Repartiții continue (univariate)

Obiectivul acestui laborator este de a prezenta o parte din cele mai cunoscute repartiții continue[1] și de a rezolva câteva probleme cu ajutorul lor.

R pune la disploziție majoritatea repartițiilor uzuale. Tabelul de mai jos prezintă numele și parametrii acestora:

Tab. 1: Numele si parametrii repartitiilor uzuale in R

Repartiția	Nume	Parametrii	Valori prestabilite
Uniformă	`unif`	`min`, `max`	`min = 0`, `max = 1`
Normală	`norm`	`mean`, `sd`	`mean = 0`, `sd = 1`
Log-Normală	`lnorm`	`mean`, `sd`	`mean = 0`, `sd = 1`
Exponențială	`exp`	`rate` (=1/mean)	`rate = 1`
Cauchy	`cauchy`	`location`, `scale`	`location = 0`, `scale = 1`
Gamma	`gamma`	`shape`, `rate` (=1/scale)	`rate = 1`
Beta	`beta`	`shape1`, `shape2`	
Student	`t`	`df`	
Chi-Squared	`chisq`	`df`	
Fisher	`f`	`df1`, `df2`	
Weibull	`weibull`	`shape`	

Pentru fiecare repartiție, există patru comenzi în R prefixate cu literele `d`, `p`, `q` și `r` și urmate de numele repartiției (coloana a 2-a). De exemplu `dnorm`, `pnorm`, `qnorm` și `rnorm` sunt comenzile corespunzătoare repartiției normale pe când `dunif`, `punif`, `qunif` și `runif` sunt cele corespunzătoare repartiției uniforme.

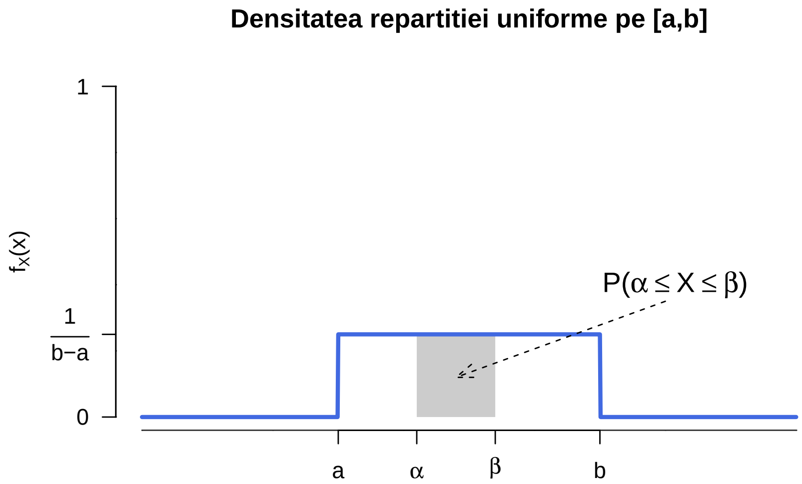
- `dnume`: calculează densitatea atunci când vorbim de o variabilă continuă sau funcția de masă atunci când avem o repartiție discretă ($\mathbb{P}(X = k)$)
- `pnume`: calculează funcția de repartiție, i.e. $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- `qnume`: reprezintă funcția cuantilă, cu alte cuvinte valoarea pentru care funcția de repartiție are o anumită probabilitate; în cazul continuu, dacă `pnume(x) = p` atunci `qnume(p) = x` iar în cazul discret întoarce cel mai mic întreg u pentru care $\mathbb{P}(X \leq u) \geq p$.
- `rnume`: generează observații independente din repartiția dată

1 Repartiția Uniformă

O variabilă aleatoare X repartizată *uniform* pe intervalul $[a, b]$, notată $X \sim \mathcal{U}[a, b]$, are densitatea dată de

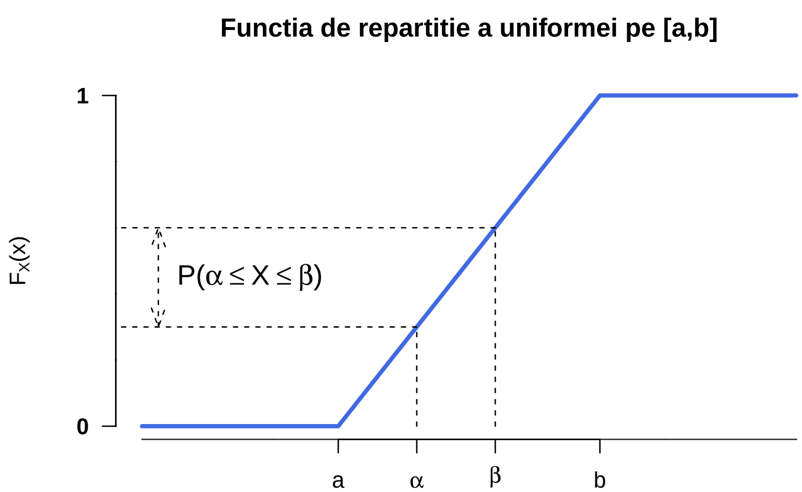
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

[1] Pentru mai multe informații, se poate consulta monografia Johnson, N., Kotz, S. și Balakrishnan, N. *Continuous Univariate Distributions*, (Volumul 1, Ediția a 2-a), John Wiley & Sons, New York (1994), 756 pp., ISBN 0-471-58495-9



Funcția de repartiție a repartiției uniforme este

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$



Media și varianța variabilei aleatoare X repartizate uniform pe $[a,b]$ sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Variabilele aleatoare repartizate uniform joacă un rol important în teoria simulării variabilelor aleatoare datorită următorului rezultat datorat lui Paul Levy și numit *teorema de universalitate a repartiției uniforme*:

Fie X o variabilă aleatoare reală cu funcția de repartiție F, U o variabilă aleatoare repartizată uniform pe $[0,1]$ și fie funcția *cuantilă* (inversa generalizată) asociată lui F, $F^{-1}:(0,1)\to\mathbb{R}$ definită prin

$$F^{-1}(u) = \inf\{x\in\mathbb{R}\,|\,F(x)\geq u\},\quad \forall u\in(0,1).$$

Atunci X și $F^{-1}(U)$ sunt repartizate la fel.

În R putem să

- generăm observații independente din repartiția $\mathcal{U}([a,b])$ (e.g. $a=3$ și $b=5$)

```
runif(10, 3, 5)
 [1] 4.960250 4.403519 3.731753 3.632980 4.317326 4.866822 3.297264 4.662233
 [9] 3.099080 3.664218
```

- calculăm densitatea unei variabile aleatoare repartizate uniform pe $[a,b]$ în diferite puncte

```
dunif(c(3.1, 3.7, 3.95, 4.86), 3, 5)
[1] 0.5 0.5 0.5 0.5
```

- calculăm funcția de repartiție a unei variabile repartizate uniform pe $[a,b]$ pentru diferite valori

```
punif(c(3.1, 3.7, 3.95, 4.86), 3, 5)
[1] 0.050 0.350 0.475 0.930
```

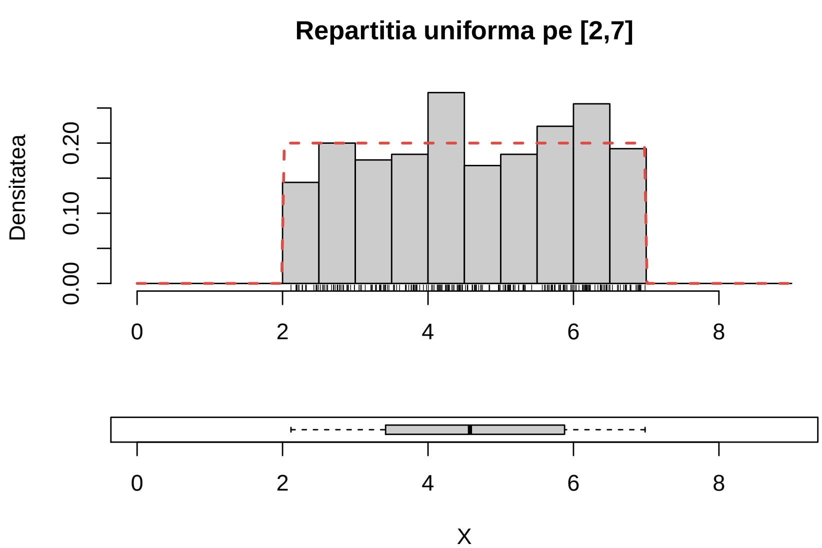
Fie X o variabilă aleatoare repartizată uniform pe $[2,7]$. Determinați:

a) $\mathbb{P}(X\in\{1,2,3,4,5,6,7\})$

b) $\mathbb{P}(X<3)$ și $\mathbb{P}(X\leq 3)$

c) $\mathbb{P}(X\leq 3\cup X>4)$

d) Generați 250 de observații din repartiția dată, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).

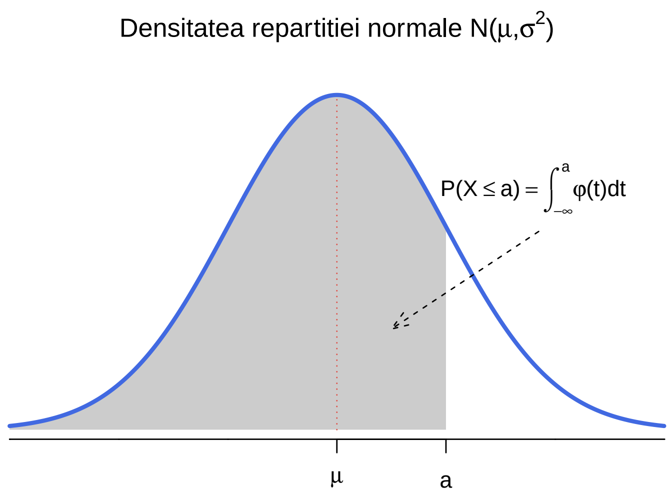


Dacă X o variabilă aleatoare repartizată uniform pe $[a, b]$ și $[c, d] \subset [a, b]$ este un subinterval, atunci repartiția condiționată a lui X la $X \in [c, d]$ este $\mathcal{U}[c, d]$.

2 Repartiția Normală

Spunem că o variabilă aleatoare X este repartizată *normal* sau *Gaussian* de medie μ și varianță σ^2, și se notează cu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dacă densitatea ei are forma

$$f_X(x) \left(\overset{not}{=} \varphi(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



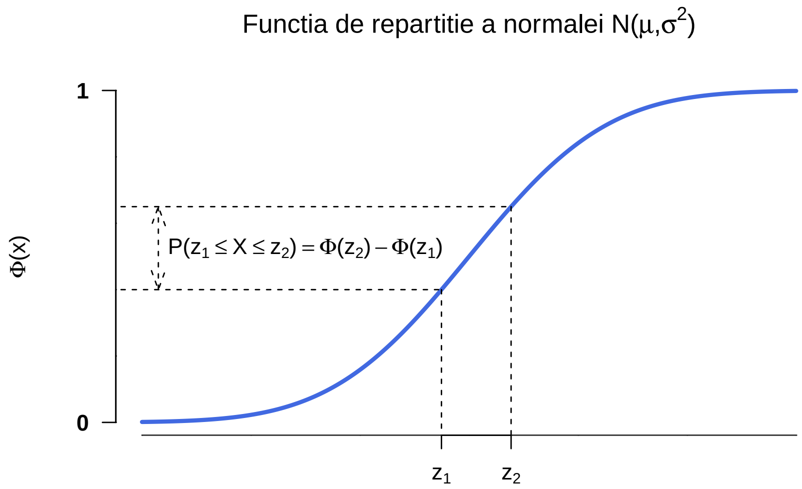
Funcția de repartiție a unei variabile $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ este dată de

$$F_X(x) \left(\overset{not}{=} \Phi(x) \right) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Pentru funcția de repartiție nu avem o formulă explicită de calcul, ea poate fi aproximată cu ajutorul descompunerii în serie. În cazul variabilelor *normale standard* ($X \sim \mathcal{N}(0, 1)$) avem proprietățile

a) $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ pentru toate valorile $x \in \mathbb{R}$
b) $1 - \Phi(a) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{2}}$ pentru $a > 0$[2]

[2]Pentru mai multe astfel de inegalități se poate consulta cartea (capitolul 2): Lin, Z. și Bai, Z. *Probability Inequalities*, Springer, 2010.



Media și varianța variabilei aleatoare X repartizate normal de parametrii $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2.$$

Mai mult, momentele de ordin se pot calcula cu ușurință și avem că

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \sigma^k (k-1)!!, & k \text{ este par} \\ 0, & k \text{ este impar.} \end{cases}$$

Pentru o variabilă aleatoare repartizată normal, avem următoarea regulă numită și regula $68 - 95 - 99.7\%$:

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Atunci

$$\mathbb{P}(|X - \mu| < \sigma) \approx 0.68$$
$$\mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \approx 0.95$$
$$\mathbb{P}(|X - \mu| < 3\sigma) \approx 0.997$$

În R putem să

- generăm observații independente din repartiția $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (e.g. $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 2$ - în R funcțiile **`rnorm`**, **`dnorm`**, **`pnorm`** și **`qnorm`** primesc ca parametrii media și abaterea standard, σ **nu** varianța σ^2)

```
rnorm(10, mean = 0, sd = sqrt(2))
 [1]  0.0798922 -2.4044042 -2.3017202  1.0751185 -0.1834820  1.0632273
 [7] -0.1228208  0.1467213 -1.2199174 -0.5529398
```

- calculăm densitatea unei variabile aleatoare repartizate normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ în diferite puncte

```
dnorm(seq(-2, 2, length.out = 15), mean = 3, sd = 5)
 [1] 0.04839414 0.05115647 0.05390019 0.05660592 0.05925368 0.06182308
 [7] 0.06429362 0.06664492 0.06885700 0.07091058 0.07278734 0.07447021
[13] 0.07594361 0.07719368 0.07820854
```

- calculăm funcția de repartiție a unei variabile repartizate normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pentru diferite valori

```
pnorm(seq(-1, 1, length.out = 15), mean = 3, sd = 1)
 [1] 3.167124e-05 5.736006e-05 1.018892e-04 1.775197e-04 3.033834e-04
 [6] 5.086207e-04 8.365374e-04 1.349898e-03 2.137367e-03 3.320943e-03
[11] 5.063995e-03 7.579219e-03 1.113549e-02 1.606229e-02 2.275013e-02
```

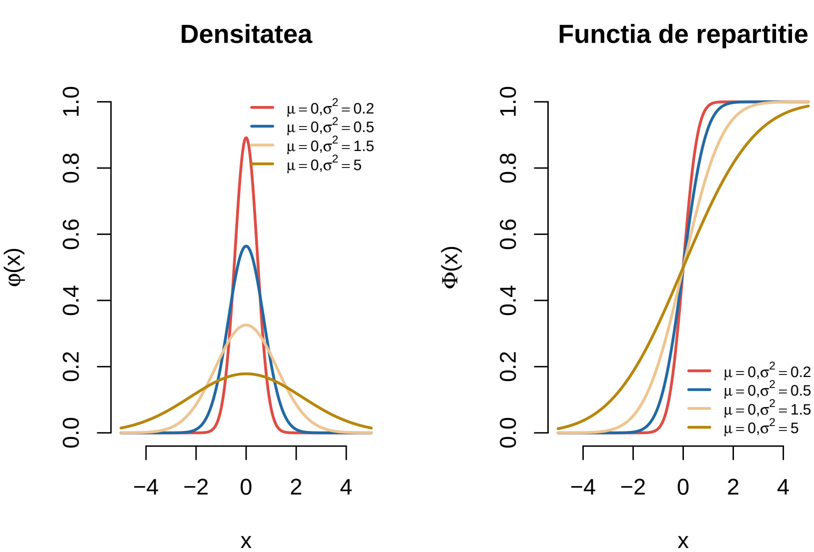
- calculăm cuantilele de ordin $\alpha \in (0,1)$ (i.e. valoarea z_α pentru care $\Phi(z_\alpha) = \alpha$ sau altfel spus $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$)

```
qnorm(c(0.01, 0.025, 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.975, 0.99), mean = 0, sd = 1)
[1] -2.3263479 -1.9599640 -1.6448536 -0.6744898  0.0000000  0.6744898  1.6448536
[8]  1.9599640  2.3263479
```

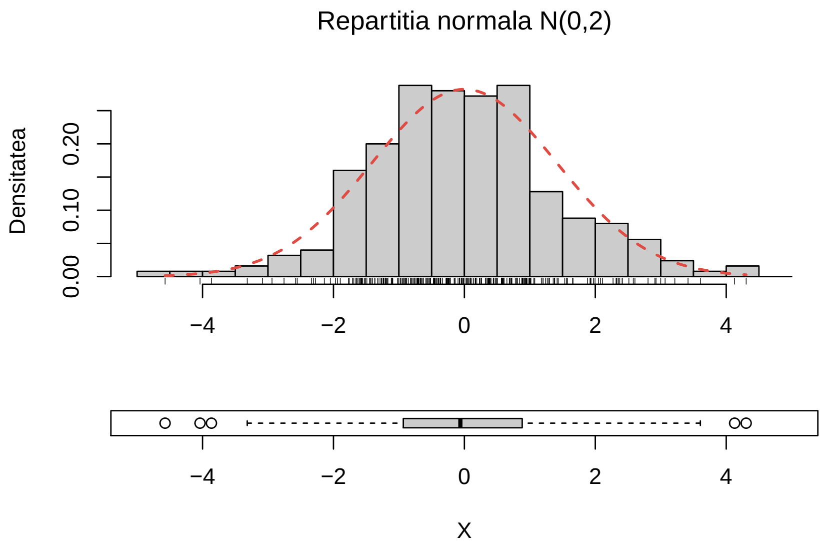
Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Atunci pentru $\mu = 1$ și $\sigma = 3$ calculați:

1) $\mathbb{P}(X \text{ este par})$
2) $\mathbb{P}(X < 3.4)$ și $\mathbb{P}(X > 1.3)$
3) $\mathbb{P}(1 < X < 4)$
4) $\mathbb{P}(X \in [2,3] \cup [3.5, 5])$
5) $\mathbb{P}(|X - 3| > 6)$

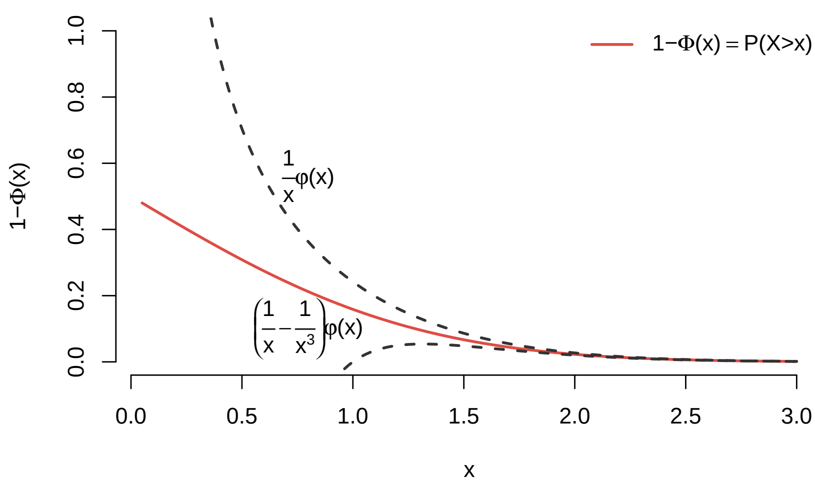
Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Pentru $\mu = 0$ și $\sigma^2 \in \{0.2, 0.5, 1.5, 5\}$ trasați pe același grafic densitățile repartițiilor normale cu parametrii $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Adăugați legendele corespunzătoare. Aceeași cerință pentru funcțiile de repartiție.



Generați 250 de observații din repartiția $\mathcal{N}(0, 2)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).



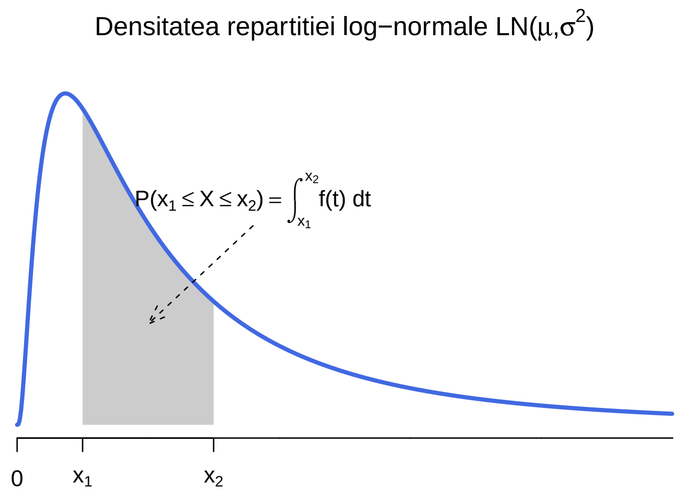
> Fie X o variabilă aleatoare repartizată normal de parametrii μ și σ^2. Ilustrați grafic pentru $\mu = 0$ și $\sigma = 1$ că are loc următoarea inegalitate:
>
> $$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\phi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\phi(x), \quad x > 0.$$



3 Repartiția Log-Normală

Spune că o variabilă aleatoare X este repartizată log-normal de parametrii μ și σ^2, și notăm $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$, dacă $\ln(X)$ este repartizată normal de parametrii μ și σ^2. Cu alte cuvinte dacă $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ atunci $X = e^Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Densitatea repartiției log-normale $LN(\mu, \sigma^2)$ este

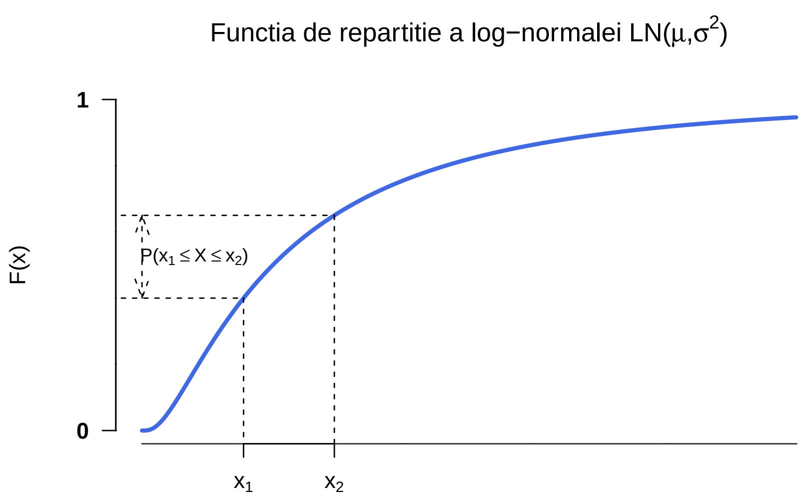
$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (0, +\infty).$$



Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ este dată de

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

și, ca și în cazul repartiției normale, nu are o formulă explicită de calcul.



Media și varianța variabilei aleatoare X repartizate log-normal de parametrii $LN(\mu, \sigma^2)$ sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad Var(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2}.$$

Arătați că media și varianța unei variabile aleatoare repartizate log-normal de parametrii μ și σ^2 sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}, \quad Var(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu+\sigma^2}.$$

În R putem să

- generăm observații independente din repartiția $LN(\mu, \sigma^2)$ (e.g. $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 3$ - ca și în cazul repartiției normale, funcțiile `rlnorm`, `dlnorm`, `plnorm` și `qlnorm` primesc ca parametrii media și abaterea standard, σ pentru $\ln(X)$ - variabila normală)

```
rlnorm(15, meanlog = 0, sdlog = sqrt(3))
 [1]  2.13141475  6.27258447  2.18850080  3.15407005  0.13970018  0.52638598
 [7] 12.91237780  0.12004802  1.56359485  2.01674623  5.42024453  0.54647199
[13]  1.31619806  0.04716763  1.79762358
```

- calculăm densitatea unei variabile aleatoare repartizate log-normal $LN(\mu, \sigma^2)$ în diferite puncte

```
dlnorm(seq(0, 5, length.out = 20), meanlog = 3, sdlog = 5)
 [1] 0.00000000 0.20820751 0.11627647 0.08196427 0.06370023 0.05226715
 [7] 0.04440086 0.03864103 0.03423291 0.03074580 0.02791546 0.02557044
[13] 0.02359456 0.02190618 0.02044622 0.01917084 0.01804680 0.01704845
[19] 0.01615564 0.01535234
```

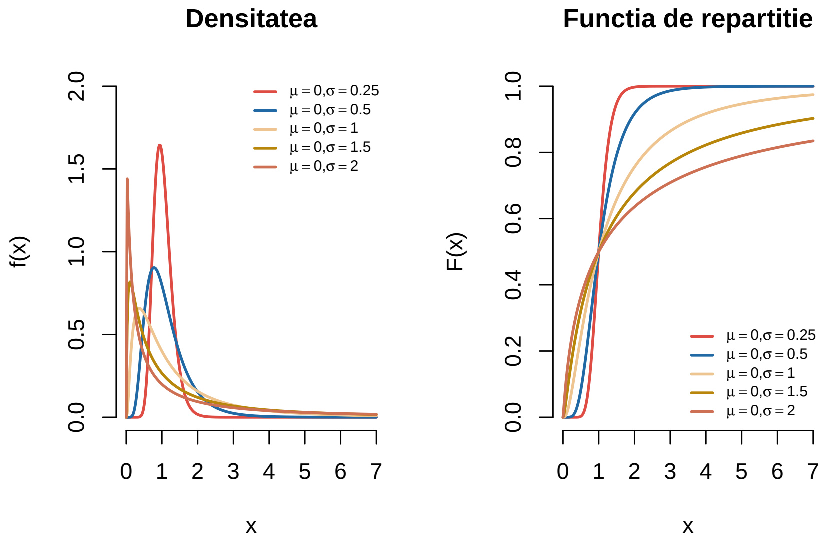
- calculăm funcția de repartiție a unei variabile repartizate log-normal $LN(\mu, \sigma^2)$ pentru diferite valori

```
plnorm(seq(0, 15, length.out = 25), meanlog = 3, sdlog = 1)
 [1] 0.0000000000 0.0002602257 0.0027443707 0.0088606283 0.0185933103
 [6] 0.0314027650 0.0466497221 0.0637426806 0.0821791298 0.1015482283
[11] 0.1215206945 0.1418356830 0.1622882185 0.1827183180 0.2030019832
[16] 0.2230439002 0.2427715876 0.2621307274 0.2810814477 0.2995953616
[21] 0.3176532076 0.3352429649 0.3523583472 0.3689975944 0.3851625036
```

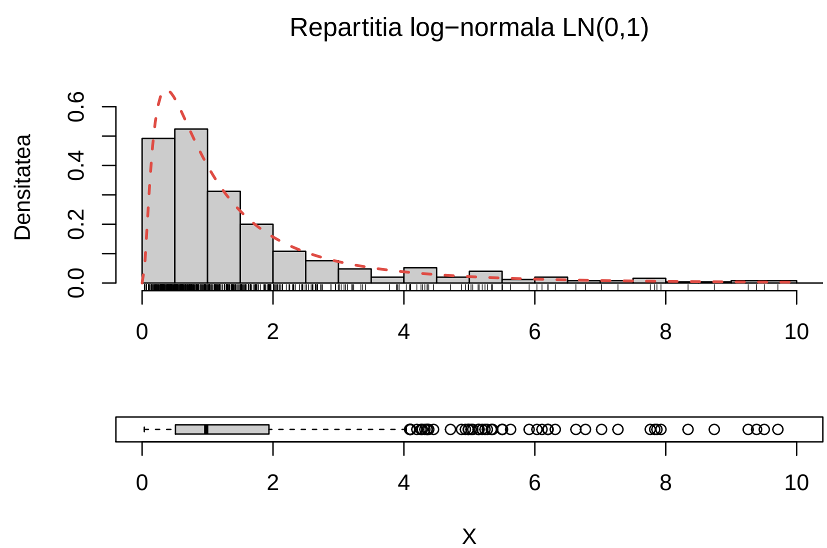
- calculăm cuantilele de ordin $\alpha \in (0, 1)$

```
qlnorm(c(0.01, 0.025, 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.975, 0.99), meanlog = 0, sdlog = 1)
[1]  0.09765173  0.14086349  0.19304082  0.50941628  1.00000000  1.96303108
[7]  5.18025160  7.09907138 10.24047366
```

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $LN(\mu, \sigma^2)$. Pentru $\mu = 0$ și $\sigma \in \{0.25, 0.5, 1.5, 5\}$ trasați pe același grafic densitățile repartițiilor log-normale cu parametrii $LN(\mu, \sigma^2)$. Adăugați legendele corespunzătoare. Aceeași cerință pentru funcțiile de repartiție.



Generați 500 de observații din repartiția $LN(0, 2)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).



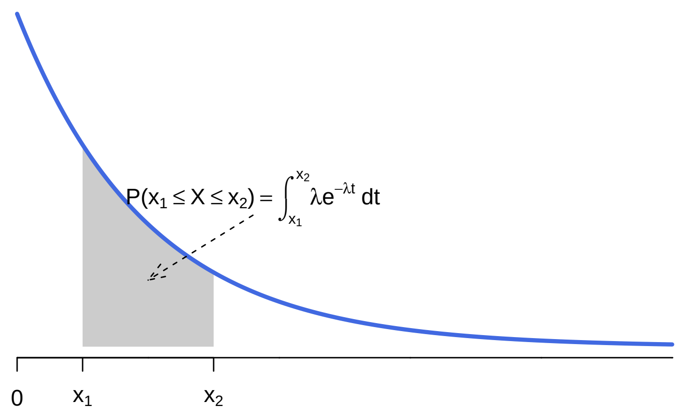
Printre fenomenele care pot fi modelate cu ajutorul repartiției log-normale se numără: cantitatea de lapte produsă de vaci, cantitatea de ploaie dintr-o perioadă dată, repartiția mărimii picăturilor de ploaie, volumul de gaz dintr-o rezervă petrolieră, etc. Pentru mai multe aplicații se poate consulta lucrarea lui Limpert, E., Stajel, W. și Abbt, M. Log-normal Distributions across the Sciences: Keys and Clues, *BioScience*, Vol. 51, Nr. 5, 2001.

4 Repartiția Exponențială

Spunem că o variabilă aleatoare X este repartizată *exponențial* de parametru λ, și se notează cu $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, dacă densitatea ei are forma

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

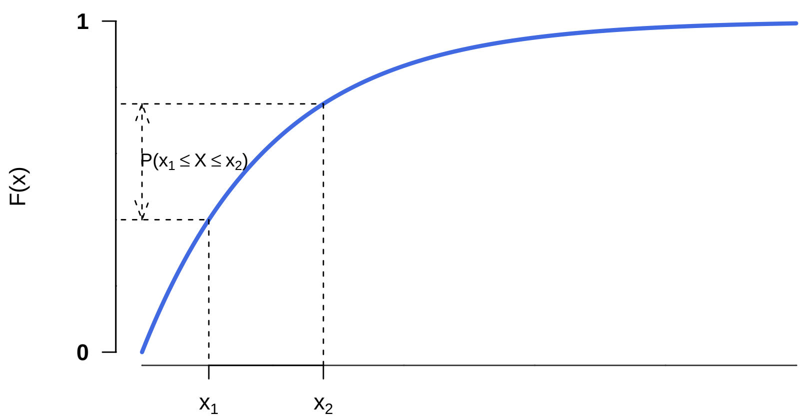
Densitatea repartitiei exponentiale E(λ)



Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ este dată de

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Functia de repartitie a exponentialei E(λ)



Media și varianța variabilei aleatoare X repartizate exponențial de parametru λ sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Arătați că momentul de ordin k, $k \geq 1$, al unei variabile aleatoare repartizate exponențial $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ este egal cu

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Fie X o variabilă repartizată exponențial de parametru λ. Atunci are loc următoarea proprietate numită și *lipsa de memorie*:

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

Mai mult, dacă o variabilă aleatoare continuă[3] X verifică proprietatea de mai sus atunci ea este repartizată exponențial.

Variabilele aleatoare repartizate exponențial sunt utilizate în modelarea fenomenelor care se desfășoară în timp continuu și care satisfac (aproximativ) proprietatea lipsei de memorie: de exemplu timpul de așteptare la un ghișeu, durata de viață a unui bec sau timpul până la următoarea convorbire telefonică.

În R putem să

- generăm observații independente din repartiția $\mathcal{E}(\lambda)$ (e.g. $\lambda = 5$)

```
rexp(15, rate = 5)
 [1] 0.13505357 0.15392539 0.25036131 0.15351051 0.00878456 0.07362396
 [7] 0.07543271 0.18981181 0.05540771 0.05649451 0.15878039 0.39847262
[13] 0.05191221 0.07776034 0.22483594
```

- calculăm densitatea unei variabile aleatoare repartizate exponențial $\mathcal{E}(\lambda)$ în diferite puncte

```
dexp(seq(0, 5, length.out = 20), rate = 5)
 [1] 5.000000e+00 1.341312e+00 3.598237e-01 9.652719e-02 2.589462e-02
 [6] 6.946555e-03 1.863500e-03 4.999070e-04 1.341063e-04 3.597568e-05
[11] 9.650925e-06 2.588981e-06 6.945263e-07 1.863153e-07 4.998141e-08
[16] 1.340814e-08 3.596899e-09 9.649130e-10 2.588499e-10 6.943972e-11
```

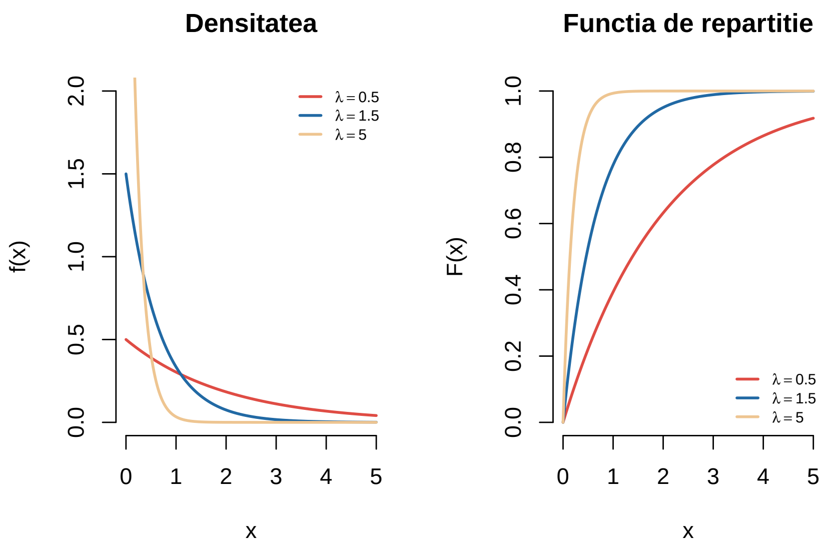
- calculăm funcția de repartiție a unei variabile repartizate exponențial $\mathcal{E}(\lambda)$ pentru diferite valori

```
pexp(seq(0, 5, length.out = 15), rate = 5)
 [1] 0.0000000 0.8323228 0.9718843 0.9952856 0.9992095 0.9998675 0.9999778
 [8] 0.9999963 0.9999994 0.9999999 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000
[15] 1.0000000
```

- calculăm cuantilele de ordin $\alpha \in (0, 1)$

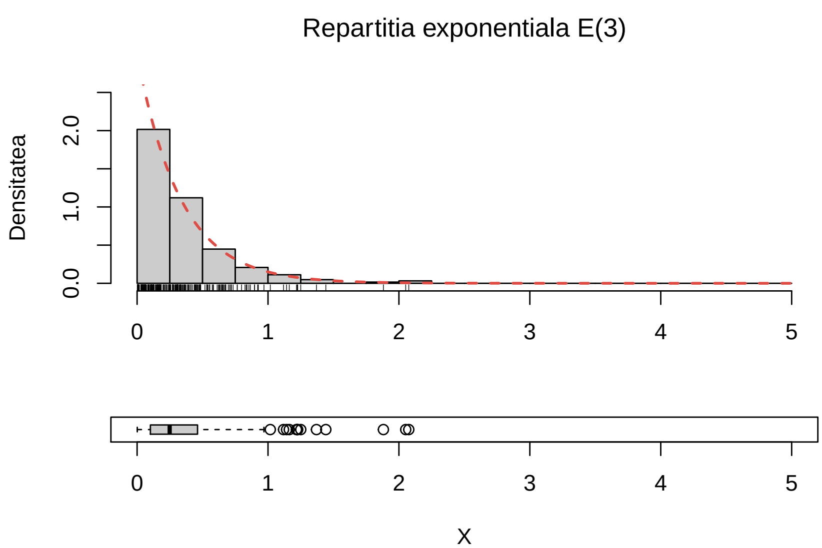
```
qexp(c(0.01, 0.025, 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.975, 0.99), rate = 5)
[1] 0.002010067 0.005063562 0.010258659 0.057536414 0.138629436 0.277258872
[7] 0.599146455 0.737775891 0.921034037
```

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\mathcal{E}(\lambda)$. Pentru $\lambda \in \{0.5, 1.5, 5\}$ trasați pe același grafic densitățile repartițiilor exponențiale de parametru λ. Adăugați legendele corespunzătoare. Aceeași cerință pentru funcțiile de repartiție.



Folosind rezultatul de universalitate de la repartiția uniformă, descrieți o procedură prin care puteți simula o variabilă aleatoare repartizată exponențial $\mathcal{E}(\lambda)$ și construiți o funcție care permite generarea de n observații independente dintr-o variabilă repartizată $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Generați 250 de observații din repartiția $\mathcal{E}(3)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).

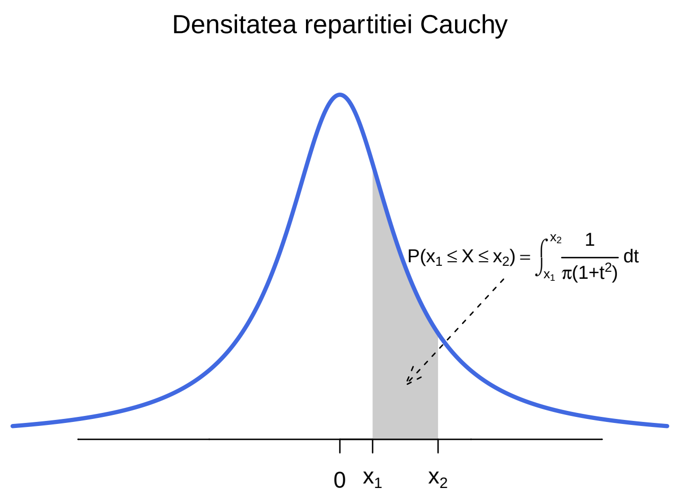


5 Repartiția Cauchy

Spunem că o variabilă aleatoare X este repartizată *Cauchy* de parametrii $(0, 1)$, și se notează cu $X \sim C(0, 1)$, dacă densitatea ei are forma

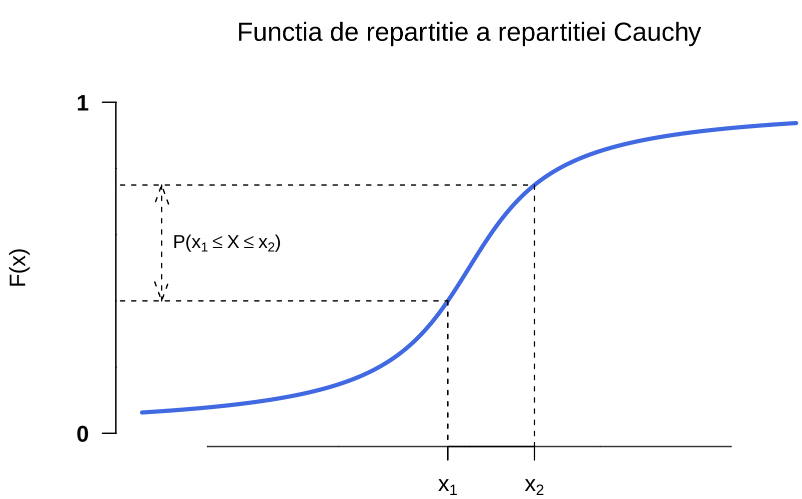
$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observăm că graficul densității repartiției Cauchy este asemănător cu cel al repartiției normale. Parametrul $M = 0$ reprezintă mediana (de fapt $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$) variabilei aleatoare X și nu media iar prima și a treia cuartilă sunt $Q_1 = -1$ și respectiv $Q_3 = 1$ (avem $\mathbb{P}(X \leq -1) = \mathbb{P}(X \geq 1) = \frac{1}{4}$).



Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare $X \sim C(0,1)$ este dată de

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Media și varianța variabilei aleatoare $X \sim C(0,1)$ **nu există**.

Arătați că o variabilă aleatoare repartizată Cauchy $C(0,1)$ nu are medie.

Fie $Y \sim C(0,1)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\beta > 0$. Spunem că variabila aleatoare $X = \alpha + \beta Y$ este repartizată Cauchy de parametrii (α, β), $X \sim C(\alpha, \beta)$. Densitatea ei este

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Parametrii α și β se interpretează în modul următor: $M = \alpha$ este mediana lui X iar $Q_1 = \alpha - \beta$ și $Q_3 = \alpha + \beta$ reprezintă prima și a treia cuartilă.

În R putem să

- generăm observații independente din repartiția Cauchy $C(\alpha, \beta)$ (e.g. $\alpha = 0$, $\beta = 2$)

```
rcauchy(15, location = 0, scale = 2)
 [1] -0.5966228  3.7627987  0.6864597 -0.4316018  1.4524446  0.3427032
 [7]  8.4285326  3.6056089  2.3506764 -3.5453329 -1.6137218 10.4304800
[13] -0.4449169  2.3005176 -3.6644199
```

- calculăm densitatea unei variabile aleatoare repartizate Cauchy $C(\alpha, \beta)$ în diferite puncte

```
dcauchy(seq(-5, 5, length.out = 20), location = 1, scale = 3)
 [1] 0.02122066 0.02450975 0.02852541 0.03345265 0.03951056 0.04693392
 [7] 0.05591721 0.06648594 0.07825871 0.09012539 0.10006665 0.10558334
[13] 0.10494052 0.09835367 0.08782920 0.07584810 0.06425529 0.05399054
[19] 0.04532934 0.03819719
```

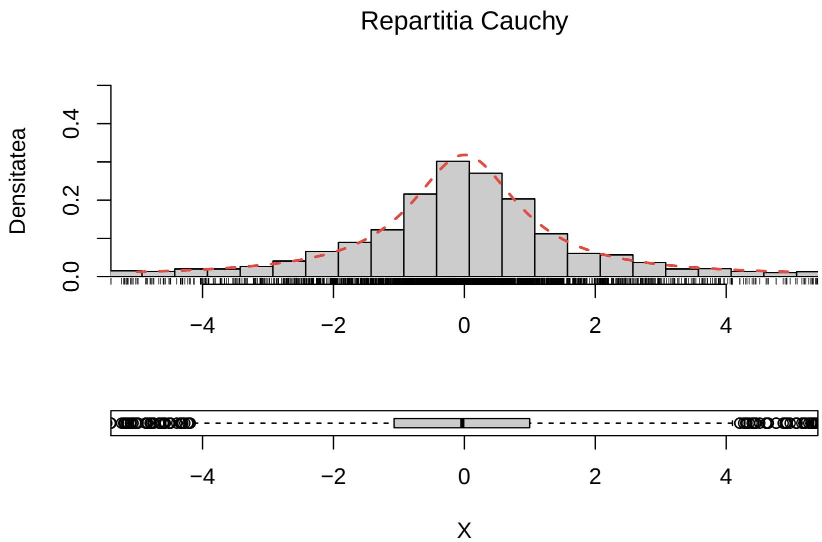
- calculăm funcția de repartiție a unei variabile repartizate Cauchy $C(\alpha, \beta)$ pentru diferite valori

```
pcauchy(seq(-5, 5, length.out = 15), location = 1, scale = 3)
 [1] 0.1475836 0.1643213 0.1848605 0.2104166 0.2425988 0.2833834 0.3347507
 [8] 0.3975836 0.4697759 0.5451672 0.6158581 0.6764416 0.7255627 0.7644587
[15] 0.7951672
```

- calculăm cuantilele de ordin $p \in (0,1)$

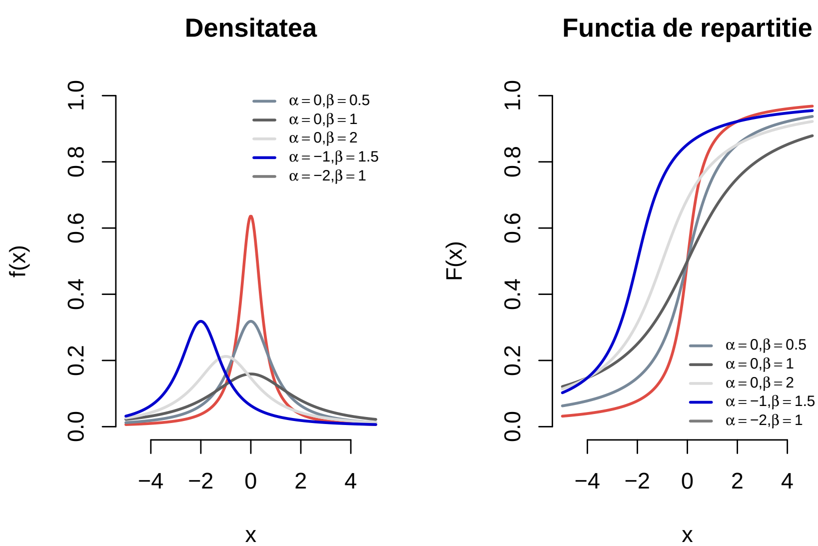
```
qcauchy(c(0.01, 0.025, 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.975, 0.99), location = 1, scale = 3)
[1] -94.46155 -37.11861 -17.94125  -2.00000   1.00000   4.00000  19.94125
[8]  39.11861  96.46155
```

Generați 2500 de observații din repartiția Cauchy, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date pentru intervalul $[-5, 5]$ (vezi figura de mai jos).

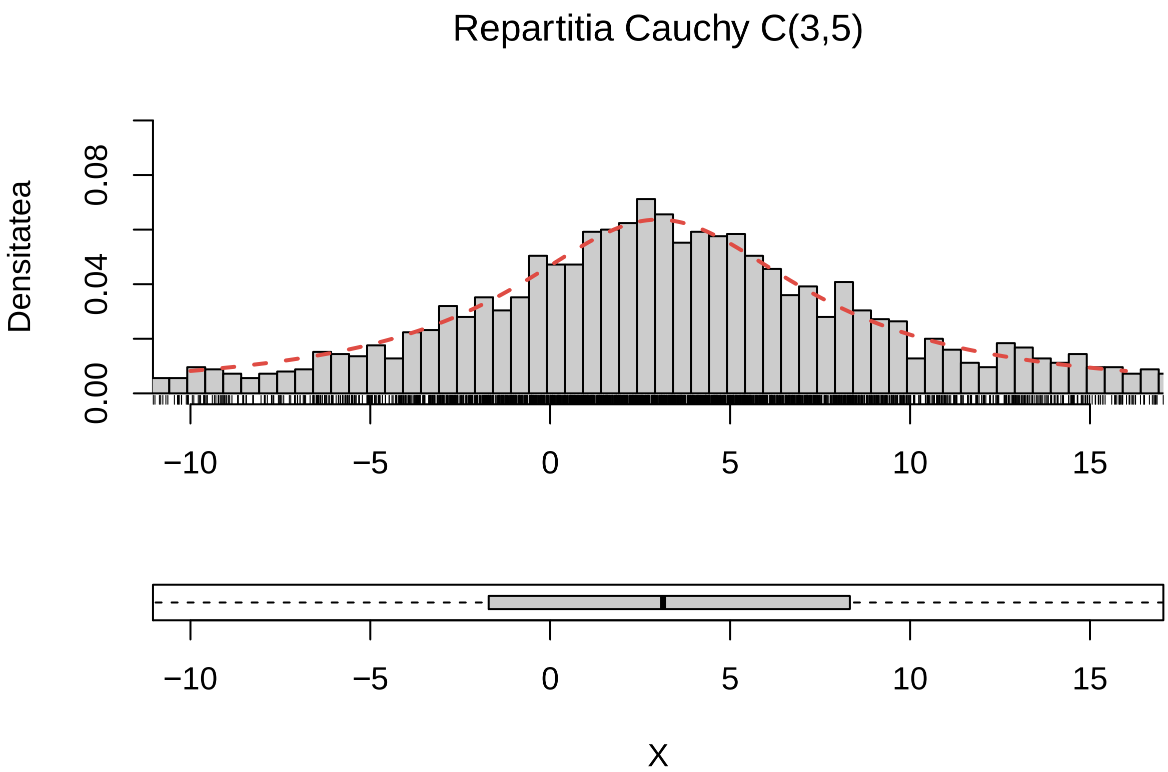


Fie X și Y două variabile aleatoare independente repartizate $\mathcal{N}(0,1)$. Arătați că variabila aleatoare $\frac{X}{Y}$ este repartizată Cauchy $C(0,1)$.

Fie X o variabilă aleatoare repartizată Cauchy $C(\alpha,\beta)$. Pentru fiecare pereche de parametrii (α,β) din mulțimea $\{(0,0.5),(0,1),(0,2),(-1,1.5),(-2,1)\}$ trasați pe același grafic densitățile repartițiilor Cauchy cu parametrii (α,β). Adăugați legendele corespunzătoare. Aceeași cerință pentru funcțiile de repartiție.



Folosind rezultatul de universalitate de la repartiția uniformă, descrieți o procedură prin care puteți simula o variabilă aleatoare repartizată Cauchy $C(0,1)$ și construiți o funcție care permite generarea de n observații independente dintr-o variabilă repartizată $X \sim C(\alpha, \beta)$. Verificați pentru parametrii $\alpha = 3$ și $\beta = 5$ (a se vedea figura de mai jos).



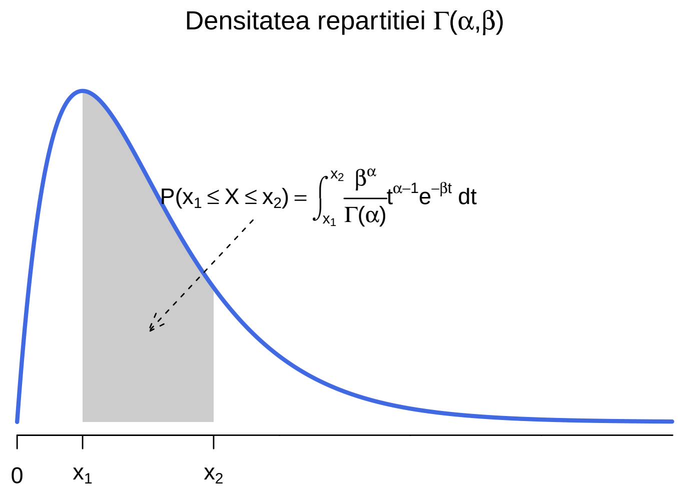
6 Repartiția Gama

Spunem că o variabilă aleatoare X este repartizată *Gama* de parametrii (α, β), cu $\alpha, \beta > 0$, și se notează cu $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, dacă densitatea ei are forma

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad \forall x > 0.$$

unde $\Gamma(\alpha)$ este funcția (Gama, numită și integrală Euler de al doilea tip) definită prin

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad \forall \alpha > 0.$$



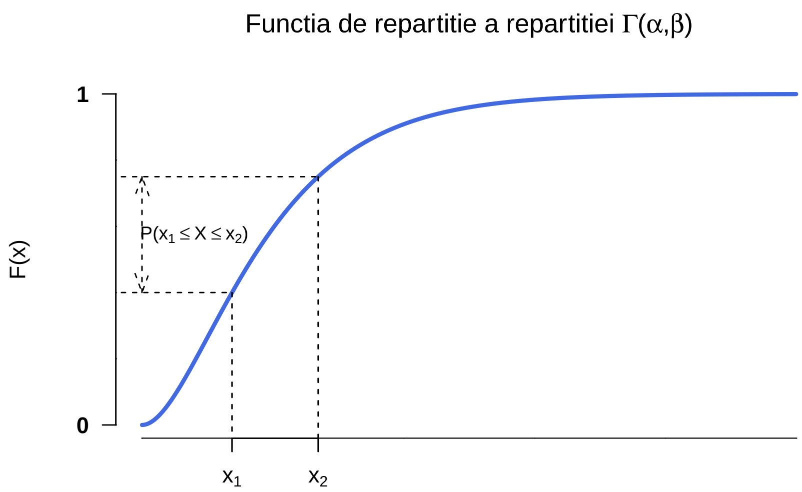
Arătați că funcția $\Gamma(\alpha)$ verifică[4]:

1) $\Gamma(1) = 1$
2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \forall\alpha > 0$
3) $\Gamma(\alpha) = \beta^{\alpha}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\,dx, \quad \forall\alpha, \beta > 0$
4) $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, \cdots$
5) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ este dată de

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x} t^{\alpha-1}e^{-\beta t}\,dt$$

și nu are o formulă explicită de calcul.



Observăm că repartiția $\Gamma(1, \lambda)$ coincide cu repartiția $\mathcal{E}(\lambda)$.

Media și varianța variabilei aleatoare X repartizate Gama de parametrii $\Gamma(\alpha, \beta)$ sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Arătați că media și varianța unei variabile aleatoare repartizate Gama de parametrii α și β sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

În R putem să

- generăm observații independente din repartiția $\Gamma(\alpha, \beta)$ (e.g. $\alpha = 2$, $\beta = 2$)

```
rgamma(15, shape = 2, rate = 2)
 [1] 0.6207897 1.6546379 0.4210210 0.8476985 0.2928765 0.6798413 1.1393160
 [8] 1.0763898 1.4411221 0.9500644 0.7387296 0.4159926 0.8942659 0.8366199
[15] 0.9733579
```

- calculăm densitatea unei variabile aleatoare repartizate $\Gamma(\alpha, \beta)$ în diferite puncte

```
dgamma(seq(0, 5, length.out = 20), shape = 1, rate = 3)
 [1] 3.000000e+00 1.362251e+00 6.185761e-01 2.808853e-01 1.275455e-01
 [6] 5.791632e-02 2.629886e-02 1.194188e-02 5.422615e-03 2.462321e-03
[11] 1.118100e-03 5.077110e-04 2.305433e-04 1.046860e-04 4.753619e-05
[16] 2.158541e-05 9.801583e-06 4.450739e-06 2.021008e-06 9.177070e-07
```

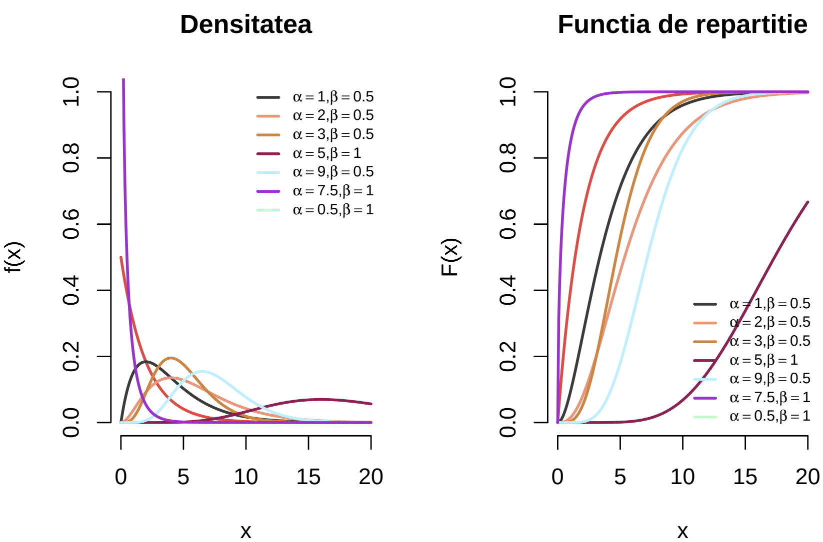
- calculăm funcția de repartiție a unei variabile repartizate $\Gamma(\alpha, \beta)$ pentru diferite valori

```
pgamma(seq(0, 5, length.out = 15), shape = 1, rate = 3)
 [1] 0.0000000 0.6574811 0.8826808 0.9598160 0.9862362 0.9952856 0.9983852
 [8] 0.9994469 0.9998106 0.9999351 0.9999778 0.9999924 0.9999974 0.9999991
[15] 0.9999997
```

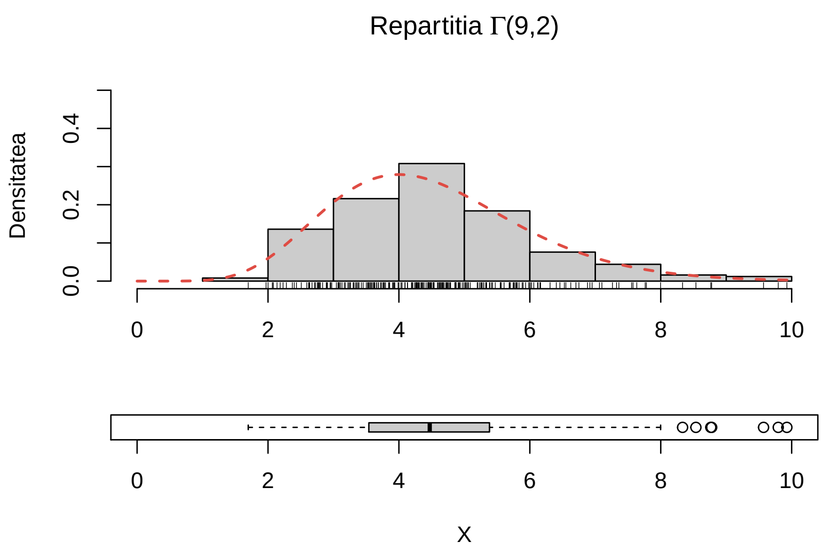
- calculăm cuantilele de ordin $p \in (0, 1)$

```
qgamma(c(0.01, 0.025, 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.975, 0.99), shape = 1, rate = 3)
[1] 0.003350112 0.008439269 0.017097765 0.095894024 0.231049060 0.462098120
[7] 0.998577425 1.229626485 1.535056729
```

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $\Gamma(\alpha, \beta)$. Pentru fiecare pereche de parametrii (α, β) din mulțimea $\{(1, 0.5), (2, 0.5), (3, 0.5), (5, 1), (9, 0.5), (7.5, 1), (0.5, 1)\}$ trasați pe același grafic densitățile repartițiilor Gama cu parametrii (α, β). Adăugați legendele corespunzătoare. Aceeași cerință pentru funcțiile de repartiție.



Generați 250 de observații din repartiția $\Gamma(9, 2)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).



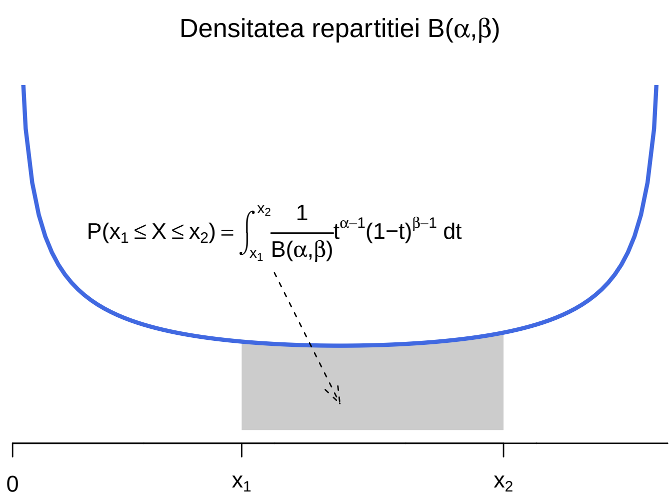
7 Repartiția Beta

Spunem că o variabilă aleatoare X este repartizată *Beta* de parametrii (α, β), cu $\alpha, \beta > 0$, și se notează cu $X \sim B(\alpha, \beta)$, dacă densitatea ei are forma

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

unde $B(\alpha, \beta)$ este funcția (Beta, numită și integrală Euler de primul tip) definită prin

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx, \quad \forall \alpha, \beta > 0.$$



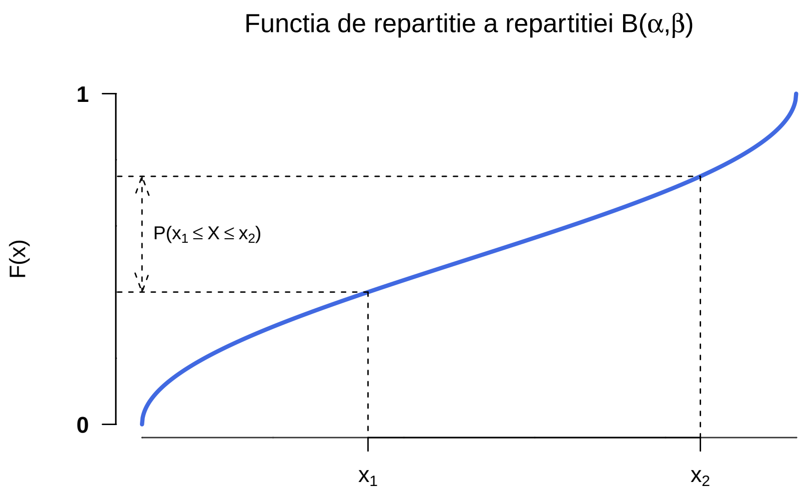
Arătați că funcția Beta $B(\alpha,\beta)$ verifică următoarele proprietăți:

1) $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
2) $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$
3) $B(\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta+1) + B(\alpha+1,\beta)$
4) $B(\alpha+1,\beta) = B(\alpha,\beta)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ și $B(\alpha,\beta+1) = B(\alpha,\beta)\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare $X \sim B(\alpha,\beta)$ este dată de

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_{-\infty}^{x} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

și nu are o formulă explicită de calcul.



Observăm că repartiția $B(1,1)$ coincide cu repartiția $\mathcal{U}([0,1])$.

Media și varianța variabilei aleatoare X repartizate Gamma de parametrii $B(\alpha,\beta)$ sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Observăm că $Var(X) \leq \mathbb{E}[X](1-\mathbb{E}[X])$.

Arătați că media și varianța unei variabile aleatoare repartizate Beta de parametrii α și β sunt egale cu

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

În R putem să

- generăm observații independente din repartiția $B(\alpha,\beta)$ (e.g. $\alpha = 2.5$, $\beta = 1$)

```r
rbeta(15, shape1 = 2.5, shape2 = 1)
 [1] 0.7945436 0.7609136 0.9265073 0.9309420 0.5621874 0.3664261 0.9694945
 [8] 0.5804873 0.9504669 0.9115169 0.8457509 0.6717780 0.7213322 0.9738473
[15] 0.9791769
```

- calculăm densitatea unei variabile aleatoare repartizate $B(\alpha, \beta)$ în diferite puncte

```r
dbeta(seq(0, 1, length.out = 20), shape1 = 1, shape2 = 3)
 [1] 3.000000000 2.692520776 2.401662050 2.127423823 1.869806094 1.628808864
 [7] 1.404432133 1.196675900 1.005540166 0.831024931 0.673130194 0.531855956
[13] 0.407202216 0.299168975 0.207756233 0.132963989 0.074792244 0.033240997
[19] 0.008310249 0.000000000
```

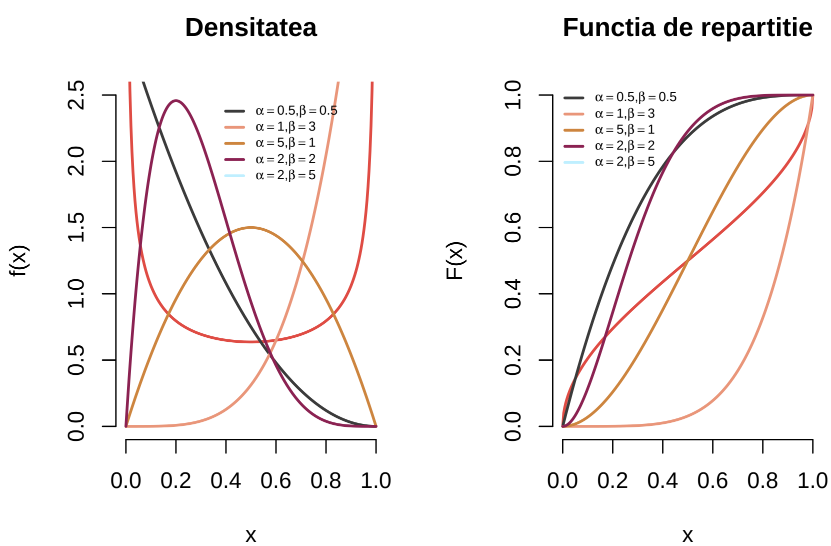
- calculăm funcția de repartiție a unei variabile repartizate $B(\alpha, \beta)$ pentru diferite valori

```r
pbeta(seq(0, 1, length.out = 15), shape1 = 1, shape2 = 3)
 [1] 0.0000000 0.1993440 0.3702624 0.5149417 0.6355685 0.7343294 0.8134111
 [8] 0.8750000 0.9212828 0.9544461 0.9766764 0.9901603 0.9970845 0.9996356
[15] 1.0000000
```

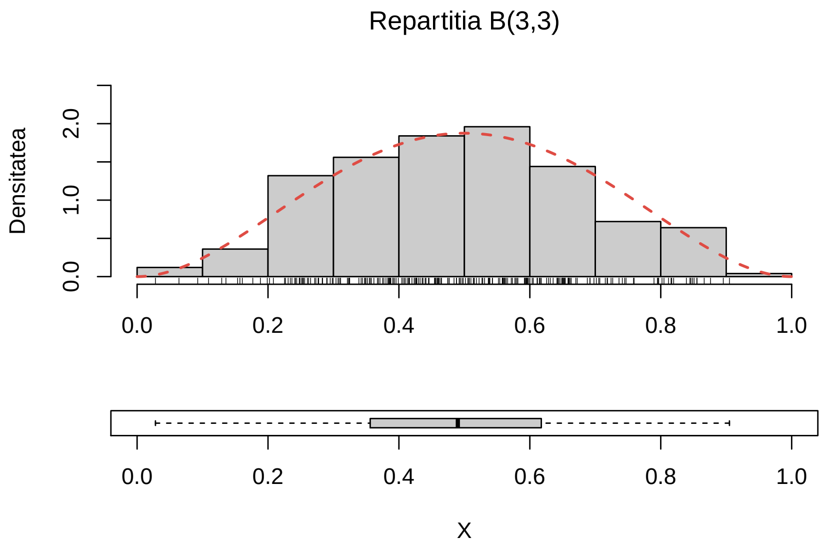
- calculăm cuantilele de ordin $p \in (0, 1)$

```r
qbeta(c(0.01, 0.025, 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.95, 0.975, 0.99), shape1 = 1, shape2 = 3)
[1] 0.003344507 0.008403759 0.016952428 0.091439704 0.206299474 0.370039475
[7] 0.631596850 0.707598226 0.784556531
```

Fie X o variabilă aleatoare repartizată $B(\alpha, \beta)$. Pentru fiecare pereche de parametrii (α, β) din mulțimea $\{(0.5, 0.5), (1, 3), (5, 1), (2, 2), (2, 5)\}$ trasați pe același grafic densitățile repartițiilor Beta cu parametrii (α, β). Adăugați legendele corespunzătoare. Aceeași cerință pentru funcțiile de repartiție.



Generați 250 de observații din repartiția $B(3, 3)$, trasați histograma acestora și suprapuneți densitatea repartiției date (vezi figura de mai jos).


Repartitia B(3,3)
Densitatea
0.0
1.0
2.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
X