РГР

з дисципліни „Ймовірнісні моделі та статистичне оцінювання в інформаційно-управляючих системах"

студента групи ІП-15
Волиця Кирила

Завдання 2

- Задати (кожному індивідуально) для однорідного ланцюга Маркова матрицю переходів π_1 (містить нулі), що гарантує існування граничних ймовірностей та знайти їх значення;

$$\pi_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \pi_1^2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,01 & 0,72 & 0,27 \\ 0,24 & 0,49 & 0,27 \\ 0,24 & 0,72 & 0,04 \end{pmatrix}$$

Всі елементи додатні => ланцюг сходиться

Граничні імовірності:

$$\begin{cases} p_1 = 0,1p_1 + 0,8p_3 \\ p_2 = 0,9p_1 + 0,7p_2 \\ p_3 = 0,3p_2 + 0,2p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,9p_1 = 0,8p_3 \\ 0,3p_2 = 0,9p_1 \\ 0,8p_3 = 0,3p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_3 = \frac{9}{8}p_1 \\ p_2 = 3p_1 \\ 0,8p_3 = 0,3p_2 \\ p_1 + 3p_1 + \frac{9}{8}p_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{8\cdot 4+9}{8}p_1 = 1 \quad \frac{32+9}{8}p_1 = 1 \quad \frac{41}{8}p_1 = 1 \quad p_1 = \frac{8}{41}$$

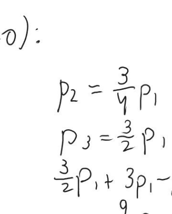
$$\begin{cases} p_3 = \frac{9}{8}\cdot\frac{8}{41} \\ p_2 = \frac{3\cdot 8}{41} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_3 = \frac{9}{41} \\ p_2 = \frac{24}{41} \end{cases} \rightarrow 0,8\cdot\frac{9}{41} = 0,3\cdot\frac{24}{41} \qquad \frac{72}{410} = \frac{72}{410}$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{8}{41} \\ p_2 = \frac{24}{41} \\ p_3 = \frac{9}{41} \end{cases} \qquad p = \left(\frac{8}{41}; \frac{24}{41}; \frac{9}{41}\right)$$

- Задати (кожному індивідуально) матрицю Λ $(\forall\lambda_{ij}, i \neq j,$ існують $\lambda_{ij} = 0, i \neq j)$ умовних інтенсивностей однорідного регулярного марківського процесу (ОРМП), що гарантує існування граничних безумовних ймовірностей станів ОРМП та побудувати граф переходів для ОРМП; записати систему диференціальних рівнянь Колмогорова та знайти граничні безумовні ймовірності станів ОРМП.

$$\Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Система диф. рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p_1'(t) = 2p_2(t) + 1p_3(t) - (3+3)p_1(t) \\ p_2'(t) = 3p_1(t) - (2+2)p_2(t) \\ p_3'(t) = 3p_1(t) - 2p_3(t) \\ p_4'(t) = 2p_2(t) + 2p_3(t) - 1p_4(t) \end{cases}$$

Граничні $(p_i'(t) = 0)$:

$$\begin{cases} 2p_2 + p_3 - 6p_1 = 0 \\ 3p_1 - 4p_2 = 0 \\ 3p_1 - 2p_3 = 0 \\ 2p_2 + 2p_3 - p_4 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} p_2 = \frac{3}{4}p_1 \\ p_3 = \frac{3}{2}p_1 \\ \frac{3}{2}p_1 + 3p_1 - p_4 = 0 \\ p_4 = \frac{9}{2}p_1 \end{array}$$

$$p_1 + \frac{3}{4}p_1 + \frac{3}{2}p_1 + \frac{9}{2}p_1 = 1$$

$$\frac{4+3+6+18}{4}p_1 = 1$$

$$\frac{31}{4}p_1 = 1$$

$$p_1 = \frac{4}{31} \qquad p_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{31} = \frac{3}{31}$$

$$p_3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{31} = \frac{6}{31}$$

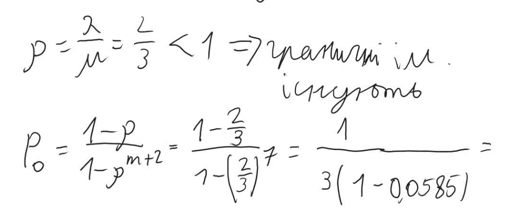
$$p_4 = \frac{9}{2}\cdot\frac{4}{31} = \frac{18}{31}$$

$$p = \left(\frac{4}{31}; \frac{3}{31}; \frac{6}{31}; \frac{18}{31}\right)$$

Завдання 3

- Задати (кожному індивідуально) параметри марківської однокольної СМО (λ, μ, m) з обмеженою чергою та по графу переходів знайти граничні ймовірності її станів, характеристики її роботи в стаціонарному режимі;

$\lambda = 2$ вхід $\quad \mu = 3$ вихід $\quad m = 5$ черга



S_0 – система вільна

S_1 – система зайнята без черги

S_i $(i \in [2; 6])$ – у системі черга довжиною $i-1$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} < 1$ => граничні ім. існують

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^7} = \frac{1}{3(1-0,0585)} =$$

$= 0,354$

$P_i = \rho^i \cdot P_0$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0,354	0,236	0,157	0,105	0,07	0,047	0,031

Ймовірність відмови $= P_6 =$

$= 0,031 = 3,1\%$

Відносна пропускна спроможність

$Q = 1 - 0,031 = 0,969$

Абсолютна пропускна спроможність

$A = Q\cdot\lambda = 0,969\cdot 2 = 1,938$

Очікувана довжина черги

$MR = 1\cdot P_2 + \ldots + mP_{m+1} =$

$= 1\cdot P_2 + 2\cdot P_3 + 3\cdot P_4 + 4\cdot P_5 + 5P_6 =$

$= 0,92$

Очікуваний час у черзі

$MT = \frac{1}{\mu}P_1 + \frac{2}{\mu}P_2 + \ldots \frac{m}{\mu}P_m =$

$= \frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{3}{3}P_3 + \frac{4}{3}P_4 + \frac{5}{3}P_5 =$

$= 0,46$

Очікуваний час обслуговування:

$t = t_0 + MT = \frac{1}{\mu} + MT = 0,33 + 0,46 = 0,79$

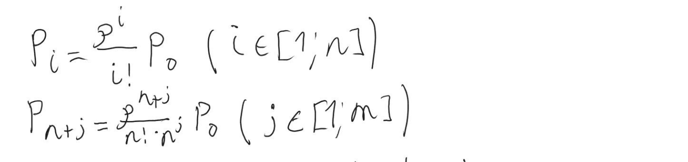
- Розв'язати аналогічну задачу для марківської багатоканальної СМО з обмеженою чергою (задавши кількість її каналів обслуговування).

$\lambda = 2$ вхід $\quad \mu = 1$ вихід $\quad m = 5$ черга $\quad n = 3$ кількість каналів

S_0 – система вільна

S_i $(i \in [1; 3])$ – i каналів зайняті, черга відсутня

S_j $(j \in (3; 8])$ – всі канали зайняті черга розміром $j-3$



$\frac{\lambda}{n\mu} = \frac{2}{3\cdot 1} = \frac{2}{3} < 1$ => граничні ім. існують

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots \frac{\rho^m}{n^m}\right)} = 0,1156$$

$P_i = \frac{\rho^i}{i!}P_0 \quad (i \in [1; n])$

$P_{n+j} = \frac{\rho^{n+j}}{n!\cdot n^j}P_0 \quad (j \in [1; m])$

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
0,12	0,23	0,23	0,15	0,1	0,07	0,05	0,03	0,02

Ймовірність відмови $= P_8 = 0,02$

Відносна пропускна спроможність

$Q = 1 - 0,02 = 0,98$

Абсолютна пропускна спроможність

$A = Q\cdot\lambda = 0,98\cdot 2 = 1,96$

Очікувана довжина черги

$MR = 1\cdot P_{n+1} + 2\cdot P_{n+2} + \ldots mP_{n+m}$

$= 1\cdot P_4 + 2\cdot P_5 + 3\cdot P_6 + 4\cdot P_7 + 5P_8$

$= 0,6$

Очікуваний час у черзі

$MT = \frac{1}{\mu}P_n + \frac{2}{\mu}P_{n+1} + \ldots \frac{m}{\mu}P_{n+m-1} =$

$= \frac{1}{3}P_3 + \frac{2}{3}P_4 + \frac{3}{3}P_5 + \frac{4}{3}P_6 + \frac{5}{3}P_7 =$

$= 0,3$

Очікуваний час обслуговування:

$t = t_0 + MT = \frac{1}{\mu} + MT = 0,33 + 0,3 = 0,63$

Завдання 4

- Задати (кожному індивідуально) параметри $(p, \Phi_1, \ldots, \Phi_p)$ стаціонарної моделі авторегресії порядку p та знайти значення коефіцієнтів кореляції $\rho_1, \ldots, \rho_p$;

$p = 2 \quad \varphi_1 = 0,55 \quad \varphi_2 = 0,4$

$\tilde{Z}_t = 0,55\tilde{Z}_{t-1} + 0,4\tilde{Z}_{t-2} + a_t$

Запишемо рівняння Юла-Уокера

$$\rho_k = \Phi_1\rho_{|k-1|} + \Phi_2\rho_{|k-2|} + \cdots + \Phi_p\rho_{|k-p|},$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2\rho_1 \\ \rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_1(1-\varphi_2) = \varphi_1 \\ \rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2} \\ \rho_2 = \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{0,55}{1-0,4} = \frac{0,55}{0,6} = 0,92 \\ \rho_2 = \frac{0,55^2}{0,6} + 0,6 = 1,1 \end{cases}$$

- Задати (кожному індивідуально) параметри моделі ковзуного середнього порядку q $(q, \theta_1, \ldots, \theta_p)$, що гарантують розв'язання проблеми оберненої моделі та знайти значення коефіцієнтів кореляції $\rho_1, \ldots, \rho_q$.

$q = 3 \quad \theta_1 = 0,5 \quad \theta_2 = 0,3 \quad \theta_3 = 0,1$

$\tilde{Z}_t = a_t - 0,5a_{t-1} - 0,3a_{t-2} - 0,1a_{t-3}$

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1 + 0,25 + 0,09 + 0,01 = 1,35$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_2\theta_1 + \theta_3\theta_2}{1,35} = \frac{-0,5 + \overset{0,15}{0,3\cdot 0,5} + \overset{0,03}{0,1\cdot 0,3}}{1,35} =$$

$$= \frac{0,18 - 0,5}{1,35} = -0,237$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2 + \theta_3\theta_1}{1,35} = \frac{-0,3 + 0,1\cdot 0,5}{1,35} = \frac{0,05 - 0,3}{1,35} = -0,185$$

$$\rho_3 = \frac{-\theta_3}{1,35} = \frac{-0,1}{1,35} = -0,074$$

$|\theta_1| < 1; \; |\theta_2| < 1; \; |\theta_3| < 1$ => проблема оберненості моделі вирішена