НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАТИКИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Кафедра інформатики та програмної інженерії

Звіт до розрахунково-графічної роботи

з курсу

«Ймовірнісні моделі та статистичне оцінювання в інформаційно-управляючих системах»

студента 2 курсу
групи ІП-15
Мєшкова Андрія Ігоровича

Київ – 2023

Завдання 2

- Задати (кожному індивідуально) для однорідного ланцюга Маркова матрицю переходів π_1 (містить нулі), що гарантує існування граничних ймовірностей та знайти їх значення;

Задамо матрицю переходів π_1

$$\pi_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\pi_1^2 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,16 & 0,54 & 0,3 \\ 0,1 & 0,25 & 0,65 \\ 0,24 & 0,12 & 0,64 \end{pmatrix} \rightarrow \text{існує граничний розподіл,}$$

ланцюг ергодичний

Знайдемо граничні ймовірності:

$$\begin{cases} p_1 = 0,4p_1 + 0,2p_3 \\ p_2 = 0,6p_1 + 0,5p_2 \\ p_3 = 0,5p_2 + 0,8p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,6p_1 = 0,2p_3 \\ 0,5p_2 = 0,6p_1 \\ 0,2p_3 = 0,5p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_3 = 3p_1 \\ p_2 = \frac{6}{5}p_1 \\ 0,2p_3 = 0,5p_2 \\ p_1 + \frac{6}{5}p_1 + 3p_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{5+6+15}{5}p_1 = 1$$

$$\frac{26}{5}p_1 = 1$$

$$p_1 = \frac{5}{26}$$

$$p_3 = \frac{15}{26}$$

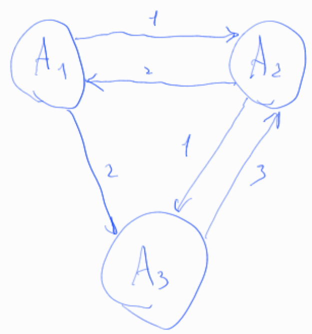
$$p_2 = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$$

$$p = \left(\frac{5}{26}; \frac{6}{26}; \frac{15}{26}\right)$$

- Задати (кожному індивідуально) матрицю Λ $\left(\forall\lambda_{ij}, i \neq j,\right.$ існують $\lambda_{ij} = 0, i \neq$ $\left. j\right)$умовних інтенсивностей однорідного регулярного марківського процесу (ОРМП), що гарантує існування граничних безумовних ймовірностей станів ОРМП та побудувати граф переходів для ОРМП; записати систему диференціальних рівнянь Колмогорова та знайти граничні безумовні ймовірності станів ОРМП.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Побудуємо граф переходів:



Запишемо систему диференційних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p_1'(t) = 2p_2(t) - 3p_1(t) \\ p_2'(t) = p_1(t) + 3p_3(t) - 3p_2(t) \\ p_3'(t) = 2p_1(t) + p_2(t) - 3p_3(t) \\ p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -3p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 - 3p_2 + 3p_3 = 0 \\ 2p_1 + p_2 - 3p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{2}{3}p_2 \\ p_2 = \frac{1}{2}p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3}p_3 \\ p_2 = \frac{1}{2}p_3 \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)p_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = \frac{6}{11} \\ p_1 = \frac{2}{11} \\ p_2 = \frac{3}{11} \end{cases}$$

$$p = \left(\frac{2}{11}; \frac{3}{11}; \frac{6}{11}\right)$$

Завдання 3

- Задати (кожному індивідуально) параметри марківської одноканальної СМО (λ, μ, m) з обмеженою чергою та по графу переходів знайти граничні ймовірності її станів, характеристики її роботи в стаціонарному режимі;

Нехай: $\underset{\text{черга}}{m = 6}$, $\underset{\text{вхід}}{\lambda = 4}$, $\underset{\text{вихід}}{\mu = 6}$

Стани:

S_0 — система вільна

S_1 — система обробляє заявку

$S_{i}\ (1 < i \le 7)$ — $i-1$ заявок у черзі

Побудуємо граф переходів:

$$\begin{tikzcd} \boxed{S_0} \arrow[r, shift left, "4"] & \boxed{S_1} \arrow[l, shift left, "6"] \arrow[r, shift left, "4"] & \boxed{S_2} \arrow[l, shift left, "6"] \arrow[r, shift left, "4"] & \boxed{S_3} \arrow[l, shift left, "6"] \arrow[r, shift left, "4"] & \boxed{S_4} \arrow[l, shift left, "6"] \arrow[r, shift left, "4"] & \boxed{S_5} \arrow[l, shift left, "6"] \arrow[r, shift left, "4"] & \boxed{S_6} \arrow[l, shift left, "6"] \arrow[r, shift left, "4"] & \boxed{S_7} \arrow[l, shift left, "6"] \end{tikzcd}$$

Розрахуємо інтенсивність ρ

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{6} \approx 0,667$$

$\rho < 1 \Rightarrow$ черга не буде рости нескінченно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ граничні ймовірності існують.

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-0,667}{1-0,667^{8}} = 0,347$$

$p_i = \rho^i \cdot p_0$

i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,231	0,154	0,103	0,069	0,046	0,031	0,02

Ймовірність відмови системи: $p_{відм.} = \rho^{m+1} \cdot p_0 = 0,667^7 \cdot 0,347 = 0,02$

Відносна пропускна спроможність:

$$Q = 1 - p_{відм} = 1 - 0,02 = 0,98$$

Абсолютна пропускна спроможність:

$$A = Q \cdot \lambda = 0,98 \cdot 4 = 3,919$$

Середнє число заявок у черзі:

$$L_{оч} = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho^m(m - m\cdot\rho + 1)}{(1-\rho)^2} = 0,667^2 \frac{1-0,667^6(6-6\cdot 0,667+1)}{(1-0,667)^2} =$$

$$= 1,022 \; (M_z)$$

Середнє число заявок за одиницю часу:

$$L_z = 1 - p_0 = 1 - 0,347 = 0,653$$

Мат. очікування часу перебування заявки у черзі:

$$M_t = \rho \frac{1-\rho^m(m+1-\rho^m)}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{m+1})} = 0,667 \frac{1-0,667^6(6+1-0,667^6)}{6(1-0,667)(1-0,667^5)} =$$

$$= 0,283$$

- Розв’язати аналогічну задачу для марківської багатоканальної СМО з обмеженою чергою (задавши кількість її каналів обслуговування).

Нехай: $n = 3$ (кількість каналів) $m = 3$ (черга) $\lambda = 2$ (вхід) $\mu = 3$ (вихід)

Стани:

S_0 – канали вільні

S_1 – зайнятий 1й канал;

S_2 – зайнято 2й не всі канали;

S_3 – зайняті усі канали

$S_{4/5/6}$ – 1/2/3 заявок у черзі

Інтенсивність навантаження:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} = 0,667$$

Ймовірність вільного стану:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \ldots \frac{\rho^m}{n^m}\right)} = 0,512$$

$$p_{i \in [1;3]} = \frac{\rho^i}{i!} p_0 \qquad p_{i \in [4;6]} = \frac{\rho^i}{n! \, n^{(i-n)}} \cdot p_0$$

$p_1 = \frac{0,667}{1} \cdot 0,512 = 0,341$

$p_2 = 0,114$

$p_3 = 0,025$

$p_4 = \frac{0,667^{?}}{6 \cdot 3} \cdot 0,512 = 0,06$

$p_5 = 0,001$

$p_6 = 0,0003$

Ймовірність відмови системи:

$P_{від} = p_{n+m} = 0,0003$

Відносна пропускна спроможність

$Q = 1 - p_{від} = 1 - 0,0003 = 0,9997$

Абсолютна пропускна спроможність

$A = \lambda Q = 2 \cdot 0,9997 = 1,999$

Мат. сподівання к-сті зайнятих каналів:

$M_z = \frac{A}{\mu} = \frac{1,999}{3} = 0,666$

Мат. оч. довжини черги

$L_ч = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m+1 - m\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 =$

$= \frac{0,667^3}{3 \cdot 6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{0,667}{3}\right)^3 \left(3 + 1 - \frac{3 \cdot 0,667}{3}\right)}{\left(1 - \frac{0,667}{3}\right)^2} \cdot 0,512 =$

$= 0,009 \; (M_r)$

Середнє число зайнятих каналів

$L_{об.} = \rho \frac{1 - \rho^{n+m}}{n! \cdot n^m} p_0 = 0,667 \frac{1 - 0,667^6}{6 \cdot 3^3} \cdot 0,512 =$

$= 0,666$

Мат. очікування часу у черзі

$M_t = \frac{1}{n \mu} \cdot p_n \cdot \sum_{i=1}^{m} i \left(\frac{\rho}{n}\right)^i = \frac{1}{3 \cdot 3} \cdot 0,025 \left(\frac{0,667}{3} + \frac{2 \cdot 0,667^2}{3^2} + \right.$

$\left. + \frac{3 \cdot 0,667^3}{3^3}\right) = 0,0009$

Мат очікування загальної к-сті заявок в системі

$L_c = L_ч + L_{об} = 0,009 + 0,666 = 0,675$

Завдання 4

- Задати (кожному індивідуально) параметри $(p, \Phi_1, \dots, \Phi_p)$ стаціонарної моделі авторегресії порядку p та знайти значення коефіцієнтів кореляції $\rho_1, \dots, \rho_p$;

Нехай:

$p = 2 \quad \Phi_1 = 0{,}7 \quad \Phi_2 = 0{,}35$

$$\tilde{Z} = 0{,}7\tilde{Z}_{t-1} + 0{,}35\tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

Запишемо рівняння Юла-Уокера

$$\rho_k = \Phi_1 \rho_{|k-1|} + \Phi_2 \rho_{|k-2|} + \dots + \Phi_p \rho_{|k-p|}, \quad k = \overline{1,p}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \Phi_1 \rho_1 + \Phi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(1-\Phi_2) = \Phi_1 \\ \rho_2 = \Phi_1 \rho_1 + \Phi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{\Phi_1}{1-\Phi_2} \\ \rho_2 = \dfrac{\Phi_1^2}{1-\Phi_2} + \Phi_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{0{,}7}{0{,}65} \approx 1{,}08 \\ \rho_2 = \dfrac{0{,}7^2}{0{,}65} + 0{,}35 \approx 1{,}1 \end{cases}$$

- Задати (кожному індивідуально) параметри моделі ковзуного середнього порядку q $(q, \theta_1, \dots, \theta_p)$, що гарантують розв'язання проблеми оберненої моделі та знайти значення коефіцієнтів кореляції $\rho_1, \dots, \rho_q$.

Нехай: $q = 3 \quad \theta_1 = 0{,}7 \quad \theta_2 = 0{,}4 \quad \theta_3 = 0{,}1$

$$\tilde{Z}_t = a_t - 0{,}7a_{t-1} - 0{,}4a_{t-2} - 0{,}1a_{t-3}$$

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_2\theta_1 + \theta_3\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} = \frac{-0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}4}{1{,}61} = \frac{0{,}08}{1{,}65} = 0{,}48$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2 + \theta_3\theta_1}{1{,}66} = \frac{-0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}7}{1{,}66} \approx -0{,}2$$

$$\rho_3 = \frac{-\theta_3}{1{,}66} = -0{,}06$$

$$|\theta_1| < 1; \ |\theta_2| < 1; \ |\theta_3| < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Проблема оберненості моделі вирішена