Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра інформатики та програмної інженерії

Звіт

з лабораторної роботи № 1.5 з дисципліни
«Ігрова фізика»

„ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ МЕТОДОМ СТОКСА"

Виконав(ла) *ІП-15 Мєшков Андрій Ігорович* ___________
(шифр, прізвище, ім'я, по батькові)

Перевірив *Скирта Юрій Борисович* ___________
(прізвище, ім'я, по батькові)

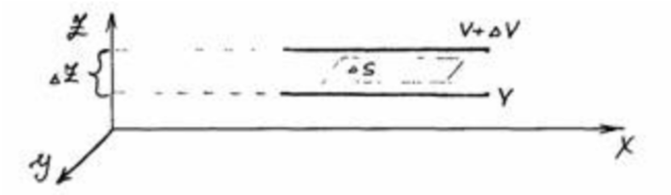
Київ 2022

Лабораторна робота № 1.5

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ МЕТОДОМ СТОКСА

Теорія методу та опис експериментальної установки

При русі рідини між її шарами виникають сили внутрішнього тертя, що діють таким чином, щоб зрівняти швидкості усіх шарів. Виникнення цих сил пояснюється тим, що шари, рухаючись з різними швидкостями, обмінюються молекулами. Роздивимось рідину, що рухається вздовж осі **X**.



Нехай шари рідини рухаються з різними швидкостями. На осі візьмемо дві крапки, що знаходяться на відстані. Швидкості потоку в цих точках відрізняються на величину. Відношення характеризує зміну швидкості потоку у напрямку осі і називається градієнтом швидкості.

Сила внутрішнього тертя (в'язкості), що діє між двома шарами, пропорційна площі їх дотику і градієнту швидкості.

$$f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta Z} \Delta S \ (1)$$

Величина *f* називається коефіцієнтом внутрішнього тертя або коефіцієнтом динамічної в'язкості.

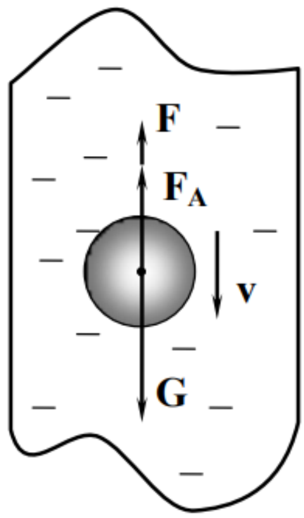
Якщо у формулі (1) покласти чисельно $\frac{\Delta v}{\Delta Z} = 1$, $S = 1$, тоді $\eta = f$.

Коефіцієнт динамічної в'язкості чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, що з'являється на кожній одиниці дотику двох шарів, що рухаються один відносно іншого з градієнтом швидкості, що дорівнює 1.

Коефіцієнт динамічної в'язкості залежить від природи рідини і для даної рідини з підвищенням температури зменшується. В'язкість має велике значення при русі рідини та твердих тіл у рідинах. Шар рідини, що прилягає до твердої поверхні, у результаті взаємодії залишається нерухомим відносно неї. Швидкість інших шарів зростає з мірою віддалення від твердої поверхні.

Метод Стокса. На тверду кульку, що падає у в'язкій рідині, діють три сили: сила тяжіння, сила підіймання (сила Архімеда) й сила опору рідини руху, обумовлена силами внутрішнього тертя рідини.

Якщо кулька падає у рідину, що простирається безмежно в усіх напрямках, не залишаючи за собою ніяких звивихів (мала швидкість падіння, маленька кулька), то, як встановив Стокс, сила опору дорівнює:



$$f = 6\pi\eta v r \ (2)$$

де: η-коефіцієнт внутрішнього тертя рідини; **v** - швидкість кульки; r - її радіус; У випадку падіння кульки, у рідині усі три сили будуть направлені по вертикалі.

Сила опору зі збільшенням швидкості руху кульки збільшується: кулька досягає такої швидкості, при якій усі три сили будуть в сумі дорівнювати **0**. Такий рух кульки називається встановлений. При цьому кулька рухається за інерцією з постійною швидкістю. Для цього випадку маємо:

$$mg - Fa = f \ (3)$$

$$mg = \rho V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \ (4)$$

$$Fa = \rho_1 V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g \ (5)$$

$$6\pi\eta v r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g \ (6)$$

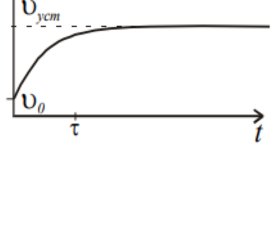
$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho - \rho_1}{v} \ (7)$$

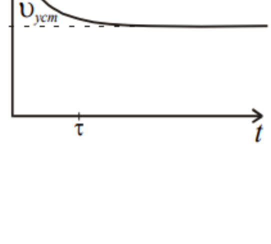
Де, ρ – густина кульки; ρ_1 – густина рідини; r – радіус кульки.

Якщо кулька падає вздовж осі циліндричної посудини з радіусом R, тоді урахування існування стінок приводить до наступного виразу для коефіцієнта в'язкості:

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho - \rho_1}{v(2{,}4\frac{r}{R} + 1)} \ (8)$$

Доведемо, що кулька буде падати рівномірно у рідині, для цього побудуємо графік її руху. Графік задається формулою $v(t) = v_{уст} - (v_{уст} - v_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$, де $\tau = \frac{\rho V}{6\pi R\mu}$ – час релаксації;





Таким чином, незалежно від швидкості v_0, з якою кулька перетинає поверхню рідини, через час $t \gg \tau$ з достатньою точністю можна вважати, що рух кульки є рівномірним і швидкість руху дорівнює $v_{уст}$.

Проінтегруємо вираз $v(t) = v_{уст} - (v_{уст} - v_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$, по якому будували графік руху кульки, у межах від 0 до 3τ, тоді отримаємо формулу (9):

$$S(3\tau) = \int_0^{3\tau} v(t)dt = v_{уст} \cdot \tau \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Big|_0^{3\tau} \approx 2v_{уст} \cdot \tau \approx \frac{8}{81} gR^4 \frac{\rho(\rho - \rho_1)}{\eta^2}$$

<u>Порядок виконання роботи</u>

Густина матеріалу кульок: $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3 \, ^{кг}/_{м^2}$

Густина гліцерину: $\rho = 1{,}2 \cdot 10^3 \, ^{кг}/_{м^2}$

Температура гліцерину: $t = 23{,}5℃$

За допомогою формули (7), обраховуємо значення для η:

№	*R, мм*	*t, с*	*h, м*	*v, м/с*	η-<η>, Па с	*η-<η>, 10^{-2}* Па с	*$(\eta - \langle\eta\rangle)^2$, 10^{-4}* Па с
1	0,8	5,765	0,198	0,03435	0,41029	0,71022	0,50441
2	1,45	3,421	0,378	0,11049	0,41896	1,57737	2,48809
3	1,05	4,515	0,263	0,05825	0,41673	1,35447	1,83460
4	1,25	2,735	0,228	0,08336	0,41269	0,94978	0,90208
5	1,1	3,703	0,239	0,06454	0,41278	0,95916	0,91998
6	0,75	4,219	0,169	0,04006	0,30919	-9,40004	88,36076
7	1,5	2,266	0,266	0,11739	0,42203	1,88366	3,54819
8	0,95	3,875	0,192	0,04955	0,40105	-0,21416	0,04586
9	1,3	3,484	0,325	0,09328	0,39890	-0,42931	0,18431
10	0,95	2,938	0,136	0,04629	0,42928	2,60885	6,80611

Як проміжковий результат обрахуємо $\langle\eta\rangle$ =0,40319 Па · с

Щоб перевірити застосовність формули Стокса, застосовуючи формулу (9), з'ясуємо, на якій відстані від поверхні гліцерину повинна бути верхня позначка.

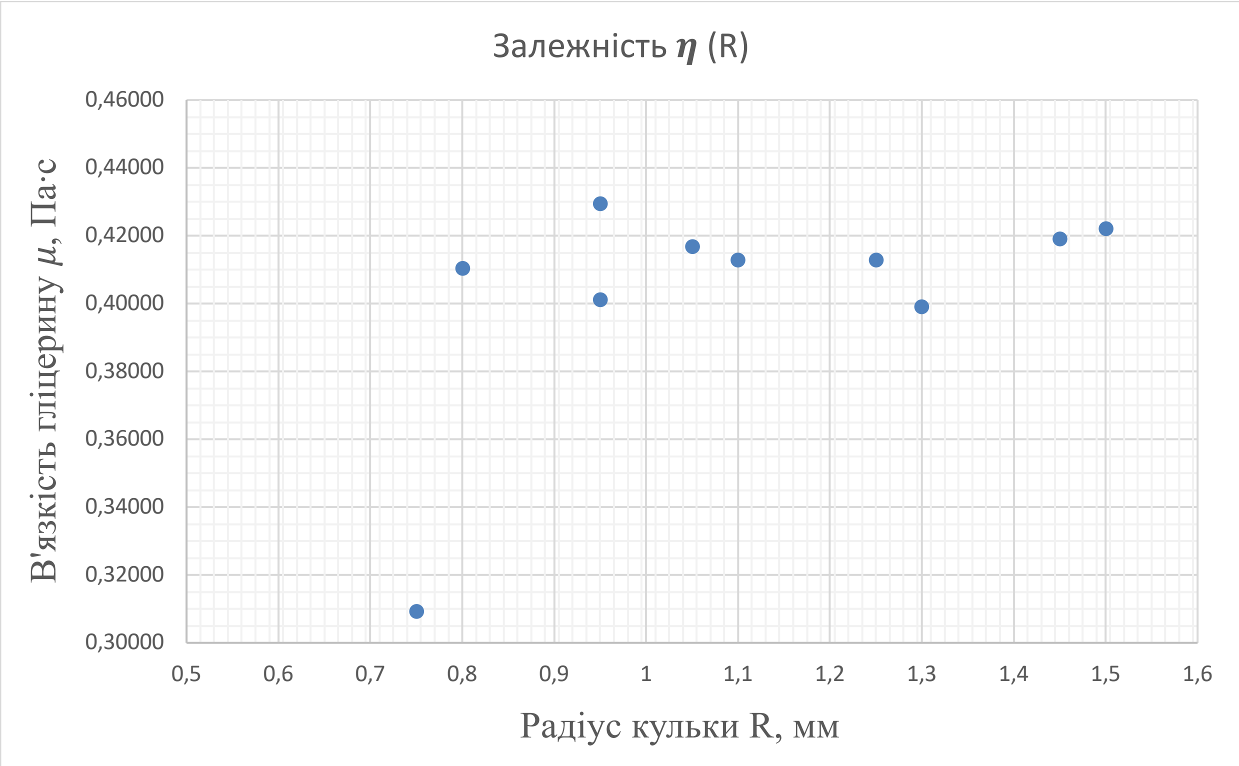
Виберемо максимальний радіус: $R_{max} = 1{,}5$ мм

За кімнатної температури 20℃ у 95% розчині гліцерину, $\eta = 0{,}543$

$$S = \frac{8}{81} \cdot 9{,}81 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3})^4 \frac{11{,}3(11{,}3 - 1{,}2)10^6}{0{,}543^2} \approx 0{,}0019$$

Тобто вже при відстані 1,9 мм від поверхні гліцерину до верхньої позначки, в нас результати повинні бути наближеними до реальних.

Переконаємося, що отримані значення η не становлять систематичної залежності від радіуса кульки. Побудуємо для цього графік $\eta(R)$



Запишемо загальну формулу для розрахунку середнього значення для в'язкості гліцерину:

$$\langle \eta_n \rangle = \frac{\sum_1^n \eta_n}{n} \ (10)$$

Це значення ми вже обраховувати та використовували, тому

$$\langle \eta \rangle \approx 0{,}40319 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

Для оцінки відхилення вибіркового середнього $\langle x \rangle$ від істинного значення вимірюваної величини, де x в нас під час підрахунку похибки буде замість μ, щоб не переплутати з кількістю вимірів, вводиться середня квадратична похибка середнього $S_{\langle x \rangle}$, яка обчислюється за формулою:

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2} \qquad (11)$$

У нашому випадку вимірів було 10, тому n = 10.

Позначимо через β_1і β_2 інтервал значень, до якого із заданою ймовірністю довіри α потрапляє вимірювана величина x.

$$\beta_1 = \langle x \rangle - \Delta x_{\text{випадкове}}, \qquad (12)$$

$$\beta_2 = \langle x \rangle + \Delta x_{\text{випадкове}}, \tag{13}$$

де $\Delta x_{\text{випадкове}}$ – напівширина інтервалу довіри, що визначається за формулою:

$$\Delta x_{\text{випадкове}} = t_{a,n} \cdot S_{\langle x \rangle}, \tag{14}$$

де $t_{a,n}$ – коефіцієнт Стьюдента, який залежить від імовірності довіри α та числа вимірів n. По умові α = 0,9.

Використавши дані у формулах (15) – (17), можемо записати:

$$\langle x \rangle - t_{a,n} \cdot S_{\langle x \rangle} \leq x \leq \langle x \rangle + t_{a,n} \cdot S_{\langle x \rangle} \tag{15}$$

або з імовірністю α:

$$x = \langle x \rangle \pm t_{a,n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2} \tag{16}$$

Ми вже маємо обраховані значення для $(x_i - \langle x \rangle)^2$ з останньої колонки нашої таблиці.

Тепер за допомогою формули (19) обрахуємо ширину інтервалу, в якому шукана величина x буде знаходитись з імовірністю 90%. Приймаючи до уваги, що коефіцієнт Стьюдента $t_{a,n} = t_{0,9;10} = 1{,}73$.

$$\eta = 0{,}40319 \pm 1{,}73 \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 9}(105{,}59438 \cdot 10^{-4})} \qquad [\text{Па} \cdot \text{с}]$$

Отже, похибка для досліду буде:

$$\eta = 0{,}40319 \pm 0{,}01873 \qquad [\text{Па} \cdot \text{с}]$$

Контрольні запитання

1. *Коефіцієнти в'язкості. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя.*

В'язкістю називається властивість рідин або газів чинити опір при відносному переміщенні їхніх шарів. В'язкість відноситься до явищ переносу. В рідинах в'язкість зумовлена як обміном окремими молекулами або атомами, так і силами взаємодії між молекулами сусідніх шарів. Щодо рідин поняття імпульсу молекул навіть при наближеному розгляді втрачає сенс, бо він дуже змінюється у зв'язку з коливаннями молекул.

Коефіцієнт в'язкості при ламінарній течії рідин, як і коефіцієнт в'язкості газів, визначається із закону Ньютона:

$$f = \eta \frac{\Delta \nu}{\Delta Z} \Delta S$$

де F – сила внутрішнього тертя між суміжними шарами рідини;

ΔS – площа поверхні взаємодії суміжних шарів рідини, на яку розраховується сила внутрішнього тертя;

$\frac{\Delta v}{\Delta z}$ – градієнт швидкості рідини у напрямку, перпендикулярному до напряму течії рідини.

Одиниця вимірювання в'язкості (динамічної в'язкості) рідин або газів, яка залежить від роду рідини, її температури, тиску:

$$\eta = \frac{H \cdot c}{м^2} = Па \cdot c$$

При підвищенні температури в'язкість рідин зменшується, а газів – зростає.

Користуючись формулою (1), можна сформулювати фізичний зміст коефіцієнту динамічної в´язкості: μ дорівнює силі в'язкості, що виникає між двома шарами рідини при одиничному градієнті швидкості і одиничній площі дотику шарів рідини.

Кількісно коефіцієнт динамічної в'язкості μ характеризує опір рідини перемішуванню її шарів один відносно одного.

Для більшості рідин коефіцієнт в´язкості не залежить від градієнта швидкості. Такі рідини описують рівнянням (1) і називають ньютонівськими або нормальними. Рідини, що складаються з великих і складних молекул, наприклад, розчини полімерів, які утворюють просторові структури, є неньютонівськими. Коефіцієнт в´язкості цих рідин залежить від градієнта швидкості. Такою рідиною є, наприклад, кров, яка за своїми властивостями нагадує суспензію деформованих частинок.

Експериментально встановлено, що в'язкість слабо залежить від молекулярної маси, а більше – від форми макромолекул.

2. *Ламінарний і турбулентний рух. Число Рейнольдса.*

Можливі два якісно різних типи течії рідин – ламінарна і турбулентна. Ламінарною називається упорядкована течія рідини, при якій кожна частинка рідини рухається по визначеній прямолінійній траєкторії і вся картина руху течії являє собою рух сусідніх шарів рідини з різними швидкостями один відносно одного, але не перемішуючись один з одним.

При досить великих швидкостях руху рідини ламінарний рух переходить у турбулентний рух. Турбулентний рух рідини – це такий рух, гідродинамічні характеристики якого (швидкість, тиск, а для газу – густина і температура) швидко і нерегулярно змінюються в часі. Частинки рідини рухаються складними траєкторіями, що призводить до інтенсивного перемішування шарів рідини, що рухаються. Прикладами турбулентного руху можуть служити рух хвиль у бурхливому гірському потоці чи водоспаді.

Течія рідини по трубці залежить від властивостей рідини, швидкості течії, розмірів трубки. Характер течії визначається числом Рейольдса:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \ll 1,$$

де ρ – це густина рідини, v - середня швидкість течії по трубці діаметром d.

Ламінарний характер течія зберігає тільки при невеликих числах Рейнольдса. Замість плавних ліній частинки рідини починають описувати складні траєкторії – рух рідини стає турбулентним з утворенням вихорів позаду тіла. У вихровій області тиск знижений, у результаті чого виникає різниця тисків між передньою та задньою поверхнями тіла, що обумовлює силу опору. Таким чином, повна сила опору складається з опору тертя та опору тиску, а їх відносний внесок визначається значенням числа Re. Течія в трубці стає турбулентною, коли число Рейнольдса перевищує певне значення:

$$Re < Re_{\text{кр}},$$

де $Re_{\text{кр}}$ – критичне значення числа Рейнольдса, яке залежить від рідини.

3. *Формула Стокса. Умова її застосовності.*

Для визначення в'язкості рідини існують два основних методи: метод Пуазейля (витікання рідин через капіляри) і метод Стокса (падіння кульки в досліджуваному середовищі).

Закон Стокса лежить в основі методу визначення швидкості осідання еритроцитів (ШОЕ) крові. Вимірювання ШОЕ в плазмі крові є надзвичайно важливим методом діагностики, що дає можливість встановити наявність запальних процесів в організмі людини.

На кульку, яка рухається у рідині, буде діяти сила опору F, яка залежить від в´язкості рідини μ, радіусу кульки R та швидкості її руху v. Вираз для сили опору середовища, в якому рухається кулька, вперше була отримана Стоксом і має такий вигляд:

$$f = 6\pi\eta v r$$

Важливим є те, що ця формула отримана за умови ламінарного обтікання кульки.

Щоб перевірити застосовність формули Стокса, потрібно з’ясувати, на якій відстані від поверхні гліцерину повинна бути верхня позначка, це можливо зробити по формулі:

$$S(3\tau) \approx \frac{8}{81} gR^4 \frac{\rho(\rho - \rho_1)}{\mu^2}$$

7. *На якій відстані від відкритої поверхні гліцерину слід наносити верхню позначку?*

Верхню позначку потрібно наносити на відстані від відкритої поверхні гліцерину, яку визначаємо по формулі:

$$S(3\tau) \approx \frac{8}{81} gR^4 \frac{\rho(\rho - \rho_1)}{\mu^2}$$

9. Як обчислюються похибки у даній роботі?

Для оцінки відхилення вибіркового середнього $\langle x \rangle$ від істинного значення вимірюваної величини, де x в нас під час підрахунку похибки буде замість μ, щоб не переплутати з кількістю вимірів, вводиться середня квадратична похибка середнього $S_{\langle x \rangle}$, яка обчислюється за формулою:

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

У нашому випадку вимірів було 10, тому n = 10.

Позначимо через β_1 і β_2 інтервал значень, до якого із заданою ймовірністю довіри α потрапляє вимірювана величина x.

$$\beta_1 = \langle x \rangle - \Delta x_{\text{випадкове}},$$

$$\beta_2 = \langle x \rangle + \Delta x_{\text{випадкове}},$$

де $\Delta x_{\text{випадкове}}$ – напівширина інтервалу довіри, що визначається за формулою:

$$\Delta x_{\text{випадкове}} = t_{a,n} \cdot S_{\langle x \rangle},$$

де $t_{a,n}$ – коефіцієнт Стьюдента, який залежить від імовірності довіри α та числа вимірів n. По умові α = 0,9.

Використавши дані у формулах (12) – (14), можемо записати:

$$\langle x \rangle - t_{a,n} \cdot S_{\langle x \rangle} \le x \le \langle x \rangle + t_{a,n} \cdot S_{\langle x \rangle}$$

або з імовірністю α:

$$x = \langle x \rangle \pm t_{a,n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Тепер за допомогою формули (16) можемо обрахувати ширину інтервалу, в якому шукана величина х буде знаходитись з певною імовірністю. Приймаючи до уваги, що коефіцієнт Стьюдента.

Висновок: під час виконання лабораторної роботи, ми дізналися про коефіцієнт в’язкості, турбулентний та ламінарний рух, число Рейнольда та його критичне значення. Визначили закон Стокса та застосували його для запису усіх діючих на тіло під час експерименту сил. З цього рівняння виразили коефіцієнт в’язкості рідини. Довели, що кулька буде падати рівномірно у рідині. Провели 10 дослідів та визначили похибку. Переконалися, що отримані значення η не становлять систематичної залежності від радіуса кульки, побудувавши графік.