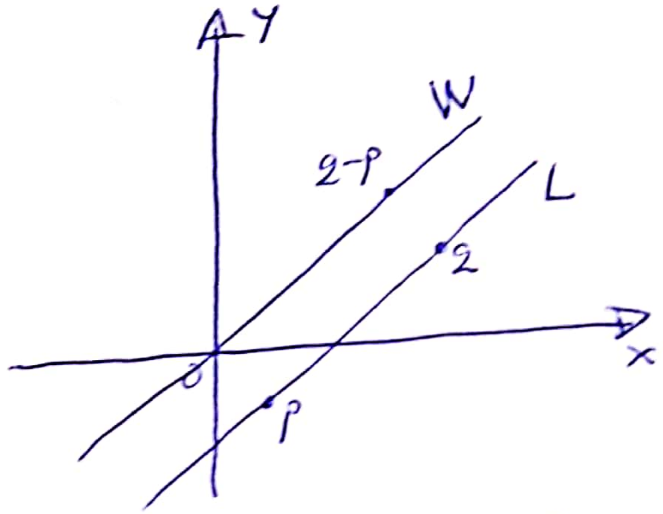
Geometrie analitică euclidiană

Considerăm dreptele paralele L și W incluse în planul $\mathbb{R}^2$.



$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{2}x\}$

$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{2}x - 1\}$

$W \ni 0 \Rightarrow W$ subspațiu vectorial al planului $\mathbb{R}^2$.

$L \not\ni 0 \rightarrow L$ nu este subsp. vectorial

Dar L este o dreaptă, fiind descrisă de o ec. liniară.

L este, de fapt, o varietate liniară.

Def: S.n. varietate liniară în $\mathbb{R}^n$ o submulțime $L = p + W = \{p + w / w \in W\}$, unde $p \in \mathbb{R}^n$ și $\underset{\text{subsp. vectorial}}{W \subset \mathbb{R}^n}$

Evident că definiția se poate da pentru orice sp. vectorial V, $p \in V$ și orice $\underset{\text{subsp. vectorial}}{W \subset V}$. Vom considera însă numai în $\mathbb{R}^n$.

Obs. O varietate liniară L este subsp. vectorial $\Leftrightarrow 0_{\mathbb{R}^n} \in L$.

$\boxed{P}$ Dacă $p+W=p'+W'$, cu W, W' subsp. vectoriale în $\mathbb{R}^n$, atunci $W=W'$.

Deci, în reprezentarea unei varietăți liniare nevide sub forma $p+W$, subsp. vectorial W este unic determinat.

În reprezentarea anterioară, $L=(0,-1)+W$, $p=(0,-1)\in\mathbb{R}^2$.

Def: Pentru orice $L\subset\mathbb{R}^n$ varietate liniară, există un unic subsp. vectorial $W\subset\mathbb{R}^n$, numit subsp. director al lui L, a.î.

$(\forall)\ p_0\in L,\ L=p_0+W$.

Def: Dimensiunea unei varietăți liniare este dimensiunea spațiului său director.

$$\dim_{\mathbb{R}} L \overset{def}{=} \dim_{\mathbb{R}} W.$$

Obs: • O varietate liniară de dimensiune 1 s.n. dreaptă.

• O varietate liniară de dimensiune 2 s.n. plan.

• O varietate liniară de dimensiune $n-1$, în $\mathbb{R}^n$, s.n. hiperplan.

• Dacă $p\in\mathbb{R}^n$, atunci $L=\{p\}$ are ca sp. director $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, și deci $\dim\{p\}=0$.

$\boxed{P}$ Dat un pct. $p\in\mathbb{R}^n$ și W un subsp. vectorial al lui $\mathbb{R}^n$, există o unică varietate liniară care îl conține pe p și are ca spațiu director pe W.

Exemplu:

Fie $L = \{ v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \}$

Arătăm că L este varietate liniară.

$L = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \}$

Deci L este mulțimea soluțiilor sist. $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\Delta_p = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

x_1, x_2 nec. principale

$x_3 \overset{not}{=} t, t \in \mathbb{R}$ nec. secundară

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - t \\ 2x_1 - x_2 = 3 + t \end{cases} \longrightarrow 3x_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = 1 - t - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} - t \\ x_3 = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$x_3 = t, t \in \mathbb{R}$

$L = \{ (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} - t, t) / t \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0) + t(0, -1, 1) / t \in \mathbb{R} \}$

$L = p + W$, unde $p = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ și

$W = \{ t(0, -1, 1) / t \in \mathbb{R} \} = \langle (0, -1, 1) \rangle$

$\hookrightarrow$ subsp. vect. generat de $(0, -1, 1)$

$\dim W = 1 \Rightarrow \dim L = 1$ (dreaptă)

Obs: 1) Ecuațiile prin care am definit L s.n. implicite iar ecuațiile obținute s.n. parametrice (depind de parametrul $t \in \mathbb{R}$)

2) O varietate liniară de dimensiune 1 (dreaptă) are un parametru, o varietate liniară de dimensiune 2 (plan) are 2 parametri iar un hiperplan din $\mathbb{R}^n$ are $n-1$ parametri.

Ecuații ale dreptei

O dreaptă este o varietate liniară de dimensiune 1, adică cu subsp. vectorial director 1-dimensional:

$<v>, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Obs: Orice alt vector λv, cu $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ generează $<v>$ (i.e. $<v> = <\lambda v>$).

Vom descrie ecuațiile parametrice și implicite ale unei dr. $L \subset \mathbb{R}^n$ care trece prin p și are $<v> = \{tv / t \in \mathbb{R}\}$ ca subsp. director, cu $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ și $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$$L = p + <v>$$

$(\forall) x \in L, x = p + tv, t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \\ \vdots \\ x_n = p_n + tv_n \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{ec. parametrice ale dr. } L$$

Ecuațiile implicite ale dr. L se determină eliminând param. t din ec. anterioare.

Obținem: $L: \dfrac{x_1 - p_1}{v_1} = \dfrac{x_2 - p_2}{v_2} = \ldots = \dfrac{x_n - p_n}{v_n} (= t)$

Obs: Dacă pentru un indice i, $v_i = 0$, atunci ec. coresp. indicelui i este: $x_i - p_i = 0$.

Ec. dreptei $L(p,q)$ care trece prin $p=(p_1,\dots,p_n)$ și $q=(q_1,\dots,q_n)$, 2 pct. distincte din $\mathbb{R}^n$. $(p\neq q)$

Obs. că: $v=q-p \rightarrow$ vector director al dreptei $L(p,q)$.

$L(p,q)=p+\langle q-p\rangle$

$(\forall)\, x\in L,\ x=p+t(q-p)=(1-t)p+tq,\ t\in\mathbb{R}$.

O combinație liniară $\alpha p+\beta q$, cu $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha+\beta=1$, s.n. combinație convexă.

Avem: $L(p,q)=\{(1-t)p+tq \,/\, t\in\mathbb{R}\}$ (mulțimea comb. convexe dintre p și q)

• Dacă $t\in[0,1]$, atunci comb. convexă $(1-t)p+tq$ reprezintă segmentul dintre p și q de pe dr. $L(p,q)$.

$[p,q]\overset{not}{=}\{(1-t)p+tq \,/\, t\in[0,1]\}$

Ec. parametrice ale dr. $L(p,q)$ sunt:

$$\begin{cases} x_1=p_1+t(q_1-p_1)=(1-t)p_1+tq_1 \\ x_2=p_2+t(q_2-p_2)=(1-t)p_2+tq_2, \quad t\in\mathbb{R} \\ \vdots \\ x_n=p_n+t(q_n-p_n)=(1-t)p_n+tq_n \end{cases}$$

Ec. implicite se obțin eliminând parametrul t:

$$\frac{x_1-p_1}{q_1-p_1}=\dots=\frac{x_n-p_n}{q_n-p_n}$$

Obs: Dacă pentru un indice i, $q_i-p_i=0$, atunci ec. coresp. indicelui i este $x_i-p_i=0$.

Ecuații ale planului

O varietate liniară de dimensiune 2 s.n. plan.

Fie $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, 2 vectori liniar independenți

Planul care trece prin $p \in \mathbb{R}^n$ și are spațiul director $W = \langle v, w \rangle$ este $L = p + W$.

$(\forall)\, x \in L,\ x = p + sv + tw,\ s, t \in \mathbb{R}$

$$L = \{p + sv + tw \,/\, s, t \in \mathbb{R}\}$$

Ec. parametrice ale planului:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + sv_1 + tw_1 \\ x_2 = p_2 + sv_2 + tw_2 \\ \vdots \\ x_n = p_n + sv_n + tw_n \end{cases},\ t, s \in \mathbb{R}$$

Ec. planului $L(p, q, r)$ determinat de 3 pct. necoliniare $p, q, r \in \mathbb{R}^n$:

Deoarece p, q, r sunt 3 pct. necoliniare $\Rightarrow \{q-p, r-p\} \subset \mathbb{R}^n$ sist. lin. indep.

$\Rightarrow$ generează un subsp. vect. de dimensiune 2.

$$L(p,q,r) = p + \langle q-p, r-p \rangle =$$
$$= \{p + s(q-p) + t(r-p) \,/\, t, s \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(1-s-t)p + sq + tr \,/\, t, s \in \mathbb{R}\}$$

Observăm că avem din nou o combinație liniară convexă.

Ec. parametrice: $\begin{cases} x_1 = (1-s-t)p_1 + sq_1 + tr_1 \\ x_2 = (1-s-t)p_2 + sq_2 + tr_2 \\ \vdots \\ x_n = (1-s-t)p_n + sq_n + tr_n \end{cases},\ s, t \in \mathbb{R}$

Ecuații ale hiperplanului

O varietate liniară de dimensiune $n-1$ în $\mathbb{R}^n$ s.n. hiperplan.

Considerăm: $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, $n-1$ vectori liniar indep. în $\mathbb{R}^n$.

Hiperplanul care trece prin $p \in \mathbb{R}^n$ și are spațiul director

$W = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$, este $L = p + W$

$\Rightarrow L = \{ p + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{n-1} v_{n-1} \,/\, t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R} \}$

Considerăm: $v_j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj}) \in \mathbb{R}^n, (\forall)\, j = \overline{1, n-1}$

$x \in L \Leftrightarrow x = p + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{n-1} v_{n-1}$, $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$

Ec. parametrice:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_1 v_{11} + t_2 v_{12} + \dots + t_{n-1} v_{1\,n-1} \\ x_2 = p_2 + t_1 v_{21} + t_2 v_{22} + \dots + t_{n-1} v_{2\,n-1} \\ \vdots \\ x_n = p_n + t_1 v_{n1} + t_2 v_{n2} + \dots + t_{n-1} v_{n\,n-1} \end{cases}, \quad t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Determinăm ec. implicită pornind de la sistemul ec. parametrice.

Pentru $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ găsim $x_1, \dots, x_n$.

Date $x_1, \dots, x_n$ coordonatele unui pct. din hiperplan, determinăm parametrii $t_1, \dots, t_{n-1}$, care îl definesc.

Deci, gândind sistemul în fct. de variabilele $t_1, \dots, t_{n-1}$, acesta este compatibil $\Leftrightarrow$ matricea formată din vectorii ~~$t_1, \dots, t_{n-1}$~~ $v_1, \dots, v_{n-1}$ are același rang cu matricea extinsă.

Vectorii $v_1, \dots, v_{n-1}$ sunt liniar independenți, deci rangul matricii din $M_{n, n-1}(\mathbb{R})$ formate cu acești vectori are rangul $n-1$.

Deci matricea extinsă are rangul $n-1$, adică:

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1\,n-1} \\ x_2 - p_2 & v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - p_n & v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{n\,n-1} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{ec. implicită a hiperplanului.}$$