Laborator 1

Puncte:

1 - oficiu
1 - prezență
4 - lucrare
2 - teme
2 - răspunsuri

---

10 puncte

Notații:

Ω - spațiu al probelor = o mulțime finită sau numărabilă de cazuri (rezultate) $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

$P(\omega)$ - probabilitatea cazului ω

E - un eveniment = o submulțime a lui Ω

$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$ - probabilitatea evenimentului E.

① Fie A, B și C trei evenimente. Exprimați în funcție de A, B, C și de operațiile cu mulțimi următoarele evenimente:

a) A singur se realizează: $A \cap B^c \cap C^c$

b) A și C se realizează dar nu și B: $A \cap B^c \cap C$

c) cele trei evenimente se produc: $A \cap B \cap C$

d) cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce: $A \cup B \cup C$

e) cel puțin două din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

f) cel mult un eveniment se produce: $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup$
$\cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce: $A^c \cap B^c \cap C^c$

h) exact două evenimente din cele trei se produc $(A^c \cap B \cap C) \cup$
$(A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$

② Să considerăm un pachet cu 52 de cărți de joc.

a) Determinați probabilitatea evenimentului A = "extragerea unui as"

R

Într-un pachet sunt 4 ași, deci $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

b) Determinați probabilitatea evenimentului B = "extragerea unui as de inimă roșie sau a unui zece de inimă roșie" sau a unui valet de inimă roșie".

R

52 cărți - 1 as inimă roșie
- 1 zece de inimă roșie
- 1 valet de inimă roșie

B_1 - ev. extragerii unui ~~valet~~ as de inimă roșie

B_2 - ev. extragerii unui zece de inimă roșie

B_3 - ev. extragerii unui valet de inimă roșie

Definim $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \overset{\text{ev. indep.}}{=} P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{3}{52}$$

③ Să presupunem că aruncăm un zar. Notăm cu A evenimentul "rezultatul este un număr par" şi B evenimentul "rezultatul este un număr impar". Determinaţi probabilitatea celor două evenimente:

R

Mulţimea tuturor posibilităţilor $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega_A=\{2,4,6\}$, $\Omega_B=\{1,3,5\}$

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

④ Se aruncă 2 zaruri. Să se determine probabilitatea:

a) Suma celor două zaruri este 6

R

$\Omega=\{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}$, $|\Omega|=36$

$A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ - favorabile

$P(A)=\frac{5}{36}$

b) Ambele zaruri au acelaşi număr

$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

⑤ Dintr-un pachet de 36 de cărţi se extrag 3 la întâmplare. Care este probabilitatea ca cel puţin o carte să fie as?

R

$C_{36}^3=7140$ - numărul cazurilor posibile

$\overbrace{C_4^1\cdot C_{32}^2}^{1\text{ as}}+\overbrace{C_4^2\cdot C_{32}^1}^{2\text{ aşi}}+\overbrace{C_4^3\cdot C_{32}^0}^{3\text{ aşi}}=2180$ $\quad P=\frac{2180}{7140}$

(6) 5 bile roșii, 5 verzi, 5 galbene. Se iau 2 fără întoarcere

$P(\text{aceeași culoare}) = 3 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$P(\text{culori diferite}) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

$= 3 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

(7) Într-o cameră sunt 8 persoane: 4 femei și 4 bărbați. 2 persoane ies din cameră. Care este probabilitatea ca ambele să fie femei?

$P(\text{prima persoană să fie femeie}) = \frac{1}{2}$.

$P(\text{a doua persoană să fie femeie} \mid \text{prima persoană este femeie}) = \frac{3}{7}$.

$P(\text{ambele persoane să fie femei}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$.

(8) O urnă conține 7 bile roșii și 5 galbene. Se iau 2 bile fără întoarcere.

a) $P(\text{a doua să fie roșie} \mid \text{prima a fost roșie}) = \frac{6}{11}$

b) $P(\text{a doua să fie roșie} / \text{prima nu a fost roșie}) = \frac{7}{11}$.

1-1

(9) Într-un sertar se află șosete roșii și negre. Atunci când două șosete sunt scoase la întâmplare, probabilitatea ca ambele să fie de culoare roșie este $\frac{1}{2}$.

a) Care este numărul minim de șosete din sertar astfel ca proprietatea din ipoteză să fie îndeplinită?

b) Care este numărul minim de șosete din sertar dacă numărul de șosete negre este par?

R

Presupunem că în sertar se află 5 șosete roșii și 2 negre.

P(prima șosetă extrasă să fie roșie) $= \frac{5}{7}$

P(a doua șosetă să fie roșie / prima este roșie) $= \frac{4}{6}$

Deci, probabilitatea ca cele 2 șosete să fie roșii este: $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{21}$.

În general, să presupunem că în sertar sunt r șosete roșii și b negre.

Atunci probabilitatea ca prima șosetă extrasă să fie roșie este $\frac{r}{r+b}$, iar dacă prima șosetă este roșie atunci probabilitatea ca a doua să fie roșie este $\frac{r-1}{r+b-1}$

Din enunț avem $\frac{r}{r+b} \cdot \frac{r-1}{r+b-1} = \frac{1}{2}$.

Trebuie să determinăm numărul minim care verifică această expresie

Pentru $b>0$ $\frac{r}{b+r} > \frac{r-1}{r+b-1}$

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 > \frac{1}{2} > \left(\frac{r-1}{r+b-1}\right)^2$$

$$\frac{r}{r+b} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{r-1}{r+b-1}.$$

$$(\sqrt{2}+1)\,b+1 > r > (\sqrt{2}+1)\,b$$

a) Pentru $b=1$ avem $2.414 < r < 3.414$

Deci $r=3$, $b=1$ găsim $P(2\text{ şosete roşii}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

b) Pentru cazul în care numărul de şosete negre, b, este par

avem	b	int r	r	P(două şosete)
	2	4.8 – 5.8	5	$\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6} \neq \frac{1}{2}$
	4	9.7 – 10.7	10	$\frac{10}{14}\cdot\frac{9}{13} \neq \frac{1}{2}$
	6	14.6 – 15.5	15	$\frac{15}{21}\cdot\frac{14}{20} = \frac{1}{2}$.

(10) Trei arcaşi trag asupra unei ţinte. Primul nimereşte această ţintă cu probabilitatea de $\frac{2}{3}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{4}$ iar al treilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$. Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de trei ori? Dar probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de două ori? Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă cel puţin o dată?

R

A_i = ev nimeririi ţintei de către arcaşul $i=\overline{1,3}$.

$P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(A_2) = \frac{3}{4}$, $P(A_3) = \frac{4}{5}$

I $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

II $P\left[(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)\right] =$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3^c) + P(A_1)\, P(A_2^c)\, P(A_3) + P(A_1^c)\, P(A_2)\, P(A_3) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{13}{30}$$

III Calculăm probabilitatea evenimentului contrar lui $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, adică $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c)\, P(A_3^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{60}.$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \frac{1}{60}.$$