Automatique ISMIN 1A P2018 Rattrapage – 27 juin 2016, 1h30

Aucun document n'est autorisé. Téléphone interdit. La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte 4 exercices (5 pages).

Un certain nombre de résultats relatifs à la réponse indicielle d'un système du 2nd ordre sont rappelés en annexe.

Note sur 20.

<u>Exercice 1</u> : (2 pts)

On considère un système de transmittance de Laplace : $T(p) = \dfrac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p}$

Le système *T(p)*, est placé dans une boucle de régulation dont la boucle de retour à un gain constant positif *K*.
A quelle condition cet asservissement est-il stable ?

<u>Exercice 2</u> : (2 pts)

1. Donner les marges de phase et de gain du système dont le diagramme de Bode est donné figure 1 (voir feuille réponse en fin de sujet).
2. Donner les marges de phase et de gain du système dont la représentation de Black est donnée figure 2 (voir feuille réponse en fin de sujet).

Vous rendrez avec votre copie la feuille réponse donnée en dernière page du sujet (faire figurer les marges de gain et de phase sur cette feuille).

<u>Exercice 3</u> : (3 pts)

On veut réguler un système à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G(p) = \frac{3}{1 + 2p}$$

Le cahier des charges spécifie les performances suivantes pour le système régulé :

- erreur de position nulle lorsque l'entrée du système asservi est un échelon.
- deux pôles pour lesquels le coefficient d'amortissement et la pulsation propre associés sont respectivement : m = 0 ,7 et ω_0= 1 rad/sec.

1. Proposer la structure d'un régulateur permettant de satisfaire le cahier des charges en choisissant une des trois possibilités suivante: **proportionnel**, **proportionnel-intégral** ou **proportionnel-dérivé**. Expliquer succinctement votre choix.

2. Calculer les coefficients de la fonction de transfert du régulateur choisi pour satisfaire le cahier des charges.

Exercice 4 : (13 pts)

Un processus physique est modélisé par une fonction de transfert du 2nd ordre :

$$G(p) = \frac{G_0}{(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)} \qquad , G_0 = 1, \tau_1 = 10\ s, \tau_2 = 2\ s$$

Ce processus est inséré dans une boucle d'asservissement, cf. figure 3, contenant un régulateur proportionnel : *C(p) = K.*

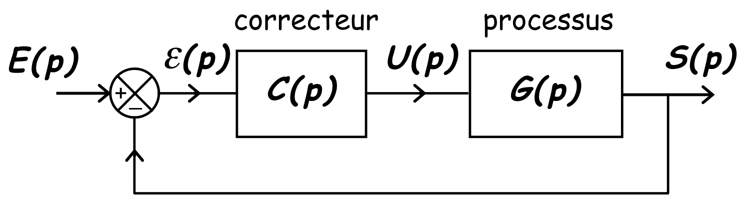


Figure 3.

1. a. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée :
   H(p) = S(p)/E(p) et la mettre sous la forme canonique :

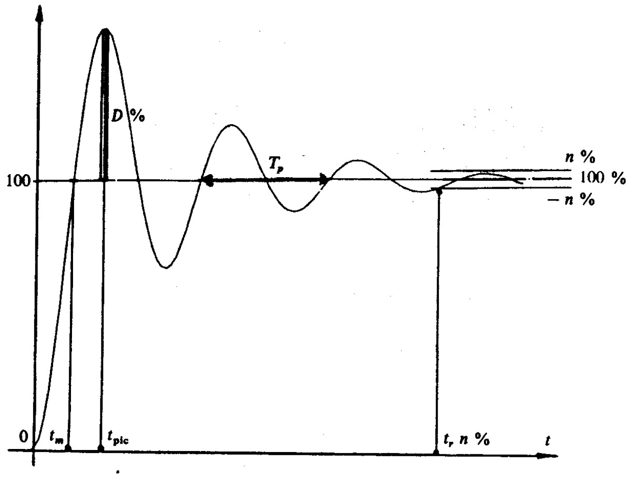
$$H(p) = \frac{H_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

   En déduire les expressions des paramètres de *H(p)* :
   H_0 gain statique
   m coefficient d'amortissement
   ω_0 pulsation propre non amortie
   En fonction de τ_1, τ_2, G_0, et K.
   b. Calculer la valeur de K pour obtenir $m = 0,7$.

2. Dans la suite de l'exercice, la consigne est un échelon unitaire et K est réglé tel que $m = 0,7$.
   a. On se place en régime permanent, déterminer l'expression de $s(+\infty)$ et calculer sa valeur.
   b. Exprimer $\varepsilon_0(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$, la calculer.
   c. Calculer la valeur du $t_{r5\%}$.
   d. Représenter l'allure de $s(t)$.

3. Pour diminuer l'erreur de position, on augmente la valeur de K.
   a. Calculer la valeur de K permettant d'obtenir $\varepsilon_0(+\infty) = 0,05$ V.
   b. En déduire la nouvelle valeur du coefficient d'amortissement m.
   c. Calculer l'amplitude relative (en %) du premier dépassement D_1.
   d. Calculer la nouvelle valeur du $t_{r5\%}$.
   e. Représenter l'allure de $s(t)$.
   f. Calculer $u(0^+)$. Sachant que cette grandeur de commande est maximale à l'instant $t = 0^+$, en déduire la dynamique nécessaire à la sortie du correcteur pour que l'asservissement fonctionne toujours en régime linéaire.

Annexe – Réponse indicielle des systèmes linéaires du 2nd ordre.



$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^{\ 2}}}$$

Pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2.m^2}$

Pulsation de coupure $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2.m^2 + \sqrt{1 + \left(1 - 2.m^2\right)^2}}$

Facteur de résonance $M = \dfrac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$

Temps de montée $t_m = \dfrac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}.\left(\pi - \arccos m\right)$

Temps de réponse à $n\%$ $(m<0,7)$ $t_r \cong \dfrac{1}{\omega_0 .m}.\ln\left(\dfrac{100}{n}\right)$

Temps de pic $t_{pic} = \dfrac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$

Pseudo-période $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$

Dépassement $D\% = 100.e^{-\pi .m / \sqrt{1-m^2}}$

Nombre d'oscillations complètes $n \cong Q = \dfrac{1}{2m}$

m	$t_m\omega_0$	$t_{r\,5\%}\omega_0$	$t_{pic}\omega_0$	$T_p\omega_0$	$D\ \%$	ω_r/ω_0	ω_c/ω_0	ω_c/ω_r	M_{dB}	m
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	0,1
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	0,15
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	0,2
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	0,25
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	0,3
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	0,35
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	0,4
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	0,45
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,8	1,2	0,5
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	0,55
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	0,6
0,65	3	5	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	0,65
0,7	3,29	3	4,4	8,8	4,6	0,14	1,01	7,14	0	0,7
0,75	3,66	3,1	4,75	9,5	2,84	-	0,94	-	-	0,75
0,8	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	-	0,87	-	-	0,8
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	-	0,81	-	-	0,85
0,9	6,17	4	7,21	14,41	0,15	-	0,75	-	-	0,9
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	-	0,69	-	-	0,95

Nom : **Prénom :**

Feuille réponse exercice 2 :

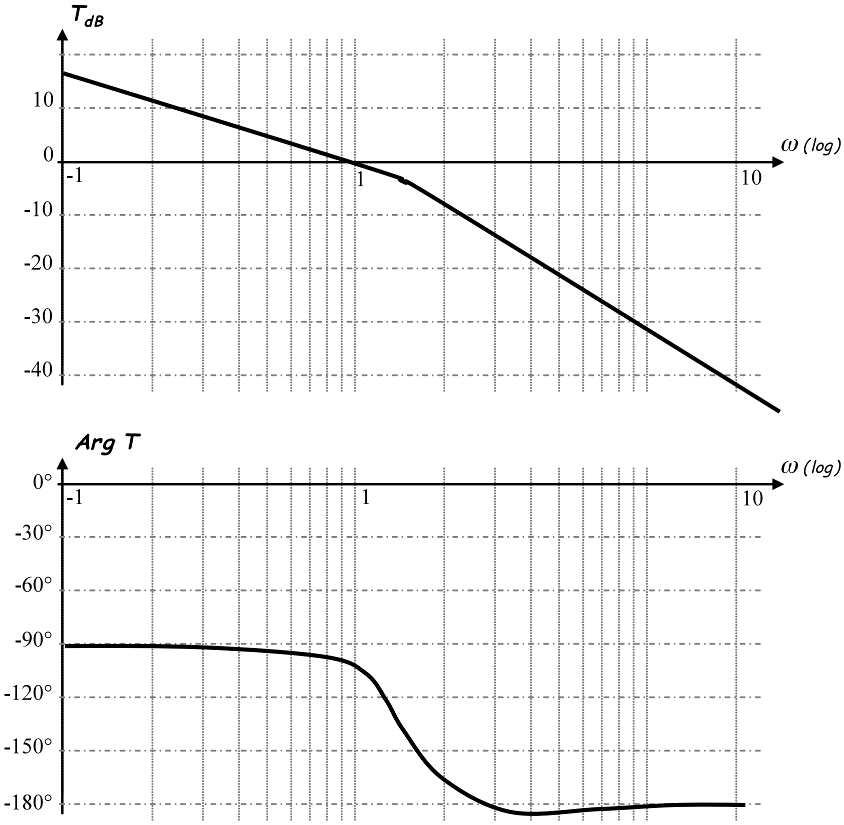


Figure 1.

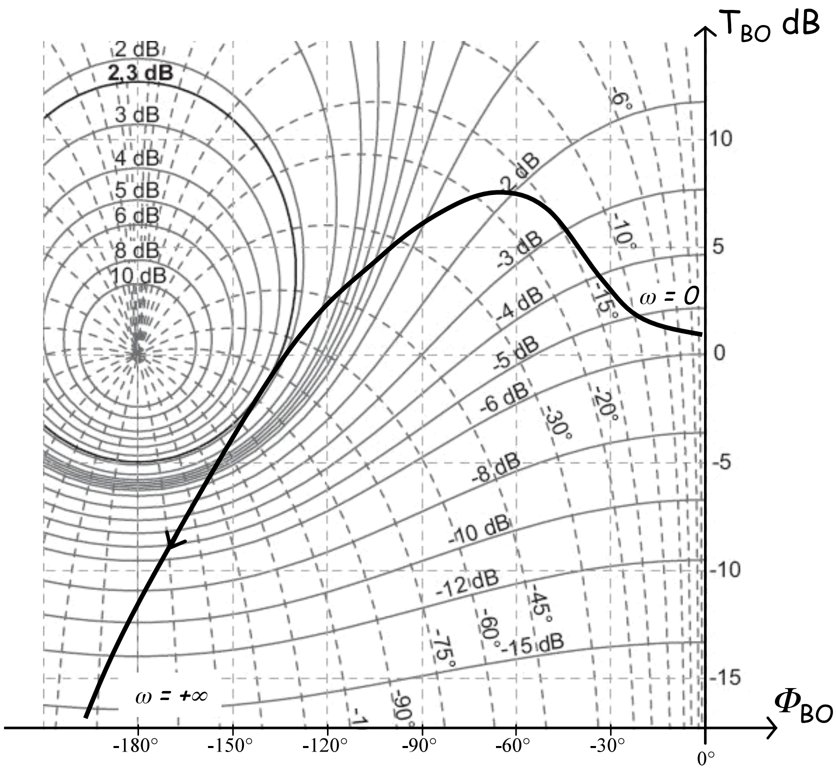


Figure 2.

Exercice 1

2

$$FTBF = H(p) = \frac{T(p)}{1 + K.T(p)}$$

polynôme caractéristique

$$1 + \frac{K}{p^3+2p^2+2p} = 0 \Rightarrow p^3+2p^2+2p+K=0 \quad \text{avec } K>0$$

coeff de m̃ signe non nuls (condition nécessaire Routh)

p^3	1	2
p^2	2	K
p^1	$\frac{4-K}{2}$	0
p^0	$K>0$	

condition de stabilité

$$\frac{4-K}{2} > 0$$

$$\boxed{K < 4}$$

Exercice 2

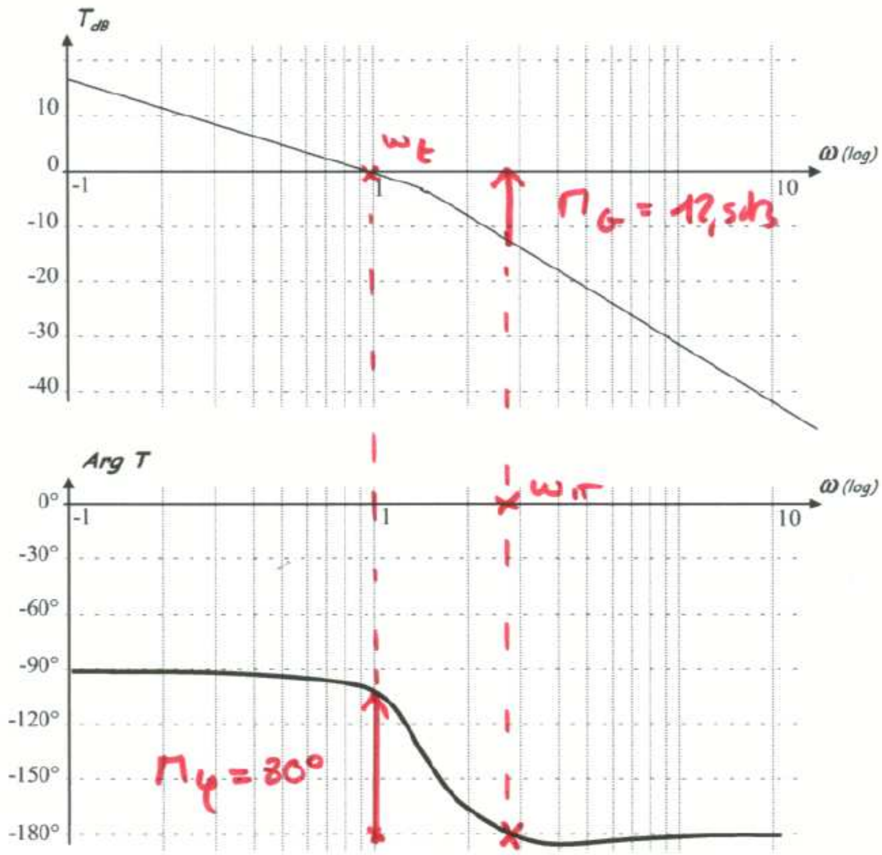


Figure – 1.

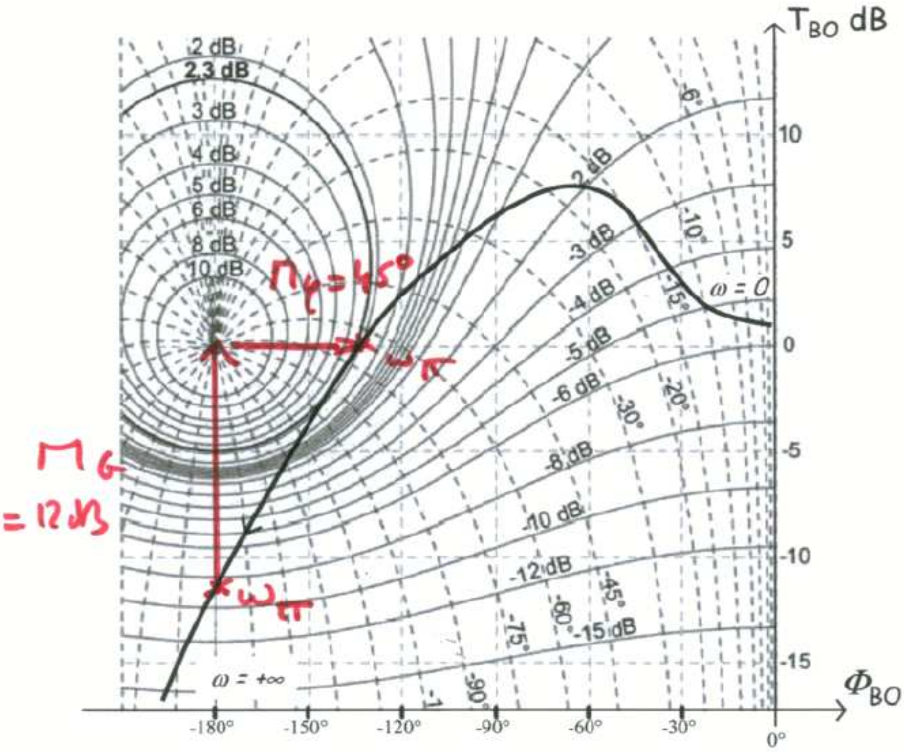


Figure – 2.

Exercice 3 : $G(p) = \dfrac{3}{1+2p}$ (3 pts)

1) Pour obtenir une erreur statique nulle en réponse à un échelon le système doit être de classe 1 (au plus)

1 $\Rightarrow$ le correcteur doit ajouter un pôle $p=0$

d'où le choix d'un correcteur P.I.

2) Correcteur P.I. : $C(p) = K\left(1 + \dfrac{1}{\tau p}\right)$

Avec la FTBF $= \dfrac{C(p).G(p)}{1+C(p).G(p)}$

éq. caractéristique : $1 + C(p).G(p) = 0$

$$1 + \frac{3}{1+2p} \cdot K\left(1 + \frac{1}{\tau p}\right) = 0$$

$$1 + \frac{3K}{1+2p} \cdot \left(\frac{\tau p + 1}{\tau p}\right) = 0$$

2 $$\tau p.(1+2p) + 3K.(1+\tau p) = 0$$

$$\tau p + 2\tau p^2 + 3K + 3K\tau p = 0$$

$$2\tau p^2 + (\tau + 3K\tau)p + 3K = 0$$

$$p^2 + \left(\frac{1+3K}{2}\right).p + \frac{3K}{2\tau} = 0$$

compte tenu de l'éq. carac. d'un 2nd ordre :

$$p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

on a $\dfrac{1+3K}{2} = 2m\omega_0 \Rightarrow K = \dfrac{4m\omega_0 - 1}{3} = \underline{0,6}$

et $\omega_0^2 = \dfrac{3K}{2\tau} \Rightarrow \tau = \dfrac{3K}{2\omega_0^2} = \dfrac{3\times 0,6}{2\times 1^2} = \underline{0,9}$

Exercice 4 **13 pts**

Amortissement du 2nd ordre

1- a)

$$H(p) = \frac{C(p).G(p)}{1 + C(p).G(p)} = \frac{KG_0}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) + KG_0}$$

$$H(p) = \frac{KG_0}{1 + KG_0 + (\tau_1 + \tau_2)p + \tau_1 \tau_2 p^2}$$

$$H(p) = \frac{KG_0}{1+KG_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau_1+\tau_2}{1+KG_0}.p + \frac{\tau_1 \tau_2}{1+KG_0} p^2}$$

1,5

d'où

$$\left| \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1+KG_0}{\tau_1 \tau_2}} \\ H_0 = \dfrac{KG_0}{1+KG_0} \\ m = \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2 (1+KG_0)}} \quad (i) \end{array} \right.$$

b) $(i) \Rightarrow \tau_1 \tau_2 (1+KG_0) = \left(\dfrac{\tau_1+\tau_2}{2m}\right)^2$

1

$$\hookrightarrow K = \frac{1}{G_0}\left[\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2m}\right)^2 \cdot \frac{1}{\tau_1 \tau_2} - 1\right]$$

<u>A.N.</u> $\underline{K} = \dfrac{1}{1}\left[\left(\dfrac{10+2}{2 \times 0{,}7}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 10} - 1\right] = \underline{2{,}67}$

2- a) $E(p) = \dfrac{1}{p}$

soit $S(p) = H(p) \cdot \underbrace{\frac{1}{p}}_{E(p)}$

Th. de la valeur finale

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = s(+\infty) = \lim_{p \to 0} p\,S(p) = \lim_{p \to 0} H(p) = H_0$$

.../...

1,5 soit $s(+\infty) = \frac{KG_0}{1+KG_0} = \frac{2,67\times 1}{1+2,67\times 1} = 0,73$ S.I.

on a bien $S(p) = \frac{1}{p}\,\frac{H_0}{1+2m\omega_0 p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$

$\{T.L.\}^{-1}$

$s(t) = H_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega_0 t}\sin(\dots)\right)$

$\downarrow +\infty$

H_0

b) $\varepsilon_0(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$

pour un échelon unitaire $e(+\infty) = 1$ S.I.

1 soit $\underline{\varepsilon_0(+\infty)} = 1 - 0,73 = \underline{0,27 \text{ S.I.}}$

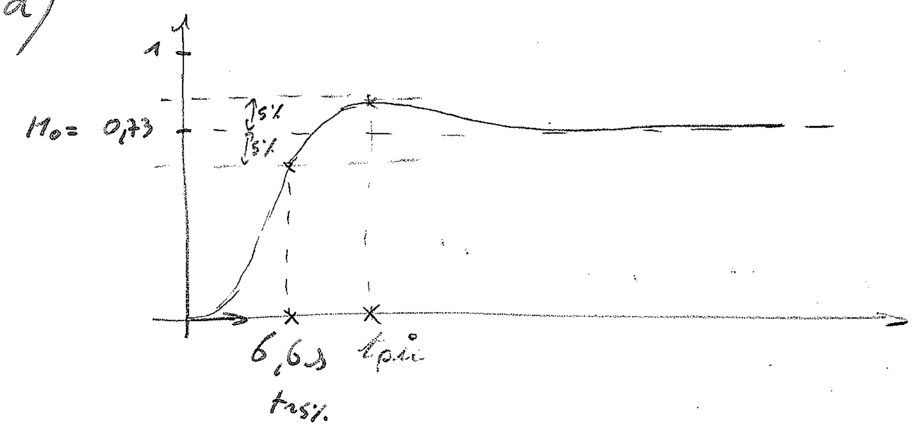
c) pour $m \simeq 0,7$ $\quad \frac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = 0,44$

$$t_{r5\%} = 0,44\times\frac{2\pi}{\omega_0}$$

1 avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1+KG_0}{\tau_1\tau_2}} = \sqrt{\frac{1+2,67}{2\times 10}} = 0,42$ rad/s

$$\underline{t_{r5\%}} = 0,44\times\frac{2\pi}{0,42} = \underline{6,6\ s}$$

d)

2 

pour $m = 0,7$
le 1er dépassement D_1
correspond à un dépassement
de 5%

3_a) $\varepsilon_0(+\infty) = 1 - \frac{KG_0}{1+KG_0} = \frac{1}{1+KG_0}$

1 ↳ $K = \frac{1}{G_0}\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon_0(+\infty)} - 1\right]$

$\underline{A.N.}$ $\boxed{K} = \frac{1}{0,05} - 1 = 20 - 1 = \underline{19}$

b) 1 $\underline{A.N.}$ $\underline{m} = \frac{10+2}{2\sqrt{10\cdot 2\cdot(1+19)}} \simeq \underline{0,3}$ $\quad m \searrow$

.../...

1

c) $D_{1\%} = 100 \times e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$ A.N. $D_{1\%} = 100 \times e^{\frac{-0,3 \cdot \pi}{\sqrt{1-0,3^2}}}$

$\underline{D_{1\%} = 37\%}$

$\left(D_1 = H_0 \, e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}} \right.$

$\left. H_0 = \frac{KG_0}{1+KG_0} = \frac{19}{20} = 0,95 \right)$

1

d) pour $m = 0,3$

on lit sur l'abaque $\frac{t_{r5\%}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = 1,6$

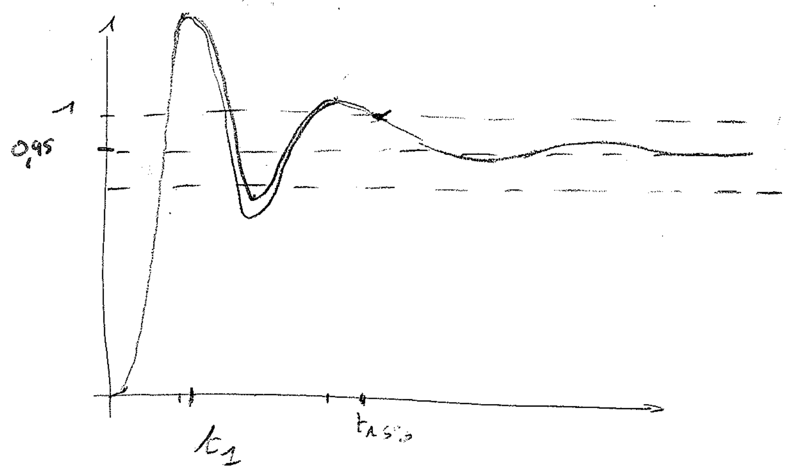
$\omega_0 = \sqrt{\frac{1+KG_0}{\tau_1\tau_2}} = \sqrt{\frac{1+19}{2.10}} = 1$ rad/s $\quad t_{r5\%} = 1,6 \times \frac{2\pi}{1}$

$\underline{t_{r5\%} = 10 \text{ s}}$

e)

$\underline{t_1} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} = \underline{3,3} \text{ s} \qquad T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} = 6,5 \text{ s}$

1



1

f) On a $U(p) = \frac{S(p)}{G(p)} = \frac{H(p)}{G(p)} \cdot E(p)$

$\hookrightarrow U(p) = \frac{K}{1+K.G(p)} \cdot E(p) \qquad E(p) = \frac{1}{p}$

$U(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+KG_0} \times \frac{1}{p}$

Th de la valeur initiale

$u(0^+) = \lim_{p \to +\infty} pU(p) = \cancel{}\, K \qquad \underline{u(0^+) = 19\,V}$!

saturation du correcteur calculée de 19 V.