証明可能性述語の様相論理

渋谷伊織 (鹿島研究室)

情報理工学院 数理・計算科学系 B3

2025 年度前学期 B2D フォーラム 7 月 9 日

はじめに

- 数理論理学の中でも特に Gödel の不完全性定理に興味がある.
- 不完全性定理にまつわる数理論理の話題はいくつか存在する.
  - e.g., 反映原理, 準古典算術, Magari 代数, 算術の超準モデル, 自己言及文 (種々のパラドックス)
- 今回は特に様相論理を用いたアプローチを紹介する.

目次

モチベーション

- Gödel の第 2 不完全性定理は，一般に「**PA** を含む無矛盾な再帰的可算理論は自身の無矛盾性を証明できない」という言明として紹介されることが多い．
- Gödel 自身は自然に作られた証明可能性述語 $\mathbf{Prov}_T(x)$ をつくって第 2 不完全性定理を証明した．
- しかし，証明可能性述語の取り方によっては上述の結果が成立しない場合もある (cf. Rosser の証明可能性述語)．

モチベーション

- また当該定理は特定の導出可能性条件を満たす任意の述語に対して成立することが知られている．
  $\Longrightarrow$ 第 2 不完全性定理はそもそも「理論の無矛盾性の証明不可能性」を主張する定理なのか？
- これは算術体系における証明と形式的証明可能性の間の摩擦現象であると解釈でき，この部分に第 2 不完全性定理研究の妙味があると発表者は考える．

モチベーション

- 発表者は，不完全性定理の分析を通して，通常の数学，形式的数学，コード化された形式的数学の間の精妙な関係を理解したいと考えている．
- この文脈で有用なツールのひとつが様相論理 (証明可能性論理) である．

数学 (自然数論等) $\to$ 形式的数学 $\leftrightarrow$ コード化された形式的数学

Gödel の不完全性定理

第 1 不完全性定理

Peano 算術 (**PA**) を含む無矛盾で再帰的可算な理論 T において，$T \nvdash G$ かつ $T \nvdash \neg G$ となる文 G が存在する.

Gödel の不完全性定理

第 1 不完全性定理

Peano 算術 (**PA**) を含む無矛盾で再帰的可算な理論 T において，$T \nvdash G$ かつ $T \nvdash \neg G$ となる文 G が存在する.

- 第 2 不完全性定理は第 1 不完全性定理の証明を算術内で実行することにより得られる.
- 以下，T を **PA** を含む再帰的可算な理論とする.

Gödel の不完全性定理

第 1 不完全性定理

Peano 算術 (**PA**) を含む無矛盾で再帰的可算な理論 T において，$T \nvdash G$ かつ $T \nvdash \neg G$ となる文 G が存在する．

- 第 2 不完全性定理は第 1 不完全性定理の証明を算術内で実行することにより得られる．
- 以下，T を **PA** を含む再帰的可算な理論とする．

証明可能性述語

- $\mathbf{Pr}_T(x)$:「x は論理式 φ の Gödel 数であり，φ は T で証明可能である」を表す論理式．
  - $\forall\varphi(T \vdash \varphi \iff \mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner))$
- 無矛盾性を表す文: $\mathbf{Con}_T := \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$

Gödel の不完全性定理

導出可能性条件 (Hilbert-Bernays-Löb)

任意の文 φ, ψ について,

D1: $\mathcal{T} \vdash \varphi \implies \mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

D2: $\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \psi \urcorner))$

D3: $\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

Gödel の不完全性定理

導出可能性条件 (Hilbert-Bernays-Löb)

任意の文 φ, ψ について,

D1: $\mathcal{T} \vdash \varphi \implies \mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

D2: $\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \psi \urcorner))$

D3: $\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

- D2, D3 はそれぞれ様相論理の公理 **K**, **4** に対応する.

Gödel の不完全性定理

導出可能性条件 (Hilbert-Bernays-Löb)

任意の文 φ, ψ について,

D1: $\mathcal{T} \vdash \varphi \implies \mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

D2: $\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \psi \urcorner))$

D3: $\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

- D2, D3 はそれぞれ様相論理の公理 **K**, **4** に対応する.

第 2 不完全性定理

$\mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(x)$ が導出可能性条件を満たすならば, $\mathcal{T}$ が無矛盾であるとき $\mathcal{T} \nvdash \mathbf{Con}_{\mathcal{T}}$.

Gödel の不完全性定理

Löb の定理

$\mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(x)$ が D2, D3 を満たすとき，$\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば, $\mathcal{T} \vdash \varphi$.

- ある命題を証明するのに，その命題の証明可能性を仮定してよい.

Gödel の不完全性定理

Löb の定理

$\mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(x)$ が D2, D3 を満たすとき，$\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば, $\mathcal{T} \vdash \varphi$.

- ある命題を証明するのに，その命題の証明可能性を仮定してよい.

- 不動点補題を用いることにより，Löb の定理の形式化を証明できる.

Gödel の不完全性定理

Löb の定理

$\mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(x)$ が D2, D3 を満たすとき，$\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi$ ならば, $\mathcal{T} \vdash \varphi$.

- ある命題を証明するのに，その命題の証明可能性を仮定してよい．

- 不動点補題を用いることにより，Löb の定理の形式化を証明できる．

形式化された Löb の定理

同条件下で，$\mathcal{T} \vdash \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_{\mathcal{T}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Gödel の不完全性定理

Löb の定理

$\mathbf{Pr}_T(x)$ が D2, D3 を満たすとき，$T \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$ ならば, $T \vdash \varphi$.

- ある命題を証明するのに，その命題の証明可能性を仮定してよい.

- 不動点補題を用いることにより，Löb の定理の形式化を証明できる.

形式化された Löb の定理

同条件下で，$T \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

- `https://mathlog.info/articles/b0m73LsRRuLdVCqE7TXq` の証明を参照.
- 実は Feferman 的な Σ_1 証明可能性述語が持つ原理は D2, Löb で尽くされることが分かっている (GL の算術的完全性).

証明可能性論理

- 様相論理は，$\{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg\}$ 以外に $\Box$ (証明可能性) と $\Diamond$ (無矛盾性) を扱える拡張論理.
- $\Box A$ を「A は証明可能である」と解釈することにより証明可能性論理が得られる (算術的解釈).

証明可能性論理

- 様相論理は，$\{\vee, \wedge, \to, \neg\}$ 以外に $\Box$ (証明可能性) と $\Diamond$ (無矛盾性) を扱える拡張論理.
- $\Box A$ を「A は証明可能である」と解釈することにより証明可能性論理が得られる (算術的解釈).

GL (Gödel-Löb Logic)

公理:

- 古典命題論理の恒真式
- K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- Löb: $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

規則:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{A}{\Box A}\ (\mathrm{N})$$

証明可能性論理

GL の算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

$\mathcal{T}$ が Σ_1 健全であるとき，$\forall\varphi$ について，$\mathbf{GL} \vdash \varphi \iff \mathcal{T}$ の標準的な証明可能性述語 $\mathbf{Prov}_{\mathcal{T}}(x)$ による全ての算術的解釈 f で $\mathcal{T} \vdash f(\varphi)$.

証明可能性論理

GL の算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

$\mathcal{T}$ が Σ_1 健全であるとき，$\forall\varphi$ について，$\mathbf{GL} \vdash \varphi \iff \mathcal{T}$ の標準的な証明可能性述語 $\mathbf{Prov}_{\mathcal{T}}(x)$ による全ての算術的解釈 f で $\mathcal{T} \vdash f(\varphi)$.

- 証明可能性論理は，算術体系 $\mathcal{T}$ の性質，コード化の方法，証明可能性述語の種類などにより大きく変化する．

証明可能性論理

GL の算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

$\mathcal{T}$ が Σ_1 健全であるとき，$\forall\varphi$ について，$\mathbf{GL} \vdash \varphi \iff \mathcal{T}$ の標準的な証明可能性述語 $\mathbf{Prov}_{\mathcal{T}}(x)$ による全ての算術的解釈 f で $\mathcal{T} \vdash f(\varphi)$.

- 証明可能性論理は，算術体系 $\mathcal{T}$ の性質，コード化の方法，証明可能性述語の種類などにより大きく変化する．

証明可能性論理の例

N, MN, MNP, MND, K, GL, GL+$\Box\bot$, GR, GLP, D, S

- **N, MN, MNP, MND** は非正規様相論理であり証明能力が低い．

  $\Longrightarrow$ 様々な証明可能性述語の解析に使用できる．

証明可能性論理

GL の算術的完全性定理 (Solovay, 1976)

T が Σ_1 健全であるとき，$\forall\varphi$ について，$\mathbf{GL} \vdash \varphi \iff T$ の標準的な証明可能性述語 $\mathbf{Prov}_T(x)$ による全ての算術的解釈 f で $T \vdash f(\varphi)$.

- 証明可能性論理は，算術体系 T の性質，コード化の方法，証明可能性述語の種類などにより大きく変化する.

証明可能性論理の例

N, MN, MNP, MND, K, GL, GL+$\Box\bot$, GR, GLP, D, S

- **N, MN, MNP, MND** は非正規様相論理であり証明能力が低い.

  $\Longrightarrow$ 様々な証明可能性述語の解析に使用できる.

- 証明可能性論理の研究において，特定の様相論理に対応する証明可能性述語をみつけることは重要.
  1. 病的な性質 / 際どい性質を持った証明可能性述語の構成 (e.g., Shavrukov の証明可能性述語)
  2. 第 2 不完全性定理の限界の考察 (e.g., Rosser の証明可能性述語)

弱い様相論理に対応する証明可能性述語

EN

公理: 古典命題論理の恒真式

規則:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{A}{\Box A}\ (\mathrm{N}) \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}\ (\mathrm{E})$$

弱い様相論理に対応する証明可能性述語

EN

公理: 古典命題論理の恒真式

規則:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{A}{\Box A}\ (\mathrm{N}) \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}\ (\mathrm{E})$$

問題 (Kurahashi)

非正規様相論理 **EN** およびその適当な拡大に対応する証明可能性述語は存在するか？

弱い様相論理に対応する証明可能性述語

EN

公理: 古典命題論理の恒真式

規則:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{A}{\Box A}\ (\mathrm{N}) \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}\ (\mathrm{E})$$

問題 (Kurahashi)

非正規様相論理 **EN** およびその適当な拡大に対応する証明可能性述語は存在するか？

- 近傍意味論など，関係意味論でない意味論を持つ様相論理に対して適当な述語モデルを構成することはできるか.

弱い様相論理に対応する証明可能性述語

- 第 2 不完全性定理は無矛盾性を表す文の定め方によりいくつかの変種を考えることができる (第 2 不完全性定理動物園).
  - e.g., $\mathbf{Con}_T := \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$, $\mathbf{Con}^S_T := \forall\varphi\neg(\mathbf{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \land \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\neg\varphi\urcorner))$
  - それぞれ様相論理の公理 **P** と **D** に対応する.

弱い様相論理に対応する証明可能性述語

- 第 2 不完全性定理は無矛盾性を表す文の定め方によりいくつかの変種を考えることができる (第 2 不完全性定理動物園).
  - e.g., $\mathbf{Con}_T := \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$, $\mathbf{Con}_T^S := \forall\varphi\neg(\mathbf{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \land \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\neg\varphi\urcorner))$
  - それぞれ様相論理の公理 **P** と **D** に対応する.

問題 (Kurahashi)

MND4 を含むような証明可能性述語は存在するか？

- Gödel の第 2 不完全性定理の変種 $\{M, D3\} \implies T \nvdash \mathbf{Con}_T^S$ の仮定をどこまで弱められるかを考える.
  - 次の弱化を考える: $\{$**MN** の全ての原理, $D3\} \implies T \nvdash \mathbf{Con}_T^S$
  - **MND4** を満たす述語モデル $\mathbf{Pr}_T^{\mathrm{MND4}}(x)$ がこれの反例となる.

弱い様相論理に対応する証明可能性述語

- 第 2 不完全性定理は無矛盾性を表す文の定め方によりいくつかの変種を考えることができる (第 2 不完全性定理動物園).
  - e.g., $\mathbf{Con}_T := \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$, $\mathbf{Con}_T^S := \forall \varphi \neg (\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \land \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner))$
  - それぞれ様相論理の公理 **P** と **D** に対応する.

問題 (Kurahashi)

MND4 を含むような証明可能性述語は存在するか？

- Gödel の第 2 不完全性定理の変種 $\{M, D3\} \implies T \nvdash \mathbf{Con}_T^S$ の仮定をどこまで弱められるかを考える.
  - 次の弱化を考える: $\{$**MN** の全ての原理, $D3\} \implies T \nvdash \mathbf{Con}_T^S$
  - **MND4** を満たす述語モデル $\mathbf{Pr}_T^{\mathrm{MND4}}(x)$ がこれの反例となる.

- M は単調性条件 $\dfrac{\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner)}{\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)}$ を表す.

今後の展望

証明可能性論理周りで発表者が興味を持っているのは主に次の 2 点.

- 様相論理に対応する証明可能性述語
  - 種々の第 2 不完全性定理の成立限界の分析
- 証明可能性述語に対応する様相論理
  - 様々な算術的完全性の分析
  - 述語証明可能性論理の分類

今回，証明可能性論理について紹介できなかった話題は多くある.

- 解釈可能性論理，正当化論理 (証明述語論理)，2 重証明可能性論理，多様相証明可能性論理，証明可能性論理の分類 etc...
- 詳細は文献 [Boolos, 1993] などを参照されたい.

参考文献

- G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, 1993.
- H. Kogure and T. Kurahashi, Arithmetical completeness theorems for monotonic modal logics, *Annals of Pure and Applied Logic*, 174(7):103271, 2023.
- T. Kurahashi, The provability logic of all provability predicates, *Journal of Logic and Computation*, 34(6):1108–1135, 2024.
- 佐野勝彦, 倉橋太志, 薄葉季路, 黒川英徳, 菊池誠, 数学における証明と真理—様相論理と数学基礎論—, 共立出版, 2016.

ご清聴ありがとうございました.