

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Київ
«ПОЛІТЕХНІКА»
2001

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
ДО ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ ТЕХНІЧНИХ ФАКУЛЬТЕТІВ

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
«ПОЛІТЕХНІКА»
2001

Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: Збірник завдань до типової розрахункової роботи для студентів I курсу технічних факультетів / Уклад.: Л.Б. Федорова, Н.Р. Коновалова, І.В. Алексеева та ін. — К.: ІВЦ «Політехніка», 2001. — 65 с.

*Гриф надано Методичною
радою НТУУ «КПІ»*

(Протокол № 4 від 20.12.2001)

Навчальне видання

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Збірник завдань
до типової розрахункової роботи
для студентів I курсу технічних факультетів

Укладачі:	Федорова Лідія Борисівна Коновалова Наталія Романівна Алексеева Ірина Віталіївна Кіндибалюк Адріана Юріївна Трофимчук Олена Петрівна Гайдей Віктор Олександрович
Відповідальний редактор	В.В. Булдигін, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Рецензент	В.Г. Лозовик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Темплан 2001 р., поз. 138

Редактор К.Г. Левчук

Підп. до друку Формат 60×84 ¹/₁₆.
Інформаційно-видавничий центр «Політехніка» НТУУ «КПІ»
Лабораторія офсетного друку НТУУ «КПІ»
03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37.
Зам. № . Тираж 200. Ум. друк. арк. 3,78.
Папір офсетний. Різограф.

Вступ

Дотепер накопичено багаторічний досвід використання типових індивідуальних розрахункових робіт для організації й контролю самостійної роботи студентів. Результатом цього є створена нова зручна форма типового варіанта.

Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань і додаткові задачі, а кожний варіант — завдання з розділів: комплексні числа, теорія границь і неперервність функції, похідна функції, геометричний зміст похідної, дослідження функцій і побудова графіків функцій, методи інтегрування, визначений інтеграл, застосування визначеного інтегралу. Наявність додаткових задач, які вміщено в кінці збірника, і які ілюструють теоретичний матеріал курсу, дає змогу заохотити сумлінних студентів. Частина задач узято зі збірників завдань Л.А. Кузнецова «Сборник заданий по высшей математике» (М., 1994) і А.П. Рябушка «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике» (Минск, 1990). Крім того, укладачі пропонують використовувати збірники задач [1—8].

Передбачається, що перед виконанням завдань типового варіанта розрахункової роботи, студент ознайомиться з відповідними розділами методичних вказівок, які містять:

1. Стислий виклад теоретичного матеріалу з вказівками шляхів поглиблення знань.
2. Приклади розв'язання типових задач з використанням ефективних, оригінальних методик.
3. Довідковий матеріал, зібраний і організований у зручній формі.
4. Зразок розв'язання типового варіанта та деяких додаткових задач, а також поради щодо розв'язання останніх.
5. Відповіді до частини завдань.
6. Список рекомендованої літератури.

Список рекомендованої літератури

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985. — 446 с.
2. *Гудименко Ф.С.* Збірник задач з вищої математики. — К.: КДУ, 1967. — 352 с.
3. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: МГУ, 1999. — 624 с.
4. *Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.* — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.
5. *Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 3 ч. / В.А. Болгов, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко и др.* — М.: Наука, 1993. — Ч. 1. — 461 с.
6. *Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина, П.Е. Дюбюк и др.* — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.
7. *Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин.* — М.: Наука, 1984. — 592 с.
8. *Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин.* — М.: Наука, 1986. — 528 с.

Варіант 1

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $y = 2 \arcsin(x + 1)$. 5) $y = 2^{x+2}$.

3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 1)$. 6) $y = \ln(x + 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = -1 - 5i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $1 < |z - 1| \leq 2, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.

2) $|z - i| > |z + i|, |\operatorname{Re} z| > 1$.

3) $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)! - n(n+1)!}{(n+3)!}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{\ln x - 1}{x - e}\right)^{\sin \frac{\pi}{2e} x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$. 8) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x - 4x}{5 - 5e^{-3x} - 15x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \operatorname{tg} 2x, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = x - \sqrt{x}, \beta(x) = x^3 - 3\sqrt[4]{x}, x \rightarrow 0$.

8) $\alpha(x) = \sin \sqrt[3]{x}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$

3) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1$ у точках $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10. 1) $y = x^5 - \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}$.

2) $y = \sqrt[3]{3x^4 + x - \sin \sqrt{3}} - \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{\operatorname{sh} \sqrt{x}}$.

3) $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5 + \frac{9 \operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$.

4) $y = \ln x \operatorname{arctg}^2 5x - \frac{e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}}$.

5) $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3 + (\arccos x)^{\operatorname{tg} 3x}$.

6) $y = (\operatorname{cth} 3x)^{\arcsin x} - \frac{(x-1)^4 \sqrt{x+7}}{(x+2)^5 (x+3)^2}$.

11.1) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$. 2) $y^2 + \sin y = 8x$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^3 \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + 2 \cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1 + 2 \cos t}. \end{cases}$

13.1) $y = (2x^2 - 7) \ln(x - 1), y^{(5)} = ?$

2) $y = xe^{ax}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1) $y = x^2 - 7x + 3, x_0 = 1$.

$$2) x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t, t_0 = \frac{\pi}{3}.$$

$$3) x = at, y = \frac{1}{2}at^2, z = \frac{1}{3}at^3, M_0(6a, 18a, 72a).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$.

$$1) y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ?$$

$$2) y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}. \quad 5) y = \frac{17 - x^2}{4x - 5}.$$

$$2) y = \sqrt[3]{3x - 6 + (2 - x)^3}. \quad 6) y = e^{2x - x^2}.$$

$$3) y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}. \quad 7) y = \frac{4x}{x^2 + 4}.$$

$$4) y = e^{\sin x + \cos x}. \quad 8) y = x + \frac{1}{x - 1}.$$

Знайти інтеграли (18—21):

$$18.1) \int \sqrt{3 + x} dx. \quad 7) \int \sin(2 - 3x) dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{3 - x}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{3} dx}{9x^2 - 3}.$$

$$3) \int \frac{2x dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}. \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x^2}}.$$

$$4) \int e^{2x-7} dx. \quad 10) \int \sin^4 2x \cos 2x dx.$$

$$5) \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx. \quad 11) \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^5 3x}}{1 + 9x^2} dx.$$

$$6) \int \frac{x dx}{e^{3x^2+4}}. \quad 12) \int \frac{\sin 2x}{1 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$19.1) \int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2} dx. \quad 5) \int \frac{(3x^2 + 20x + 9) dx}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)}.$$

$$2) \int \frac{1 - 2x - x^3}{1 + x^2} dx. \quad 6) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}. \quad 7) \int \frac{(3x + 13) dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}.$$

$$4) \int \frac{(x + 1) dx}{2x^2 + 3x + 4}. \quad 8) \int \frac{5x dx}{x^4 + 3x^2 - 4}.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^2 x dx. \quad 4) \int \cos^4 3x \sin^2 3x dx.$$

$$2) \int \sin^2(1 - x) dx. \quad 5) \int \frac{dx}{5 + 2 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$3) \int \sin 3x \cos x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{8 \sin x (\sin x - 2 \cos x)}.$$

$$21.1) \int \frac{x - 1}{\sqrt{7x^2 + 4}} dx. \quad 5) \int \frac{2x - 13}{\sqrt{3x^2 - 3x - 16}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4 + 8x - x^2}}. \quad 6) \int \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} dx. \quad 7) \int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}.$$

$$4) \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x + 3}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^7}} dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx. \quad 4) \int x^2 \cos 2x dx.$$

$$2) \int (x + 1)e^{2x} dx. \quad 5) \int \sqrt{1 - x} \arccos \sqrt{x} dx.$$

$$3) \int \ln(x - 5) dx. \quad 6) \int \operatorname{arctg} 2x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_2^3 x \ln(x - 1) dx. \quad 4) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx.$$

$$2) \int_0^1 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx. \quad 5) \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$3) \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x - 2)^2}} dx. \quad 6) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}. \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = (x - 2)^3, y = 4x - 8.$$

$$2) \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 2 (x \geq 2).$$

$$3) \rho = 4 \cos 3\varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 0$, $y^2 = 4 - x$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \frac{1}{3}x^3, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ навколо осі Ox .

Варіант 2

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = -2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. 4) $y = 3^{x-2}$.
2) $y = \frac{1}{3} \arccos(x + 3)$. 5) $y = 2 \operatorname{arctg}(x - 1)$.
3) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{8}\right)$. 6) $y = -\lg(x - 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^4$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$$z_1 = 2 - 2i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = 2 + 3i.$$

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $1 < |z + 1| \leq 3, \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$.
2) $|z - 1| < |z + i|, |\operatorname{Im} z| > 2$.
3) $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$.

Знайти границі (4—7):

$$4.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}).$$

$$5.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}. \quad 6.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 5}{2x^2 + x + 7}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - 1}{\ln x}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^4 + 2x - 4}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{8}}{x^2 + 2x - 8}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-1}. \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x. \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

$$7.1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{x-1}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

$$1) \alpha(x) = 1 - \cos x, \beta(x) = 3x^2, x \rightarrow 0.$$

$$2) \alpha(x) = x^3 - 3x - 2, \beta(x) = x - 2, x \rightarrow 2.$$

$$3) \alpha(x) = e^{x^2} - 1, \beta(x) = x, x \rightarrow 0.$$

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 4-x, & x > 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}} - 1 \text{ у точках } x_1 = 3, x_2 = 4.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = 4x^3 + \frac{2}{x^4} - \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$2) y = \sqrt[3]{2x^4 - \cos \ln 2} + \frac{\ln(5x-3)}{4 \operatorname{tg} 3x^4}.$$

$$3) y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg} x^3 - \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\operatorname{ch} x}.$$

$$4) y = \ln x \operatorname{arctg}^3 2x + (\cos x)^{\ln x}.$$

$$5) y = (x-2)^4 \arcsin 5x^4 - \frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{8(x+1)^3}.$$

$$6) y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg} x} + \frac{(x-3)^5(x+2)^3}{(x+1)^2 \sqrt{(x-1)^3}}.$$

$$11.1) \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1. \quad 2) y = \operatorname{tg}(x+y).$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t}. \end{cases}$$

$$13.1) y = (3-x^2) \ln x, y^{(4)} = ?$$

$$2) y = \sin 2x + \cos(x+1), y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

$$1) y = x^2 - 16x + 7, x_0 = 1.$$

$$2) x = \sqrt{3} \cos t, y = \sin t, t_0 = \frac{\pi}{3}.$$

$$3) x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2},$$

$$M_0 \left(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2} \right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 3x - x^3$.

$$1) y = \frac{3x}{x^2 + 1}, [0; 5].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ?$$

$$2) y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}. \quad 5) y = 2x - 3\sqrt{x^2}.$$

$$2) y = \sqrt[3]{(x+3)^3 - 3x - 9}. \quad 6) y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}.$$

$$3) y = x + \ln(x^2 - 4). \quad 7) y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$4) y = \arctg \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}. \quad 8) y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \sqrt[3]{1+x} dx. \quad 7) \int \sin(3-2x) dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{2x^2 - 5}. \quad 8) \int \frac{dx}{3x + 9}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 3}}. \quad 9) \int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}.$$

$$4) \int e^{3+5x} dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1} dx.$$

$$5) \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 11) \int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}.$$

$$6) \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx. \quad 12) \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx.$$

$$19.1) \int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx. \quad 5) \int \frac{12dx}{(x-2)(x^2-2x+3)}.$$

$$2) \int \frac{7-x^2}{1-x} dx. \quad 6) \int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2-4x+10}. \quad 7) \int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx.$$

$$4) \int \frac{x+6}{3x^2+x+1} dx. \quad 8) \int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^3 2x dx. \quad 4) \int \sin^5 2x \cos^2 2x dx;$$

$$2) \int \sin^3(1-x) dx. \quad 5) \int \frac{dx}{8 \sin x (2 \sin x - \cos x)}.$$

$$3) \int \sqrt[5]{\sin x} \cos^3 x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5-4 \sin x + 2 \cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx.$$

$$2) \int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}. \quad 6) \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}. \quad 7) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$22.1) \int \cos(\ln x) dx. \quad 4) \int \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} dx.$$

$$2) \int (x-2)e^x dx. \quad 5) \int x \sin^2 x dx.$$

$$3) \int \arctg 2x dx. \quad 6) \int x \cos 6x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}. \quad 5) \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} dx.$$

$$3) \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx. \quad 6) \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}. \quad 2) \int_0^a \frac{x^8 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, x \in [0; 3].$$

$$2) \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2).$$

$$3) \rho = \cos 2\varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 0, y = 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = 2 \cos \varphi$ навколо полярної осі.

Варіант 3

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $y = 2 \arcsin(x + 1)$. 5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$.

3) $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 2)$. 6) $y = \ln(2 - x)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -4 - 4i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = 3 - 4i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $1 < |z - i| \leq 3, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \pi$.

2) $|z + i| > |z - 1|, |\operatorname{Re} z| < 3$.

3) $z^3 + 2z^2 + 6z - 9 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{n + 1} - \frac{2n + 1}{2} \right)$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n - 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n - 1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n}(n - \sqrt[3]{n^3 - 5})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^5 + 2x - 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 3x + 4}{3x^2 - 2x + 1}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x + 10} - \sqrt{7}}{2x^2 - x - 21}$. 6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1 + 2x} \right)^{-4x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2^x x}{1 + 3^x x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{2x - 1} \right)^{3x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x - 1)$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\left(\cos x - 1 + \frac{1}{2} x^2 \right)}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \operatorname{arctg}^2 3x, \beta(x) = 4x^2, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}, \beta(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 2x^2}}, x \rightarrow \infty$.

3) $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x}), \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x + 7}{x - 2}$ у точках $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = 3x^4 - \frac{4}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}$.

2) $y = \sqrt{(x - 4)^5 + \operatorname{tg} \lg 3} + \frac{\ln(7x + 2)}{5 \cos 42x}$.

3) $y = \operatorname{sh}^3 4x \cdot \arccos \sqrt{x} - \frac{\arccos 3x^4}{\operatorname{th}^2 x}$.

4) $y = \ln(x^2 - 1) \arccos^4 x + 2^{-x^2} \operatorname{arctg} 7x^4$.

5) $y = \frac{7 \arccos(4x - 1)}{(x + 2)^4} - (\sin 3x)^{\arccos x}$.

6) $y = (\operatorname{arctg} 6x)^{\cos 2x} + \frac{(x - 2)^3 \sqrt{(x + 1)^5}}{(x + 1)^3 (x - 4)^2}$.

11.1) $y = x + \operatorname{arctg} y$. 2) $e^{x-y} = xy$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

13.1) $y = x \cos^2 x, y^{(5)} = ?$

2) $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \sqrt{x - 4}, x_0 = 8$.

2) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$3) x = \frac{1}{4}t^4, y = \frac{1}{3}t^3, z = \frac{1}{2}t^2, M_0(1;1;1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = x^2(x-2)^2$.

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \left[-\frac{1}{2}; 0\right].$$

$$2) y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}, [0; 6].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2+8}. \quad 5) y = e^{\frac{1}{5+x}}.$$

$$2) y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1. \quad 6) y = \frac{2}{x^2+2x}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x+2)^3 - 3x - 6}. \quad 7) y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}.$$

$$4) y = \ln(\cos x + \sin x). \quad 8) y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx. \quad 7) \int \sin(5-3x) dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{9x^2+3}. \quad 8) \int \frac{dx}{2-3x}.$$

$$3) \int \frac{3x dx}{4x^2+1}. \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}.$$

$$4) \int e^{2-3x} dx. \quad 10) \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx.$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^4 x}. \quad 11) \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)} dx.$$

$$6) \int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx. \quad 12) \int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x} dx.$$

$$19.1) \int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx. \quad 5) \int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2-x-12)}.$$

$$2) \int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx. \quad 6) \int \frac{x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2-1)} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2-7x+10}. \quad 7) \int \frac{(12-6x)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}.$$

$$4) \int \frac{(2x-1)dx}{3x^2-2x+6}. \quad 8) \int \frac{x^3-3x^2+x-2}{x^4+5x^2+4} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^4 3x dx. \quad 4) \int \cos^3 x \sin^8 x dx.$$

$$2) \int \sin^4 \frac{x}{4} dx. \quad 5) \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$$

$$3) \int \sin^2 3x \cos^2 3x dx. \quad 6) \int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1+\cos x} dx.$$

$$21.1) \int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}} dx. \quad 5) \int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}} dx.$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln x}{x^2} dx. \quad 4) \int x \operatorname{arctg} 2x dx.$$

$$2) \int x \sin x \cos x dx. \quad 5) \int (x-7) \cos 2x dx.$$

$$3) \int x^2 e^{-x} dx. \quad 6) \int \arcsin 3x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$2) \int_2^3 \frac{x+2}{x^2(x-1)} dx. \quad 5) \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x dx. \quad 6) \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4-1}. \quad 2) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = 4-x^2, y = x^2-2x.$$

$$2) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

$$3) \rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \rho = \sin \varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \sin x, y = 3 \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 10(t - \sin t), y = 10(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ навколо осі Ox .

Варіант 4

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \frac{1}{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

2) $y = 2 \arccos(x - 1)$. 5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$.

3) $y = 3 \operatorname{arctg}(x + 2)$. 6) $y = -\lg(x + 2)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = -1 - 5i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $1 < |z + i| \leq 2, 0 < \arg z \leq \frac{5\pi}{4}$.

2) $|z + 1| < |z - i|, |\operatorname{Im} z| < 1$.

3) $z^3 + z^2 - 2 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12} + n + 1} - n}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right)$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^3 + 27x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 7}{3x^4 - 5x^2 + 1}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2 - x} - 2}{x^2 - x - 6}$. 6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\ln x - \ln a}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x} \right)^{-3x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 3^{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}})^{\frac{2}{\sin x}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 1}{4x + 1} \right)^{3x-1}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{\cos x - \frac{1}{2}x^2 - 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$.

2) $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sin 3x - \sin x, \beta(x) = 5x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \sqrt{x} - 2, \beta(x) = x^2 - 16, x \rightarrow 4$.

3) $\alpha(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{1 - e^{2x}}{x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$ у точках $x_1 = -2, x_2 = -3$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{(x-1)^5} - \frac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{(3x^2 - 4x)^2}$.

2) $y = \sqrt[5]{7x^2 + \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5}} + \frac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$.

3) $y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x^4 - \frac{\arcsin 5x^3}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$.

4) $y = 3^{-x} \sqrt{\arccos 2x} + \frac{6 \arcsin 2x}{(x-2)^5}$.

5) $y = \operatorname{th}^2 \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 3x^2 - (\operatorname{th} 5x)^{\arcsin(x-1)}$.

6) $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\sin 4x} + \frac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7(x-1)^2}$.

11.1) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$. 2) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

12. $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \frac{1}{t+2}, \\ y = \frac{t^2}{(t+2)^2} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \end{cases}$

13.1) $y = (x-1)^2 \ln(x-1), y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{4x+7}{2x+3}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \sqrt{x+4}, x_0 = -3$.

2) $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, t_0 = 1$.

$$3) x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = \frac{3}{2\pi},$$

$$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{8}\right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2) + 6x - 9$.

$$1) y = (x + 2)e^{1-x}, [-2; 2].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ?$$

$$2) y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}, [-3; 3].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = -\frac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2 + 2x + 9}. \quad 5) y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}.$$

$$2) y = (3 - x)e^{x-2}. \quad 6) y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x+1)^3 - 3x - 3}. \quad 7) y = \frac{x}{9 - x}.$$

$$4) y = \frac{1}{\sin x + \cos x}. \quad 8) y = x \ln^2 x.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}. \quad 7) \int \cos(2 + 3x)dx.$$

$$2) \int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2 - 3}}. \quad 8) \int \frac{dx}{1 - 4x}.$$

$$3) \int \frac{4xdx}{\sqrt{3 - 4x^2}}. \quad 9) \int \frac{dx}{5x^2 + 2}.$$

$$4) \int e^{2x+1}dx. \quad 10) \int e^{\cos x} \sin x dx.$$

$$5) \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx. \quad 11) \int \frac{\operatorname{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x} dx.$$

$$6) \int \frac{\arctg^3 2x}{1 + 4x^2} dx. \quad 12) \int \frac{e^x dx}{2e^x + 3}.$$

$$19.1) \int \frac{6x + 1}{2x^2 + 1} dx. \quad 5) \int \frac{(7x^2 + 12x - 7)dx}{(x^2 + x - 2)(x + 3)}.$$

$$2) \int \frac{8x^3 - 1}{2x + 1} dx. \quad 6) \int \frac{x + 2}{x^3 - x^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2 + x - 6}. \quad 7) \int \frac{(2x^2 + 2x + 20)dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}.$$

$$4) \int \frac{xdx}{2x^2 + x + 5}. \quad 8) \int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^4 + 3x^2 - 4} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^2 7x dx. \quad 4) \int \cos^4 x \sin^3 x dx.$$

$$2) \int \cos^2 5x dx. \quad 5) \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

$$3) \int \cos 5x \sin x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x - 5 \sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4}} dx. \quad 5) \int \frac{2x + 1}{\sqrt{1 + x - 3x^2}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 8}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$4) \int \frac{xdx}{2 + \sqrt{x + 4}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^9 \sqrt[4]{x^4}} dx.$$

$$22.1) \int \ln(x + 2) dx. \quad 4) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x + 1}} dx.$$

$$2) \int x \cos 5x dx. \quad 5) \int x^2 (\sin 2x - 3) dx.$$

$$3) \int (x + 1)e^{-4x} dx. \quad 6) \int \arccos 2x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx.$$

$$2) \int_2^3 \frac{dx}{x^2(x - 1)}. \quad 5) \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$3) \int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2} dx. \quad 6) \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1}. \quad 2) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^5}}.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = \sin x \cos^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2) \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x = 2 \ (x \geq 2).$$

$$3) \rho = 4 \sin 3\varphi, \rho = 2 \ (\rho \geq 2).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 0, y = 5 \cos x, y = \cos x, x \geq 0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \frac{1}{2}x^2 \left(y \leq \frac{3}{2}\right)$ навколо осі Oy .

Варіант 5

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$.

2) $y = 3 \arcsin(x + 2)$. 5) $y = e^{x-2}$.

3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x - 3)$. 6) $y = \ln(2x + 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -6 + 6i, z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i, z_3 = -1 - 2i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z - 2| \leq 3, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

2) $|z - 2i| > |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 2$.

3) $z^3 + 3z^2 + 12z - 16 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{\sqrt{4n^4 + 3}} \right)$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n - 1} - \sqrt[3]{125n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n\sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}}$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(2\pi + \pi x)}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3x^4 + 2x + 5}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - x + 2}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{5}}{3x^2 - 4x + 1}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - 1}{x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x + 1} \right)^{5x-3}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x - 7}{x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 8}{x - 2} \right)^x$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1 - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\pi - 2x)^{\cos x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \cos 3x - \cos x, \beta(x) = 7x^2, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = x^3 + x - 2, \beta(x) = x - 1, x \rightarrow 1$.

3) $\alpha(x) = \arcsin^3(\sqrt{x} - 2), \beta(x) = x - 4, x \rightarrow 4$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{6x^2 - x - 1}{2x - 1}$.

2) $f(x) = \begin{cases} -2(x + 1), & x \leq -1, \\ (x + 1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

3) $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2$ у точках $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{5}{x^2} - \sqrt[3]{x^4} + \frac{\sqrt{7x^3 - 5x + 1}}{e^{\cos x}}$.

2) $y = \sqrt[4]{3x^2 - \cos \sin 5} - \frac{\cos^2 3x}{\lg(3x - 4)}$.

3) $y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \arccos 3x^2 + \frac{\operatorname{cth}^3(x + 1)}{\arccos 2x}$.

4) $y = 3^{\cos x} \ln(x^2 - 3x) - \frac{3 \operatorname{arctg}(2x - 5)}{(x + 1)^4}$.

5) $y = \operatorname{cth}^3 5x \cdot \arcsin x^2 + (\operatorname{ctg} 3x)^{\arcsin 3x}$.

6) $y = (\operatorname{sh} 3x)^{\arcsin 2x} - \frac{(x + 2)^7 (x - 3)^3}{(x - 1)^2 \sqrt{(x + 1)^5}}$.

11.1) $y^2 + \sin y = 25x$. 2) $x^{\sin y} = ye^x$.

12. $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

13.1) $y = x^2 \cos(2x - 1), y^{(6)} = ?$

2) $y = \lg(5x + 2), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7, x_0 = 2$.

$$2) x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}, t_0 = 1.$$

$$3) x = \cos t, y = \sin t, z = e^t, M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; e^{\frac{\pi}{6}}\right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 2 - 3x^2 - x^3$.

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = \ln(x^2 - 2x + 4), \left[-1; \frac{3}{2}\right].$$

$$2) y = 2\sqrt{x} - x, [0; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}. \quad 5) y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}.$$

$$2) y = \frac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}. \quad 6) y = 4 - e^{-x^2}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-1)^3 - 3x + 3}. \quad 7) y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$4) y = e^{\sqrt{2}\sin x}. \quad 8) y = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 1}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}. \quad 7) \int \cos(3+2x)dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{2+3x}. \quad 8) \int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}.$$

$$3) \int \frac{2x dx}{\sqrt{8x^2-9}}. \quad 9) \int \frac{dx}{2x^2+3}.$$

$$4) \int e^{7x-2} dx. \quad 10) \int \frac{\ln^3(1-x)}{x-1} dx.$$

$$5) \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx. \quad 11) \int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x} dx.$$

$$6) \int e^{2x^3-1} x^2 dx. \quad 12) \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 4} dx.$$

$$19.1) \int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx. \quad 5) \int \frac{8x dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}.$$

$$2) \int \frac{x^5-2}{x^2-4} dx. \quad 6) \int \frac{4x^2+3x+3}{x^3+2x^2+x} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{5x^2+2x+7}. \quad 7) \int \frac{(x^3+8x^2+22x+7)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$$

$$4) \int \frac{(x+5)dx}{x^2+x-2}. \quad 8) \int \frac{x^3+8x-2}{x^4+4x^2} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^5 2x dx. \quad 4) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx.$$

$$2) \int \cos^3(1-x) dx. \quad 5) \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$$

$$3) \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5\cos x + 10\sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$3) \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[6]{x^7}} dx.$$

$$4) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx. \quad 4) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2) \int x^2(\sin x + 1) dx. \quad 5) \int (x+2) \cos 3x dx.$$

$$3) \int x^2 e^{-2x} dx. \quad 6) \int \operatorname{arctg} 8x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx.$$

$$2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx. \quad 5) \int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{x+2}.$$

$$3) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}. \quad 6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}. \quad 2) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} y = 3 (y \geq 3).$$

$$3) \rho = 2 \cos \varphi, \rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 0, y = \sin^2 x, x = \frac{\pi}{2}$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $3y = x^2 (0 \leq x \leq 2)$ навколо осі Ox .

Варіант 6

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.
2) $y = 3 \arccos(x - 2)$. 5) $y = e^{2-x}$.
3) $y = 2 \arctg(x + 3)$. 6) $y = -\ln(x - 2)$.

2. Знайти границі (4—7):

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$$z_1 = 2 + 2i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = -2 + 3i.$$

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $1 < |z + 2| \leq 3, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$.
2) $|z - 2| > |z - 2i|, |\operatorname{Im} z| > 3$.
3) $z^3 - 3z^2 + 4z + 8 = 0$.

Знайти границі:

- 4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + \dots + n}$.
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}}$.
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$.
5.1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27}$; 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.
2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x}$.
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}(2\pi x + \pi)}$.
4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^2}{x^4 + 5x - 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.
5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}$.
6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{3}}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$.
7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 3}{x}\right)^{5x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\frac{1}{x}}$.
8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 1}{3x - 1}\right)^{2x+1}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

$$7.1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 - x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}. 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x - x}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x. 4) \lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

- 1) $\alpha(x) = x^2 + 1 - \cos 2x, \beta(x) = 6x^2, x \rightarrow 0$.
2) $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x} - 2), \beta(x) = x - 4, x \rightarrow 4$.
3) $\alpha(x) = x + x^2 - \sqrt{x}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \frac{1 - e^{3x}}{x}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}} \text{ у точках } x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{(x + 2)^3} + \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2 - x + 4}}.$$

$$2) y = \sqrt{3x^4 + \sin \cos 3} - \frac{\operatorname{tg}^3(2x - 1)}{\lg(5x + 1)}.$$

$$3) y = \ln(x - 1) \arccos^2 4x + \frac{\operatorname{th} 3x^5}{\operatorname{arctg}^2 3x}.$$

$$4) y = 5^{-x^2} \arcsin 3x^3 - \frac{\operatorname{arctg}(3x + 2)}{2(x - 3)^2}.$$

$$5) y = \log_2 x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + y = (\operatorname{ch} 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$$

$$6) y = (\operatorname{tg} 4x)^{\arccos 2x} - \frac{(x - 1)^4 \sqrt[5]{(x - 2)^2}}{(x + 1)^2 \sqrt[3]{(x - 4)^2}}.$$

$$11.1) \operatorname{arctg} y = x + 5y. 2) 2^x + 2^y \sin x = 2^{x+y}.$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = e^t. \end{cases}$$

$$13.1) y = (4x^2 + 5)e^{2x+1}, y^{(5)} = ?$$

$$2) y = a^{3x}, y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

$$1) y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2, x_0 = 1.$$

$$2) x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \\ t_0 = -1.$$

3) $x = \sin t, y = \cos t, z = \operatorname{tg} t, M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = (x + 1)^2(x - 1)^2$.

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 1) $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}, [-1; 1]$.
2) $y = \sqrt[3]{(x - 1)^2(x - 7)}, [-1; 5]$.

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = 2x - 3\sqrt[3]{(x + 3)^2}$. 5) $y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$.

2) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$. 6) $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$.

3) $y = \sqrt[3]{(x - 3)^3 - 3x + 9}$. 7) $y = x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

4) $y = \operatorname{arctg} \sin x$. 8) $y = \ln \frac{x}{x + 2} + 1$.

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 + x}}$. 7) $\int \sin(4 - 2x) dx$.

2) $\int \frac{dx}{7x^2 - 4}$. 8) $\int \frac{dx}{2 - 5x}$.

3) $\int \frac{4x dx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$. 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 1}}$.

4) $\int e^{5x-7} dx$. 10) $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$.

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 5x}}{\cos^2 5x} dx$. 11) $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$.

6) $\int \frac{e^x dx}{4 - 3e^x}$. 12) $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg}^3 x}$.

19.1) $\int \frac{5 - x}{3x^2 - 1} dx$. 5) $\int \frac{(x^3 + 5x^2 - 20x) dx}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)}$.

2) $\int \frac{2x^4 - 3}{x^2 + 1} dx$. 6) $\int \frac{x + 2}{x^3 + x^2} dx$.

3) $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$. 7) $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx$.

4) $\int \frac{(3x - 2) dx}{5x^2 - 3x + 2}$. 8) $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{(x - 1)^2(x^2 + 4)} dx$.

20.1) $\int x \operatorname{tg}^2 x^2 dx$. 4) $\int \sqrt[5]{\sin^2 2x} \cos^3 2x dx$.

2) $\int \sin^3 3x dx$. 5) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$.

3) $\int \cos x \sin 9x dx$. 6) $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x - \sin x}$.

21.1) $\int \frac{3 - 7x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$. 5) $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 2x^2}}$. 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

3) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} dx$. 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt[3]{2x - 1}}$.

4) $\int \frac{x + 1}{x\sqrt{x + 2}} dx$. 8) $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}} dx$.

22.1) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$. 4) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx$.

2) $\int (x^2 + x)e^{-x} dx$. 5) $\int \operatorname{arctg} 3x dx$.

3) $\int (x - 2) \cos 4x dx$. 6) $\int x \sin(x - 2) dx$.

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2 (x - 1) \ln x dx$. 4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^8 x dx$.

2) $\int_2^3 \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx$. 5) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2} dx$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx$. 6) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$.

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$. 2) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$.

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1) $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, y = 0$ ($0 \leq x \leq 2$).

2) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 3$ ($0 < x < 4\pi$).

3) $\rho = \sin 3\varphi$.

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 1, y = 1, x = \sqrt[3]{y - 2}$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \sqrt{x}, y = x$ навколо осі Ox .

Варіант 7

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $y = \frac{1}{2} \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$. 5) $y = 5^{x+1}$.

3) $y = 3 \operatorname{arctg}(x - 1)$. 6) $y = \lg(2x - 5)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = -\sqrt{3} - i, z_3 = 3 - 4i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $1 < |z - 2i| \leq 2, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$.

2) $|z + 2i| > |z + 2|, |\operatorname{Re} z| < 1$.

3) $z^3 - z^2 + 2z + 4 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{n + 3} - n \right)$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4 - n^3})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$. 6.3) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 10}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 3x^4}{x^4 + 3x - 2}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6 - 5x^2}{2x^3 + 4x - 5}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^4}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^4 + 3x^2 - 9}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{e^{\sin x^2} - 1}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{2x-1}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3} \right)^{\sin \pi x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$.

2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\ln x}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1, \beta(x) = 2x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \operatorname{tg}(x^2 - x^3), \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

3) $\alpha(x) = e^{x^2} - e^x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

10. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$

3) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1$ у точках $x_1 = 4, x_2 = 5$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5} + \frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$.

2) $y = \sqrt[3]{5x^5 + \cos \ln 7} - \frac{\log_3(4x+5)}{2 \operatorname{ctg} \sqrt{x}}$.

3) $y = \ln^5 x \operatorname{arctg} 7x^4 + \frac{\arccos^7(2x-5)}{\operatorname{th} x^5}$.

4) $y = \log_2 x \operatorname{arctg}^5 x - \frac{4 \operatorname{sh} 3x}{(x+2)^5}$.

5) $y = \operatorname{ch}^3 4x \cdot \arccos 4x^2 + (3x)^{\operatorname{arctg} 3x}$.

6) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} 5x} - \frac{(x-3)^2 \sqrt{x+4}}{(x+1)^3 (x+2)^7}$.

11.1) $y^2 - x = \cos y$. 2) $e^y + xy = \ln y$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^2}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

13.1) $y = x^2 \sin(5x-3), y^{(6)} = ?$

2) $y = \frac{x}{6x+4}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0 = 4$.

2) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, M_0(1; 0; 1)$.

3) $x = t \cos t - 2 \sin t, y = t \sin t + 2 \cos t,$
 $t_0 = \frac{\pi}{4}.$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 2x^3 - 3x^2 - 4.$

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 1) $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3, [1;2].$
 2) $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1;9].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = \frac{6\sqrt[3]{6(x-3)^2}}{x^2 - 2x + 9}.$ 5) $y = \frac{2x^2 - 6}{x - 2}.$
 2) $y = (x - 2)e^{3-x}.$ 6) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$
 3) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2}.$ 7) $y = xe^{\frac{1}{x}}.$
 4) $y = \ln(\sqrt{2} \sin x).$ 8) $y = \frac{4x}{x^2 + 1}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int (1 - 4x)^7 dx.$ 7) $\int \cos(5 - 2x) dx.$
 2) $\int \frac{dx}{3x - 2}.$ 8) $\int \frac{3dx}{\sqrt{7x^2 - 4}}.$
 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9 - 8x^2}}.$ 9) $\int \frac{dx}{2x^2 + 9}.$
 4) $\int e^{5x+7} dx.$ 10) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1} dx.$
 5) $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 2}.$ 11) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx.$
 6) $\int e^{7x^2+2x} dx.$ 12) $\int \frac{x^2 dx}{7 - 5x^3}.$
 19.1) $\int \frac{5+x}{3x^2+1} dx.$ 5) $\int \frac{(2x^2+33x+61)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}.$
 2) $\int \frac{x^3-1}{2x+1} dx.$ 6) $\int \frac{4x^2 dx}{(x^2-2x+1)(x+1)}.$
 3) $\int \frac{dx}{2x^2-11x+20}.$ 7) $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}.$
 4) $\int \frac{(x+4)dx}{2x^2-6x-8}.$ 8) $\int \frac{x^4+x^3-x-3}{x^4-x^2} dx.$
 20.1) $\int \operatorname{ctg}^3 2x dx.$ 4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx.$
 2) $\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx.$ 5) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}.$
 3) $\int \sin 5x \cos 2x dx.$ 6) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}.$

21.1) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx.$ 5) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}.$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

3) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx.$ 7) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} dx}{\sqrt[6]{x-1}+1}.$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+3}}.$ 8) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}} dx.$

22.1) $\int \ln^2 x dx.$ 4) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

2) $\int (x^2+x)e^x dx.$ 5) $\int x \cos 8x dx.$

3) $\int (x-4) \sin 2x dx.$ 6) $\int \arcsin 8x dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 xe^{-2x} dx.$ 4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$

2) $\int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$ 5) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{(x-1)^3}.$

3) $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$ 6) $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}.$ 2) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1) $y = \cos x \sin^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$

2) $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} x = 6\sqrt{3} \ (x \geq 6\sqrt{3}).$

3) $\rho = 6 \sin 3\varphi, \rho = 3 \ (\rho \geq 3).$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 1, y = xe^x, y = 0,$ навколо осі $Ox.$

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t) \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ навколо осі $Ox.$

Варіант 8

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(3x - \frac{4\pi}{3}\right)$.

2) $y = \frac{1}{2} \arccos(x + 2)$. 5) $y = 2^{x-\frac{1}{2}}$.

3) $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x + 2)$. 6) $y = -\ln(2x - 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -4 - 4i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_3 = 4 + 5i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z + 2i| \leq 3$, $\frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{4\pi}{3}$.

2) $|z + 2| < |z - i|$, $|\operatorname{Re} z| < 2$

3) $z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$.

Знайти границі:

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + \dots + (3n - 2)}{\sqrt{5n^4 + n + 1}}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2} + \sqrt{n - 2}}{\sqrt[4]{n^4 + 2} + \sqrt{n - 2}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n + 2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 2x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^2}{3x^2 + 11x - 7}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2 \operatorname{arctg} x - \sin x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5 - x} - 1}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 1}\right)^{x-4}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}})^{\frac{3}{x}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{2x - 1}\right)^{5x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{2}{\ln x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sin x + \sin 5x$, $\beta(x) = 2x$, $x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \frac{1}{x^3 + 2}$, $\beta(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^{10} + x}}$, $x \rightarrow \infty$.

3) $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x + 1})$, $\beta(x) = x + 1$,
 $x \rightarrow -1$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}$.

2) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ x + 3, & x > 4. \end{cases}$

3) $f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2$ у точках $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{4}{x^5} + \frac{\ln(7x - 3)}{3 \operatorname{tg}^2 4x}$.

2) $y = \sqrt[5]{x^6} + \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x + 1)}$.

3) $y = 3^{\sin x} \operatorname{arctg}^3 4x + \frac{\arcsin(3x + 8)}{(x - 7)^3}$.

4) $y = \log_3 x \arccos 3x - \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{2x^2 - 3x}}$.

5) $y = \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 5x^2 + (\ln x)^{\sin \sqrt{x}}$.

6) $y = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(x+1)} - \frac{(x - 7)^{10} \sqrt{3x - 1}}{(x + 1)^2 (x + 3)^5}$.

11.1) $\ln(x^2 + y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; 2) $3x + \sin y = 5y$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}, \\ y = \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 - 1}}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

13.1) $y = (x - 1)^2 \ln(x - 2)$, $y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{4x + 7}{2x + 3}$, $y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \sqrt{x + 4}$, $x_0 = -3$.

2) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, $t_0 = 1$.

3) $x = t^3 - t^2 - 5, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3 - 16,$
 $M_0(-1; 13; 0).$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 3x^2 - x^3 - 2$.

1) $y = \sqrt{4x - x^3}, [-2; 2].$

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$
 $\min_{[a,b]} f(x) = ?$
 2) $y = \frac{10x}{x^2 + 1}, [0; 3].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}.$ 5) $y = \frac{x + 2}{(x + 1)^2}.$

2) $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}.$ 6) $y = x + \frac{\ln x}{x}.$

3) $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$ 7) $y = \frac{e^{2x-2}}{2x - 2}.$

4) $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}.$ 8) $y = \sqrt[3]{x^2(x + 2)^2}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \frac{dx}{2x + 3}.$ 7) $\int \cos(7x + 3) dx.$

2) $\int (1 + 4x)^5 dx.$ 8) $\int \frac{dx}{5x^2 + 3}.$

3) $\int \frac{\sqrt{3}x dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$ 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x^2}}.$

4) $\int e^{7-2x} dx.$ 10) $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg^2 x}}{1 + x^2} dx.$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}.$ 11) $\int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x}.$

6) $\int e^{3-x^2} x dx.$ 12) $\int \frac{\sin 2x}{3 \sin^2 x + 4} dx.$

19.1) $\int \frac{2x - 5}{7x^2 + 3} dx.$ 5) $\int \frac{(x^2 + 22x + 45) dx}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)}.$

2) $\int \frac{x^5}{1 - x^3} dx.$ 6) $\int \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx.$

3) $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 2}.$ 7) $\int \frac{(9x - 9) dx}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)}.$

4) $\int \frac{(x + 4) dx}{2x^2 - 7x + 3}.$ 8) $\int \frac{x^3 - x - 5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx.$

20.1) $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx.$ 4) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$

2) $\int (\cos x + 3)^2 dx.$ 5) $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}.$

3) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$ 6) $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$

21.1) $\int \frac{1 + x}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$ 5) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - x + 1}}.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}.$ 6) $\int \frac{\sqrt[6]{x-1} - 2}{\sqrt[6]{x-1} + 2} dx.$

3) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^4} dx.$ 7) $\int \frac{(3x + 4) dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}}.$

4) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3} dx.$ 8) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x \sqrt[6]{x^5}} dx.$

22.1) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$ 4) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

2) $\int \operatorname{arctg} 4x dx.$ 5) $\int (x^2 - x + 1) e^{-x} dx.$

3) $\int (x - 3) \cos x dx.$ 6) $\int x \sin(x + 3) dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$ 4) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx.$

2) $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$ 5) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx.$

3) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}.$ 6) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}.$ 2) $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

1) $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2.$

2) $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} y = \sqrt{3} (y \geq \sqrt{3}).$

3) $\rho = \cos 3\varphi.$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 2, y^2 = (x - 1)^3$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утворену обертанням кривої $x = \cos t, y = 3 + \sin t$ навколо осі Ox .

Варіант 9

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)$.
2) $y = 2 \arcsin(x - 3)$. 5) $y = 3^{x-3}$;
3) $y = 2 \operatorname{arctg}(x - 2)$. 6) $y = \ln(5 - x)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$$z_1 = 5 - 5i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = -5 + 6i.$$

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $1 < |z - 1 + i| \leq 2, 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.
2) $|z - 3i| > |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 3$.
3) $z^3 + 4z^2 + 12z + 9 = 0$.

Знайти границі (4—7):

$$4.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)} \right).$$

$$5.1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}. 6.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}. 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}. 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}. 4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 1}. 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{11}}{2x^2 - 7x - 15}. 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x - 3} \right)^{3x+1}. 7) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x \sin \pi x}}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{2x-4} \right)^x. 8) \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}.$$

$$7.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}. 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}. 4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

$$1) \alpha(x) = \frac{3x}{1-x}, \beta(x) = \frac{x}{4+x}, x \rightarrow 0.$$

$$2) \alpha(x) = \sin(x - \sqrt{x}), \beta(x) = 2\sqrt{x}, x \rightarrow 0.$$

$$3) \alpha(x) = 3x - \frac{1}{x+1} + \cos x, \beta(x) = \sqrt{x}, x \rightarrow 0.$$

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}} + 3 \text{ у точках } x_1 = 3, x_2 = 4.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{\sqrt{x^3 + 4x - 5}}{e^x}.$$

$$2) y = \sqrt{5x^2 + \operatorname{ctg} \cos 2} + \frac{\operatorname{tg}(11x + 3)}{\cos^2 5x}.$$

$$3) y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg} 5x^3 - \frac{\operatorname{th}^4(2x + 5)}{\arccos 3x}.$$

$$4) y = \arccos x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 7x^3 + \frac{\operatorname{arctg}(4x + 1)}{7(x - 4)^2}.$$

$$5) y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \arcsin \sqrt{x} - (\log_2 x)^{\operatorname{ctg} 7x}.$$

$$6) y = (\arcsin 2x)^{\ln(x+3)} + \frac{(x+1)^8(x-3)^2}{(x+4)^3 \sqrt{(x+2)^5}}.$$

$$11.1) \operatorname{tg} y = 3x + 5y. 2) \operatorname{arctg} y = xy.$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$13.1) y = (2x + 3) \ln^2 x, y^{(5)} = ?$$

$$2) y = \sin 2x + \cos(x + 1), y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

$$1) y = 2x^2 - 3x + 1, x_0 = 1.$$

$$2) x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$3) x = t^2, y = 1 - t, z = t^3, M_0(1; 0; 1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = (x - 1)^2(x - 3)^2$.

$$16. \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}_{[a,b]} f(x) = ? \quad \begin{matrix} 1) y = 4 - e^{-x^2}, [0; 1]. \\ 2) y = \sqrt[3]{(x+1)^2(5-x)}, [-3; 3]. \end{matrix}$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$\begin{matrix} 1) y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2}. & 5) y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}. \\ 2) y = x - \ln(1 + x^2). & 6) y = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}. \\ 3) y = 3 - 3\ln \frac{x}{x+4}. & 7) y = \frac{2x+1}{x^2}. \\ 4) y = e^{\sin x - \cos x}. & 8) y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}. \end{matrix}$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$\begin{matrix} 18.1) \int (1-3x)^4 dx. & 7) \int \frac{dx}{3x-4}. \\ 2) \int \sin(8x-3) dx. & 8) \int \frac{dx}{5x^2-3}. \\ 3) \int \frac{2x dx}{\sqrt{3x^2-2}}. & 9) \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}. \\ 4) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x+3}}. & 10) \int e^{3-4x} dx. \\ 5) \int \frac{dx}{\cos^2 3x \operatorname{tg}^4 3x}. & 11) \int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx. \\ 6) \int e^{4x^2+5} x dx. & 12) \int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}} dx. \\ 19.1) \int \frac{3x+2}{2x^2+1} dx. & 5) \int \frac{(6x^2+6x-6) dx}{(x+1)(x^2+x-2)}. \\ 2) \int \frac{x^3}{x^2+3} dx. & 6) \int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx. \\ 3) \int \frac{dx}{3x^2-12x+13}. & 7) \int \frac{7x-10}{x^3+8} dx. \\ 4) \int \frac{(5x-2) dx}{2x^2-5x+2}. & 8) \int \frac{x^3-x-1}{x^4+x^2} dx. \\ 20.1) \int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} dx. & 4) \int \frac{3 \sin^3 x}{\cos^4 x} dx. \\ 2) \int \cos^3(x+3) dx. & 5) \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx. \\ 3) \int \cos 5x \cos x dx. & 6) \int \frac{dx}{3+5 \cos x}. \end{matrix}$$

$$21.1) \int \frac{2x-3}{\sqrt{9-x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{(3x-1) dx}{\sqrt{2x^2-5x+1}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}. \quad 6) \int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[6]{x+3}+1} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad 7) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}.$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$$

$$22.1) \int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx. \quad 4) \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$2) \int (x^2-x+1)e^x dx. \quad 5) \int \arcsin 5x dx.$$

$$3) \int (x+4) \sin 2x dx. \quad 6) \int x \cos(x+4) dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x e^{-3x} dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$2) \int_0^2 \frac{x dx}{x^2+3x+2}. \quad 5) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx.$$

$$3) \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx. \quad 6) \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}. \quad 2) \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, y = 0 \quad (1 \leq x \leq e^3).$$

$$2) \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} y = 3 \quad (y \geq 3, 0 < x < 6\pi).$$

$$3) \rho = \cos \varphi, \rho = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 0, x = \sqrt{1-y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $3x = y^3 \quad (0 \leq y \leq 2)$ навколо осі Oy .

Варіант 10

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \frac{1}{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

2) $y = 3 \arccos(x - 1)$. 5) $y = 3^{x+2}$.

3) $y = 3 \arctg(x + 2)$. 6) $y = \lg(x + 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = 6 + 6i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = -6 - 7i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z + 1 - i| \leq 3, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$.

2) $|z - 3| > |z - i|, |\operatorname{Im} z| > 1$.

3) $z^3 + 3z^2 + 4z + 2 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\sin(2\pi x + 20\pi)}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2}}{x^2 + 8x + 15}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x - 2x}}{\sqrt[5]{x^2} - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{e^x - x - 1}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$. 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \frac{3x^2}{2+x}, \beta(x) = 7x^2, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \arcsin(2 - \sqrt{x}), \beta(x) = 4 - x, x \rightarrow 4$.

3) $\alpha(x) = \frac{1}{x^2 - x + 7}, \beta(x) = \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$

3) $f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1$ у точках $x_1 = 4, x_2 = 5$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4} + \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3}$.

2) $y = \sqrt[3]{4x^2} - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$.

3) $y = \log_4 x \arcsin^4 x + \frac{\sqrt[3]{\arctg 2x}}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4) $y = 5^{-x^2} \arccos 5x^4 - \frac{\arcsin(2x-7)}{3(x+2)^4}$.

5) $y = \operatorname{cth}^2 x \cdot \arccos \frac{1}{x} + (\operatorname{sh} 3x)^{\arctg(2x+1)}$.

6) $y = (\arccos 3x)^{\operatorname{tg} 5x} - \frac{(x+2)^3(x-7)^4}{(x+1)^2 \sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

11.1) $y = e^y + 4x$. 2) $\cos xy = \ln x$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

13.1) $y = (1+x^2)\sin(2x+1), y^{(6)} = ?$

2) $y = \frac{2x+5}{3x+1}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1) $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}, x_0 = 3$.

2) $x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, t_0 = 0$.

$$3) x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}, M_0(e; e^{-1}; \sqrt{2}).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{x^3 + 3x^2}{4} - 5$.

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ? \quad 1) y = x + \frac{4}{x^2}, [1; 2].$$

$$2) y = 2x^2 + \frac{108}{x}, [2; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = -\frac{6\sqrt[3]{6x^2}}{x^2 + 4x + 12}. \quad 5) y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}.$$

$$2) y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}. \quad 6) y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x - 3)^2}. \quad 7) y = xe^x.$$

$$4) y = \arctg \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}. \quad 8) y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \sqrt{1+3x} dx. \quad 7) \int \frac{dx}{4-3x}.$$

$$2) \int \sin(3+4x) dx. \quad 8) \int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}.$$

$$3) \int \frac{2x dx}{\sqrt{7-2x^2}}. \quad 9) \int \frac{dx}{5x^2-4}.$$

$$4) \int e^{10x+2} dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$5) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x + 1}}. \quad 11) \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x} dx.$$

$$6) \int \frac{4x^3}{7+2x^4} dx. \quad 12) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x}}.$$

$$19.1) \int \frac{1-5x}{1-25x^2} dx. \quad 5) \int \frac{(37x-85) dx}{(x^2+2x-3)(x-4)}.$$

$$2) \int \frac{4x^2-2x+1}{2x-1} dx. \quad 6) \int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2+3x}. \quad 7) \int \frac{(4x^2+3x+17) dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$$

$$4) \int \frac{(4x-1) dx}{4x^2-4x+5}. \quad 8) \int \frac{(2x^2-7x+10) dx}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^2 4x dx. \quad 4) \int \sin^5 x \cos^4 x dx.$$

$$2) \int \sin^3 \frac{4x}{5} dx. \quad 5) \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$$

$$3) \int \cos 2x \cos 3x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3}.$$

$$21.1) \int \frac{3x-2}{\sqrt{3x^2+1}} dx. \quad 5) \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4} dx. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}.$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$22.1) \int x \sin 3x dx. \quad 4) \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$2) \int x \operatorname{ctg}^2 x dx. \quad 5) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$3) \int (x+1)e^{-x} dx. \quad 6) \int \arccos 7x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \cos^8 \frac{x}{4} dx.$$

$$2) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad 5) \int_0^1 \frac{2x+3}{(x-2)^3} dx.$$

$$3) \int_1^2 \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx. \quad 6) \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2+4x+5}. \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}} dx.$$

25. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

$$1) y = \arccos x, y = 0, x = 0.$$

$$2) \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 4 (x \geq 4).$$

$$3) \rho = \sin \varphi, \rho = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \\ \left(0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 0$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [-1; 1]$ навколо осі Ox .

Варіант 11

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{16}\right)$.

2) $y = \frac{1}{2} \arcsin\left(x + \frac{1}{3}\right)$. 5) $y = 4^{x-1}$.

3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 6) $y = -\lg(3 - x)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^6$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -9 - 9i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = 2 + 3i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z| > 4, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$.

2) $|z + 3| < |z + i|, |\operatorname{Re} z| < 1$.

3) $z^3 + 5z^2 + 20z + 16 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}{1 + 3 + \dots + (2n-1)}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

2) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg} 2x^2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^4 - 2x^2 + x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 6x^4 - x^3}{2x^2 + 6x + 1}$. 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$. 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{2 \sin x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^{x^2} + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = 2x^3, \beta(x) = \frac{5x^3}{4-x}, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = e^x - 1, \beta(x) = x^2, x \rightarrow 0$.

3) $\alpha(x) = 10x^3 - 3x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{x}{|x-2|}$.

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$ у точках $x_1 = -5, x_2 = -4$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{2}{x^5} - \frac{\sqrt{2x-x^2}}{e^x}$.

2) $y = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{3} \cos \operatorname{tg} \frac{1}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{\lg(x+3)}$.

3) $y = 3^{\operatorname{tg} x} \arcsin 7x^4 - \frac{\arcsin^2(4x-1)}{\operatorname{th}(5x-3)}$.

4) $y = \operatorname{arctg}^4 x \cdot \cos 7x^4 + \frac{2 \lg(4x+5)}{(x+6)^4}$.

5) $y = \operatorname{sh}^4 2x \cdot \arccos x^2 - (\operatorname{ch} 3x)^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}}$.

6) $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\log_2 x} + \frac{(x+1)^2 \sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2 (x+3)^5}$.

11.1) $xy = \operatorname{ctg} y$. 2) $a^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

13.1) $y = x^3 \ln x, y^{(5)} = ?$

2) $y = 2^{3x+5}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, x_0 = 64$.

2) $x = at \cos t, y = at \sin t, t_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$3) x = 4 \sin^2 t, y = 4 \sin t \cos t, \\ z = 2 \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 6x - 8x^3$.

$$1) y = xe^x, [-2; 0].$$

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 2) y = x + \frac{4}{(x+2)^3}, [-1; 2].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}. \quad 5) y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$2) y = \ln(\sin x - \cos x). \quad 6) y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}. \quad 7) y = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

$$4) y = 4x + 6\sqrt[3]{(x+2)^2}. \quad 8) y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \sqrt{5-4x} dx. \quad 7) \int \frac{dx}{3x+4}.$$

$$2) \int \sin(3-4x) dx. \quad 8) \int \frac{dx}{3x^2-7}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}. \quad 9) \int \frac{xdx}{2x^2-7}.$$

$$4) \int e^{2x-10} dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$5) \int e^{5x^2-3} x dx. \quad 11) \int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin x}} dx.$$

$$6) \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 3x}}{\sin^2 3x} dx. \quad 12) \int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$19.1) \int \frac{4x-3}{3x^2-4} dx. \quad 5) \int \frac{(3x^2+3x-24)dx}{(x^2-x-2)(x-3)}.$$

$$2) \int \frac{x^4}{x^2-3} dx. \quad 6) \int \frac{4x-1}{x(x-1)^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2-5x+6}. \quad 7) \int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$$

$$4) \int \frac{(x+1)dx}{2x^2+x+1}. \quad 8) \int \frac{x^5+4x^3+4x+2}{x^4+4x^2} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^3 x dx. \quad 4) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx.$$

$$2) \int \sin 5x \sin 7x dx. \quad 5) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

$$3) \int (1-\cos x)^2 dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5+4\sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{x-1}{\sqrt{5-2x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{2x^2-x+7}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx.$$

$$4) \int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx. \quad 8) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx.$$

$$22.1) \int \ln(x+4) dx. \quad 4) \int \frac{x \arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$2) \int x^2 e^{-x} dx. \quad 5) \int (x+5) \sin x dx.$$

$$3) \int x \operatorname{arctg} x dx. \quad 6) \int x \cos(x-7) dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^8 \frac{x}{2} dx.$$

$$2) \int_{\frac{2}{3}}^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}. \quad 5) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1}. \quad 6) \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx. \quad 2) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = (x+1)^2, y^2 = x+1.$$

$$2) \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 3 \quad (y \geq 3).$$

$$3) \rho = 6 \cos 3\varphi, \rho = 3 \quad (\rho \geq 3).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = \cos t, y = 1 + \sin t$ навколо осі Ox .

Варіант 12

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2) $y = \frac{1}{3} \arccos(x - 1)$. 5) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$.

3) $y = -\operatorname{arctg}(x + 1)$. 6) $y = \ln(2x - 5)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^8$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -7 + 7i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 7 - 8i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z - 1| > 2, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$.

2) $|z + 3| > |z - 3|, |\operatorname{Im} z| < 2$.

3) $z^3 - 6z^2 + 16z - 16 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^n}}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{3+n^3})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \operatorname{tg} x^2}{x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \frac{5\pi}{2}) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 + 7x - 3}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-3x-2x^2}{4x^4+5x}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7}}{\sqrt{7}x}$. 6) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x^3)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^3)}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^x$. 8) $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 4x}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\ln(1+2x) - 2x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$. 4) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \frac{x^2}{5+x}, \beta(x) = \frac{4x^2}{x-1}, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x}), \beta(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}, x \rightarrow 0$.

3) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} + 2, \beta(x) = x + 8, x \rightarrow -8$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}$.

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$ у точках $x_1 = 3, x_2 = 2$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2} - \frac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2 - 4x - 7}}$.

2) $y = \sqrt[5]{3x^2 + \ln \sin \frac{1}{2}} + \frac{\sin^3(5x+1)}{\operatorname{tg}(3x-2)}$.

3) $y = 5^{x^2} \arccos 2x^3 - \frac{\operatorname{ch}^2(4x+2)}{\operatorname{arctg} x^3}$.

4) $y = \operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{arctg} x^3 + \frac{5 \ln(5x+7)}{(x-7)^2}$.

5) $y = \operatorname{ch}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 3x - (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$.

6) $y = (\operatorname{arctg} 7x)^{\lg(x+1)} + \frac{(x+2)^2 \sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5 (x-5)^3}$.

11.1) $\ln y - \frac{y}{x} = 7$. 2) $2y \ln y = x$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1+2 \cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1+2 \cos t}. \end{cases}$

13.1) $y = (4x+3)2^{-x}, y^{(5)} = ?$

2) $y = \sin(x+1) + \cos 2x, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x^3+2}{x^3-2}, x_0 = 2$.

$$2) x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$3) x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{3}t^3, z = \frac{1}{4}t^4, M_0\left(2; \frac{8}{3}; 4\right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 16x^2(x-1)^2$.

$$1) y = (x-2)e^x, [-2; 1].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ? \quad 2) y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}, [-1; 6].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2 - 4x + 12}. \quad 5) y = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2.$$

$$2) y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}. \quad 6) y = \frac{8}{(x-1)^2 + 4}.$$

$$3) y = \ln \frac{x}{x-2} - 2. \quad 7) y = x^3 e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$4) y = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}. \quad 8) y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}. \quad 7) \int \cos(4x+3)dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{4x-2}. \quad 8) \int \frac{xdx}{3x^2+8}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}. \quad 9) \int \frac{\sqrt{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$4) \int \frac{dx}{3x^2+7}. \quad 10) \int \frac{\arctg^7 3x}{1+9x^2} dx.$$

$$5) \int e^{4x+3} dx. \quad 11) \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx.$$

$$6) \int e^{1-4x^2} dx. \quad 12) \int \frac{\tg^4 7x}{\cos^2 7x} dx.$$

$$19.1) \int \frac{2x+3}{1-3x^2} dx. \quad 5) \int \frac{2x^4 - 7x^3 + 3x + 20}{(x-2)(x^2-2x-3)} dx.$$

$$2) \int \frac{x^3+5x}{x^2+1} dx. \quad 6) \int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x-3-4x^2}. \quad 7) \int \frac{(x^2-5x+40)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}.$$

$$4) \int \frac{(x+1)dx}{3x^2-2x-8}. \quad 8) \int \frac{x^3-x+2}{x^4-x^2} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^2 5x dx. \quad 4) \int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx.$$

$$2) \int \sin^2(2x-1)dx. \quad 5) \int \frac{dx}{4\sin x(\sin x+2\cos x)}.$$

$$3) \int \sin 4x \cos 2x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{8+4\cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}} dx. \quad 5) \int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx.$$

$$4) \int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12}\sqrt{x^7}} dx.$$

$$22.1) \int x^2 e^{3x} dx. \quad 4) \int \arccos 2x dx.$$

$$2) \int \frac{xdx}{\sin^2 x}. \quad 5) \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$3) \int x \sin(x-5) dx. \quad 6) \int (x-5) \cos x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx. \quad 4) \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$2) \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}. \quad 5) \int_3^5 \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}.$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tg^4 x dx. \quad 6) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}. \quad 2) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3.$$

$$2) \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 9 \quad (0 < x < 12\pi).$$

$$3) \rho = \frac{1}{2} + \sin \varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривою $x^2 + (y-2)^2 = 1$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x^2 = 4 + y, y = 2$ навколо осі Oy .

Варіант 13

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

2) $y = 2\arcsin(x+2)$. 5) $y = e^{1-x}$.

3) $y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x-1)$. 6) $y = -\lg(x+2)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^7$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -2 - 2i, z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i, z_3 = 8 + 9i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z - i| > 3, \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$.

2) $|z - 4| < |z - i|, |\operatorname{Re} z| > 3$.

3) $z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n+1}}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x + \sin x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x^2 + 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x-5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 - 5}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - 1}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - 5x^3\right)^{\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{x}}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}\right)$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - \sin x \ln a}{e^x - 1 - \operatorname{tg} x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sin 8x, \beta(x) = \arcsin 5x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - 3, \beta(x) = 27 - x, x \rightarrow 27$.

3) $\alpha(x) = e^{3x^2} - \cos x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$

3) $f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}$ у точках $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{8}{x^3} + 4\sqrt{x} - \frac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$.

2) $y = \sqrt[3]{5x^4 + 8 \sin \operatorname{ctg} 3} + \frac{\cos^4(7x-1)}{\lg(x+5)}$.

3) $y = \sin^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 - \frac{\arcsin 4x^5}{\operatorname{th}^3 x}$.

4) $y = e^{-\cos x} \operatorname{arctg} 7x^4 + \frac{4 \log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$.

5) $y = \operatorname{th}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} x^4 - (\arccos 5x)^{\ln x}$.

6) $y = (\log_4 2x)^{\arcsin x} + \frac{\sqrt{(x+3)^3(x-1)^4}}{(x+1)^2(x+2)^7}$.

11.1) $y^2 + x^2 = \cos xy$. 2) $y \sin x = x \sin y$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

13.1) $y = e^{1-2x} \sin(2+3x), y^{(5)} = ?$

2) $y = \lg(x+4), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = 2x^2 + 3, x_0 = -1$.

$$2) x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos t, t_0 = 1.$$

$$3) x = \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = at, t_0 = 0.$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$.

$$1) y = (x-1)e^{-x}, [0; 3].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ?$$

$$2) y = \frac{7x - x^2 - 7}{x^2 - 2x + 2}, [1; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \sqrt[3]{x(x+2)}. \quad 5) y = \frac{3x^2 - 7}{2x + 1}.$$

$$2) y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}. \quad 6) y = (x+2)e^{1-x}.$$

$$3) y = (2x+5)e^{-2(x+2)}. \quad 7) y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}.$$

$$4) y = e^{-\sqrt{2} \cos x}. \quad 8) y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{5-3x}. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}.$$

$$2) \int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}. \quad 8) \int \cos(3-4x)dx.$$

$$3) \int \frac{2xdx}{3x^2-7}. \quad 9) \int \frac{dx}{6x^2-7}.$$

$$4) \int e^{4x+5}dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1}dx.$$

$$5) \int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x}dx. \quad 11) \int e^{3x^2+4x}dx.$$

$$6) \int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx. \quad 12) \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{2-\sin 3x}}dx.$$

$$19.1) \int \frac{x-3}{9x^2+7}dx. \quad 5) \int \frac{(3x^2-15)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}.$$

$$2) \int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx. \quad 6) \int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x^2-8x-3}. \quad 7) \int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx.$$

$$4) \int \frac{(4x+5)dx}{4x^2+6x-10}. \quad 8) \int \frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2+4}dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}dx. \quad 4) \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x dx.$$

$$2) \int \sin^3 6x dx. \quad 5) \int \frac{\sin 2x dx}{4 \sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$3) \int \cos 4x \sin 5x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{2x+3}{\sqrt{5x^2+2}}dx. \quad 5) \int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}}.$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}}dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx. \quad 4) \int \operatorname{arctg} x dx.$$

$$2) \int \frac{xdx}{\cos^2 x}. \quad 5) \int (x+9) \sin x dx.$$

$$3) \int x \cos(x+4)dx. \quad 6) \int (x-4)e^x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx. \quad 4) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$2) \int_0^1 \frac{x^4 + 3x^3 - 1}{(x+1)^2} dx. \quad 5) \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx. \quad 6) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}. \quad 2) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = x\sqrt{36-x^2}, y = 0 \quad (0 \leq x \leq 6).$$

$$2) \begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 4 \quad (x \geq 4).$$

$$3) \rho = \cos \varphi, \rho = \sin \varphi, \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = 0, x = 1, y = 1 - x^2, x = \sqrt{y-2}$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ навколо осі Ox .

Варіант 14

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 2 \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$.

2) $y = 2 \arccos(x + 1)$. 5) $y = e^{x+1}$.

3) $y = \operatorname{arctg}(x + 1) - \frac{\pi}{3}$. 6) $y = -\ln(2x + 5)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = 3 - 3i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = -9 + 8i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z| > 4, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$.

2) $|z - 4i| > |z - 2|, |\operatorname{Im} z| > 1$.

3) $z^3 + z^2 - z + 2 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + (2n - 1) + 2n}{\sqrt{n^2 + 3}}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8 + 1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x + 1}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right)}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 7x^3 - 3}{3x^2 - 5x + 1}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x - 3}\right)^{x-5}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{4x - 5}\right)^{2x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-5} e^x$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sin 3x + \sin x, \beta(x) = 10x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}, \beta(x) = \frac{x - 4}{x + 4}, x \rightarrow 4$.

3) $\alpha(x) = \arcsin(\sqrt{9 + x^2} - 3), \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$

3) $f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3$ у точках $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2 - 5x - 2}}$.

2) $y = \sqrt[7]{\cos \operatorname{ctg} 3 - 7x^2} + \frac{\sin^3(4x + 3)}{\ln(7x + 1)}$.

3) $y = \cos^3 4x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\operatorname{arctg}^3(2x + 1)}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$.

4) $y = 2^{-\sin x} \arcsin^3 x^4 + \frac{7 \log_4(2x - 5)}{(x - 1)^5}$.

5) $y = \operatorname{cth}^4 7x \cdot \arcsin \sqrt{x} - (\operatorname{arctg} 3x)^{\sin x}$.

6) $y = (\log_5 3x)^{\arccos(2x-3)} - \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x+1)^4(x-7)^3}$.

11.1) $e^y = 4x - 7y$. 2) $x^n + y^n = a^n \ln y$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

13.1) $y = e^{3+2x} \sin(2 + 3x), y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{x+3}{x-7}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, x_0 = 1$.

2) $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}, t_0 = 1$.

$$3) x = t^2 - 1, y = t + 5, z = t^3, M_0(0; 6; 1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$.

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = \frac{x}{9-x^2}, [-2; 2].$$

$$2) y = x - 4\sqrt{x+2}, [-1; 7].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}. \quad 5) y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

$$2) y = \frac{x^2 + 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}. \quad 6) y = \frac{(x-2)^2}{x+1}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}. \quad 7) y = \frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}.$$

$$4) y = -\operatorname{arctg} \cos x. \quad 8) y = \frac{\ln x}{x}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{4-7x}. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}. \quad 8) \int \cos(2+5x)dx.$$

$$3) \int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+5}}. \quad 9) \int \frac{dx}{7x^2+6}.$$

$$4) \int e^{6x+2}dx. \quad 10) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{\ln(x+1)}}.$$

$$5) \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x} dx. \quad 11) \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$6) \int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx. \quad 12) \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx.$$

$$19.1) \int \frac{(x-3)dx}{4x^2+1}. \quad 5) \int \frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}.$$

$$2) \int \frac{x^3-1}{x+3} dx. \quad 6) \int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{8-2x-x^2}. \quad 7) \int \frac{(x^2-13x+40)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}.$$

$$4) \int \frac{(5x+1)dx}{x^2-4x+1}. \quad 8) \int \frac{2x^5-2x^3+x^2}{1-x^4} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^3 2x dx. \quad 4) \int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2x dx.$$

$$2) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx. \quad 5) \int \frac{dx}{1+4\cos x(\cos x - \sin x)}.$$

$$3) \int \cos x \cos 5x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}. \quad 7) \int \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[6]{x^5}(1+\sqrt[3]{x})} dx.$$

$$4) \int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}} dx.$$

$$22.1) \int x \operatorname{tg}^2 x dx. \quad 4) \int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2) \int x^2 \ln(x+1) dx. \quad 5) \int (x+7) \sin 2x dx.$$

$$3) \int x \cos(x-2) dx. \quad 6) \int x e^{-6x} dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{8}} x^2 \sin 4x dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$2) \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}. \quad 5) \int_{-1}^0 \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2} dx.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x dx. \quad 6) \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}. \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) x = \arccos y, x = 0, y = 0.$$

$$2) \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} y = 4 (y \geq 4).$$

$$3) \rho = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \rho = \sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = x^2, y = 1, x = 2$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ навколо осі Ox .

Варіант 15

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{12}\right)$.
2) $y = 3 \arcsin(x - 2)$. 5) $y = -2^{x+2}$.
3) $y = \operatorname{arctg}(x + 2)$. 6) $y = \lg(x - 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^9$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$$z_1 = 4 + 4i, z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i, z_3 = -8 - 7i.$$

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $|z + 3| > 4, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.
2) $|z + 4| < |z - i|, |\operatorname{Re} z| < 2$.
3) $z^3 + 5z^2 + 15z + 18 = 0$.

Знайти границі (4—7):

$$4.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 5} - \sqrt{3n^4 + 2}}{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n + 1} - \sqrt[3]{27n^3 + 4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5 + n}}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3}).$$

$$5.1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}. \quad 6.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7}{2 - 3x + 4x^2}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos \pi x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5 + x} - 2}{\sqrt{8 - x} - 3}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2} \right)^{2x}. \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\sin x})^{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x - 2}{3x + 1} \right)^{5x}. \quad 8) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9 - 2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}.$$

$$7.1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\operatorname{tg} x}.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

$$1) \alpha(x) = \cos 7x - \cos x, \beta(x) = 2x^2, x \rightarrow 0.$$

$$2) \alpha(x) = x \sin \sqrt{x}, \beta(x) = \sqrt{x^3}, x \rightarrow 0.$$

$$3) \alpha(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{27 - 2x^2 - x - 3}), \\ \beta(x) = x, x \rightarrow 0.$$

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$3) f(x) = 2^{\frac{5}{1-x}} - 1 \text{ у точках } x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \frac{4}{x^5} - \sqrt[5]{x^2} - \frac{(2x + 5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$2) y = \sqrt[4]{4x^5 - \cos \operatorname{tg} \frac{1}{3}} + \frac{\operatorname{ctg}^3(2x - 3)}{\log_3(x + 2)}.$$

$$3) y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arcsin x^5 - \frac{\arccos 4x^3}{\operatorname{sh}^4 x}.$$

$$4) y = 2^{\sin x} \operatorname{arctg} x^4 + \frac{\ln(7x + 2)}{2(x - 6)^4}.$$

$$5) y = \operatorname{sh}^3 2x \cdot \arcsin 7x^2 - (\lg x)^{\operatorname{arctg} 2x}.$$

$$6) y = (\ln(x + 7))^{\operatorname{ctg} 2x} + \frac{\sqrt[4]{x - 8}(x + 2)^6}{(x - 1)^5(x + 3)^2}.$$

$$11.1) 4 \sin^2(x + y) = y. \quad 2) \operatorname{tg} xy = \frac{x}{\operatorname{tg} y}.$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sqrt{t - 1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$13.1) y = (2x^3 + 1) \cos x, y^{(5)} = ?$$

$$2) y = \lg(3x + 1), y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

$$1) y = 2x + \frac{1}{x}, x_0 = 1.$$

$$2) x = \frac{1+t}{t^2}, y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, t_0 = 2.$$

$$3) x = e^t, y = \cos t, z = t^2 + 1, M_0(1; 1; -1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = (2x + 1)^2(2x - 1)^2$.

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ? \quad 1) y = \frac{1 + \ln x}{x}, \left[\frac{1}{e}; e\right].$$

$$2) y = \sqrt[3]{(x-2)^2(5-x)}, [1; 5].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2}}. \quad 5) y = 2 \ln \frac{x}{x+1}.$$

$$2) y = \frac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{x^2 + 6x + 17}. \quad 6) y = -\ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}. \quad 7) y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2.$$

$$4) y = \ln(-\sqrt{2} \cos x). \quad 8) y = \frac{-8x}{x^2 + 4}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{5x-3}. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$$

$$2) \int \frac{dx}{2x^2+7}. \quad 8) \int \cos(3x+5)dx.$$

$$3) \int \frac{xdx}{\sqrt{7-3x^2}}. \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}.$$

$$4) \int e^{5-2x}dx. \quad 10) \int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx.$$

$$5) \int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x}dx. \quad 11) \int \sin^3 4x \cos 4x dx.$$

$$6) \int e^{4-x^2}xdx. \quad 12) \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

$$19.1) \int \frac{x-3}{1-4x^2}dx. \quad 5) \int \frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2}.$$

$$2) \int \frac{x^3}{x^2-1}dx. \quad 6) \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{5x-x^2-6}. \quad 7) \int \frac{3-9x}{x^3-1}dx.$$

$$4) \int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}. \quad 8) \int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^5 2x dx. \quad 4) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}dx.$$

$$2) \int \sin^2\left(\frac{x}{2}+1\right)dx. \quad 5) \int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}.$$

$$3) \int \cos x \sin 9x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{2+4\sin x + 3\cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx. \quad 5) \int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3) \int x^3\sqrt{9-x^2}dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx.$$

$$4) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}dx.$$

$$22.1) \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx. \quad 4) \int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x}dx.$$

$$2) \int (x^2+2)e^{-x}dx. \quad 5) \int (x+4)\sin 3x dx.$$

$$3) \int x \cos(x+3)dx. \quad 6) \int \arctg 7x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_1^2 x^2 \ln x dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$2) \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}. \quad 5) \int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx. \quad 6) \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{11}{8}} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx. \quad 2) \int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2\arcsin x}{\pi}}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = x \arctg x, y = 0, x = \sqrt{3}.$$

$$2) \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 6 \quad (0 < x < 12\pi).$$

$$3) \rho = 4 \sin 3\varphi, \rho = 2 \quad (\rho \geq 2).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = x^3, y = \sqrt{x}$, навколо осі Ox .

27. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ навколо полярної осі.

Варіант 16

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = -2 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = 3^{x-1}$.
2) $y = \frac{1}{2} \arccos\left(x + \frac{1}{2}\right)$. 5) $y = 2 \operatorname{arctg}(x - 3)$.
3) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{24}\right)$. 6) $y = \ln(x + 5)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$$z_1 = -5 + 5i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 7 - 6i.$$

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $|z - 2i| > 3, \frac{3\pi}{4} < \arg z \leq \pi$.
2) $|z + 4i| > |z - 3|, |\operatorname{Im} z| < 3$.
3) $z^3 - 2z - 4 = 0$.

Знайти границі (4—7):

$$4.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)! - n(3n-1)!}{(3n-1)! + (3n-2)!}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8} - 1}{(n + 4\sqrt{n})\sqrt{n^2 - 5}}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}).$$

$$5.1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}. \quad 6.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{7x + 5}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 3x - \sin 5x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\log_2 x}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x}. \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}. \quad 8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}.$$

$$7.1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

$$1) \alpha(x) = \frac{(x-1)^3}{\ln x}, \beta(x) = e^{x-1} - 1, x \rightarrow 0.$$

$$2) \alpha(x) = x - \sin x, \beta(x) = x, x \rightarrow 0.$$

$$3) \alpha(x) = \operatorname{tg}(\sqrt{x} - 2), \beta(x) = x - 4, x \rightarrow 4.$$

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 4-x, & 0 < x \leq 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}} - 1 \text{ у точках } x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \frac{8}{x^3} - 4\sqrt{x^3} + \frac{e^{-\operatorname{tg} 3x}}{4x^2 - 3x + 5}.$$

$$2) y = \sqrt[5]{x^3 + \sin \operatorname{tg} \frac{1}{7}} - \frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}.$$

$$3) y = \operatorname{ctg}^7 x \cdot \arccos 2x^3 + \frac{\operatorname{cth}^2(x-2)}{\arccos 3x}.$$

$$4) y = 3^{-x^2} \operatorname{arctg} 2x^5 - \frac{4 \lg(3x+7)}{(x+1)^7}.$$

$$5) y = \operatorname{th}^5 4x \cdot \arccos 3x^4 + (\operatorname{ctg} 7x)^{\sqrt{x+3}}.$$

$$6) y = (\ln(5x-4))^{\operatorname{arctg} x} - \frac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x-2)^4(x+8)^3}.$$

$$11.1) \sin y = \frac{7}{x} + 3xy. \quad 2) y^2 = 2x \sin y.$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$13.1) y = (x^2 + 3) \ln(x-3), y^{(5)} = ?$$

$$2) y = \sin 2x + \cos(x+1), y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

$$1) y = \frac{-2(x^8 + 2)}{3(x^4 + 1)}, x_0 = 1.$$

$$2) x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t, t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$3) x = t^3, y = (t+1)^2, z = \sqrt{t^2+1}, \\ M_0(-8; 1; \sqrt{5}).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$.

$$16. \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}_{[a,b]} f(x) = ? \quad \begin{matrix} 1) y = e^{4x-x^2}, [1; 3]; \\ 2) y = \frac{4x}{4+x^2}, [-4; 2]. \end{matrix}$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$\begin{matrix} 1) y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x. & 5) y = \frac{21-x^2}{7x+9}. \\ 2) y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}. & 6) y = \frac{x^3}{9-x^2}. \\ 3) y = (4-x)e^{x-3}. & 7) y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2. \\ 4) y = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}. & 8) y = \ln(x^2+1). \end{matrix}$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$\begin{matrix} 18.1) \int \sqrt[5]{3-2x} dx. & 7) \int \frac{dx}{3-2x}. \\ 2) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}. & 8) \int \sin(5x-3) dx. \\ 3) \int \frac{xdx}{2x^2+9}. & 9) \int \frac{dx}{6x^2+1}. \\ 4) \int e^{4-3x} dx. & 10) \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{\ln(x+2)}}. \\ 5) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx. & 11) \int \sin 2x \sqrt[3]{\cos 2x} dx. \\ 6) \int \frac{dx}{\cos^2 4x \sqrt{\operatorname{tg} 4x}}. & 12) \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^7 x}. \\ 19.1) \int \frac{3x-1}{4-x^2} dx. & 5) \int \frac{(4x^2+32x+52)dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}. \\ 2) \int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx. & 6) \int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx. \\ 3) \int \frac{dx}{x^2+4x+25}. & 7) \int \frac{6-9x}{x^3+8} dx. \\ 4) \int \frac{(x-3)dx}{x^2-5x+4}. & 8) \int \frac{x^4+x^3-2x+4}{x^4-1} dx. \\ 20.1) \int \operatorname{tg}^3 7x dx. & 4) \int \cos^4 2x \sin^2 2x dx. \\ 2) \int \cos^2 2x dx. & 5) \int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}. \\ 3) \int \sin 4x \cos 2x dx. & 6) \int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 21.1) \int \frac{5-x}{\sqrt{x^2+2}} dx. & 5) \int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}} dx. \\ 2) \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}. & 6) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}. \\ 3) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}. & 7) \int \frac{(\sqrt{3x+1}+2)dx}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}. \\ 4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}. & 8) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{4\sqrt{x^7}} dx. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 22.1) \int \ln(x^2+1) dx. & 4) \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} dx. \\ 2) \int x^2 \sin^2 x dx. & 5) \int (x+3) \sin 5x dx. \\ 3) \int x e^{x+2} dx. & 6) \int \arcsin 5x dx. \end{matrix}$$

23. Обчислити інтеграли:

$$\begin{matrix} 1) \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx. & 4) \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{x}{4} dx. \\ 2) \int_8^{10} \frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x} dx. & 5) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}. \\ 3) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}. & 6) \int_{\frac{1}{6}}^2 \frac{dx}{3x^2-x+1}. \end{matrix}$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\arctg 2x} dx}{1+4x^2}. \quad 2) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$\begin{matrix} 1) y = (x-2)^3, y = 4x-8. \\ 2) \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 2 (x \geq 2). \\ 3) \rho = 4 \cos 3\varphi, \rho = 2 (\rho \geq 2). \end{matrix}$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y^2 = 4-x, x=0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y^2 = 4+x, x=2$ навколо осі Ox .

Варіант 17

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$.

2) $y = \frac{1}{2} \arcsin\left(x - \frac{1}{3}\right)$. 5) $y = 3^{x+2}$.

3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arccctg}(x + 3)$. 6) $y = -\lg(3x - 2)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^5$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -6 - 6i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i, z_3 = 6 + 5i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z + 2i| > 4, \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \pi$.

2) $|z - 5i| < |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 1$.

3) $z^3 + 2z^2 + 8z - 32 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{1+2+\dots+n} - \frac{2}{3} \right)$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 7} + \sqrt[3]{n^2 + 4}}{\sqrt[4]{n^5 + 5} + \sqrt{n}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5 + 9)} - \sqrt{(n^4 - 1)(n^2 + 5)}}{n}$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$. 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3 + 8}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi(x+1))}{\ln(1+2x)}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x + 1}{2x^2 - x - 7}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cos x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 7}{3x^4 + 2x^3 + 1}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2})^{\frac{1}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{3})}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{x}{x-1}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} x$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = 2^{x^2} - 1, \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \frac{(x-1)^3}{\ln x}, \beta(x) = e^{x-1} - 1, x \rightarrow 1$.

3) $\alpha(x) = 4 \sin x^4 - x^5, \beta(x) = \ln(1+x), x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 4, \\ 3-x, & x > 4. \end{cases}$

3) $f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}} + 1$ у точках $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^4}$.

2) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \sin \frac{1}{3}} - x^4 + \frac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$.

3) $y = 3^{\cos x} \arcsin^2 3x - \frac{\operatorname{th}^3(2x+2)}{\arcsin 5x}$.

4) $y = \ln x \cdot \arccos 3x^4 + \frac{\log_2(x^2+1)}{5(x-3)^4}$.

5) $y = \operatorname{ch}^2 5x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - (\operatorname{th} \sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 2x}$.

6) $y = \frac{(x-1)^3 \sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2 (x-6)^5} + (\log_2 6x)^{\arcsin 2x}$.

11.1) $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$. 2) $\sin(x+y) = y^2$.

12. $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

13.1) $y = (1-x-x^2)e^{2x}, y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{x}{9(4x+9)}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, x_0 = 1$.

$$2) x = a(t \sin t + \cos t), y = a(\sin t - t \cos t),$$

$$t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$3) x = (t + \cos t)^2, y = t, z = \sin t, M_0(1; 0; 0).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$.

$$1) y = \frac{x^5 - 8}{x^4}, [-3; -1].$$

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ?$$

$$2) y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}, [-4; -1].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-5)^2}}{x^2 - 6x + 17}. \quad 5) y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}.$$

$$2) y = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2}}. \quad 6) y = (x + 1)e^{2x}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}. \quad 7) y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

$$4) y = e^{-\sin x - \cos x}. \quad 8) y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{3x+5}. \quad 7) \int \sin(5-3x)dx.$$

$$2) \int \sqrt[4]{1+3x}dx. \quad 8) \int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x^2+2}. \quad 9) \int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}dx.$$

$$4) \int \frac{5xdx}{\sqrt{3-5x^2}}. \quad 10) \int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx.$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}. \quad 11) \int \frac{dx}{\sin^2 3x \operatorname{ctg}^3 3x}.$$

$$6) \int e^{3-5x}dx. \quad 12) \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx.$$

$$19.1) \int \frac{5x-2}{x^2+9}dx. \quad 5) \int \frac{(2x^2+41x-91)dx}{(x-4)(x^2+2x-3)}.$$

$$2) \int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx. \quad 6) \int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2-8x+30}. \quad 7) \int \frac{(4x-10)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}.$$

$$4) \int \frac{2x-1}{2x^2+8x+6}dx. \quad 8) \int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3}dx. \quad 4) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx.$$

$$2) \int \cos^4 \frac{x}{2}dx. \quad 5) \int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}.$$

$$3) \int \sin 3x \cos 2x dx. \quad 6) \int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx.$$

$$21.1) \int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx. \quad 5) \int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}.$$

$$4) \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}dx. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln x}{x^3}dx. \quad 4) \int (x-4)\cos 2x dx.$$

$$2) \int \operatorname{arctg} 2x dx. \quad 5) \int x^2(\cos 2x + 3)dx.$$

$$3) \int x e^{-7x} dx. \quad 6) \int \ln(x-7)dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{\frac{3}{2}}^2 \operatorname{arctg}(2x-3)dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^6 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4+x^2}. \quad 5) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx.$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^3 x dx. \quad 6) \int_3^4 \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}. \quad 2) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, x \in [0; 3].$$

$$2) \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2).$$

$$3) \rho = \cos 2\varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y^2 = 2x$, $x = \frac{3}{2}$ навколо осі Ox .

Варіант 18

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \frac{1}{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

2) $y = 2 \arccos(x + 2)$. 5) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$.

3) $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 1)$. 6) $y = -\ln(2 - x)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^5$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:
 $z_1 = 7 - 7i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_3 = -5 + 4i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z - 1 + i| > 2$, $\frac{2\pi}{3} < \arg z \leq \pi$.

2) $|z - 5| > |z + 3i|$, $|\operatorname{Im} z| > 2$.

3) $z^3 - 2z^2 + 16 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right)$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 4} + \sqrt{n - 4}}{\sqrt[5]{n^6 + 6} - \sqrt{n - 6}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x^2}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x}$,

6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - 3}{x^2 - 9}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 2 \cos x)^{\operatorname{cosec}^2 x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{x+4} \right)^{6x+1}$. 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin 2x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{1}{e^{2x}-1}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2x} - 1$, $\beta(x) = \operatorname{arctg} x$,
 $x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = e^{2x^2} - \cos 2x$, $\beta(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \rightarrow 0$.

3) $\alpha(x) = \operatorname{tg} 2x - \sin 2x$, $\beta(x) = x \ln(1 + x^2)$,
 $x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{x-1}}}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq -1, \\ x^2-1, & -1 < x \leq 2, \\ -x+5, & x > 2. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{3x}{x-4}$ у точках $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = 3\sqrt{x^5} - \frac{5}{x^4} + \frac{3x^2 - 5x}{e^{-x^2}}$.

2) $y = \sqrt{4x^2 + 5} \operatorname{ctg} 2 - \frac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$.

3) $y = e^{\cos x} \operatorname{ctg} 8x^3 + \frac{\operatorname{cth}^2(3x-1)}{\arccos x^2}$.

4) $y = \log_2 x \operatorname{arctg}^3 4x - \frac{6 \log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$.

5) $y = \operatorname{cth}^4 2x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} + \left(\operatorname{cth} \frac{1}{x} \right)^{\arcsin 7x}$.

6) $y = (\lg(4x-3))^{\arccos 4x} - \frac{(x-2)^2 \sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4 (x-4)^3}$.

11.1) $y = 7x - \operatorname{ctg} y$. 2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \arcsin y$.

12. $\begin{matrix} y' = ? \\ y'' = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

13.1) $y = (x^2 - 2x) \sin 5x$, $y^{(6)} = ?$

2) $y = \lg(1+x)$, $y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$, $x_0 = 1$.

$$2) x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{1-t}{t}, t_0 = -1.$$

$$3) x = \sin t, y = \cos^2 t, z = \sin t \cos t,$$

$$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$.

$$1) y = e^x + e^{-x}, [-1; 2].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ?$$

$$2) y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}, [-2; 4].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}. \quad 5) y = x \ln x.$$

$$2) y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}. \quad 6) y = \frac{4x}{4+x^2}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}. \quad 7) y = 2 \ln \frac{x+3}{x}.$$

$$4) y = \sqrt[3]{\sin x}. \quad 8) y = \frac{4x}{(x+1)^2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{3-5x}. \quad 7) \int \sqrt[3]{1+3x} dx.$$

$$2) \int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{7-2x^2}}. \quad 8) \int \sin(3x+6) dx.$$

$$3) \int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2+8}}. \quad 9) \int \frac{dx}{3x^2-5}.$$

$$4) \int e^{1-4x} dx. \quad 10) \int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx.$$

$$5) \int \frac{\operatorname{tg} 6x}{\cos^2 6x} dx. \quad 11) \int \frac{dx}{(x-3) \ln^4(x-3)}.$$

$$6) \int \frac{\arctg^6 3x}{1+9x^2} dx. \quad 12) \int \frac{x^2}{7+3x^3} dx.$$

$$19.1) \int \frac{10x+5}{5x^2+1} dx. \quad 5) \int \frac{(2x^2+5x+5) dx}{(x+2)(x^2+2x-3)}.$$

$$2) \int \frac{x^4+2}{x^2-4} dx. \quad 6) \int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2-1)(x+1)} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x^2-9x+6}. \quad 7) \int \frac{(x^2+23) dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$$

$$4) \int \frac{(2-x) dx}{4x^2+16x-9}. \quad 8) \int \frac{7x-2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^4 2x dx. \quad 4) \int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 x dx.$$

$$2) \int \cos^4 3x dx. \quad 5) \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}.$$

$$3) \int \cos x \cos 7x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}.$$

$$21.1) \int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1} dx.$$

$$4) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-7}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$22.1) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx; \quad 4) \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$2) \int (x^2+2)e^{-x} dx. \quad 5) \int (x-4) \cos 2x dx.$$

$$3) \int \arcsin 2x dx. \quad 6) \int x \cos(x+6) dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_2^3 \frac{x^7 dx}{1-x^4}. \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx.$$

$$2) \int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$$3) \int_{3.5}^5 \frac{x dx}{x^2-7x+13}. \quad 6) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}. \quad 2) \int_{-\frac{3}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$$

$$2) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 4, (0 < x < 8\pi, y \geq 4). \end{cases}$$

$$3) \rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \rho = \sin \varphi \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 3 \sin x, y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $3y = x^3 (0 \leq x \leq 1)$ навколо осі Ox .

Варіант 19

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\frac{1}{2}\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12}\right)$.

2) $y = 2\arcsin(x - 2)$. 5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$.

3) $y = 3\operatorname{arctg}(x + 1)$. 6) $y = -\lg(3x + 2)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^7$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = 2 + 2i, z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i, z_3 = -4 - 3i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z - 1 + i| > 3, \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$.

2) $|z + 5i| < |z - 2|, |\operatorname{Re} z| < 3$.

3) $z^3 - 5z^2 + 10z - 12 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 + \dots + 2n + (2n + 3)}{n(n + 3)}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6 + n^3 + 1} - 5n}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8}(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x \cdot \sin^2 4x}{3x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{x^2 - 5x + 6}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x - 4)}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin(\pi(x+2))}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{x^3 - 4x^2 - x}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 7^x}{\arcsin 3x - 5x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$. 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - 3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln \cos x}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = e^{3x^5} - \cos^2 x^3, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \ln(2x^2 - 3x - 8), \beta(x) = x - 3, x \rightarrow 3$.

3) $\alpha(x) = \ln(1 + x^3 \sin^3 x), \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -2, \\ x^2, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ у точках $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt{x^5} + \frac{4}{x^3} + \frac{e^{-x}}{(x^2 - x + 4)^2}$.

2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \ln 2 - 2x^2} - \frac{\log_3(4x - 2)}{\operatorname{ctg} 2x}$.

3) $y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x + \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\arccos 4x}$.

4) $y = \lg(x - 2) \cdot \arcsin^5 x - \frac{3 \log_2(5x - 4)}{(x - 3)^5}$.

5) $y = \operatorname{sh}^4 5x \cdot \arccos 3x^2 + (\cos x)^{\arcsin(3x-2)}$.

6) $y = (\ln x)^{\operatorname{arctg} 5x} - \frac{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x}}{(x+3)^7 (x-4)^2}$.

11.1) $xy - 6 = \cos y$. 2) $y^3 - 3y + 4x = 0$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

13.1) $y = (x + 7) \ln(3x + 4), y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{x}{x+5}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), x_0 = 1$.

2) $x = 1 - t^3, y = t - t^3, t_0 = 2$.

$$3) x = 2t - 1, y = -3t + 2, z = t^2 + 1,$$

$$M_0(9; -13; 26).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{27}{4}(x^3 - x^2) - 4$.

$$1) y = x \ln x, [e^{-2}; 1].$$

$$16. \max_{\min_{[a,b]}} f(x) = ? \quad 2) y = \frac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5}, [-2; 1].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = 6x - 6 - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}. \quad 5) y = \frac{x^2-11}{4x-3}.$$

$$2) y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}. \quad 6) y = (x-1)e^{3x+1}.$$

$$3) y = (2x-1)e^{2(1-x)}. \quad 7) y = \frac{x^4}{x^3-1}.$$

$$4) y = \ln(-\sin x - \cos x). \quad 8) y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{5+4x}. \quad 7) \int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}.$$

$$2) \int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}. \quad 8) \int \cos(5x-8)dx.$$

$$3) \int \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2+3}}. \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$4) \int e^{2-5x}dx. \quad 10) \int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}.$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^3 x}. \quad 11) \int \sin^3 5x \cos 5x dx.$$

$$6) \int e^{5x^2-3}xdx. \quad 12) \int \frac{\sqrt{\arctg^3 x}}{1+x^2}dx.$$

$$19.1) \int \frac{1-2x}{3x^2+2}dx. \quad 5) \int \frac{(x^2+10x+17)dx}{(x^2+8x+15)(x+1)}.$$

$$2) \int \frac{x^3-3}{x+5}dx. \quad 6) \int \frac{2x^4+x^3-x^2-1}{x^3+x^2}dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2-2x+5}. \quad 7) \int \frac{(2x^2+7x+7)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$$

$$4) \int \frac{(2x-1)dx}{3x^2-6x-9}. \quad 8) \int \frac{x^3+2x^2+4x-2}{x^4+3x^2-4}dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^4 2x dx. \quad 4) \int \sin^4 2x \cos^2 2x dx.$$

$$2) \int \sin^4 2x dx. \quad 5) \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 1}.$$

$$3) \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}dx. \quad 6) \int \frac{dx}{5+3\cos x+4\sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}dx. \quad 5) \int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}.$$

$$4) \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}dx.$$

$$22.1) \int \ln \frac{1-x}{1+x}dx. \quad 4) \int \arcsin 2x dx.$$

$$2) \int \arctg \frac{x}{2}dx. \quad 5) \int (x+4)\cos 3x dx.$$

$$3) \int x \sin(x+7)dx. \quad 6) \int (x^2+3)\sin x dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_1^e x \ln^2 x dx. \quad 4) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx.$$

$$2) \int_2^3 \frac{dx}{x^4-1}. \quad 5) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx.$$

$$3) \int_2^3 \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx. \quad 6) \int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5}. \quad 2) \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3} \ln 2}.$$

25. Обчислити площі фігур, які обмежені кривими:

$$1) y = \sin x \cos^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2) \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x = 2 \ (x \geq 2).$$

$$3) \rho = 4 \sin 3\varphi, \rho = 2 \ (\rho \geq 2).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 5 \cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$ навколо полярної осі.

Варіант 20

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12}\right)$.

2) $y = \frac{1}{3} \arccos(x + 3)$. 5) $y = 2^{x+2}$.

3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x + 2)$. 6) $y = \ln(2x + 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = -\sqrt{3} - i, z_3 = 3 - 2i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z + 1 - i| > 2, \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$.

2) $|z + 5| > |z + i|, |\operatorname{Im} z| < 1$.

3) $z^3 + 2z^2 - 2z + 3 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{11n} + \sqrt{25n^4 - 81}}{(n - 7\sqrt{n})\sqrt{n^2 - n + 1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 12}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$.

2) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5(x + \pi))}{e^{3x} - 1}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-5x}}{2\sin x - \operatorname{tg} x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{2 - \cos x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{x-10} \right)$. 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\sec x}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 + \ln x}{2 - 3 \ln \sin x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (4^x - 1)^x$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sqrt{1+x^6} - 1, \beta(x) = e^{6x} - 1, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, \beta(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}, x \rightarrow \infty$.

3) $\alpha(x) = \ln \cos 6x, \beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 3, \\ -x+6, & x > 3. \end{cases}$

3) $f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}}$ у точках $x_1 = -2, x_2 = -1$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10. а) $y = \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7} - \frac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$.

2) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \cos 5 - 4x^2} + \frac{\ln^3(5x-5)}{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

3) $y = \sin^3 7x \cdot \operatorname{arctg} 5x^2 - \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$.

4) $y = \log_3 x \operatorname{arctg}^5 7x + \frac{\log_5(x^2 + x)}{7(x+3)^3}$.

5) $y = \operatorname{ch}^3 9x \cdot \operatorname{arctg} 3x - x^{\arccos(3x-1)}$.

6) $y = (\lg 2x)^{\arcsin x} - \frac{(x+1)^2 \sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)^3 (x+1)^7}$.

11.1) $3y = 7 + xy^3$. 2) $x^3 + \cos^3 xy = 3$.

11. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = 3t + e^{3t}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

14.1) $y = (3x-7)3^{-x}, y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{5x+1}{13(2x+3)}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{1}{3x+2}, x_0 = 2$.

$$2) x = \ln(1 + t^2), y = t - \operatorname{arctg} t, t_0 = 1.$$

$$3) x = \cos t, y = \sin t, z = \ln \cos t, M_0(1; 0; 0).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{1}{8}x(12 - x^2)$.

$$1) y = x^3 e^{x+1}, [-4; 0].$$

$$16. \max_{\min} f(x) = ?$$

$$2) y = \frac{2(x^3 + 2)}{x^2 + 2x + 5}, [-5; 1].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 8}. \quad 5) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}.$$

$$2) y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad 6) y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}.$$

$$3) y = \ln(x^2 - 2x + 6). \quad 7) y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x + 2}.$$

$$4) y = \sqrt{\frac{\sin x - \cos x}{2}}. \quad 8) y = \sqrt[3]{(x - 3)x^2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3 + x}}. \quad 7) \int \frac{dx}{6 - 3x}.$$

$$2) \int \frac{dx}{8x^2 + 9}. \quad 8) \int \cos(3x - 7) dx.$$

$$3) \int \frac{xdx}{3x^2 - 6}. \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{8 - 3x^2}}.$$

$$4) \int \frac{\ln^3(x - 5)}{x - 5} dx. \quad 10) \int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx.$$

$$5) \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x} dx. \quad 11) \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$6) \int e^{6x-4} dx. \quad 12) \int e^{5-2x^2} x dx.$$

$$19.1) \int \frac{1 - 3x}{4x^2 - 1} dx. \quad 5) \int \frac{6x^2 dx}{(x^2 + 3x + 2)(x - 1)}.$$

$$2) \int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx. \quad 6) \int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{2x^2 - 3x - 2}. \quad 7) \int \frac{(x^2 + 3x - 6)dx}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)}.$$

$$4) \int \frac{(2x - 1)dx}{3 + x - 2x^2}. \quad 8) \int \frac{4x^2 - 2}{x^4 - x^2} dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{ctg}^3 3x dx. \quad 4) \int \frac{\cos^3 2x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}.$$

$$2) \int \cos^3(1 - x) dx. \quad 5) \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}.$$

$$3) \int \cos 3x \cos 5x dx. \quad 6) \int \frac{2 + \sin x}{1 + \cos x} dx.$$

$$21.1) \int \frac{2x - 4}{\sqrt{16 - x^2}} dx. \quad 5) \int \frac{x - 8}{\sqrt{4x^2 + x - 5}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^4} dx. \quad 7) \int \frac{(\sqrt[6]{3x + 1} + 1) dx}{\sqrt{3x + 1} - \sqrt[3]{3x + 1}}.$$

$$4) \int \frac{\sqrt{x + 4}}{x} dx. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^9 \sqrt{x^8}} dx.$$

$$22.1) \int \frac{x \operatorname{arcsin} 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx. \quad 4) \int (x^2 - x + 1) \ln x dx.$$

$$2) \int (x^2 - 3) \cos x dx. \quad 5) \int (x + 8) \sin 3x dx.$$

$$3) \int x \cos(x - 4) dx. \quad 6) \int \ln(x + 8) dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-3}^0 (x - 2) e^{-\frac{x}{3}} dx. \quad 4) \int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 x dx.$$

$$2) \int_{-1}^0 \frac{xdx}{x^3 - 1}. \quad 5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx. \quad 6) \int_{-\frac{3}{2}}^2 \frac{(x - 1)^2 dx}{x^2 + 3x + 4}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1 + 9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x}. \quad 2) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$2) \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} y = 3 \ (y \geq 3).$$

$$3) \rho = 2 \cos \varphi, \rho = 2\sqrt{3} \sin \varphi, \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = \sin^2 x, x = \frac{\pi}{2}, y = 0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = 6 \sin \varphi$ навколо полярної осі.

Варіант 21

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -3 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{24}\right)$.

2) $y = 2 \arcsin(x - 3)$. 5) $y = 2^{x-2}$.

3) $y = -\operatorname{arctg}(x - 2)$. 6) $y = -\ln(3x - 2)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^9$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -4 - 4i, z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i, z_3 = 2 + i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z - 1| < 3, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$.

2) $|z - i| < |z + 2|, |\operatorname{Re} z| > 2$.

3) $z^3 + z^2 + 3z - 18 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n - n^2 + 3}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 3n^2} - \sqrt{(n^2 - 1)(n^2 - 2)} \right)$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x^2 + 3x - 10}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x^3)}{2x^3}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x} - 2)}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^4 - 2x^2 + x}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln^2 ex)^{\frac{1}{x^2+1}}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3x}{5 - 3x} \right)^x$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 7}{x + 4} \right)^{4x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{50} - 50x + 49}{x^{100} - 100x + 99}$. 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{6}{1+2 \ln x}}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x} - 2x) \operatorname{ctg} x$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = e^{x^9} - \cos 2x^5, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \beta(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, x \rightarrow \infty$.

3) $\alpha(x) = \ln \sqrt{1 + x^4 \sin^6 x}, \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{2}{1 - 2^x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \frac{\pi}{4} < x < 3, \\ 2x - 5, & x \geq 3. \end{cases}$

3) $f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}} + 2$ у точках $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(3x - 5)^4}$.

2) $y = \sqrt[4]{5x^2 - \sqrt{\operatorname{tg} 4}} - \frac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$.

3) $y = \ln(x+9) \operatorname{arctg}^3 2x^2 + \frac{\operatorname{th}^2(x+3)}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$.

4) $y = \sqrt[3]{x-4} \arcsin^4 5x - \frac{\log_7(2x^2 + 5)}{(x-4)^2}$.

5) $y = \operatorname{th}^4 x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + (\cos(2x-1))^{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$.

6) $y = (\sin 8x)^{\operatorname{cth}(x+3)} - \frac{(x+4)^3(x-2)^4}{(x+1)^2 \sqrt[3]{(x-2)^5}}$.

11.1) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$. 2) $e^x + y = e^y + x$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = t^3 \ln t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

13.1) $y = (x^2 - 3) \ln(2x + 5), y^{(5)} = ?$

2) $y = a^{2x+3}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x}{x^2 + 1}, x_0 = -2$.

2) $x = t(1 - \sin t), y = t \cos t, t_0 = 0$.

3) $x = 20t, y = 16t^2, z = t^3, M_0 \left(10; 4; \frac{1}{8}\right)$.

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{1}{16}x^2(x - 4)^2$.

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 1) $y = x^2 - 2x + \frac{2}{x-1}, [-1; 3]$.
2) $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}, [0; 4]$.

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = -\frac{3\sqrt{6(x+1)^2}}{x^2 + 8x + 24}$. 5) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$.

2) $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$. 6) $y = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

3) $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$. 7) $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$

4) $y = e^{-\sqrt{2} \sin x}$. 8) $y = 2 \ln \frac{2}{x-4}$.

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$. 7) $\int \sin(4 - 2x)dx$.

2) $\int \frac{dx}{2 - 5x}$. 8) $\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2 + 3}}$.

3) $\int \frac{dx}{7x^2 - 4}$. 9) $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$.

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 1}}$. 10) $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$.

5) $\int e^{5x-7} dx$. 11) $\int \cos^7 2x \sin 2x dx$.

6) $\int \frac{\sqrt[3]{\tan 5x}}{\cos^2 5x} dx$. 12) $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^3 x}$.

19.1) $\int \frac{x-5}{3-2x^2} dx$. 5) $\int \frac{6x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

2) $\int \frac{1-2x^4}{x^2+1} dx$. 6) $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx$.

3) $\int \frac{dx}{2x^2-6x+11}$. 7) $\int \frac{(4x^2+38)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$.

4) $\int \frac{(x-4)dx}{3x^2+x-2}$. 8) $\int \frac{2x^3-2x-5}{x^4+3x^2-4} dx$.

20.1) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$. 4) $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$.

2) $\int \sin^4 4x dx$. 5) $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 16 \sin^2 x}$.

3) $\int \cos 2x \cos 5x dx$. 6) $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$.

21.1) $\int \frac{5-x}{\sqrt{3x^2+1}} dx$. 5) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}} dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$. 6) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. 7) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$.

4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}$. 8) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9\sqrt[5]{x^5}} dx$.

22.1) $\int \sqrt{x} \ln x dx$. 4) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx$.

2) $\int (x^2+1)e^{-x} dx$. 5) $\int (x+6) \cos 4x dx$.

3) $\int x \sin(x+4) dx$. 6) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{5} dx$.

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$. 4) $\int_0^{2\pi} \sin^8 x dx$;

2) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx$. 5) $\int_2^3 \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx$.

3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 6) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$.

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$. 2) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1) $y = x^2 \sqrt{4-x^2}, y = 0 (0 \leq x \leq 2)$.

2) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y \geq 3 (0 < x < 4\pi)$.

3) $\rho = \sin 3\varphi$.

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t (0 \leq t \leq 2\pi)$ навколо осі Ox .

Варіант 22

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

2) $y = 3 \arccos(x + 1)$. 5) $y = 5^{x+1}$.

3) $y = -2 \operatorname{arctg}(x + 3)$. 6) $y = 2 \lg(2x - 4)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^6$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = 5 - 5i, z_2 = 2\sqrt{3} + 2i, z_3 = -2 - 3i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z + 1| < 4, \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$.

2) $|z + i| > |z - 2|, |\operatorname{Im} z| > 3$.

3) $z^3 + 4z^2 + 6z + 4 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + \dots + (5n - 3)}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n + 1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n\sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - \frac{1}{4}}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \ln 2$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5}}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x}{2 - x}\right)^{3x-1}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{4x + 5}\right)^{3x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^x - 1}$. 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-0,01x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^x)^{\frac{1}{x}}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\frac{1}{2 + \ln x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sqrt{1 + x \sin^4 x} - 1, \beta(x) = \ln(1 + x), x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \frac{x + 1}{x^4 + 1}, \beta(x) = \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$.

3) $\alpha(x) = 2x \sin^3 x, \beta(x) = e^x - 1, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$

3) $f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}} - 2$ у точках $x_1 = -1, x_2 = 0$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt{x^3} - \frac{4}{x^5} - \frac{(2x - 3)^7}{e^{-2x}}$.

2) $y = \sqrt[5]{\cos \ln 13 + x^2} + \frac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln(3x + 2)}$.

3) $y = \cos \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4 - \frac{\arcsin^2 3x}{\operatorname{ch}(x - 5)}$.

4) $y = \lg(x + 2) \arcsin^2 3x + \frac{2 \ln(3x - 10)}{(x + 5)^7}$.

5) $y = \operatorname{cth}^3 4x \cdot \arcsin(3x + 1) - (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x}}$.

6) $y = (\cos 4x)^{\operatorname{th}(x-7)} + \frac{(x - 1)^6 (x + 2)^3}{(x + 1)^2 \sqrt[5]{(x + 3)^2}}$.

11.1) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$. 2) $\operatorname{tg} xy = e^x + e^y$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

13.1) $y = e^{\frac{x}{2}} \sin 2x, y^{(5)} = ?$

2) $y = \sin(3x + 1) + \cos 5x, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}, x_0 = 3$.

$$2) x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^2-1}, t_0 = 2.$$

$$3) x = a \cos t, y = a \sin t, z = a \ln \cos t, \\ M_0(a; 0; 0).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{27}{4}(x^3 + x^2) - 5$.

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 1) y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}, [-\frac{4}{5}; 3]. \\ \min_{[a,b]} f(x) = ? \quad 2) y = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1}, [2; 5].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad 5) y = \frac{x^5}{x^4 - 1}. \\ 2) y = \sqrt[3]{4x(x-1)}. \quad 6) y = x^3 e^{x+1}. \\ 3) y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}. \quad 7) y = \frac{4}{3+2x-x^2}. \\ 4) y = \sqrt[3]{\cos x}. \quad 8) y = -(x+1)e^{x+2}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{1-7x}. \quad 7) \int \cos(7x+1)dx. \\ 2) \int \sqrt[3]{5-2x}dx. \quad 8) \int \frac{\ln^5(x-7)}{x-7}dx. \\ 3) \int \frac{dx}{4x^2+3}. \quad 9) \int \frac{\sqrt[3]{\tan 7x}}{\cos^2 7x}dx. \\ 4) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}}. \quad 10) \int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx. \\ 5) \int \frac{5x dx}{5x^2-3}. \quad 11) \int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx. \\ 6) \int e^{2-6x} dx. \quad 12) \int \frac{x^5 dx}{3x^6-7}. \\ 19.1) \int \frac{2x-1}{3x^2+5} dx. \quad 5) \int \frac{(2x^2-26)dx}{(x+5)(x^2+4x+3)}. \\ 2) \int \frac{2x^3-3}{x-2} dx. \quad 6) \int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2} dx. \\ 3) \int \frac{dx}{2x^2-3x+2}. \quad 7) \int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}. \\ 4) \int \frac{(3x+1)dx}{x^2-4x-5}. \quad 8) \int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)} dx. \\ 20.1) \int \tan^3 \frac{x}{2} dx. \quad 4) \int \sin^4 x \cos^3 x dx. \\ 2) \int \cos^2 \frac{2x}{5} dx. \quad 5) \int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}. \\ 3) \int \sin^2 2x \cos x dx. \quad 6) \int \frac{6\sin x + \cos x}{1+\cos x} dx.$$

$$21.1) \int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx. \quad 5) \int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

$$3) \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^5}} dx.$$

$$4) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[2]{x}} dx.$$

$$22.1) \int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx. \quad 4) \int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$2) \int (x^2-1)e^x dx. \quad 5) \int (x-6) \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$3) \int x \cos(x+9) dx. \quad 6) \int \ln(x+12) dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{-2x} dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx.$$

$$2) \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{(x-1)^3}. \quad 5) \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$3) \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}. \quad 6) \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}. \quad 2) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2}{(1-x) \ln^2(1-x)} dx.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = \cos x \sin^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2) \begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 6\sqrt{3} \ (x \geq 6\sqrt{3}).$$

$$3) \rho = 6 \sin 3\varphi, \rho = 3 \ (\rho \geq 3).$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = xe^x, y = 0, x = 1$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = 2 \sin \varphi$ навколо полярної осі.

Варіант 23

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = 2 \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$.
2) $y = \frac{1}{2} \arcsin(x - 1)$. 5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$.
3) $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 1)$. 6) $y = -\ln(2x - 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^5$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$$z_1 = 6 + 6i, z_2 = -3 + 3\sqrt{3}i, z_3 = 3 - 4i.$$

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $2 < |z - i| < 3, \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.
2) $|z - 1| < |z + 3i|, |\operatorname{Re} z| < 1$.
3) $z^3 + 6z^2 + 24z + 32 = 0$.

Знайти границі (4—7):

- 4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{1 + 2^n}{4^n} \right)$.
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 5} - \sqrt{n - 5}}{\sqrt[4]{n^7 + 5} + \sqrt{n - 5}}$.
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}$.
5.1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$.
2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 + 3x - 28}{x^2 - 4x}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 2x)}$.
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(\pi(\frac{x}{2} + 1))}$.
4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 3}{2x^2 + 3x - 7}$. 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$.
5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x}$. 5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1}$.
6) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x + 7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}$.
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 1} \right)^{2x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2 - x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$.
8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x - 7}{x + 6} \right)^{2x-1}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5 + x} - 2}{\sin \pi x}$.

$$7.1) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^3}{\sin x - x}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^{\frac{1}{\ln(2x-2)}}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^x.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

- 1) $\alpha(x) = e^{x^{10}} - \cos^2 3x^9, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$.
2) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}, \beta(x) = x - 1, x \rightarrow 1$.
3) $\alpha(x) = \ln(1 + x^9 \operatorname{tg} x), \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ 1 - x, & -1 < x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{3}{5^{x+4}} + 1 \text{ у точках } x_1 = 5, x_2 = -4.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \frac{(3x + 1)^4}{e^{4x}} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}.$$

$$2) y = \sqrt{7x^3 - \ln \cos \frac{1}{3}} + \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x - 2}}{\lg(3x + 5)}.$$

$$3) y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2 - \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{\operatorname{sh}(2x - 5)}.$$

$$4) y = 4^{-\sin x} \operatorname{arctg} 3x + \frac{8 \lg(4x + 5)}{(x - 1)^5}.$$

$$5) y = \operatorname{ch}^2 5x \cdot \operatorname{arctg} x^4 - (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}.$$

$$6) y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ch}(2x-1)} + \frac{(x - 1)^4 (x - 7)^2}{(x + 1)^2 \sqrt[3]{(x + 2)^5}}.$$

$$11.1) x^2 y^2 + x = 5y^3. \quad 2) x^2 \sin y + y^2 = r^2.$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin e^t. \end{cases}$$

$$13.1) y = (x^2 - x) \ln x, y^{(5)} = ?$$

$$2) y = x e^{6x}, y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

$$1) y = \frac{2x}{x^2 + 1}, x_0 = 1.$$

$$2) x = 3 \cos t, y = 4 \sin t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

3) $x = 2 \sin t, y = 2 \cos t, z = \operatorname{tg} t, M_0(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1)$.

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{1}{8}(16 - 6x^2 - x^3)$.

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 1) $y = e^{6x-x^2}, [-3; 3]$.
2) $y = 2\sqrt{x-1} - x, [1; 5]$.

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = \sqrt[3]{x(x-2)}$. 5) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$.
2) $y = \frac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}$. 6) $y = x - \ln(1+x^2)$.
3) $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$. 7) $y = \frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$.
4) $y = \ln(-\sqrt{2} \sin x)$. 8) $y = \frac{e^{x+3}}{x+3}$.

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \sqrt{5-4x} dx$. 7) $\int \cos(7x+3) dx$.
2) $\int \frac{dx}{1+6x}$. 8) $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3} dx$.
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$. 9) $\int \sin^6 3x \cos 3x dx$.
4) $\int \frac{xdx}{2x^2-7}$. 10) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x} dx$.
5) $\int e^{2-4x} dx$. 11) $\int \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.
6) $\int \frac{dx}{2x^2+7}$. 12) $\int e^{1-6x^2} x dx$.
19.1) $\int \frac{2x-7}{x^2-5} dx$. 5) $\int \frac{(2x^2+12x-6)dx}{(x+1)(x^2+8x+15)}$.
2) $\int \frac{2x^2+5}{x+1} dx$. 6) $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)} dx$.
3) $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$. 7) $\int \frac{(2x^2+4x+20)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$.
4) $\int \frac{(x-5)dx}{2x^2+x+1}$. 8) $\int \frac{x^2 dx}{x^4+5x^2+4}$.
20.1) $\int \operatorname{tg}^4 3x dx$. 4) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.
2) $\int \sin^3 5x dx$. 5) $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$.
3) $\int \cos x \cos 7x dx$. 6) $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$.

21.1) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}} dx$. 5) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. 6) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$.

3) $\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx$. 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}$.

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$. 8) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx$.

22.1) $\int \arcsin \frac{x}{5} dx$. 4) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$.

2) $\int x^2 \cos^2 x dx$. 5) $\int (x+1) \cos 7x dx$.

3) $\int (x+3)e^{-x} dx$. 6) $\int x \ln(x^2+1) dx$.

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$. 4) $\int_0^{2\pi} 2^4 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$.

2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$. 5) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-3}}$.

3) $\int_7^{10} \frac{x^3 dx}{x^2-3x+2}$. 6) $\int_1^{e^4} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}$.

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} e^{-3x} x dx$. 2) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1) $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1$.

2) $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2)$.

3) $\rho = \sin 6\varphi$.

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 2 - x^2, y = x^2$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = \frac{2}{3} \cos \varphi$ навколо полярної осі.

Варіант 24

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $y = \frac{1}{3} \arccos(x + 2)$. 5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$.

3) $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 6) $y = 3 \ln(5 - x)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^6$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -7 + 7i, z_2 = -2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 4 + 5i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z + i| < 3, 0 < \arg z < \pi$.

2) $|z + 1| > |z - 3i|, |\operatorname{Im} z| < 2$.

3) $z^3 - 7z^2 + 24z - 18 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + \dots + 2n}{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4 - n + 1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n - 1)})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x - 14}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{14x^2 + 3x}{1 + 2x + 7x^2}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 3}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5}$. 6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x + 1)}{e^{\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 6}} - e}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x}\right)^{-2x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2})^{\frac{1}{1 - \cos \pi x}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 - 4x}{2 - x}\right)^{6x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x + 1) - x^2}{\operatorname{tg} x - x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - x)^{\log_2 x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1+0} (\operatorname{ctg} \pi x)^{\sin \pi x}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + x^6} - 1, \beta(x) = e^{x^2} - 1, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}, \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

3) $\alpha(x) = \ln \cos 2x^2, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{1}{\lg x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 - x, & x > \pi. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x - 4}{x + 2}$ у точках $x_1 = -2, x_2 = 1$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{5x^2 + 4x - 2}{e^{-x}}$.

2) $y = \sqrt[3]{8x^4 - \operatorname{ctg} \sin \frac{1}{13}} + \frac{\operatorname{tg}(3x - 5)}{\ln^2(x + 3)}$.

3) $y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x} - \frac{2 \log_3(4x - 7)}{(x + 3)^4}$.

4) $y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg}^3 x + \frac{\arccos^3 5x}{\operatorname{th}(x - 2)}$.

5) $y = \operatorname{th}^4 7x \cdot \arccos 3x^3 - (\operatorname{tg} 7x^5)^{\sqrt{x+2}}$.

6) $y = (\operatorname{ctg} 7x)^{\operatorname{sh} 3x} + \frac{(x + 7)^2 (x - 3)^5}{(x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 3x - 1}}$.

11.1) $x^4 + x^2 y^2 + y^3 = 4$. 2) $xy - \ln y = 1$.

12. $\begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \frac{t}{2}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$

13.1) $y = x^2 \ln(1 - 3x), y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{11 + 12x}{6x + 5}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), x_0 = 1$.

2) $x = t - t^4, y = t^2 - t^3, t_0 = 1$.

3) $x = t^2, y = 3t^2, z = 1 - 2t, M_0(1; -3; 3)$.

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = -\frac{1}{16}(x^2 - 4)^2$.

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 1) $y = \frac{\ln x}{x}, [1; 4]$.
2) $y = \sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)}, [-3; 4]$.

17. Дослідити функцію і побудувати її графік.

1) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$. 5) $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

2) $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}$. 6) $y = 1 - \ln^3 x$.

3) $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$. 7) $y = \frac{1}{x^4 - 1}$.

4) $y = \sqrt{\cos x}$. 8) $y = \ln \frac{x}{x+5} - 1$.

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \frac{dx}{2+7x}$. 7) $\int \sin(7-4x)dx$.

2) $\int \sqrt[5]{(6-5x)^2}dx$. 8) $\int \frac{9xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$. 9) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{x-5}dx$.

4) $\int \frac{dx}{4x^2-3}$. 10) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^3 5x}}{\sin^2 5x}dx$.

5) $\int e^{3-6x}dx$. 11) $\int e^{x^3+1}x^2dx$.

6) $\int \frac{\cos 6x}{\sin^3 6x}dx$. 12) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{1+25x^2}dx$.

19.1) $\int \frac{3x-3}{1-x^2}dx$. 5) $\int \frac{(5x^2+5x-58)dx}{(x^2+2x-3)(x-4)}$.

2) $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}dx$. 6) $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$.

3) $\int \frac{dx}{2x^2-3x+4}$. 7) $\int \frac{(5x+13)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$.

4) $\int \frac{(2x+3)dx}{3x^2+2x-8}$. 8) $\int \frac{2x^4+8x^2-8x+2}{x^4+4x^2}dx$.

20.1) $\int \operatorname{tg}^3 4x dx$. 4) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

2) $\int \sin^4 x dx$. 5) $\int \frac{(3 \operatorname{tg} x - 1)dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$.

3) $\int \sin 2x \sin 3x dx$. 6) $\int \frac{dx}{5+3 \cos x}$.

21.1) $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx$. 5) $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$. 6) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$.

3) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4}dx$. 7) $\int \frac{dx}{3\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$.

4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$. 8) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}dx$.

22.1) $\int x \ln^2 x dx$. 4) $\int \operatorname{arctg}(x+5)dx$.

2) $\int (x^2+x) \sin x dx$. 5) $\int (x+2) \sin \frac{x}{2} dx$.

3) $\int \arccos x dx$. 6) $\int \ln(2x-1)dx$.

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{-1}^0 x \ln(1-x)dx$. 4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$.

2) $\int_7^9 \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$. 5) $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$.

3) $\int_4^{4.5} \frac{x^2 dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$. 6) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$. 2) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1) $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$.

2) $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$
 $y = 12 \ (0 < x < 16\pi, y \geq 12)$.

3) $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 3 \cos \varphi$.

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 8 - x^2, y = x^2$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t$ навколо осі Ox .

Варіант 25

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.
2) $y = 2 \arcsin(x - 2)$. 5) $y = -3^{x+2}$.
3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{2}\right)$. 6) $y = -2 \lg(x + 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^7$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$$z_1 = -8 - 8i, z_2 = \sqrt{3} - i, z_3 = -5 + 6i.$$

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $1 < |z - 2| < 3, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.
2) $|z - 2i| < |z + 1|, |\operatorname{Re} z| > 3$.
3) $z^3 - 4z^2 + 4z - 3 = 0$.

Знайти границі (4—7):

$$4.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 5 + \dots + (4n - 3)}{n + 1} - \frac{4n + 1}{2} \right).$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{(n^8-1)}).$$

$$5.1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}. \quad 6.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{1-x}. \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{3-x} \right)^{-2x}. \quad 8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}.$$

$$7.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\arcsin x - \ln(1+x)}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x^2}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{\ln x}}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} x^{2 \operatorname{tg} x}.$$

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

$$1) \alpha(x) = e^{x^3} - \cos 4x, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0.$$

$$2) \alpha(x) = \frac{1+x+2x^2}{x^5}, \beta(x) = \sin \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty.$$

$$3) \alpha(x) = \ln(1+x \sin^5 x), \beta(x) = \operatorname{tg} x; x \rightarrow 0.$$

9. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = 4^{\frac{x}{1-x^2}}.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$3) f(x) = \frac{x-4}{x+3} \text{ у точках } x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Знайти похідні функцій (10—13):

$$10.1) y = \frac{\sqrt{5x^2 - x + 1}}{e^{3x}} - \frac{5}{x^4} + \sqrt[5]{x^4}.$$

$$2) y = \sqrt{4x^5 + \sin \ln \frac{1}{2}} - \frac{\cos^2 x}{\lg(x^2 - 2x + 1)}.$$

$$3) y = \lg(x-3) \arcsin^2 5x + \frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\operatorname{sh}^2 2x}.$$

$$4) y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 3x - \frac{3 \log_4(2x+9)}{(x-7)^2}.$$

$$5) y = \operatorname{cth} 4x^5 \cdot \arccos 2x + (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}.$$

$$6) y = (\operatorname{ch} 3x)^{\cos(x+4)} - \frac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x+1)(x-4)^2}.$$

$$11.1) \sin y = xy^2 + 5. \quad 2) y = 1 + e^{xy}.$$

$$12. \begin{cases} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{cases} : 1) \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = \ln(1+e^t). \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \operatorname{ch}^2 t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$$

$$13.1) y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}, y^{(5)} = ?$$

$$2) y = \lg(2x+7), y^{(n)} = ?$$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

$$1) y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}, x_0 = 1.$$

$$2) x = t^3 + 1, y = t^2 + t + 1, t_0 = 1.$$

3) $x = 3 \cos t, y = 4 \sin t, z = e^t, M_0(3; 0; 1).$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9.$

1) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3; 1].$

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$

2) $y = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x-2}, [-2; 1].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = 9\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6x.$ 5) $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}.$

2) $y = \frac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}.$ 6) $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}.$

3) $y = (x-1)e^{4x+2}.$ 7) $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$

4) $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}.$ 8) $y = e^{\cos x - \sin x}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \frac{dx}{7-3x}.$ 7) $\int \cos(3x-7)dx.$

2) $\int \sqrt[4]{2-5x}dx.$ 8) $\int \frac{3xdx}{9x^2+2}.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-8x^2}}.$ 9) $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}.$

4) $\int \frac{dx}{3x^2+4}.$ 10) $\int \frac{e^{\arctg x}}{x^2+1}dx.$

5) $\int e^{4-5x}dx.$ 11) $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx.$

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg}^4 x}}.$ 12) $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$

19.1) $\int \frac{5x+2}{x^2+9}dx.$ 5) $\int \frac{(x^3-12x+13)dx}{(x^2-5x+6)(x+1)}.$

2) $\int \frac{x^2+x}{2-x}dx.$ 6) $\int \frac{(x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}.$

3) $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}.$ 7) $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx.$

4) $\int \frac{(x-3)dx}{4x^2+2x-6}.$ 8) $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}dx.$

20.1) $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4} dx.$ 4) $\int \sin^3 x \cos^8 x dx.$

2) $\int \cos^4 x dx.$ 5) $\int \frac{dx}{5+3\sin^2 x}.$

3) $\int \sin 2x \cos 3x dx.$ 6) $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}.$

21.1) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ 5) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$ 7) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}.$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}.$ 8) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}}dx.$

22.1) $\int x^2 \ln x dx.$ 4) $\int x^2 \arctg x dx.$

2) $\int (x^2+x) \cos x dx.$ 5) $\int x \sin \frac{x}{5} dx.$

3) $\int (x^2-3)e^x dx.$ 6) $\int \ln(2x+3)dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^1 \arcsin \frac{x}{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}.$ 4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \cos^8 x dx.$

2) $\int_4^6 \frac{xdx}{x^3-6x^2+16x-16}.$ 5) $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^3 \sqrt{7+x^2} dx.$

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$ 6) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}.$ 2) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}.$

25. Обчислити площі фігур, які обмежені кривими:

1) $x = \frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, x=0, y=1.$

2) $\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} x = 9\sqrt{3} \ (x \geq 9\sqrt{3}).$

3) $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi.$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y^2 = (x+4)^3, x=0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = 2 \cos t, y = 3 + 2 \sin t$ навколо осі Ox .

Варіант 26

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = 3 \cos\left(3x + \frac{4\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $y = 3 \arccos(x - 3)$. 5) $y = 4^{x-1}$.

3) $y = -2 \operatorname{arctg}(x + 3)$. 6) $y = -\lg(6 - 2x)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^5$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = 2 - 2i, z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i, z_3 = -6 - 7i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z + 2| < 4, \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi$.

2) $|z + 2i| > |z - 1|, |\operatorname{Im} z| > 1$.

3) $z^3 + 6z^2 + 18z + 27 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt[3]{n^6 + 2n^4 + 2}}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6 + 9}}{(n - \sqrt[3]{n})\sqrt{11 + n^2}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 7x - 15}{x^2 - 6x - 27}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{\sin 2x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - x) - 1}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^5 + 4x^3}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin x^2}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^3 + x^2}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 5}\right)^{x+1}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x \cos 5x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4 + 3x}{5 + x}\right)^{7x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 2x}{\ln \operatorname{tg} x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} x^{-5}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln 2x \ln(2x - 1)$. 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x+1}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + x^2} - 1, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + x + 1}}, \beta(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$.

3) $\alpha(x) = \ln \cos 2x, \beta(x) = \operatorname{tg}^2 x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = 2^{-\frac{3x}{x+1}}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -2, \\ 1 - x, & -2 < x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$ у точках $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{x^5} + \frac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$.

2) $y = \sqrt[6]{(2x^2 - 1)^5} - \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{\log_2(3x+7)}{\operatorname{tg} 3x}$.

3) $y = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 3x^5 + \frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{\operatorname{th} x}}$.

4) $y = \log_2(x+3) \cdot \arccos^2 x - \frac{\lg(x^2 + 2x)}{(x+8)^4}$.

5) $y = \operatorname{cth} 3x \cdot \arcsin^4 2x + (\operatorname{ctg} 7x)^{\operatorname{sh}(2x+3)}$.

6) $y = (\operatorname{ch} 2x)^{\operatorname{tg}(x+5)} - \frac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x+1)^2(x-1)^5}$.

11.1) $x^3 + y^3 = 5xy$. 2) $y = \cos(x+y)$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \sqrt[3]{t} - 1, \\ y = \sqrt[3]{t} - 1. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$

13.1) $y = (5x - 8) \cdot 2^{-x}, y^{(5)} = ?$

2) $y = \ln(5 + 2x), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, x_0 = 1$.

2) $x = 2 \cos t, y = \sin t, t_0 = -\frac{\pi}{3}$.

3) $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, M_0(1; 0; 1).$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{1}{8}(6x^2 - x^3 - 16).$

1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3, [-1; 2].$
 16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 2) $y = 8x + \frac{4}{x^2}, [\frac{1}{2}; 2].$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = \frac{6\sqrt[3]{6(x+3)^2}}{x^2 + 10x + 33}.$ 5) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}.$

2) $y = \frac{2x^2 + 4x + 2}{2 - x}.$ 6) $y = x \ln x.$

3) $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}.$ 7) $y = \frac{x^3 - 32}{x^2}.$

4) $y = \sqrt[3]{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}.$ 8) $y = -\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$

Знайти інтеграли (18—22):

18. 1) $\int \frac{dx}{5-2x}.$ 7) $\int \sin(8x-5)dx.$

2) $\int \sqrt[3]{4-2x}dx.$ 8) $\int \frac{5xdx}{\sqrt{7x^2-1}}.$

3) $\int \frac{dx}{4x^2-3}.$ 9) $\int \frac{\ln^5(x-8)}{x-8}dx.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2-9}}.$ 10) $\int \sin^4 8x \cos 8x dx.$

5) $\int e^{5-2x}dx.$ 11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\tan^2 x}}.$

6) $\int e^{3x^3} x^2 dx.$ 12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} \arcsin 5x}.$

19. 1) $\int \frac{x-5}{x^2+7}dx.$ 5) $\int \frac{(9x^2+3x)dx}{(x^2+x-2)(x+1)}.$

2) $\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx.$ 6) $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx.$

3) $\int \frac{dx}{2x^2+6x+7}.$ 7) $\int \frac{(4x^2+7x+5)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$

4) $\int \frac{(x+2)dx}{3x^2-x+5}.$ 8) $\int \frac{2x^3+8x-3x^2-27}{x^4+13x^2+36}dx.$

20. 1) $\int \operatorname{tg}^4(x+5)dx.$ 4) $\int \frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}dx.$

2) $\int \cos^3 4x dx.$ 5) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx.$

3) $\int \sin 5x \cos x dx.$ 6) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}.$

21. 1) $\int \frac{3-2x}{\sqrt{x^2-8}}dx.$ 5) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}.$

3) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx.$ 7) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx.$

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}.$ 8) $\int \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

22. 1) $\int x \ln(x+1)dx.$ 4) $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx.$

2) $\int (x^2+1)e^x dx.$ 5) $\int (x+4)\cos \frac{x}{2} dx.$

3) $\int x e^{-4x} dx.$ 6) $\int \arccos \frac{x}{5} dx.$

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_1^2 \ln(3x+2)dx.$ 4) $\int_0^\pi 2^4 \sin^8 x dx.$

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}.$ 5) $\int_{4\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}.$

3) $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$ 6) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}.$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}.$ 2) $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}.$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1) $y = x^{-2}e^{\frac{1}{x}}, y = 0, x = 2, x = 1.$

2) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} y = 4\sqrt{3} (y \geq 4\sqrt{3}).$

3) $\rho = 2 \sin 4\varphi.$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = x^3, x = 0, y = 8$, навколо осі Oy .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho^2 = 9 \cos 2\varphi$ навколо полярної осі.

Варіант 27

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $y = 3 \arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right)$. 5) $y = 5^{x-2}$.

3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x-1)$. 6) $y = 2 \ln(2x-5)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = -4 + 4i, z_2 = -1 - \sqrt{3}i, z_3 = 7 - 8i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z - 2i| < 3, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$.

2) $|z - 2| < |z - i|, |\operatorname{Re} z| < 2$.

с) $z^3 - z^2 - 4z - 6 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n)! - (2n+1)!}{n(2n-1)! + (2n)!}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 2x + 4}{2x^2 + x - 5}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 13}{x^7 - 3x^5 - 4x}$. 5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2-a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln \frac{x}{a}}$.

6) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{1-2x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x^3}{1+x^7}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2x} - 1}{\ln x + 1 - x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[4]{x-3}}$.

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{3}{3x-1} - \frac{1}{\ln 3x}\right)$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{4}{5+2\ln x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = e^{x^5} - \cos x^3, \beta(x) = \sin x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \ln(2x^2 - 2x - 3), \beta(x) = x - 2, x \rightarrow 2$.

3) $\alpha(x) = \ln(x^8 + 1), \beta(x) = \sin \sqrt{x}, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

3) $f(x) = 3^{\frac{1}{1-x}}$ у точках $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}$.

2) $y = \sqrt[3]{4x^5 + \sqrt[7]{\operatorname{tg} \cos 2}} - \frac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$.

3) $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3 + \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\operatorname{cth} x}}$.

4) $y = 2^{-x} \operatorname{arctg}^3 4x - \frac{3 \ln(x^2 + 5)}{(x-7)^2}$.

5) $y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + (\operatorname{sh} 5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

6) $y = (\operatorname{th} 7x)^{\sin(3x+2)} - \frac{\sqrt[5]{(x-2)^3(x-1)^3}}{(x+1)^2(x+3)^4}$.

11.1) $\sqrt[3]{y} = e^{xy}$. 2) $x^3 + y^3 = \arcsin xy$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases} 2) \begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

13.1) $y = x^2 \ln(x-1), y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{x}{x+1}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1) $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, x_0 = 1$.

$$2) x = 2 \operatorname{tg} t, y = 2 \sin^2 t + \sin 2t, t_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$3) x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 5t, M_0(-3; 0; 5\pi).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = -\frac{1}{16}(x-2)^2(x-6)^2$.

$$1) y = (3-x)e^{-x}, [0; 5].$$

$$16. \max_{[a,b]} f(x) = ? \quad 2) y = \sqrt[3]{(x+2)^2(x-4)}, [-4; 2].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = 8x - 6 - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}. \quad 5) y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

$$2) y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x^2 - 3}. \quad 6) y = -x \ln^2 x.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}. \quad 7) y = \frac{4(x+1)^2}{x^2 + 2x + 4}.$$

$$4) y = \ln(\cos x - \sin x). \quad 8) y = \ln \frac{x-5}{x} + 2.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{2x+7}. \quad 7) \int \cos(8x-4)dx.$$

$$2) \int \sqrt{3-4x}dx. \quad 8) \int \frac{3xdx}{\sqrt{9x^2+5}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{8x^2-9}. \quad 9) \int \frac{\sqrt{\ln^3(x+6)}}{x+6}dx.$$

$$4) \int e^{7+3x}dx. \quad 10) \int \frac{\operatorname{tg}^6 2x}{\cos^2 2x}dx.$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}. \quad 11) \int \sin^5 4x \cos 4x dx.$$

$$6) \int x^4 e^{-x^5-1}dx. \quad 12) \int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2}dx.$$

$$19.1) \int \frac{3-7x}{1+x^2}dx. \quad 5) \int \frac{(3x^2-13x-38)dx}{(x^2-5x+4)(x+3)}.$$

$$2) \int \frac{2x^2+3}{x-1}dx. \quad 6) \int \frac{2x^3+3x^2+x+2}{x^3+x^2}dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2-6x+8}. \quad 7) \int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx.$$

$$4) \int \frac{(3x-2)dx}{x^2+5x+7}. \quad 8) \int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}dx.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^3 3x dx. \quad 4) \int \sin^5 x \sqrt{\cos^3 x} dx.$$

$$2) \int \cos^2 7x dx. \quad 5) \int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x + 1}.$$

$$3) \int \sin x \cos 4x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{x-5}{\sqrt{8-4x^2}}dx. \quad 5) \int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}. \quad 7) \int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}.$$

$$4) \int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx. \quad 8) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x^{12}\sqrt{x^5}}dx.$$

$$22.1) \int \sin(\ln x)dx. \quad 4) \int x^2 \cos \frac{x}{3}dx.$$

$$2) \int (x^2-1)e^{-x}dx. \quad 5) \int (x+1)\sin \frac{x}{3}dx.$$

$$3) \int (x+1)e^{2x}dx. \quad 6) \int \operatorname{arctg} \frac{x}{4}dx.$$

23. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9}dx. \quad 4) \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^2 x dx.$$

$$2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}dx. \quad 5) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx. \quad 6) \int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}dx.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}. \quad 2) \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = x^2 \sqrt{16-x^2}, y = 0 \quad (0 \leq x \leq 4).$$

$$2) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \\ y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2).$$

$$3) \rho = 2 \cos 6\varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривою $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = x^3, x = \pm \frac{2}{3}$ навколо осі Ox .

Варіант 28

1. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$.
2) $y = \frac{1}{2} \arccos(x - 2)$. 5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$.
3) $y = 2 \arctg(x + 2)$. 6) $y = -\lg(2x + 4)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^3$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:
 $z_1 = -5 - 5i, z_2 = 2\sqrt{3} - 2i, z_3 = 8 + 9i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

- 1) $1 < |z + 2i| < 3, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.
2) $|z + 2| > |z + i|, |\operatorname{Im} z| < 3$.
3) $z^3 - 5z^2 + 12z - 18 = 0$.

Знайти границі (4—7):

- 4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$.
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8 + 6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8 + 6} + \sqrt{n-6}}$.
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$.
5.1) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.
2) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^2 + 15x + 18}$. 2) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}$.
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$.
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$.
5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 5}$. 5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 3x}{e^{2 \sin^2 x} - 1}$.
6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{8+x} - 3}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x}$.
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln(1+3x^2)}}$.
8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{18 \sin x}{\operatorname{ctg} x}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2x}{x - \sin x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin 2x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x - x) \operatorname{ctg} x$. 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4^{x^2} - x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

- 1) $\alpha(x) = \sqrt[4]{1+x^4} - 1, \beta(x) = \arcsin 2x, x \rightarrow 0$.
2) $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 9} - 3), \beta(x) = \operatorname{tg} x, x \rightarrow \infty$.
3) $\alpha(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}, \beta(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x}), x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$.

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x + 3, & x \geq 2. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{4x}{x+5}$ у точках $x_1 = -5, x_2 = 4$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3} - \frac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$.

2) $y = \sqrt{3x^7 + \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2}} + \frac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$.

3) $y = 2^{\operatorname{tg} x} \arctg^5 3x - \frac{\arctg^2 5x}{\operatorname{th}(x+3)}$.

4) $y = \arcsin^3 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x + \frac{4 \log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$.

5) $y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \arccos 4x^4 - (\arctg x)^{\operatorname{th}(3x+1)}$.

6) $y = (\operatorname{ch} 2x)^{\cos(3x+4)} + \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-2)^5}}{(x-3)^2(x-1)^3}$.

11.1) $\sin y^2 = \frac{x-y}{x+y}$. 2) $y = \operatorname{tg}(x+y)$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = e^t, \\ y = te^{-t}. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$

13.1) $y = e^{-x}(2x^2 - 3), y^{(5)} = ?$

2) $y = \log_3(2x-1), y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{3x - 2x^3}{3}, x_0 = 1$.

2) $x = t^3 + 1, y = t^2, t_0 = -2$.

3) $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, M_0(0; 0; 0)$.

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$.

1) $y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3]$.

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 2) $y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2}, [-1; 2]$.

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = -\frac{6\sqrt[3]{6(x-6)^2}}{x^2 - 8x + 24}$. 5) $y = \frac{3x^2 - 10}{3 - 2x}$.

2) $y = (x+4)e^{-(x+3)}$. 6) $y = \frac{5x^4 + 3}{x}$.

3) $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$. 7) $y = x^2 - 2 \ln x$.

4) $y = \sqrt{\sin x}$. 8) $y = \frac{3x-2}{x^3}$.

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \frac{dx}{2x+9}$. 7) $\int \sin(9x-1)dx$.

2) $\int \sqrt[5]{3+2x}dx$. 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$.

3) $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. 9) $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$.

4) $\int \frac{2xdx}{5x^2-3}$. 10) $\int xe^{3-x^2}dx$.

5) $\int \frac{dx}{3x^2-4}$. 11) $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}}dx$.

6) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x}dx$. 12) $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx$.

19.1) $\int \frac{x+4}{7x^2+3}dx$. 5) $\int \frac{(7x^2-17x)dx}{(x-2)(x^2-2x-3)}$.

2) $\int \frac{1-x^4}{x^2+4}dx$. 6) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

3) $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$. 7) $\int \frac{6x}{x^3-1}dx$.

4) $\int \frac{(x-7)dx}{4x^2+3x-1}$. 8) $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}dx$.

20.1) $\int \operatorname{tg}^3 5x dx$. 4) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

2) $\int \sin^3 4x dx$. 5) $\int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$.

3) $\int \cos 3x \cos x dx$. 6) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$.

21.1) $\int \frac{8-2x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$. 5) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$. 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$.

3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 7) $\int \frac{(\sqrt{3x+1}-1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}$.

4) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$. 8) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^{12}\sqrt{x^5}}dx$.

22.1) $\int x \sin^2 x dx$. 4) $\int x \arctg^2 x dx$.

2) $\int (x^2-4) \sin x dx$. 5) $\int (x+2) \cos \frac{x}{4} dx$.

3) $\int xe^{-5x} dx$. 6) $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$.

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$. 4) $\int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx$.

2) $\int_2^3 \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$. 5) $\int_0^3 x^4 \sqrt{9-x^2} dx$.

3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^5 x dx$. 6) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{6}} \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln \frac{3}{4}}$. 2) $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1) $x = \sqrt{4-y^2}, x=0, y=0, y=1$.

2) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x=2 (x \geq 2)$.

3) $\rho = \cos \varphi - \sin \varphi$.

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ навколо осі Ox .

Варіант 29

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$. 4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)$.

2) $y = 2 \arcsin(x + 3)$. 5) $y = -e^{x-2}$.

3) $y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x - 2)$. 6) $y = -\ln(2x - 3)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 + i^8$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = 6 - 6i, z_2 = 3 + \sqrt{3}i, z_3 = -9 + 8i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $2 < |z - 3| < 4, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$.

2) $|z - 3i| < |z - 2|, |\operatorname{Re} z| > 1$.

3) $z^3 - 5z^2 + 2z + 78 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n^2 + 4}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x + 1)}$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 10x - 11}{3x^4 - 2x + 5}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 81}{3x^2 + 4x + 2}$. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x^2 + x}$. 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} 5x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{2 \cos \frac{\pi x}{2}}$;

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \sqrt{x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = e^{x^4} - \cos 4x, \beta(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x^2}, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \sqrt{4-x^2} + x^2 - 2, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$.

3) $\alpha(x) = \ln(1 + \sin x \cdot \operatorname{tg}^6 x), \beta(x) = x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$.

2) $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$

3) $f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}$ у точках $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - \frac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$.

2) $y = \sqrt{2x^3 - \cos^2 \sin 3} + e^{x^3} \sqrt{x^2 - 3x - 7}$.

3) $y = \sin^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$.

4) $y = \lg(x+3) \operatorname{arctg}^2 5x + \frac{2 \ln(2x^2 + 3)}{(x-7)^4}$.

5) $y = e^{-\cos x} \arcsin 2x - (\operatorname{cth} \sqrt{x})^{\sin(x+3)}$.

6) $y = (\ln(7x+4))^{\operatorname{tg} x} + \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5} (x+1)^2}{(x+2)^4 (x-5)^7}$.

11.1) $\sin xy^2 = y$. 2) $y^x = x^{y^2}$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{t^2 + 1}. \end{cases}$

13.1) $y = (5x-1) \ln 2x, y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{1+x}{1-x}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x^2}{10} + 3, x_0 = 2$.

2) $x = \sin t, y = a^t, t_0 = 0$.

3) $x = 2t, y = \ln t, z = t^2, M_0(2; 0; 1)$.

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = \frac{1}{8}(11 + 9x - 3x^2 - x^3)$.

1) $y = 108x - x^4, [-1; 4]$.

16. $\max_{[a,b]} f(x) = ?$ 2) $y = \frac{4}{x^2} - 8x, [-2; -\frac{1}{2}]$.

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2 + 2x + 9)}$. 5) $y = \frac{4-2x}{1-x^2}$.

2) $y = \frac{x^2 + 4x - 13}{4x + 3}$. 6) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$.

3) $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$. 7) $y = \frac{e^{x-3}}{x-3}$.

4) $y = e^{\sqrt{2} \cos x}$. 8) $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$.

Знайти інтеграли (18—22):

18.1) $\int \frac{dx}{7x-3}$. 7) $\int \cos(10x-3)dx$.

2) $\int \sqrt[4]{(3+5x)^3} dx$. 8) $\int \frac{\ln^6(x+9)}{x+9} dx$.

3) $\int \frac{2dx}{4+3x^2}$. 9) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$.

4) $\int \frac{xdx}{3x^2-2}$. 10) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x} dx$.

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+5}}$. 11) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$.

6) $\int e^{8x+1} dx$. 12) $\int xe^{-2x^2-1} dx$.

19.1) $\int \frac{3x+7}{x^2+4} dx$. 5) $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)} dx$.

2) $\int \frac{x^2+4}{x-3} dx$. 6) $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x} dx$.

3) $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$. 7) $\int \frac{(5x^2+17x+36)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$.

4) $\int \frac{(2x+1)dx}{5x^2+2x+10}$. 8) $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4} dx$.

20.1) $\int \operatorname{tg}^2 \frac{7x}{4} dx$. 4) $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$.

2) $\int \sin^3 4x dx$. 5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$.

3) $\int \cos 2x \sin 3x dx$. 6) $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}$.

21.1) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}} dx$. 5) $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$. 6) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$.

3) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$. 7) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}$.

4) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$. 8) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt[4]{x^4}} dx$.

22.1) $\int \ln(x+5) dx$. 4) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.

2) $\int (x^2+x) \cos x dx$. 5) $\int x \sin \frac{x}{5} dx$.

3) $\int xe^{x+3} dx$. 6) $\int \arccos x dx$.

23. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$. 4) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$.

2) $\int_3^5 \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx$. 5) $\int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

3) $\int_2^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. 6) $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$.

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$. 2) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

1) $y = (x-1)^2, y^2 = x-1$.

2) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 5 (y \geq 5)$.

3) $\rho = 3 \sin \varphi, \rho = 5 \sin \varphi$.

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = x - x^2, y = 0$, навколо осі Ox .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = \cos t, y = 2 + \sin t$ навколо осі Ox .

Варіант 30

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12}\right)$.

2) $y = 2 \arccos\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 5) $y = e^{x+2}$.

3) $y = 3 \operatorname{arctg}(x + 1)$. 6) $y = \lg(5 - 3x)$.

2. Знайти:

а) алгебричну форму $\frac{z_1}{z_2} + 2z_3 - i^5$;

б) тригонометричну форму z_3 ;

в), г) $(z_1 z_2)^8$ та $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{10}$;

д), е) всі значення $\sqrt[3]{z_1}$ та $\sqrt[4]{z_2}$, якщо:

$z_1 = 7 + 7i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -8 - 7i$.

3. Зобразити множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $1 < |z + 3| < 4, \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi$.

2) $|z + 3i| > |z + 2|, |\operatorname{Im} z| > 2$.

3) $z^3 + 5z^2 + 8z + 6 = 0$.

Знайти границі (4—7):

4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n + 5^n}{10^n} \right)$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}(\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2})$.

5.1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$. 6.1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 3x}$.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$. 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}$.

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}$. 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 4}{3x^3 - 5x + 1}$. 5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}\left(3\frac{\pi}{x} - 3\right)}{3^{\cos \frac{3x}{2}} - 1}$.

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}$.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 2x}{1 - 2x} \right)^{x+1}$. 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$.

8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+5}{4x-2} \right)^{3x}$. 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}}$.

7.1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$. 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^3}$.

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin^2 x}$.

8. Визначити порядок і головну частину розкладу $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$:

1) $\alpha(x) = \sqrt[4]{1+x^3} - 1, \beta(x) = \operatorname{arctg} x, x \rightarrow 0$.

2) $\alpha(x) = \ln(x^2 + 7x + 11), \beta(x) = x + 2, x \rightarrow -2$.

3) $\alpha(x) = \ln \cos 2x, \beta(x) = \arcsin x, x \rightarrow 0$.

9. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ у точках $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Знайти похідні функцій (10—13):

10.1) $y = \frac{6}{x^4} - \sqrt{x^7} + \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{4x^2 + 7x - 5}$.

2) $y = \sqrt[3]{5x^5 - \sin^3 \cos 2} - \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2 - x + 4)}$.

3) $y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2 + \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ch} 3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

4) $y = \log_5(x+1) \operatorname{arctg}^2 x^3 - \frac{4 \lg(3x+7)}{(x-5)^3}$.

5) $y = \operatorname{th}^3 5x \cdot \operatorname{arctg}(2x-5) + (\operatorname{sh} 3x)^{\arccos 2x}$.

6) $y = (\lg(8x+3))^{\operatorname{tg} 5x} - \frac{(x+1)^2 \sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4 (x-3)^5}$.

11.1) $\operatorname{ctg}^2(x+y) = 5y$. 2) $x^3 + y^3 = 15xy$.

12. $\begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} : 1) \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases} 2) \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

13.1) $y = (x^2 + 2x - 1) \sin 2x, y^{(5)} = ?$

2) $y = \frac{7x+1}{4x+3}, y^{(n)} = ?$

14. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в заданій точці:

1) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}, x_0 = 4$.

$$2) x = \sin t, y = \cos 2t, t_0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$3) x = t^3 - 1, y = 3t^2, z = 2t^3 - 1, M_0(0; 3; 1).$$

15. Знайти проміжки монотонності функції $y = -\frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$.

$$16. \begin{matrix} \max \\ \min \\ [a, b] \end{matrix} f(x) = ? \quad 1) y = \frac{1}{4}x^4 - 6x^3 + 7, [16; 20].$$

$$2) y = \sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}, [-2; -5].$$

17. Дослідити функцію і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2+2x+9)}. \quad 5) y = \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}.$$

$$2) y = \frac{x^3-27x+51}{x^3}. \quad 6) y = \frac{5x}{4-x^2}.$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}. \quad 7) y = \ln(4-x^2).$$

$$4) y = \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}. \quad 8) y = \ln \frac{x+6}{x}.$$

Знайти інтеграли (18—22):

$$18.1) \int \frac{dx}{6x+1}. \quad 7) \int \sin(9x+7).$$

$$2) \int \sqrt[3]{(x-2)^2} dx. \quad 8) \int \frac{\ln(3x+5)}{3x+5} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x^2-2}. \quad 9) \int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx.$$

$$4) \int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}. \quad 10) \int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x} dx.$$

$$5) \int \frac{7xdx}{7x^2+1}. \quad 11) \int \frac{\operatorname{arctg}^4 8x}{1+64x^2} dx.$$

$$6) \int e^{4-7x} dx. \quad 12) \int e^{4-5x^2} x dx.$$

$$19.1) \int \frac{x-5}{9x^2+4}. \quad 5) \int \frac{(3x^2-17x+2)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}.$$

$$2) \int \frac{2x^3+3}{2x^2-1} dx. \quad 6) \int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{3x^2+5x+2}. \quad 7) \int \frac{(2x+22)dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}.$$

$$4) \int \frac{(x-4)dx}{5x^2-x+1}. \quad 8) \int \frac{(2x+3)dx}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

$$20.1) \int \operatorname{tg}^5 4x dx. \quad 4) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$$

$$2) \int \sin^2 \frac{3x}{4} dx. \quad 5) \int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x} dx.$$

$$3) \int \cos 7x \cos 5x dx. \quad 6) \int \frac{dx}{2-3\cos x + \sin x}.$$

$$21.1) \int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}. \quad 5) \int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}} dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}. \quad 6) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx. \quad 7) \int \frac{(\sqrt{x+1}-1)dx}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}.$$

$$4) \int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}. \quad 8) \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$22.1) \int \ln \frac{2-x}{2+x} dx. \quad 4) \int (x^2+4)e^{2x} dx.$$

$$2) \int x \operatorname{arctg} 2x dx. \quad 5) \int (x-9) \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$3) \int x \cos(x-2) dx. \quad 6) \int \arccos \frac{x}{3} dx.$$

23. Обчислити інтеграли.

$$1) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx. \quad 4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2^8 \cos^8 x dx.$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2 dx}{x^4-1}. \quad 5) \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx.$$

$$3) \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx. \quad 6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

24. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}. \quad 2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

25. Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$1) y = x^2 \cos x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6 \quad (0 < x < 3\pi, y \geq 6). \end{cases}$$

$$3) \rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$$

26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2$, навколо осі Oy .

27. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x = \cos t, y = 4 + \sin t$ навколо осі Ox .

Додаткові задачі

1. Описати множини $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B$ переліком всіх елементів якщо:

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4\}$.

2) $A = \{4, 5, 6\}, B = \{5, 6, 7\}$.

3) $A = (-2, 3], B = [2, 4)$.

2. Вважаючи $U = [0, 2]$ універсальною множиною, знайти і зобразити \bar{A} , якщо A :

1) $\{0, 1, 2\}$. 2) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 3) $(0, 1]$.

3. Знайти $\max X, \min X, \sup X, \inf X$, якщо:

1) $X = \left\{\frac{1}{5^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. 2) $X = [0, 1)$.

4. Знайти множину точок $z \in \mathbb{C}$:

1) $|z - 1| = |\operatorname{Re} z|$. 4) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$.

2) $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 2 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$. 5) $\operatorname{Im} \frac{z - 1}{z + 1} = 0$.

3) $\operatorname{Re} \frac{z - 1}{z + 1} = 0$. 6) $\arg \frac{z - 1}{z + 1} = 0$.

5. Довести, що:

1) $n(2n^2 - 3n + 1) \div 6$.

2) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

3) $(1 + x)^n \geq 1 + nx, x > -1$.

6. Довести, користуючись означенням, що:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2}{2n - 1} = \frac{3}{2}$. 3) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n + 1} = 2$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6$.

7. Знайти границі.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{3n - 2}{n^2} \right)$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right)$.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)! - n(n + 1)!}{(n + 1)! + n!}$.

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! + n(2n - 1)!}{n^2(2n - 2)! - (2n - 1)!}$.

8. При яких значеннях α і β функція $f(x)$ буде нескінченно малою при $x \rightarrow +0$:

1) $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$. 3) $f(x) = \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}$.

2) $f(x) = x^\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{x^\beta}$. 4) $f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}$.

9. Визначити порядок нескінченно великої:

1) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x^3, x \rightarrow 0$.

2) $f(x) = \frac{x^5}{1 + x + 2x^2}, x \rightarrow \infty$.

3) $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}, x \rightarrow \infty$.

4) $f(x) = \frac{\ln x}{(x - 1)^2}, x \rightarrow 1$.

10. Які з пар функцій є функціями одного порядку:

1) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, g(x) = x^3 - x;$
 $x \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$.

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, g(x) = \frac{1}{x}; x \rightarrow \pm \infty$.

3) $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + x + 1}, g(x) = 1, x \rightarrow \infty;$

4) $f(x) = x \cos \frac{1}{x}, g(x) = x, x \rightarrow 0?$

11. Визначити при яких значеннях α та β функції $f(x)$ та $g(x) = \alpha x^\beta$ є еквівалентними:

1) $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x}}; x \rightarrow +0, x \rightarrow +\infty$.

2) $f(x) = \sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}, x \rightarrow 0$.

3) $f(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2, x \rightarrow 0$.

4) $f(x) = 1 - \cos\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$.

12. Знайти корені рівнянь на інтервалах з точністю до 0,1:

1) $x^3 - 3x + 1, (1; 2)$.

2) $x^3 - 6x + 2 = 0, (-3; -2), (0; 1), (2; 3)$.

3) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0, (-1; 0), (1; 2), (2; 3)$.

13. Наближено обчислити:

1) $\arcsin 0,6$. 2) $\operatorname{arctg} 0,95$. 3) $\sqrt[3]{26,19}$.

14. Перевірити теорему Ролля:

1) $f(x) = x(x^2 - 1), x \in [-1; 1], x \in [0; 1]$.

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}, x \in [2; 3]$.

3) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in [1; 3]$.

15. Перевірити теорему Лагранжа:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, x \in [1; 3]$.

2) $f(x) = \operatorname{arctg} x, x \in [1; \sqrt{3}]$.

16. Довести нерівності:

- 1) $e^x > 1 + x, x \neq 0$.
- 2) $\frac{b-a}{1+b} < \ln \frac{1+b}{1+a} < \frac{b-a}{1+a}, 0 < a < b$.
- 3) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x > 0$.
- 4) $\frac{2(x-1)}{x+1} \ln x, x > 1$.
- 5) $\ln(1+x^2) \leq 2x \operatorname{arctg} x$.
- 6) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} < \ln(1+x), x > 0$.
- 7) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x, x > 0$.
- 8) $x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

17. Перевірити теорему Коші:

- 1) $f(x) = x^4, \varphi(x) = x^2, [a; b], 0 < a < b$.
- 2) $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \cos x, x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$.

18. Розвинути $f(x)$ за степенями $g(x)$:

- 1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1, g(x) = x + 1$.
- 2) $f(x) = x^4 - 2x + 3, g(x) = x - 1$.

19. Наближено обчислити з похибкою меншою 10^{-3} :

- 1) $\sqrt[3]{127}$. 2) $\sqrt[4]{83}$. 3) $\sin 85^\circ$. 4) $\ln(1,3)$.

20. Оцінити абсолютну похибку наближених формул:

- 1) $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, x \in [0; 1]$.
- 2) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, |x| < 1$.
- 3) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, |x| \leq 0,5$.
- 4) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}, |x| \leq 0,1$.

- 5) $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}, |x| \leq 0,1$.

21. Дослідити функцію в околі заданих точок:

- 1) $y = x^2 - 4x - (x-2) \ln(x-1), x_0 = 2$.
- 2) $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, x_0 = 2$.
- 3) $y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4, x_0 = 2$.

22. Дослідити функцію на екстремум:

- 1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$. 3) $f(x) = x^2(2-x)$.
- 2) $f(x) = e^x \cos x$. 4) $f(x) = xe^{-x^2}$.

23. Знайти найменше та найбільше значення функції:

- 1) $y = 2 \sin x + \sin 2x, [0; \frac{3\pi}{2}]$.
- 2) $y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, x \in [\pi; 2\pi]$.

24. Дослідити функцію на опуклість:

- 1) $f(x) = x^3 + 1$. 5) $f(x) = e^{-x^2}$.
- 2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$. 6) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.
- 3) $f(x) = x^2 \ln x$. 7) $f(x) = e^{2x-x^2}$.
- 4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$.

25. Знайти асимптоти графіка функції:

- 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. 3) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.
- 2) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. 4) $f(x) = x(1 - \frac{1}{x})^x$.

26. Побудувати графік функції:

- 1) $y = \cos 3x + 3 \cos x$. 6) $y = e^{\cos x}$.
- 2) $y = \cos x - \ln \cos x$. 7) $y = e^{-\operatorname{arctg} x}$.
- 3) $y = e^{\sin x + \cos x}$. 8) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
- 4) $y = \ln(\cos x + \sin x)$. 9) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 5) $y = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$. 10) $y = (1 + \frac{1}{x})^x$.

27. Обчислити інтеграли:

- 1) $\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$. 3) $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$.
- 2) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^6}$.

29. Дослідити інтеграли на збіжність:

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^7 dx}{(x^3 + x + 1)^3}$. 3) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.
- 2) $\int_0^5 \frac{dx}{\ln x}$. 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$.