C11

Cuadrice în sp. euclidian $\mathbb{R}^3$

! (pe ec. generală)

- clasificarea metrică $(n=3)$,

Def: S.n. cuadrică L_g al pct. din sp. eucl. $\mathbb{R}^3$ ale căror coord (x,y,z) într-un reper (cartezian ortonormat) satisfac o ec. de forma:

Fie cuadrica!

$$\Gamma : f(x,y,z)=0, \text{ unde}$$

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+$$

$$+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}$$

cu $a=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, $\operatorname{rg} a \geq 1$

$A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,4}}$, $a_{ij}=a_{ji}$, $(\forall) i,j=\overline{1,4}$

$$\begin{cases} \delta = \det a \\ \Delta = \det A \end{cases}$$

Semin... obl... Semin...

Ex...

5 sub...

1 su...

Sem...

Scanned with CamScanner

Avem:

I $\delta \neq 0 \Rightarrow$ cuadrica Γ are centru unic $P_0(x_0, y_0, z_0)$ soluție unică a sist.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Efectuăm translația t
$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \qquad \frac{\Delta}{\delta}$$

și obținem cuadrica $t(\Gamma): a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + \underbrace{f(x_0,y_0,z_0)}_{=0}$

<u>Obs</u>: 1) Centrul cuadricei $t(\Gamma)$ devine originea reperului.

2) $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\Delta}{\delta}$

Alegem 3 axe mutual ortogonale pt. $t(\Gamma)$, ~~corespunzătoare~~ Direcțiile lor sunt date de 3 vect. proprii ortog. ai lui a corespunzătoare valorile proprii $\cancel{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$ ale matricei a, deci soluțiile reale ale ec.

Det. valorile

caract: ($P(s) = 0$) $\det(a - s I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow s^3 - I s^2 + J s - \delta = 0$ (ec. seculară)

unde $I = \text{tr}\, a = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$J = A_{11} + A_{22} + A_{33}$, A_{ii} – complementul algebric al elem. a_{ii} în a.

Fie s_1, s_2, s_3 cele 3 răd. reale ale ec. noastre $\Rightarrow \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = I \; (= \text{tr}\, a) \\ s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = J \\ s_1 s_2 s_3 = \delta \; (= \det a) \end{cases}$

Fie $f_i = (l_i, m_i, n_i)$, $i = \overline{1,3}$ → 3 vectori proprii unitari, mutual ortog. coresp. val. proprii s_1, s_2, s_3.

<u>Obs</u>: ! Cele 3 valori proprii nu sunt neapărat distincte.

Dacă, de exemplu, $s_1 = s_2$, subsp. propriu coresp. are dimensiunea 2. Se alege o bază arbitrară a sa și apoi se ortonormalizează cu P.O.G-S.

Efectuăm transf. ortog. (rotație) $r \begin{cases} x'' = l_1 x' + m_1 y' + n_1 z' \\ y'' = l_2 x' + m_2 y' + n_2 z' \\ z'' = l_3 x' + m_3 y' + n_3 z' \end{cases}$

$R \quad {}^tR \cdot R = I_3 \Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = l_1 x'' + l_2 y'' + l_3 z'' \\ y' = m_1 x'' + m_2 y'' + m_3 z'' \\ z' = n_1 x'' + n_2 y'' + n_3 z'' \end{cases}$$

Obținem: $(rot)(\Gamma): \ s_1 x''^2 + s_2 y''^2 + s_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$

Obs: Prin această izometrie axele cuadricei sunt aplicate peste axele reperului.

i.e. $\begin{cases} (l_1, m_1, n_1) \to (1,0,0) \\ (l_2, m_2, n_2) \to (0,1,0) \\ (l_3, m_3, n_3) \to (0,0,1) \end{cases}$

! $(rot)(\Gamma)$ poate reprezenta: $\begin{cases} 1) \text{ Dacă } \Delta = 0 \to \text{pct. dublu sau CON (cuadrică deg.)} \\ 2) \text{ Dacă } \Delta \neq 0 \to \text{elipsoid sau hiperboloid cu o pânză sau două (cuadrică nedeg.)} \end{cases}$

Deci: $\boxed{\delta \neq 0}$

II $\boxed{\delta = 0}$ (cuadrica nu are centru unic)

$rg\, a \geq 1$

$\det a = \delta = 0 = s_1 s_2 s_3$

$\Rightarrow$ una sau două (în niciun caz toate 3) răd. ale ec. seculare sunt nule.

Pp. $s_1 = 0$

În acest caz, aplicăm întâi izometria r (rotație) și obținem:

$r(\Gamma): \ s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + 2a'_{14} x' + 2a'_{24} y' + 2a'_{34} z' + a_{44} = 0$

Dar $\Delta = \det A$ invariant metric (este același ziț. Γ ziț. $r(\Gamma)$) $\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & s_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & s_3 & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a_{44} \end{vmatrix} =$

$= -(a'_{14})^2 s_2 s_3$

Avem următoarele cazuri posibile (distincte):

1) Γ e nedeg.: $\Delta \neq 0$ ($a'_{14} \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$)

2) Γ e deg: $\Delta = 0$, i.e. $\begin{cases} a) \ s_2 \neq 0, s_3 \neq 0 \text{ și } a'_{14} = 0 \\ b) \ s_2 = 0, s_3 \neq 0 \text{ și } a'_{14} \neq 0 \\ c) \ s_2 = 0, s_3 \neq 0 \text{ și } a'_{14} = 0 \end{cases}$ + 2 IDEM

1) Γ nedeg.

$$S_2\left(y'+\frac{a'_{24}}{S_2}\right)^2+S_3\left(z'+\frac{a'_{34}}{S_3}\right)^2+2a'_{14}\left(x'+\frac{a_{44}}{2a'_{14}}-\frac{a'^2_{24}}{2S_2a'_{14}}-\frac{a'^2_{34}}{2S_3a'_{14}}\right)=0$$

Efectuăm translația t
$$\begin{cases} x''=x'+\dfrac{a_{44}}{2a'_{14}}-\dfrac{a'^2_{24}}{2S_2a'_{14}}-\dfrac{a'^2_{34}}{2S_3a'_{14}} \\ y''=y'+\dfrac{a'_{24}}{S_2} \\ z''=z'+\dfrac{a'_{34}}{S_3} \end{cases}$$

Obținem: $(t\circ r)(\Gamma): S_2 y''^2+S_3z''^2+2a'_{14}x''=0$

$\longmapsto$ paraboloid eliptic sau hiperbolic.

2) (a) t
$$\begin{cases} x''=x' \\ y''=y'+\dfrac{a'_{24}}{S_2} \\ z''=z'+\dfrac{a'_{34}}{S_3} \end{cases}$$

$(t\circ r)(\Gamma): S_2y''^2+S_3z''^2+p=0$

$\longmapsto \phi$, un cilindru eliptic sau hiperbolic,
o dr. dublă sau 2 plane secante

2) (b) t
$$\begin{cases} x''=x'+\dfrac{a_{44}}{2a'_{14}} \\ y''=y' \\ z''=z'+\dfrac{a'_{34}}{S_3} \end{cases}$$

$(t\circ r)(\Gamma): S_3z''^2+2a'_{14}x''+2a'_{24}y''=0$

Aplicăm rotația r' de axă Oz:

$$r' \begin{cases} x'''=\dfrac{a'_{14}}{\sqrt{a'^2_{14}+a'^2_{24}}}x''+\dfrac{a'_{24}}{\sqrt{a'^2_{14}+a'^2_{24}}}y'' \\ y'''=\dfrac{a'_{24}}{\sqrt{}}x''+\dfrac{a'_{14}}{\sqrt{}}y'' \\ z'''=z'' \end{cases}$$

Obținem $(r'\circ t\circ r)(\Gamma): S_3z'''^2+2px'''=0$

$\longmapsto$ cilindru parabolic

Scanned with CamScanner

2) (c) Dacă $a'_{24} \neq 0$, efectuăm translația:

$$t \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \frac{a_{44}}{2a'_{24}} - \frac{a'^{2}_{34}}{2S_3 a'_{24}} \\ z'' = z' + \frac{a_{34}}{S_3} \end{cases}$$

Obținem: $(t \circ r)(\Gamma)$: $S_3 z''^2 + 2a'_{24} y'' = 0$

$\longmapsto$ cilindru parabolic

Dacă $a'_{24} = 0$, efectuăm translația:

$$t \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' + \frac{a'_{34}}{S_3} \end{cases}$$

Obținem $(t \circ r)(\Gamma)$: $S_3 z''^2 + p = 0$

$\longmapsto \emptyset$, un plan dublu, 2 plane $\parallel$ distincte

În concluzie, avem:

$\boxed{Th}$ Orice cuadrică din spațiul geometric poate fi adusă la o formă canonică prin schimbări izometrice de repere.

Clasificarea izometrică a cuadricelor:

Ec. canonică $(a, b, c \in \mathbb{R}^*_+)$	Denumirea cuadricei
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	elipsoid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	hiperboloid cu o pânză
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	hiperboloid cu 2 pânze
$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	paraboloid eliptic
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$	paraboloid hiperbolic
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 0$	pct. dublu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \longrightarrow \text{CON}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \longrightarrow \text{cilindru eliptic}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \longrightarrow \text{cilindru hiperb.}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \longrightarrow \emptyset$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 2y = 0 \longrightarrow \text{cilindru parabolic}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0 \longrightarrow \text{dr. dublă}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 0 \longrightarrow \text{pereche de pl. secante}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \longrightarrow \text{pereche de pl. } \parallel$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \longrightarrow \emptyset$$

$$x^2 = 0 \longrightarrow \text{plan dublu}$$

Cuadrice

Voi enumera cuadricele specificându-le ecuaţiile reduse.

Elipsoidul Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,\ a, b, c > 0$.

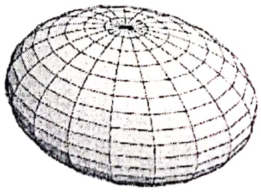

FIGURE 1. Elipsoid

Pentru $a = b = c = r > 0$, obţinem sfera de rază r, ce are ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Sfera este locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct dat. Atât elipsoidul cât şi sfera descrise prin ecuaţiile de mai sus au centrul $O(0, 0, 0)$. Elisoidul de centru (x_0, y_0, z_0) are ecuaţia $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} - 1 = 0$, şi similar sfera de centru (x_0, y_0, z_0) şi rază r are ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Intersecţia elipsoidului cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este o elipsă. Intersecţia sferei cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este un cerc. Sfera se intersectează cu orice plan ce trece prin origine într-un cerc mare. Mai mult, sfera este o suprafaţă de rotaţie.

Hiperboloidul cu o pânză

FIGURE 2. Hiperboloid cu o pânză

Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$, cu $a,b,c>0$.

Pentru $a=b$ este o suprafaţă care se poate obţine prin rotaţia unei drepte în jurul axei verticale. Prin orice punct al hiperboloidului trec două drepte distincte ce sunt conţinute în suprafaţă. O astfel de suprafaţă se numeşte *dublu riglată*.

Intersecţia cu un plan orizontal $z=\alpha$ este o elipsă, iar intersecţia cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt hiperbole. Să descriem intersecţia cu un plan orizontal. Aceasta este soluţia sistemului $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0\\ z=\gamma\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-(\frac{\gamma^2}{c^2}+1)=0$, ceea ce reprezintă ecuaţia unei elipse.

Hiperboloidul cu două pânze Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$, cu $a,b,c>0$.

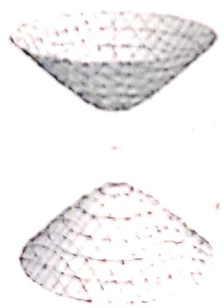

FIGURE 3. Hiperboloid cu o pânze

Intersecţia cu un plan orizontal $z=\gamma$ este: mulţimea vidă pentru $|\gamma|<c$, un punct pentru $|\gamma|=c$ şi o elipsă pentru $|\gamma|>c$.

Intersecţiile cu plane paralele cu atât cu Oxz cât şi cu Oyz sunt hiperbole. Punctele $V_1(0,0,c)$ şi $V_2(0,0,-c)$ se numesc *vârfurile hiprboloidului*.

Paraboloidul eliptic Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$, cu $a,b,>0$.

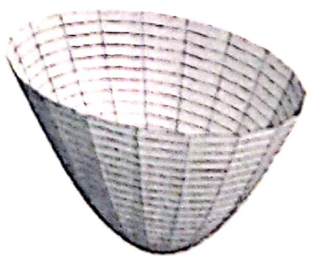

FIGURE 4. Paraboloid cliptic

Intersecţia acestei suprafeţe cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: o elipsă pentru $\gamma > 0$, un punct pentru $\gamma = 0$, şi mulţimea vidă pentru $z < 0$. Intersecţia cu orice plan paralel cu Oxz sau Oyz este o parabolă. Punctul $O(0,0,0)$ se numeşte vârful paraboloidului.

Paraboloidul hiperbolic sau şa Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

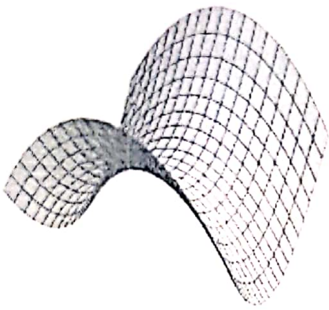

FIGURE 5. Paraboloid hiperbolic

Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu un plan $z = \gamma$, este o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$ şi o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$, $(z = 0, y = \pm\frac{b}{a}x)$. Intersecţia cu un plan paralel cu Oxz $(y = \beta)$ sau cu Oyz $(x = \alpha)$ este o parabolă. Originea $O(0,0,0)$ este vârful sau punctul şa al paraboloidului hiperbolic. Acoperişul gării din Predeal este o astfel de suprafaţă.

Prin orice punct al paraboloidului hiperbolic trec două drepte distincte conţinute în suprafaţă. Deci şi aceasta este o suprafaţă dublu riglată.

Conul Ecuaţia redusă a conului este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, cu $a, b, c > 0$.

FIGURE 6. Con

Intersecţia conului cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: punctul $O(0,0,0)$ pentru $\gamma = 0$ şi o elipsă pentru $\gamma \neq 0$. Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\beta = 0$ şi o hiperbolă pentru $\beta \neq 0$. La fel, intersecţia cu un plan $x = \gamma$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$ şi o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$.

Dacă $a \neq b$ conul se numeţe *eliptic* iar dacă $a = b$ avem un con *circular*. Punctul $O(0,0,0)$ se numeşte *vârful* conului.

Conul este asimptotic atât hiperboloidului cu o pânză cât şi celui cu două pânze. Hiperboloidul cu o pânză este exterior conului, iar hiperboloidul cu două pânze este interior conului.

Cilindru eliptic Ecuaţia redusă a cilindrului eliptic este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$. Intersecţia unui cilindru eliptic cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o elipsă.

Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ şi mulţimea vidă pentru $|\beta| > b$. Similar, intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\alpha| < a$, o dreaptă pentru $|\alpha| = a$ şi mulţimea vidă pentru $|\alpha| > a$.

FIGURE 7. Cilindru eliptic

Dacă $a = b = r$, suprafaţa este un cilindru circular cu ecuaţia $x^2 + y^2 = r^2$. Intersecţia unui cilindru circular cu un plan orizontal $z = \gamma$ este un cerc. Intersecţiile cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt la fel ca în cazul cilindrului eliptic.

Cilindru hiperbolic Ecuaţia redusă a cilindrului hiperbolic este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$.

FIGURE 8. Cilindru hiperbolic

În figură este reprezentat un cilindru hiperbolic de ecuaţie $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
Intersecţia acestuia cu un plan $z=\gamma$ este o hiperbolă. Intersecţia cilindrului hiperbolic cu un plan $y=\beta$ este mulţimea vida pentru $|\beta|<b$, o dreapta pentru $|\beta|=b$ şi reuniunea a două drepte paralele pentru $|\beta|>b$. iar intersecţia cu un plan $x=\alpha$ este o pereche de drepte paralele

Cilindru parabolic Ecuaţia redusă este $y^2=2px$ cu $p>0$

FIGURE 9. Cilindru parabolic

Intersecţia cu un plan orizontal $z=\gamma$ este o parabolă. Intersecţia cu un plan $y=\beta$ este dreapta de ecuaţie $x=\frac{\beta^2}{2p}$. iar intersecţia cu un plan $x=\alpha$ este mulţimea vida dacă $\alpha<0$. dreapta $y=0$ pentru $\alpha=0$. şi o reuniune de drepte $y=\pm\sqrt{2p\alpha}$ pentru $\alpha>0$.

Reuniune de plane secante Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

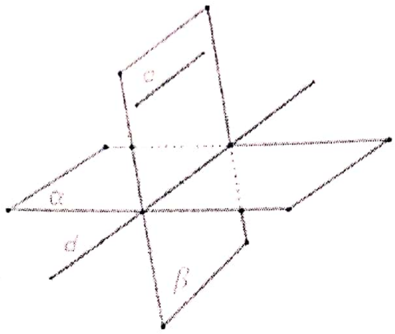

FIGURE 10. Plane secante

Reuniune de plane paralele Ecuaţia redusă este $x^2 - a^2 = 0$.

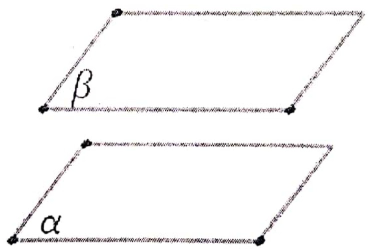

FIGURE 11. Plane paralele

Reuniune de plane confundate Ecuaţia redusă: $x^2 = 0$.

O dreaptă Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Fiind în $\mathbb{R}^3$, z fiind un parametru.

Un punct Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

Mulţimea vidă Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, $a, b, c > 0$.

ă prin care este dată o cuadrică este