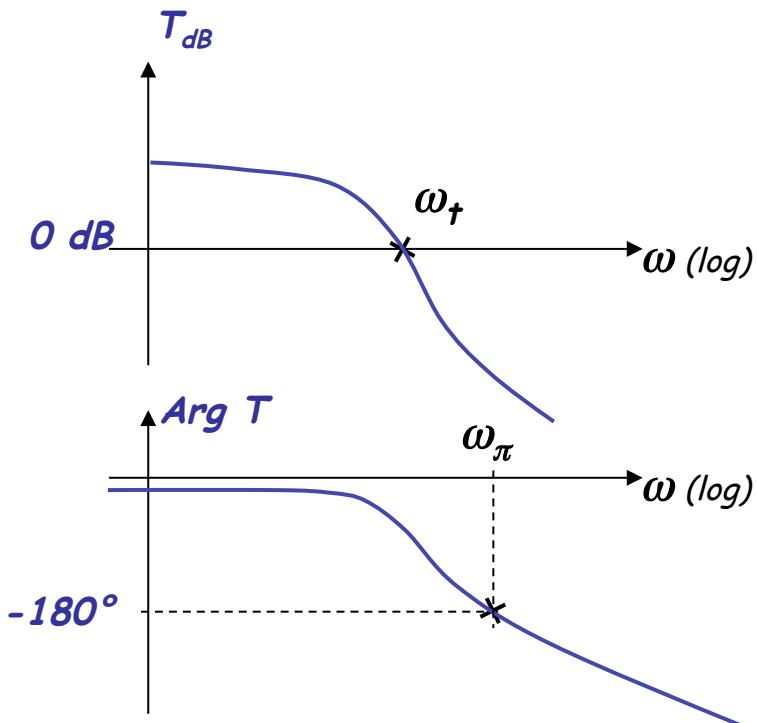
Si K est grand, la correction est énergique et rapide mais le risque de dépassement et d'oscillations dans la boucle s'accroît.

Si K est petit, la correction est molle et lente mais il y a moins de risque d'oscillations.

b - La commande proportionnelle (suite).

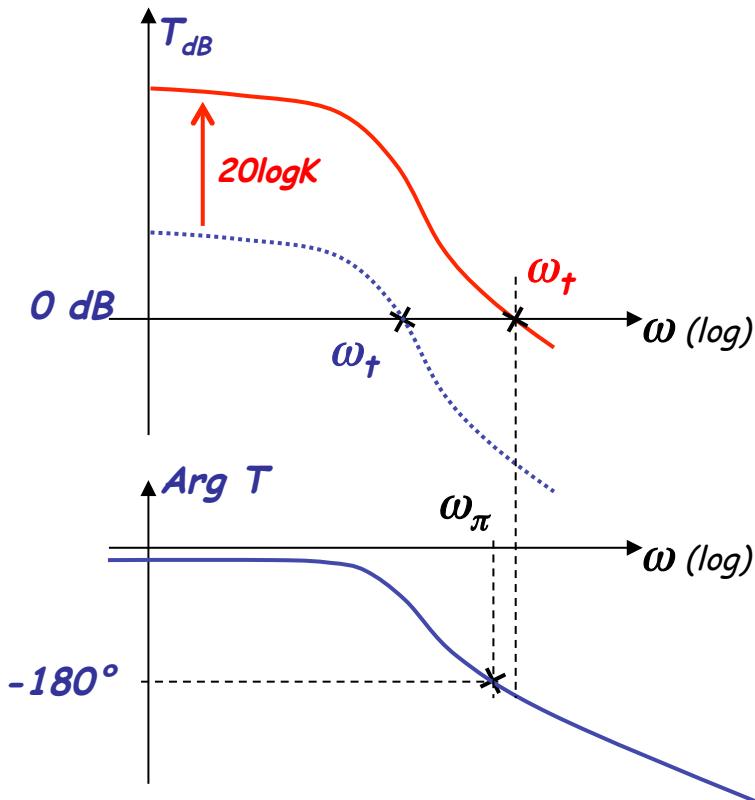


b - La commande proportionnelle (suite).



Stable

$$\omega_t < \omega_\pi$$



Instable

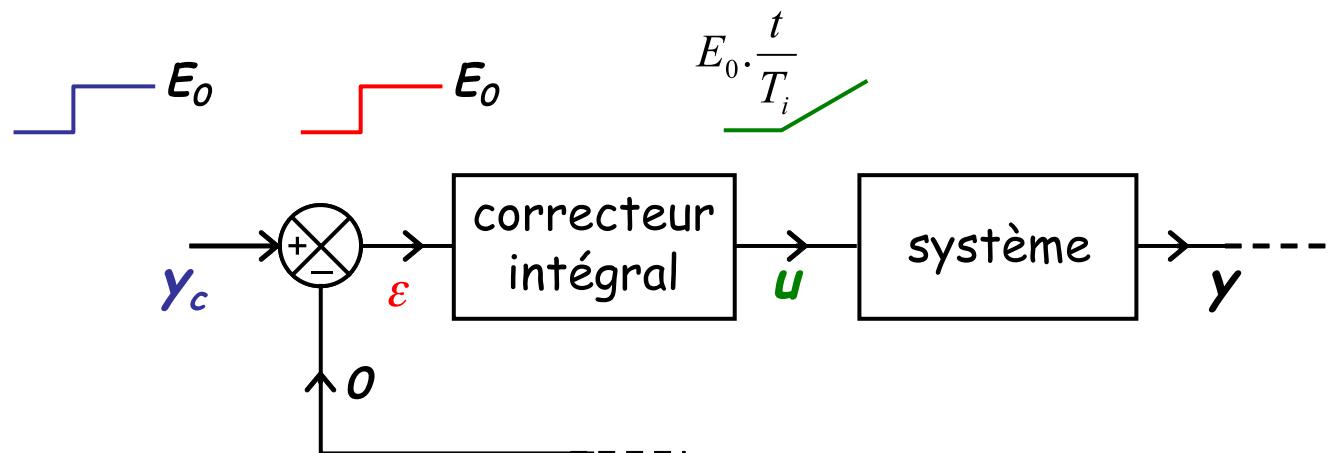
$$\omega_t > \omega_\pi$$

c - La commande intégrale.

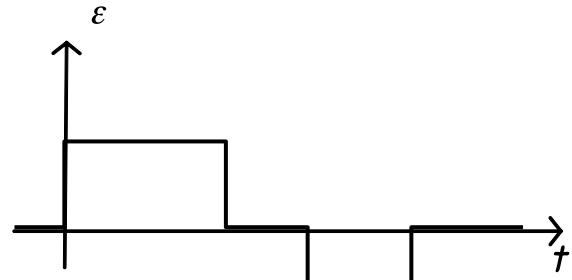
Une loi de commande intégrale permet d'obtenir un démarrage progressif et un effet persévérant.

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t \varepsilon(x) dx$$

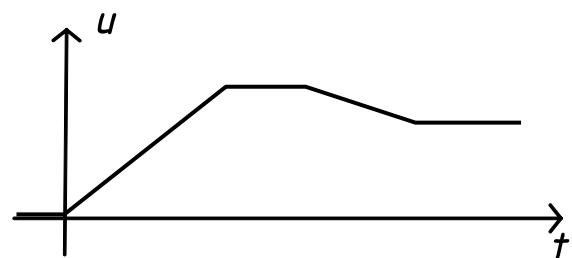
T_i cte de temps d'intégration



c - La commande intégrale.



La commande intégrale est persévérente.



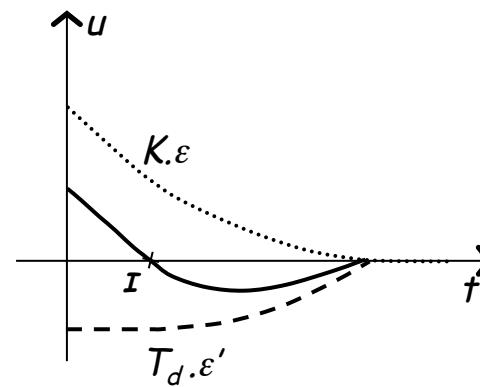
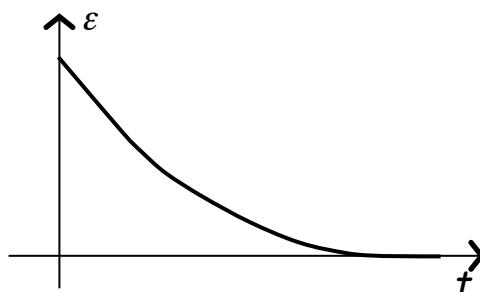
d - La commande dérivée.

La dérivée de l'erreur ε apporte une information supplémentaire sur son sens d'évolution (augmentation ou diminution) et sur sa dynamique.

D'où l'intérêt d'ajouter un terme dérivé au terme proportionnel d'une loi de commande pour exploiter cette information.

$$\Rightarrow u(t) = K[\varepsilon(t) + T_d \cdot \varepsilon'(t)]$$

Exemple : commande d'accostage d'un navire.



V.2. Correction proportionnelle et dérivée (à avance de phase)

Transmittance de Laplace théorique : $C(p) = 1 + \tau \cdot p$



Pas de sens physique (d°num. > d°dénom.).

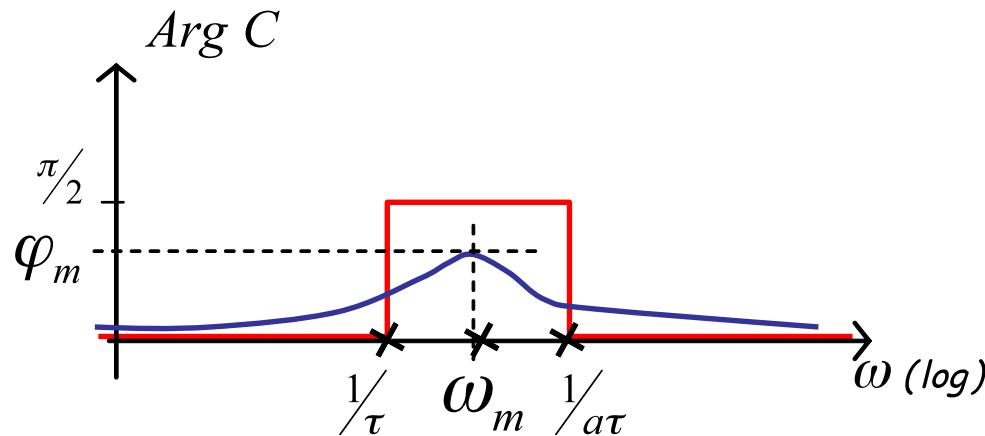
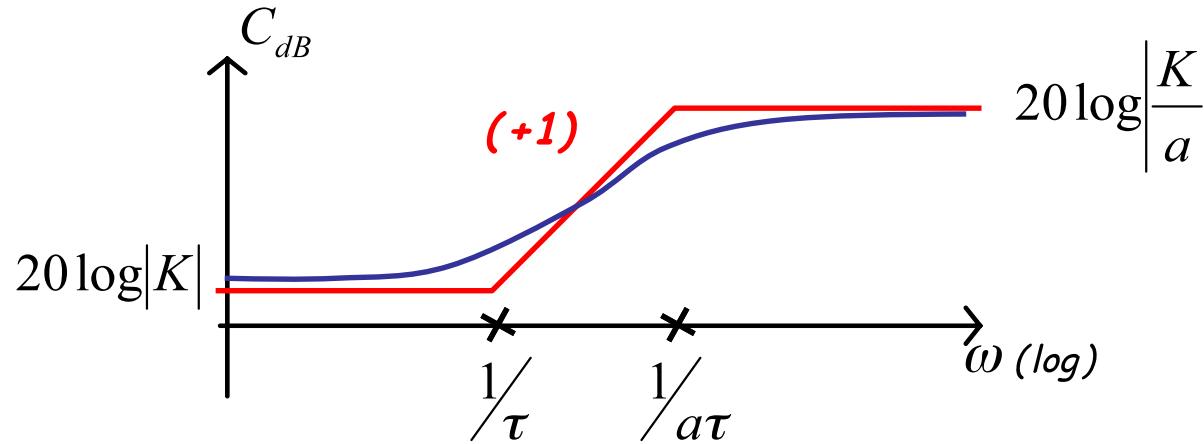


Correcteur à avance de phase :

$$C(p) = K \cdot \frac{1 + \tau \cdot p}{1 + a\tau \cdot p} \quad \text{avec } a < 1$$

V.2. Correction proportionnelle et dérivée (à avance de phase)

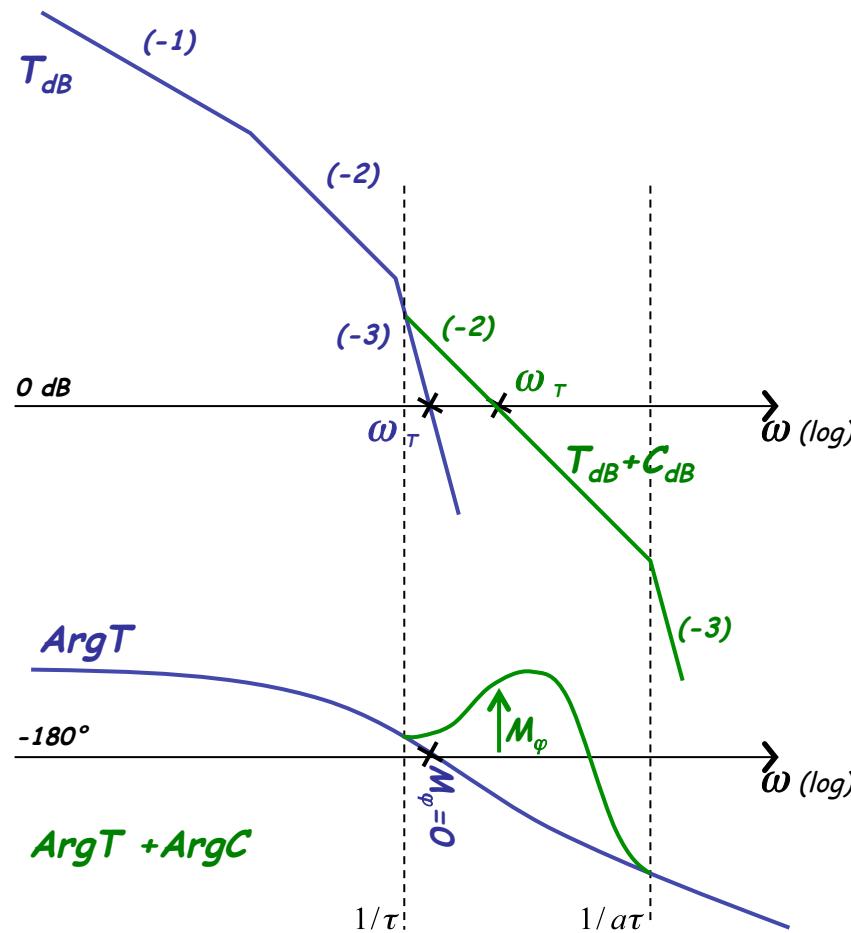
Diagramme de Bode.



$$\left| \begin{array}{l} \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{a}} \\ \varphi_m = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctan \sqrt{a} \end{array} \right.$$

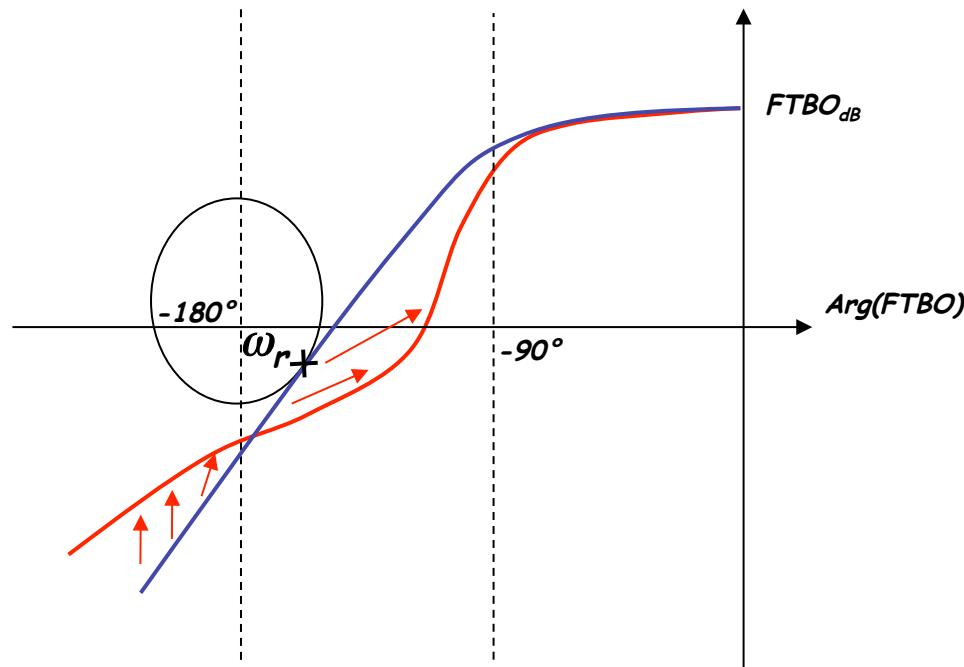
V.2. Correction proportionnelle et dérivée (à avance de phase)

Amélioration de la stabilité et de la rapidité.



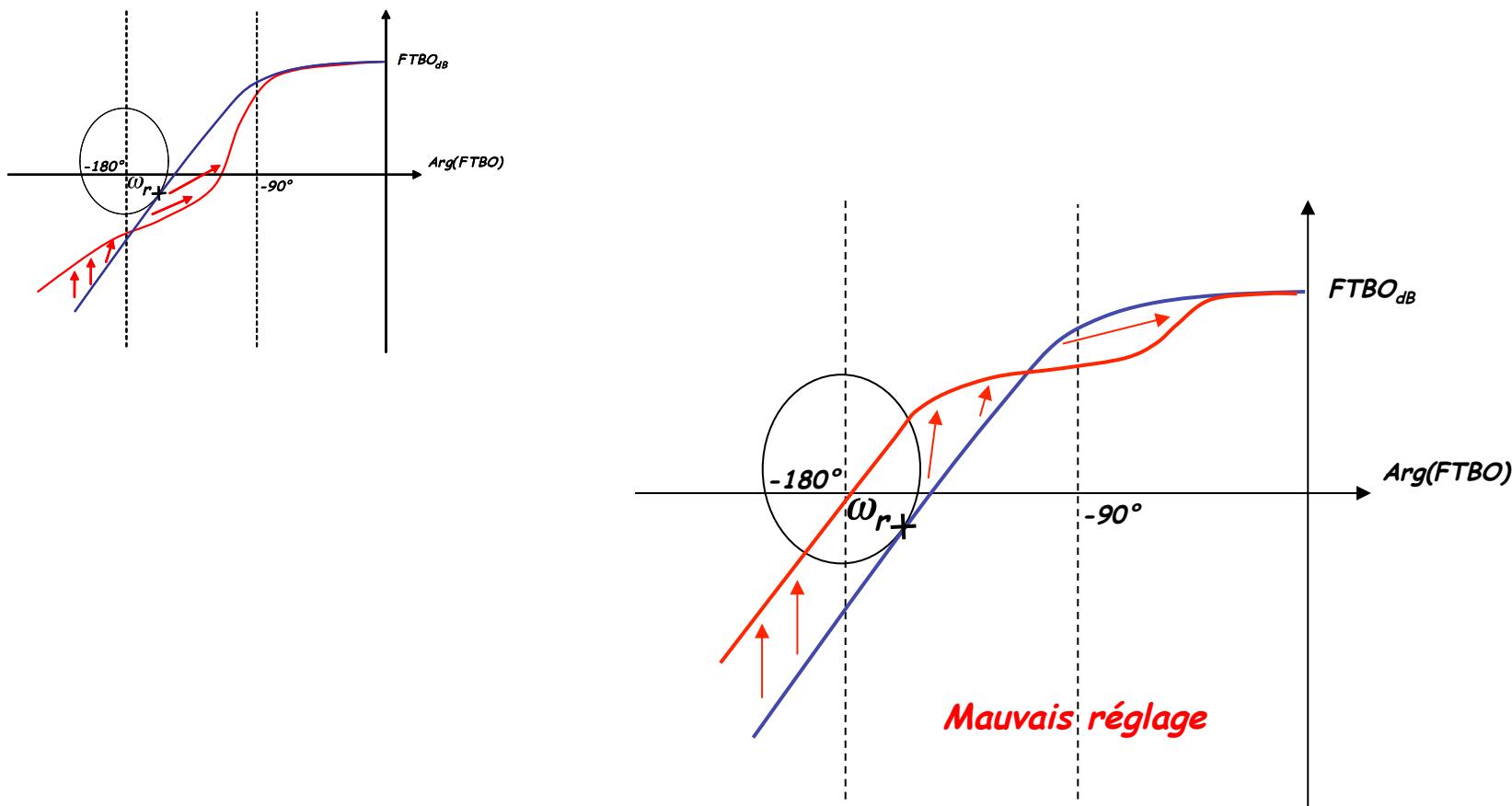
V.2. Correction proportionnelle et dérivée (à avance de phase)

Illustration dans le plan de Black.



V.2. Correction proportionnelle et dérivée (à avance de phase)

Illustration dans le plan de Black (suite).



V.3. Correction proportionnelle et intégrale (PI) et correction à retard de phase

Correcteur proportionnel et intégral :

$$C(p) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau \cdot p} \right)$$

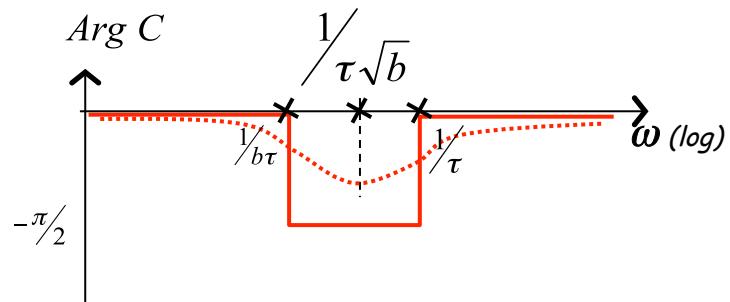
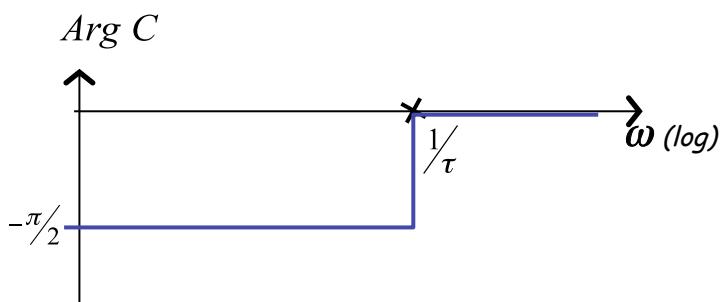
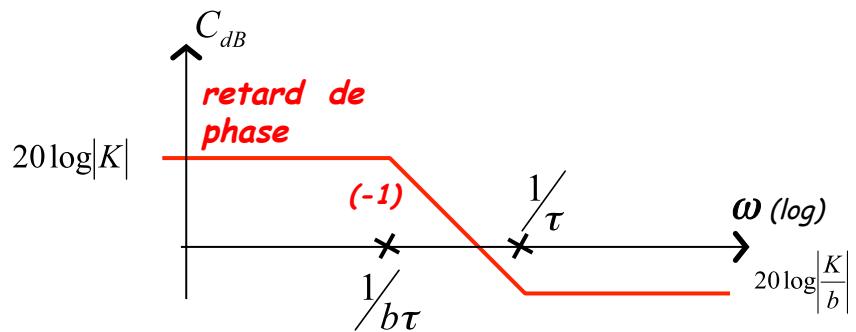
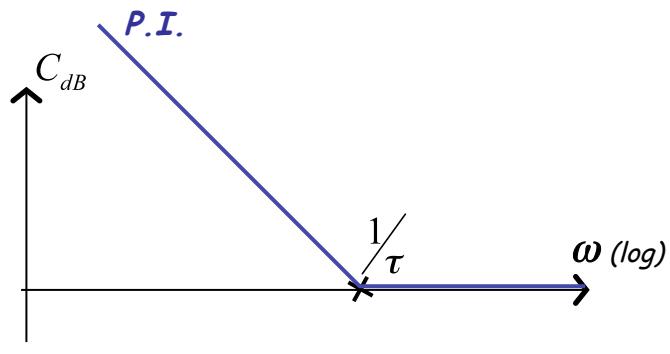
Amélioration de la précision.

Correcteur à retard de phase :

$$C(p) = K \cdot \frac{1 + \tau \cdot p}{1 + b \tau \cdot p} \quad \text{avec } b > 1$$

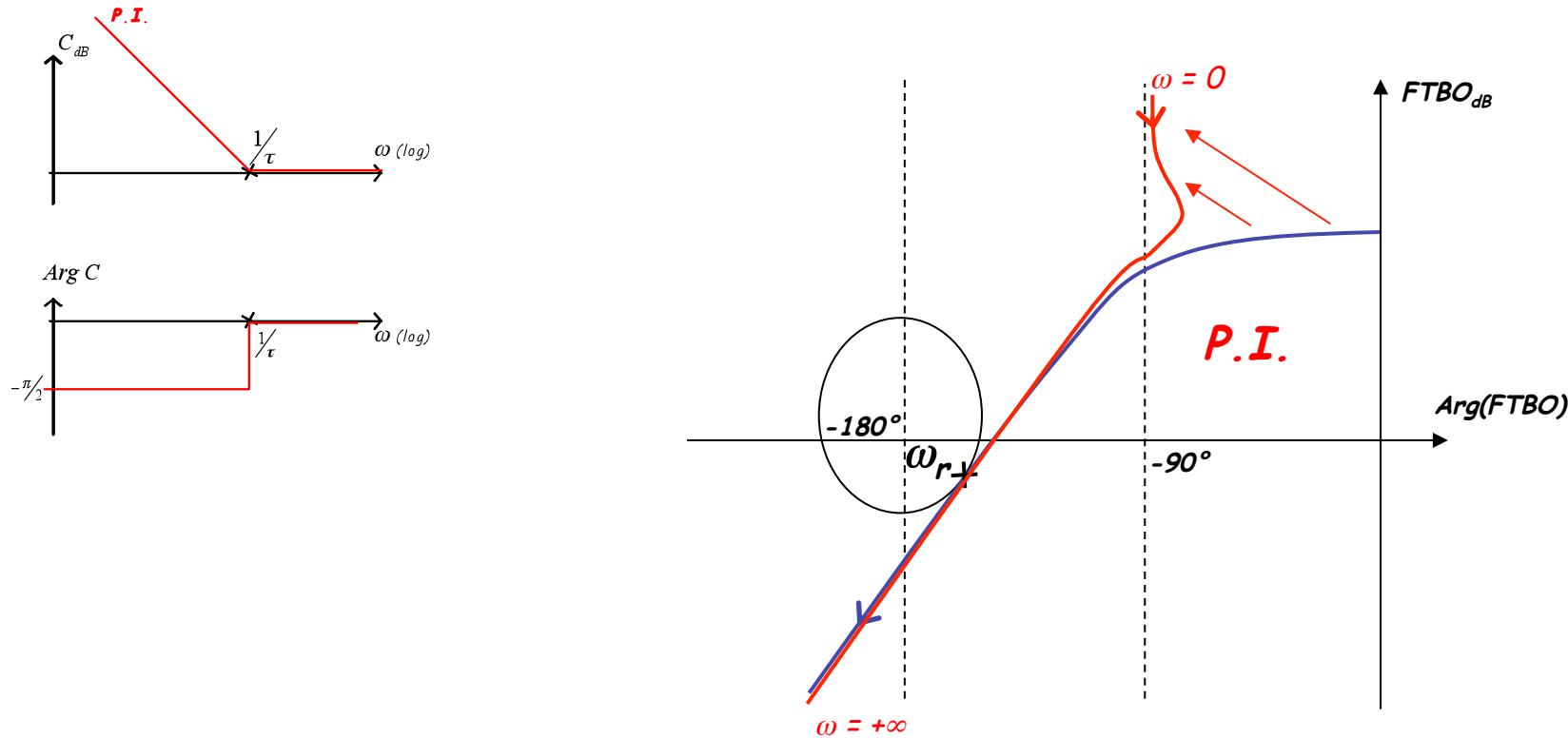
Gain et retard en basse freq.

V.3. Correction proportionnelle et intégrale (PI) et correction à retard de phase



V.3. Correction proportionnelle et intégrale (PI) et correction à retard de phase

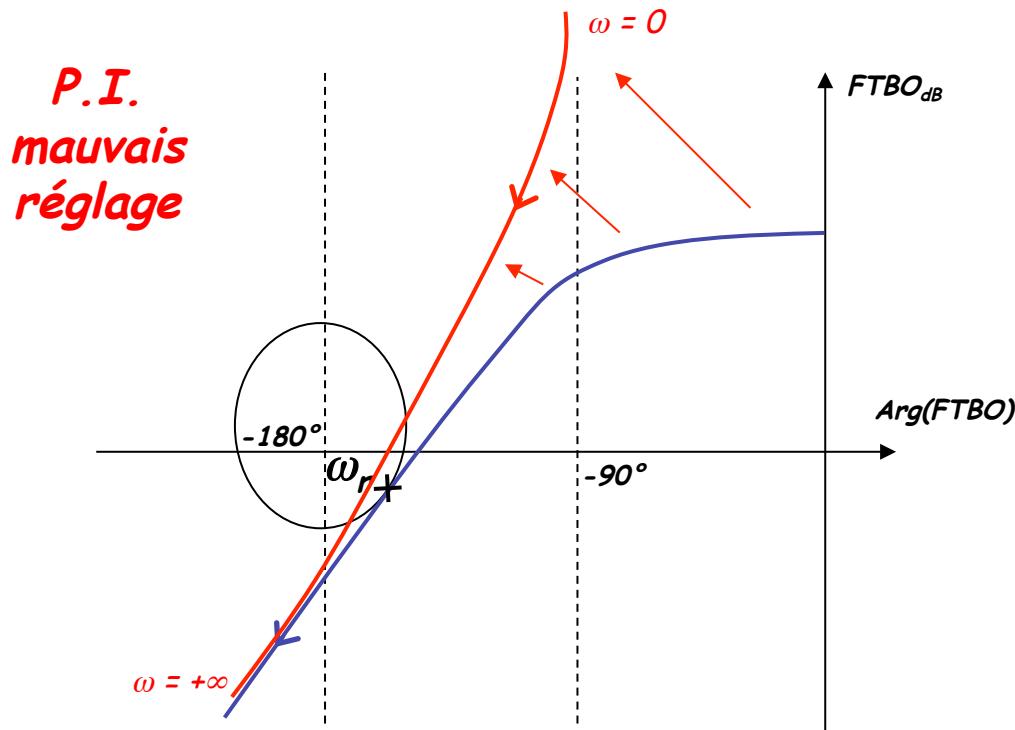
Illustration dans le plan de Black.



Le PI apporte une augmentation importante du gain en BO aux basses freq.
ce qui permet d'améliorer la précision (sans modif. À proximité du pts critique).

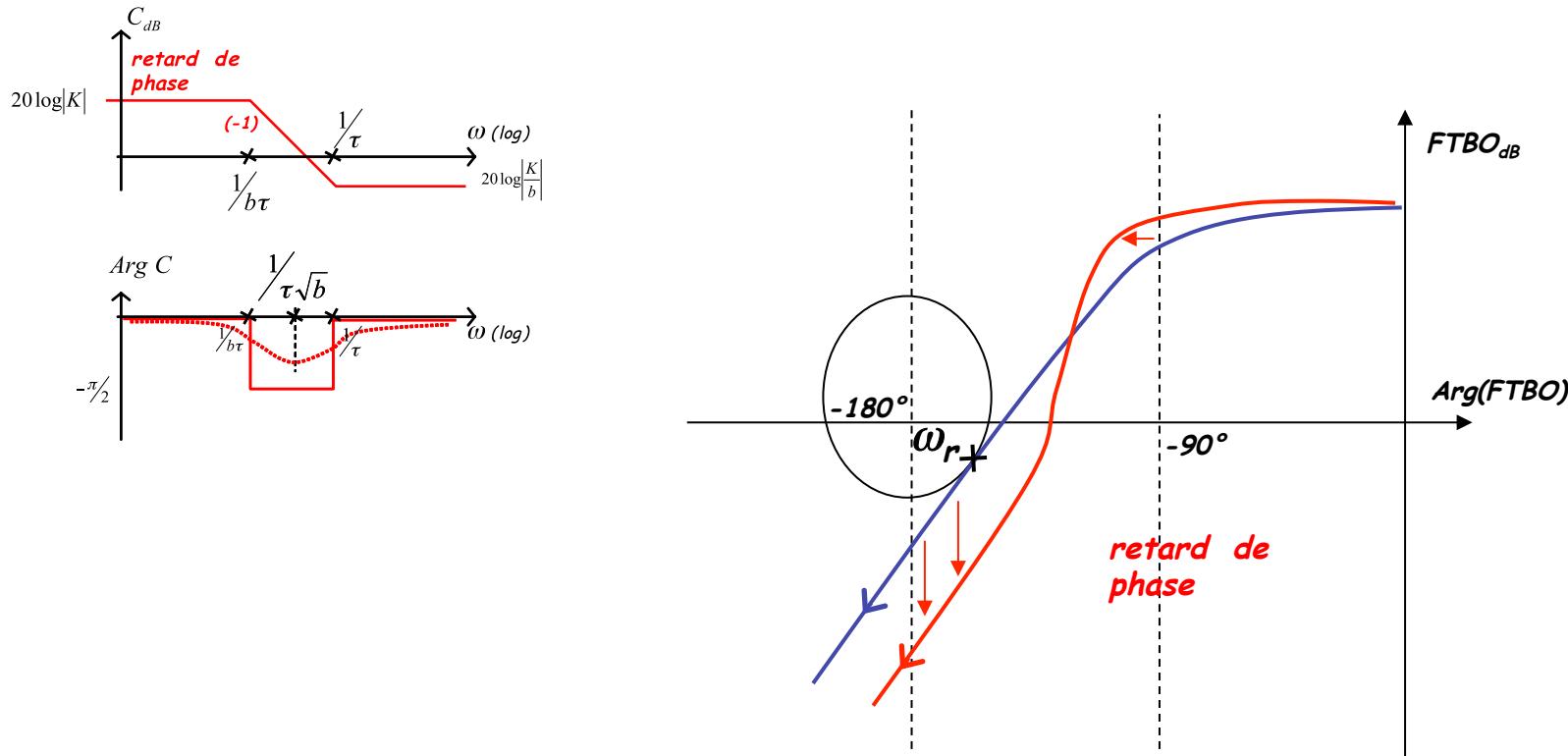
V.3. Correction proportionnelle et intégrale (PI) et correction à retard de phase

Illustration dans le plan de Black.



V.3. Correction proportionnelle et intégrale (PI) et correction à retard de phase

Illustration dans le plan de Black.

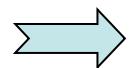


V.4. Correcteur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID)

Transmittance de Laplace théorique : $C(p) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \tau_d \cdot p \right)$



Pas de sens physique (d° num. > d° dénom.).



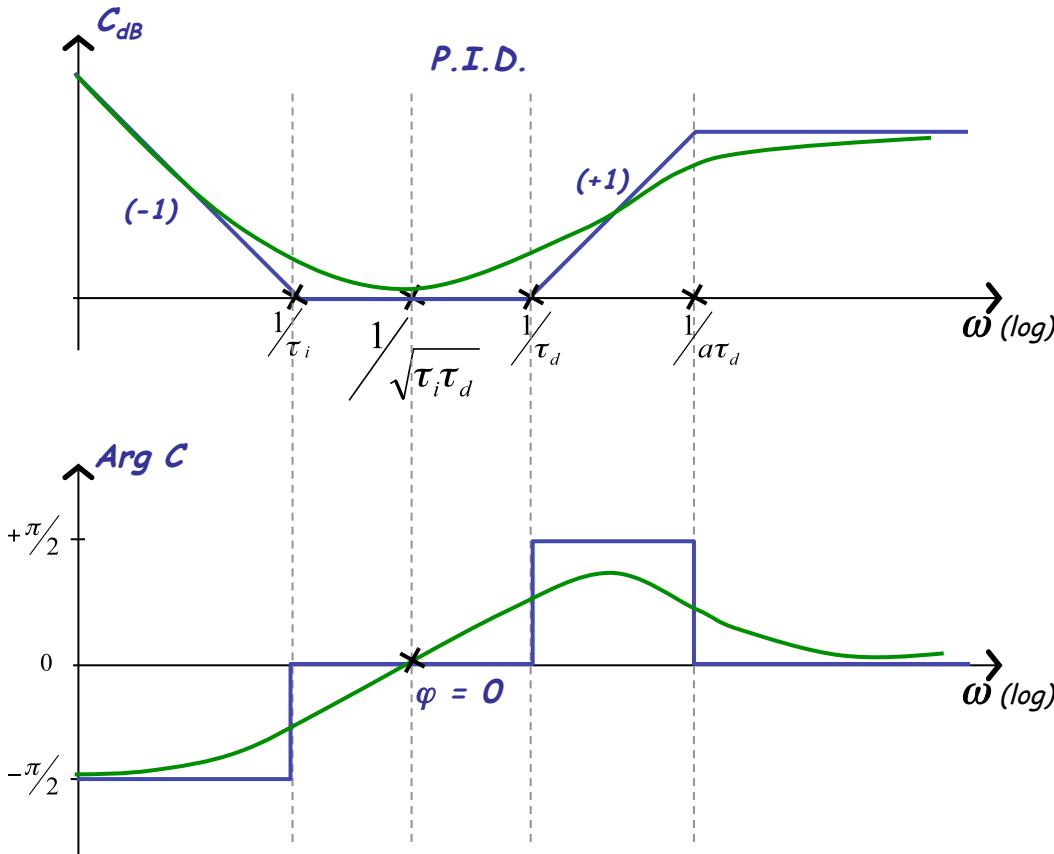
Correcteur P.I.D. réel :

$$C(p) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \frac{\tau_d \cdot p}{1 + a\tau_d \cdot p} \right) \quad \text{avec } a < 1$$

V.4. Correcteur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID)

Diagramme de Bode (P.I.D. réel).

$$\frac{1}{\tau_i} < \frac{1}{\tau_d} < \frac{1}{a\tau_d}$$



Pivot du P.I.D.

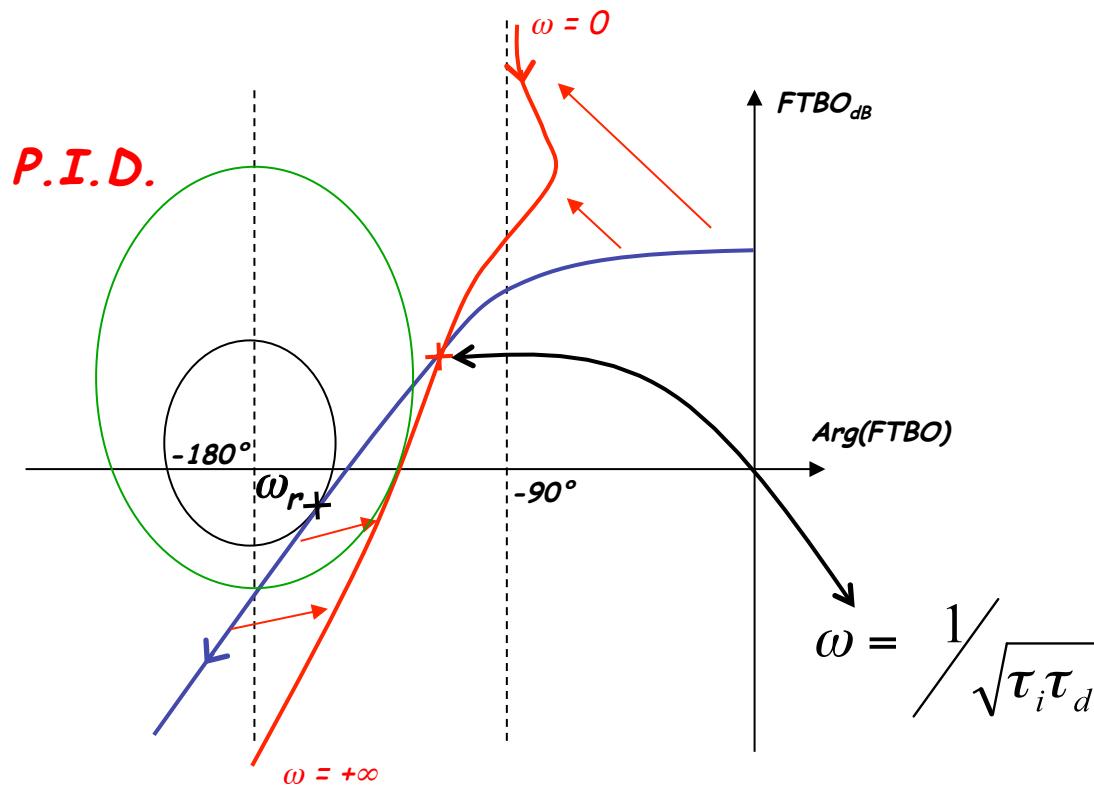
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_i \tau_d}}$$

$$C_{dB} = 0$$

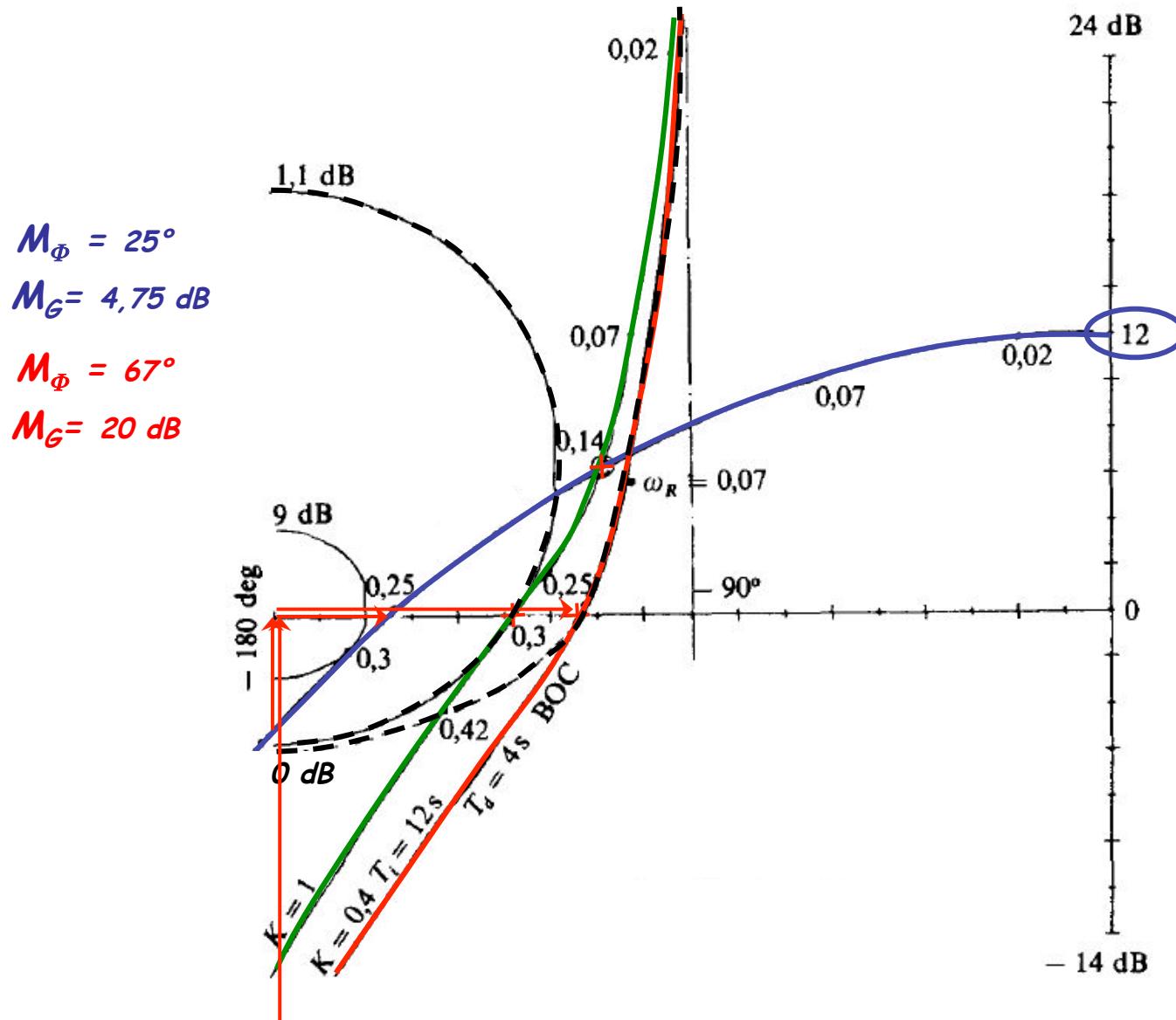
$$\varphi = 0$$

V.4. Correcteur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID)

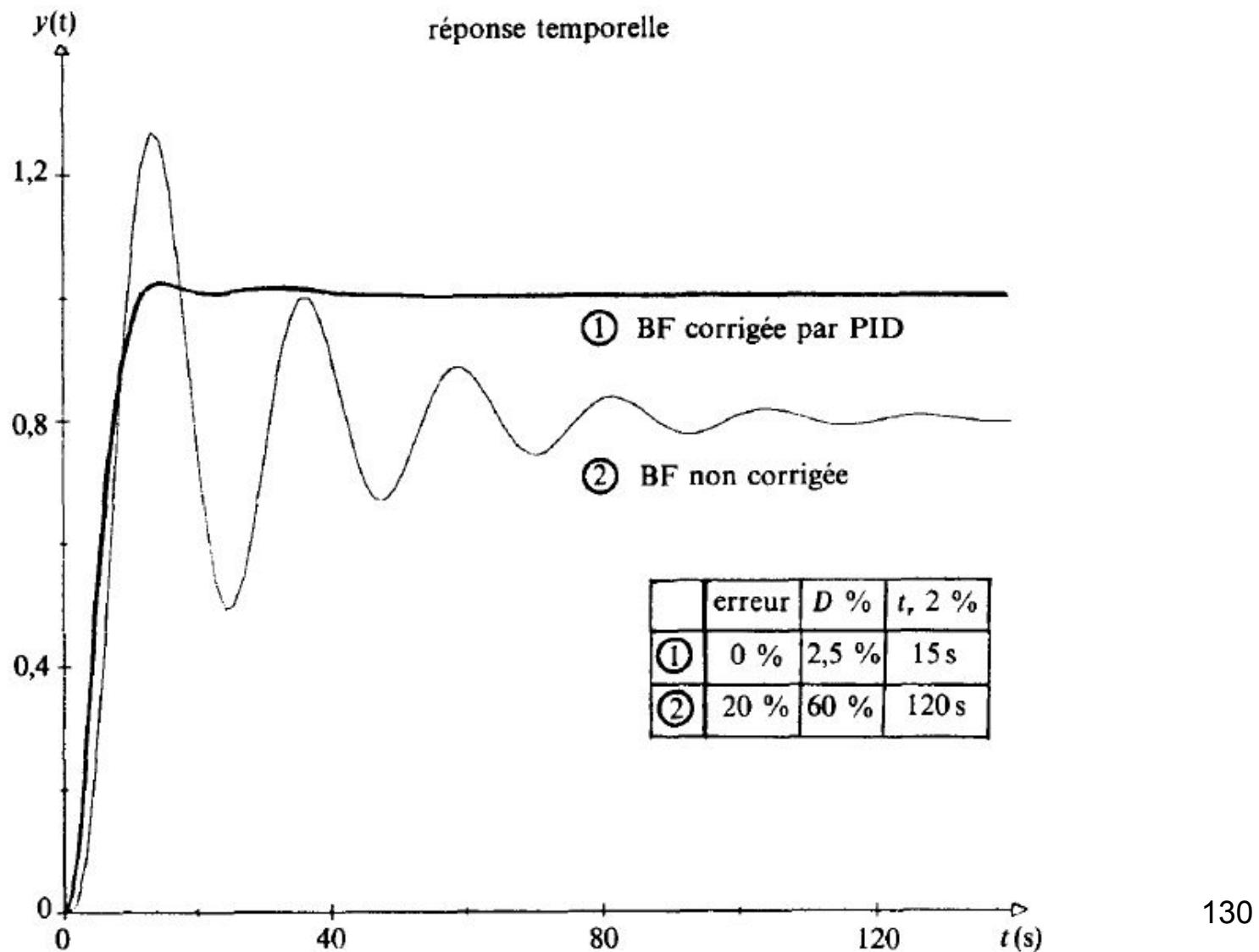
Illustration dans le plan de Black.



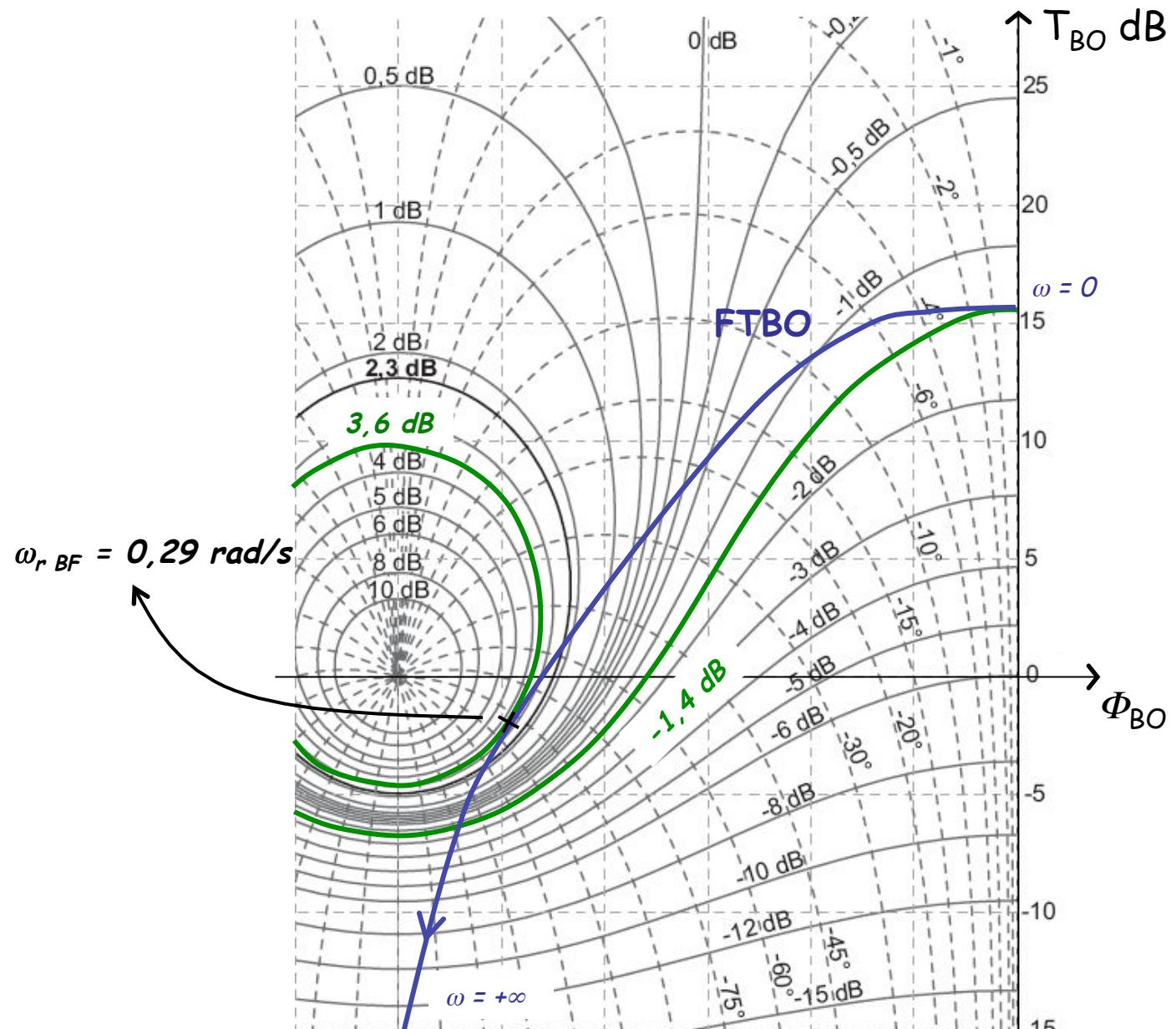
V.4. Correcteur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID)



V.4. Correcteur à action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée (PID)



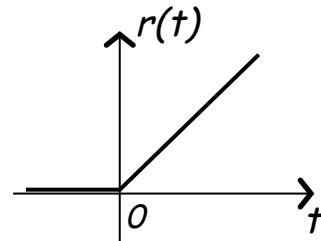
V.5. Modèle du 2nd ordre



Signaux types :

Rampe unitaire causale.

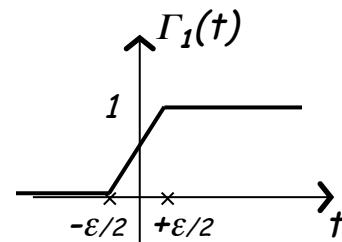
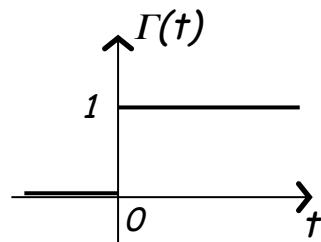
$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \quad (\text{causalité}) \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



Echelon unitaire $\Gamma(t)$ - Fonction de Heaviside.

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \quad (\text{causalité}) \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

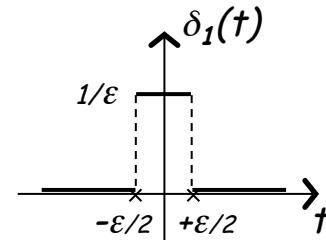
$\Gamma(t)$ dérivée de $r(t)$



Impulsion unitaire $\delta(t)$ - Impulsion de Dirac.

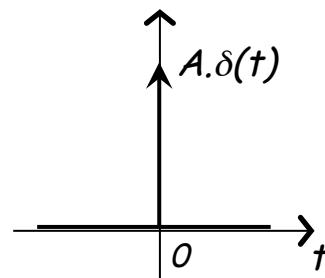
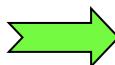
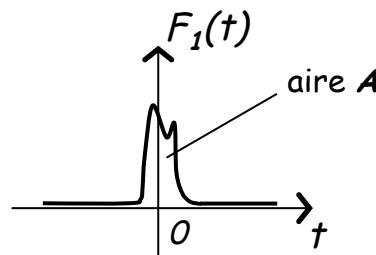
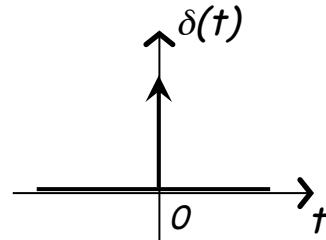
En dérivant Γ_1 on obtient δ_1 :

$$\text{tq} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t) dt = 1$$



pour $\varepsilon \rightarrow 0$ $\delta_1 \rightarrow \delta$ (distributions)

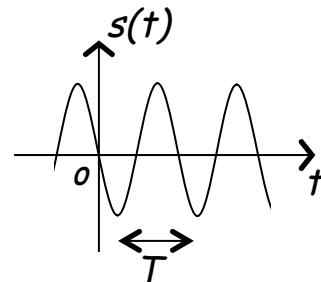
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



Signal sinusoïdal (périodique).

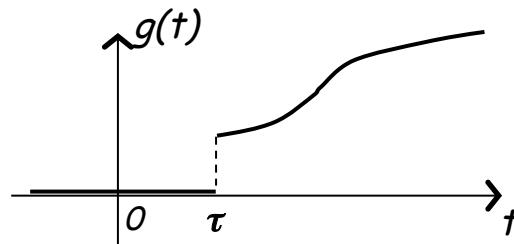
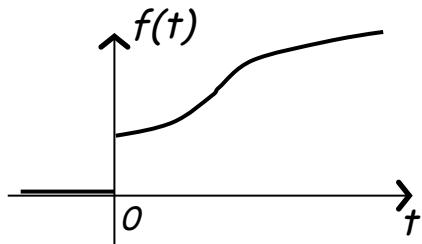
$$s(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

Signal de test pour la réponse fréquentielle.



Signal causal retardé.

$$g(t) = f(t - \tau)$$



Produit de convolution.

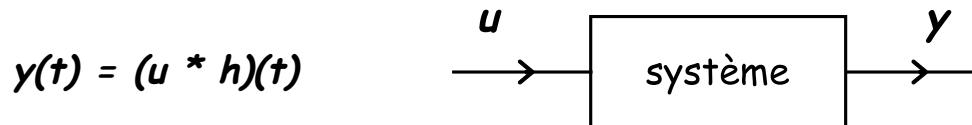
$$p(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot y(t - \theta) d\theta = (y * x)(t)$$

pour des signaux causals :

$$(x * y)(t) = \int_0^t x(\theta) \cdot y(t - \theta) d\theta$$

Le dirac est l'élément neutre de la convolution : $(x * \delta)(t) = x(t)$

Pour un S.L.T.I, en notant $h(t)$ sa réponse impulsionnelle on a:



Transformée de Laplace monolatère.

$$TL[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt} dt \quad p = \sigma + j\omega$$

Linéarité.

$$a.f(t) + b.g(t) \xrightarrow{TL} a.F(p) + b.G(p)$$

Convolution.

$$(f * g)(t) \xrightarrow{TL} F(p).G(p)$$

Fonction de transfert - $H(p)$.

$$y(t) = (u * h)(t) \xrightarrow{TL} Y(p) = U(p).H(p) \quad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Dérivation en temps.

pour une fonction f dérivable en tout point :

$$TL[f'(t)] = p.F(p) - f(0^-)$$

pour une fonction f causale avec une discontinuité d'ordre 1 en 0 :

$$TL[f'(t)] = p.F(p)$$

Intégration.

$$TL\left[\int_0^t f(\theta)d\theta\right] = \frac{1}{p} \cdot F(p)$$

Dérivation en p .

$$\frac{dF(p)}{dp} = TL[-t.f(t)]$$

Théorème du retard temporel.

$$g(t) = f(t - \tau) \rightarrow TL[g(t)] = e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

Translation en p.

$$TL[e^{\alpha t} \cdot f(t)] = F(p - \alpha)$$

Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot TL[f(t)] = f(0^+)$$

Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot TL[f(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$$

Transformées de Laplace usuelles.

Dirac : $\delta(t) \xrightarrow{TL} 1$

$$\sin(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Echelon : $\Gamma(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p}$

$$\cos(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Rampe : $t \xrightarrow{TL} \frac{1}{p^2}$

$$e^{-a.t} \cdot \cos(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-a.t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{p + a}$$

$$t \cdot e^{-a.t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{(p + a)^2}$$

Intégrateur pur.

de fonction de transfert

$$\tau \cdot y'(t) = u(t)$$



$$H(p) = 1 / \tau \cdot p$$

$$H(j\omega) = 1 / j\omega\tau$$

