Fluxuri maxime în rețele de transport

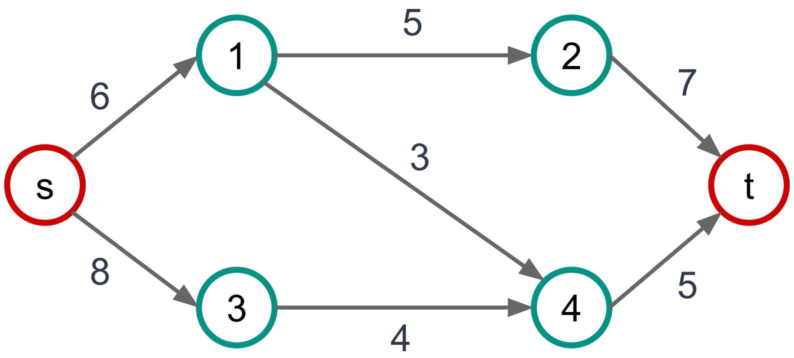
Fluxuri maxime în rețele de transport

Problemă

Avem o rețea în care

- arcele au limitări de capacitate
- nodurile = joncțiune

Care este cantitatea maximă care poate fi transmisă prin rețea, de la surse la destinații? (în unitatea de timp)



Aplicații

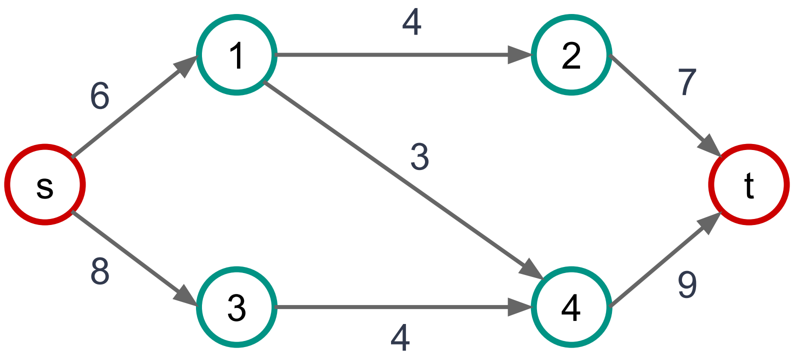
- **Rețea de comunicare**
  - Transferul de informații - limitat de lățimea de bandă

- **Rețele de transport / evacuare în caz de urgență**
  - Limitare - număr de mașini / persoane în unitatea de timp

- **Rețele de conducte**

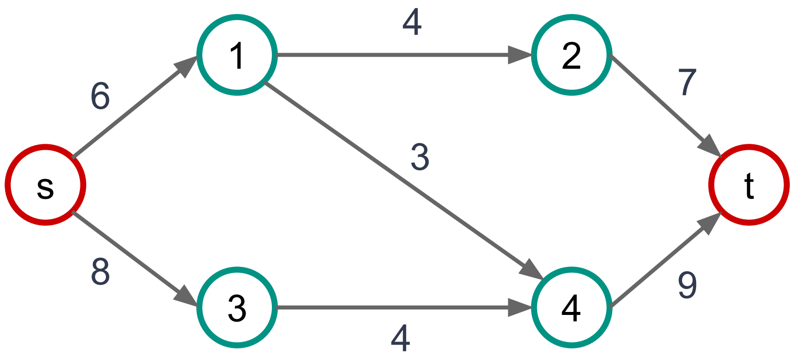
- **...**

Fluxuri în rețele de transport



Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinația t

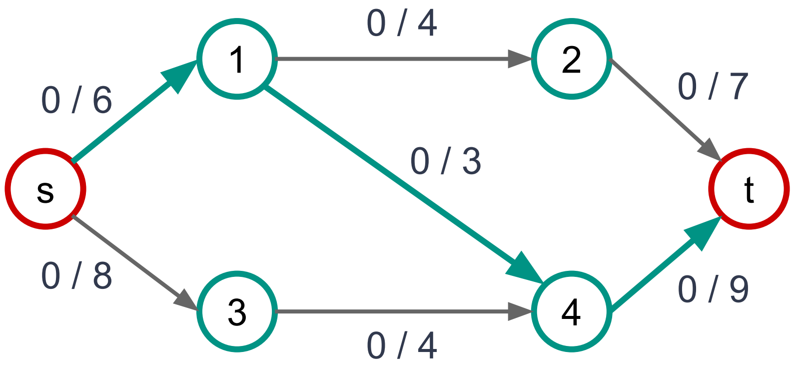
Fluxuri în rețele de transport



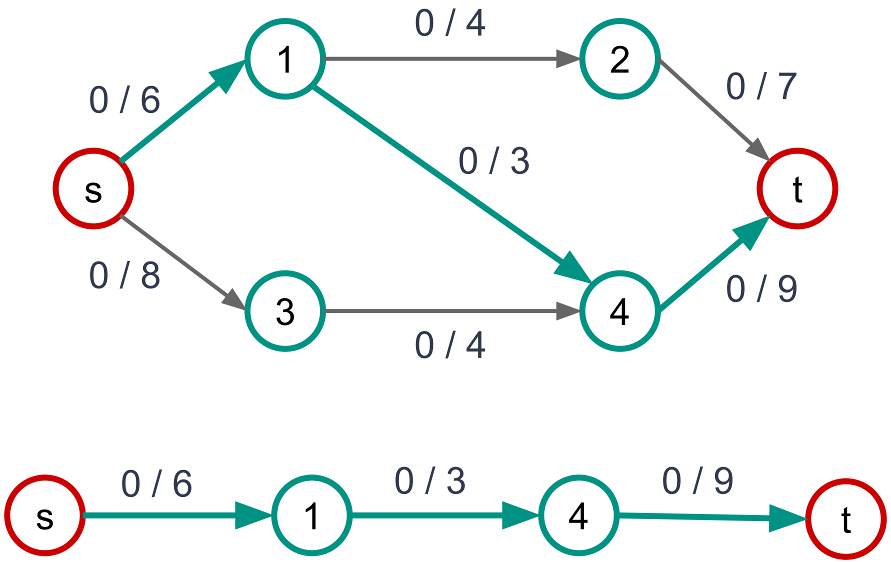
Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinația t

Determinăm drumuri de la s la t pe care mai putem trimite marfă

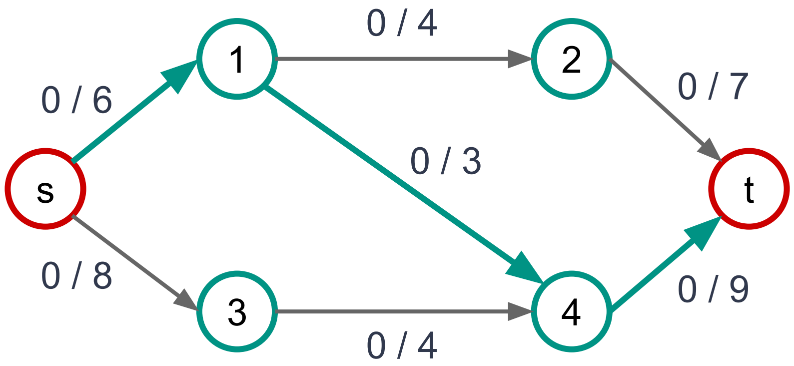
Fluxuri în rețele de transport

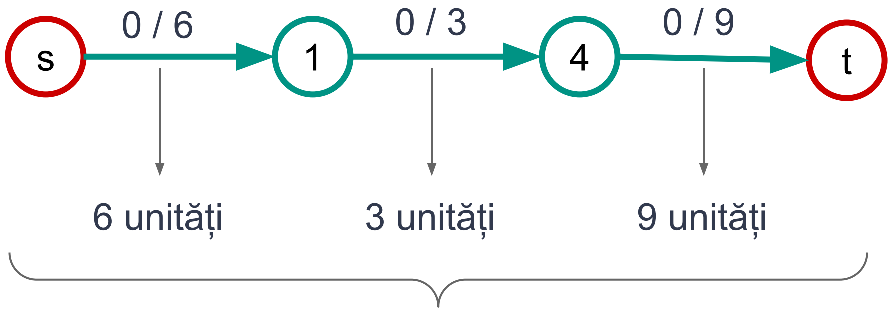


Fluxuri în rețele de transport



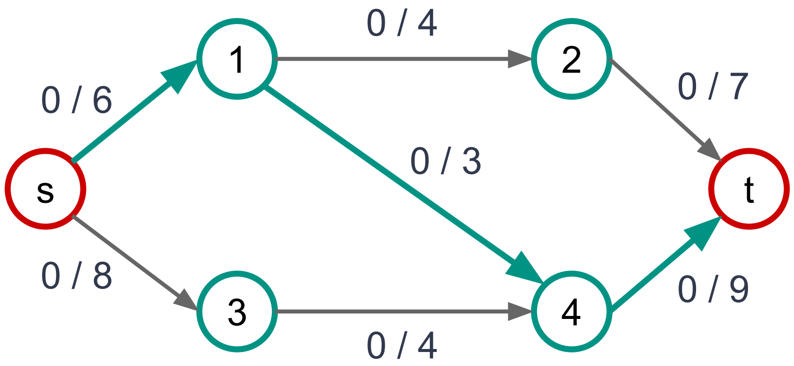
Fluxuri în rețele de transport





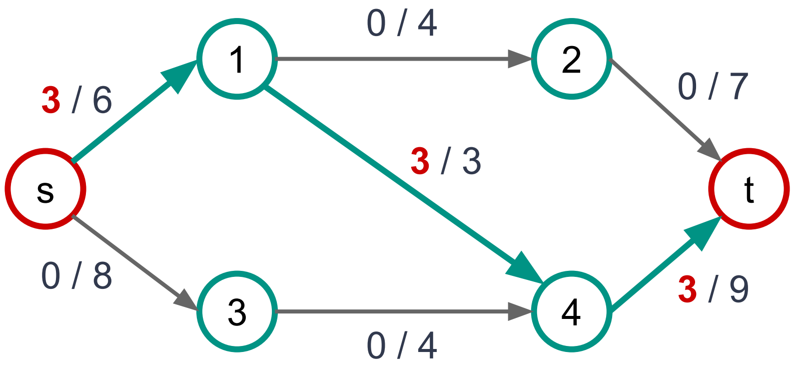
3 unități de-a lungul întregului drum

Fluxuri în rețele de transport

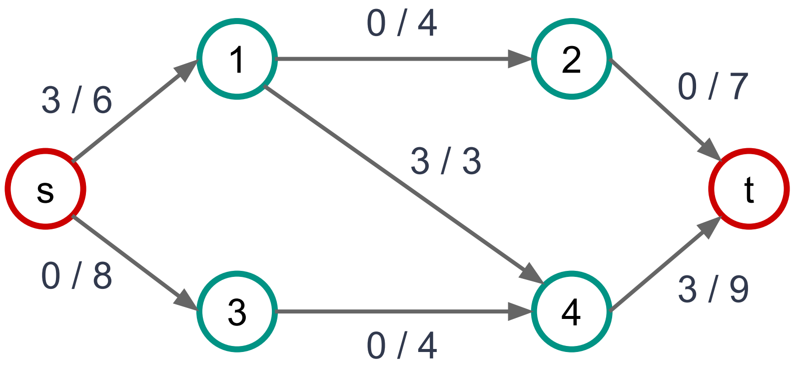


Putem trimite 3 unități de-a lungul întregului drum

Fluxuri în rețele de transport

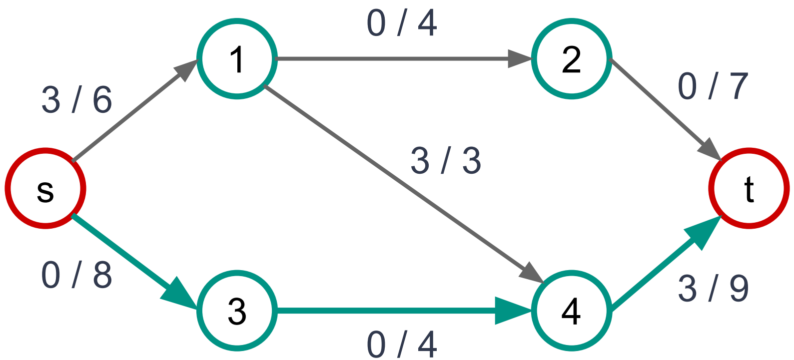


Fluxuri în rețele de transport

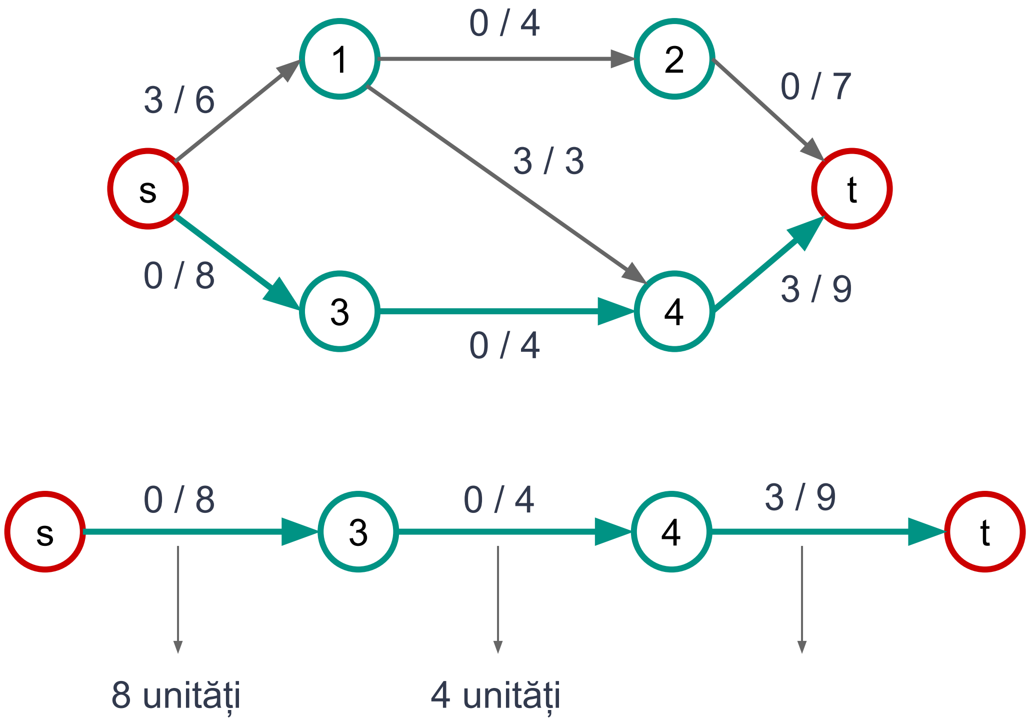


Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

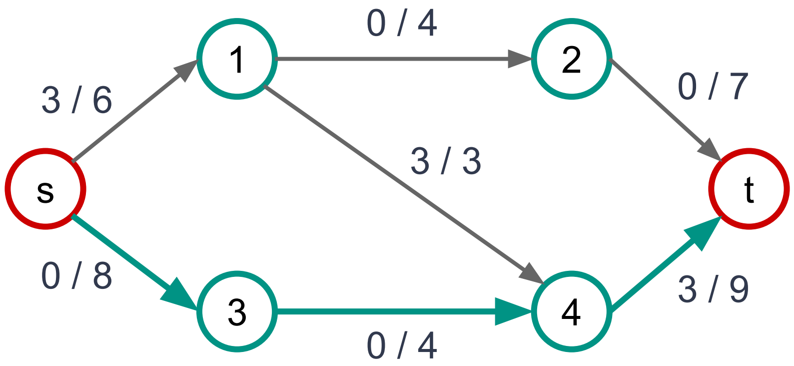
Fluxuri în rețele de transport

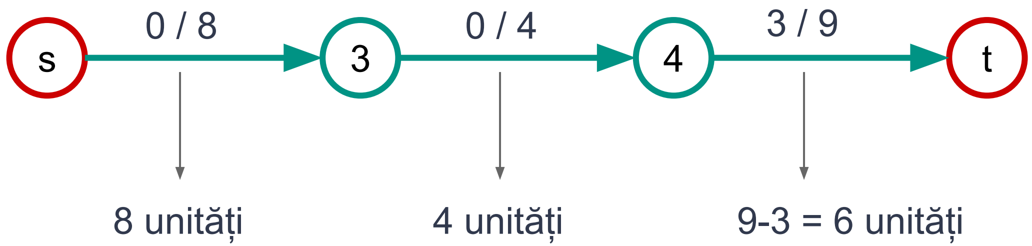


Fluxuri în rețele de transport

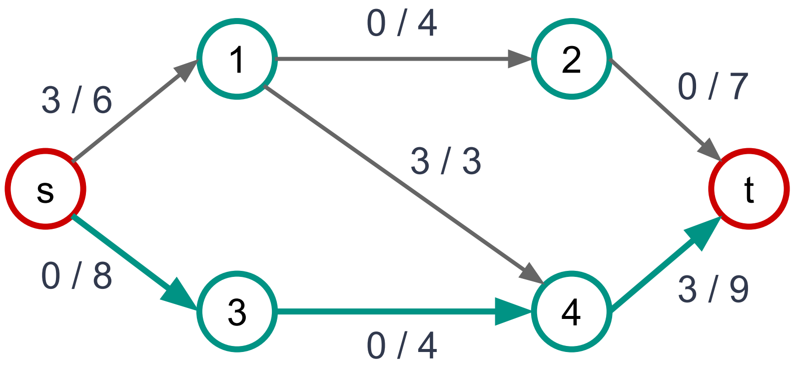


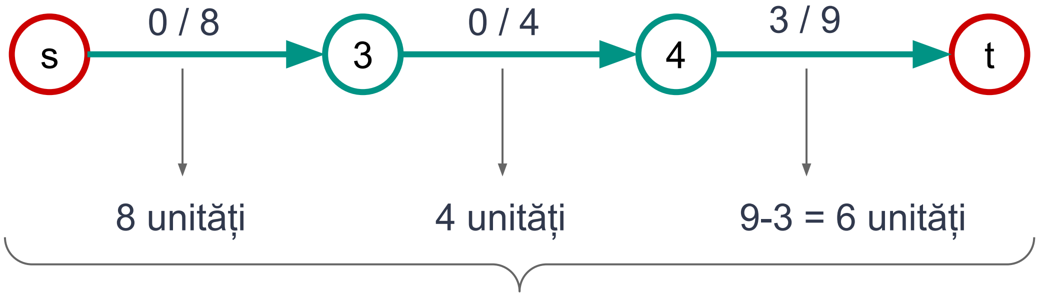
Fluxuri în rețele de transport





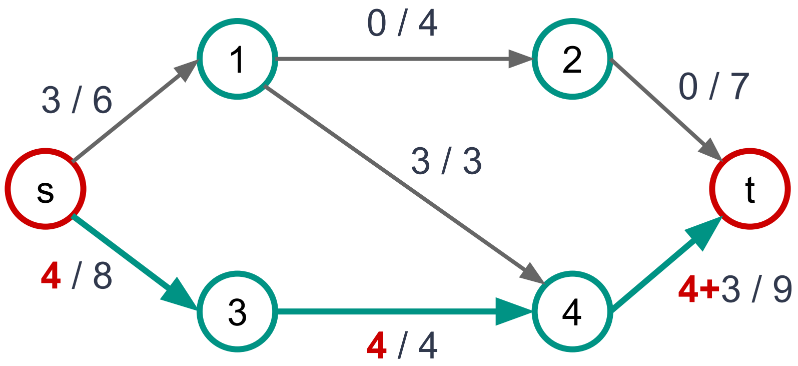
Fluxuri în rețele de transport



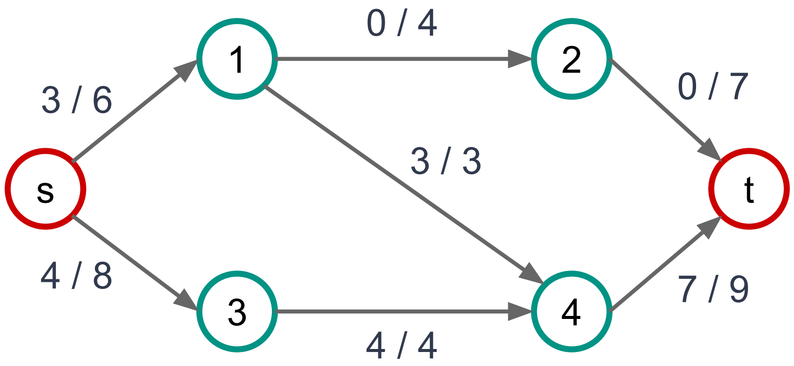


4 unități de-a lungul întregului drum

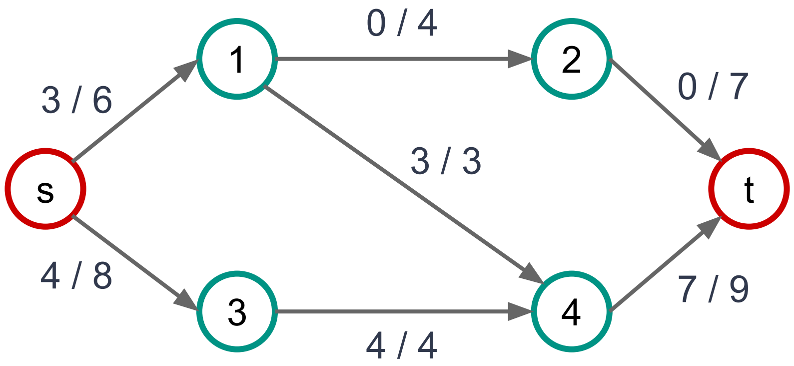
Fluxuri în rețele de transport



Fluxuri în rețele de transport

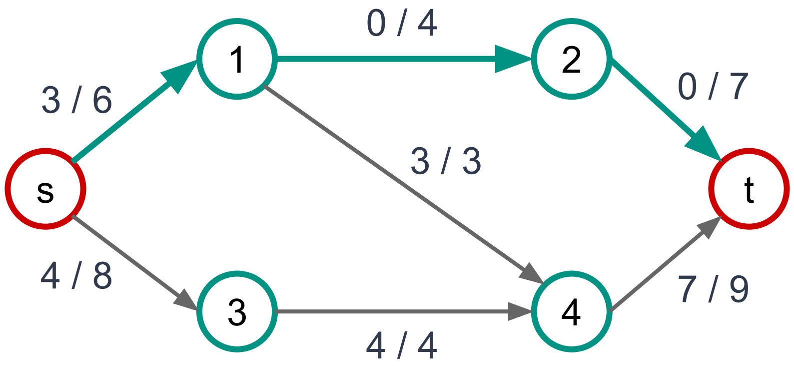


Fluxuri în rețele de transport

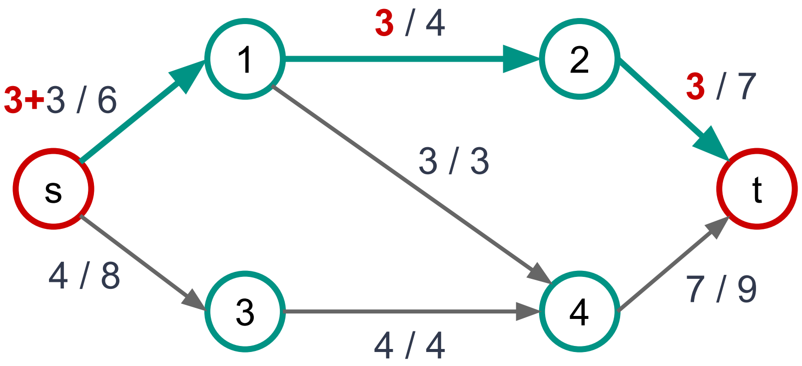


Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

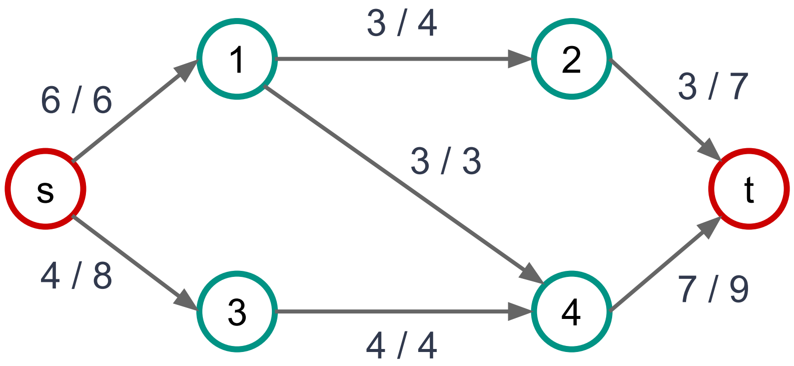
Fluxuri în rețele de transport



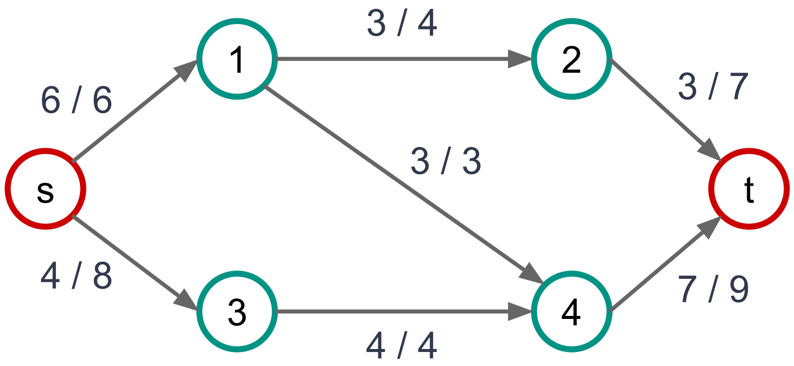
Fluxuri în rețele de transport



Fluxuri în rețele de transport

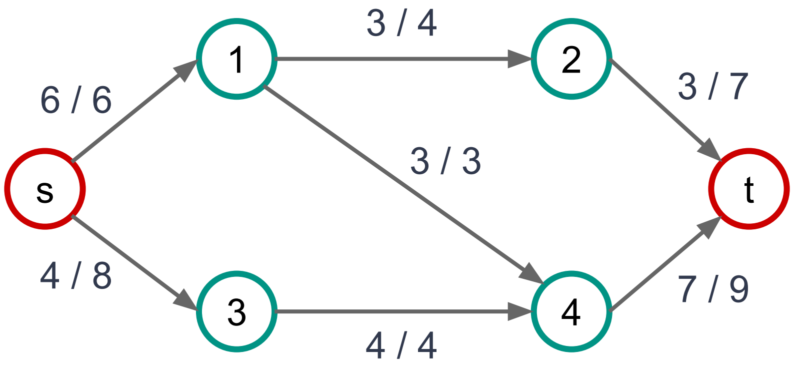


Fluxuri în rețele de transport



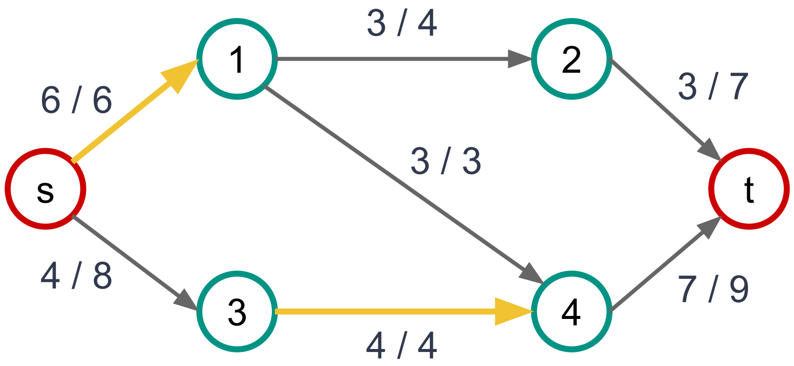
Nu mai există drumuri de la s la t pe care mai putem trimite flux

Fluxuri în rețele de transport

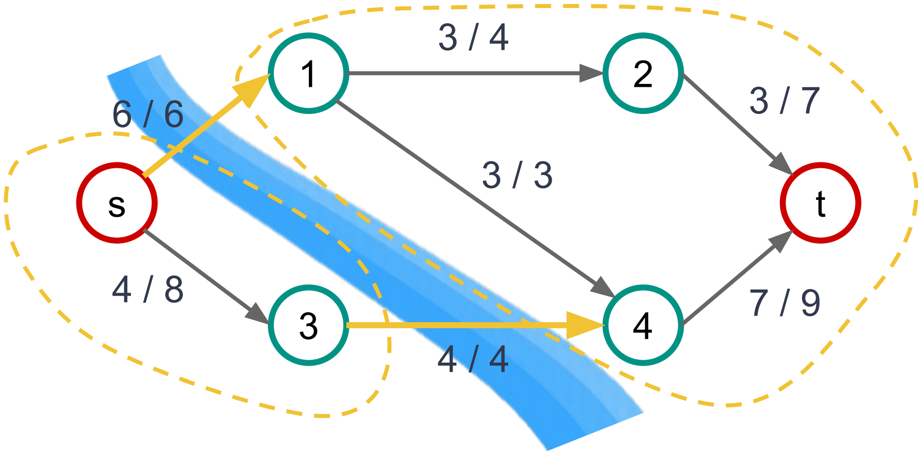


Este maxim fluxul?

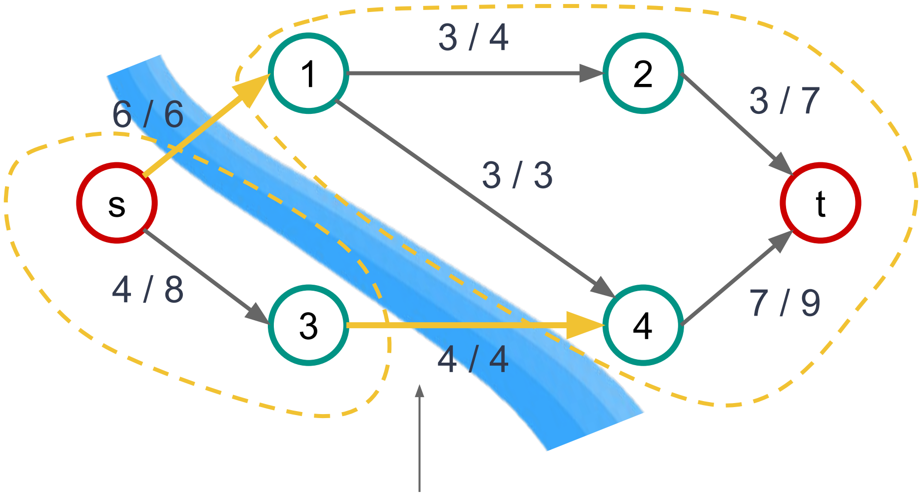
Fluxuri în rețele de transport



Fluxuri în rețele de transport



Fluxuri în rețele de transport



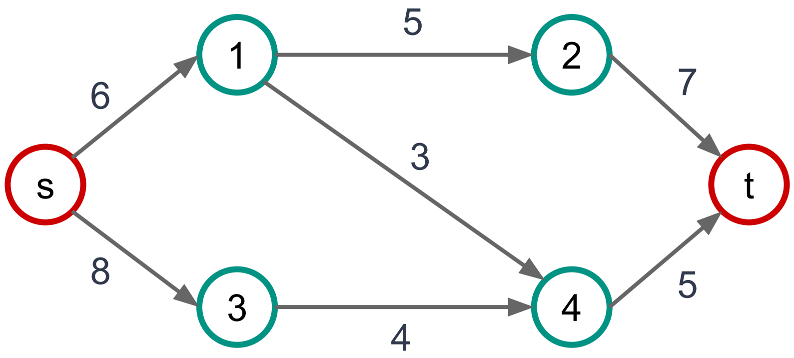
- Singurele arce (”poduri”) care trec din regiunea lui s în cea a lui t nu mai pot fi folosite pentru a trimite flux (au flux = capacitate)

  ⇒ fluxul este maxim

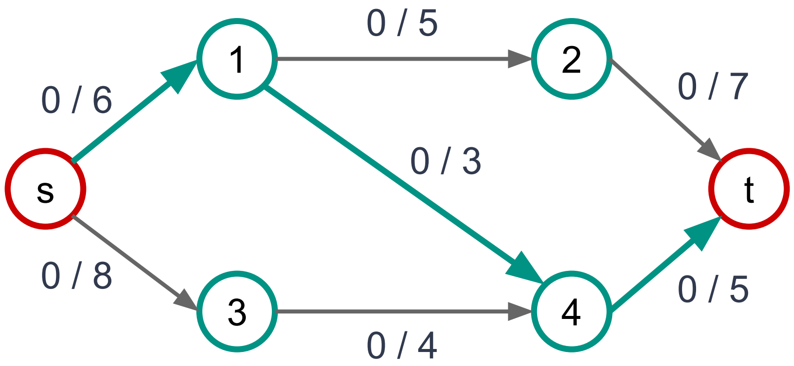
- **s-t tăietură**

Alt exemplu

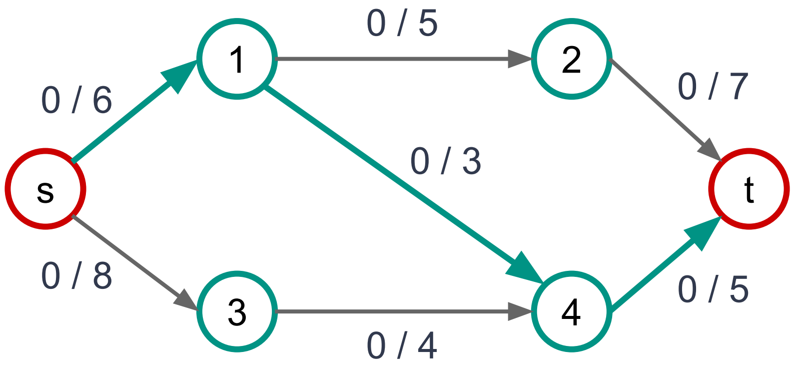
Fluxuri în rețele de transport



Fluxuri în rețele de transport

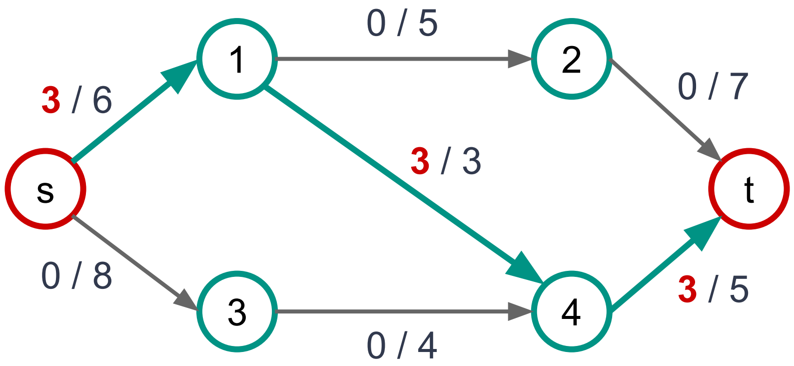


Fluxuri în rețele de transport

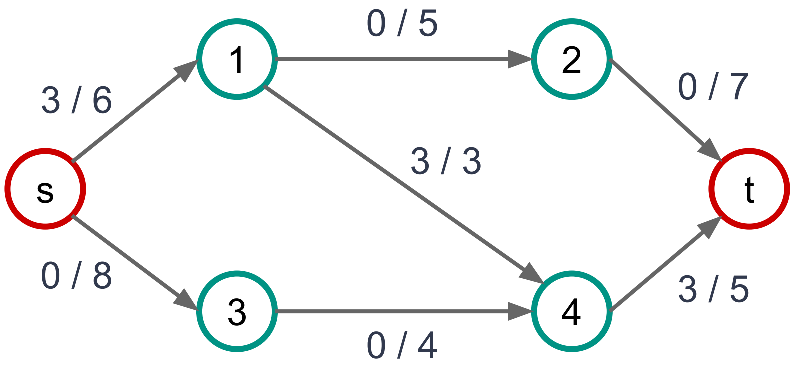


Putem trimite 3 unități de-a lungul întregului drum

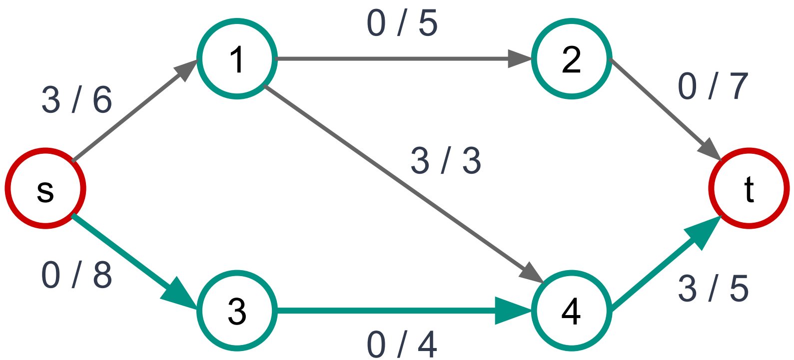
Fluxuri în rețele de transport



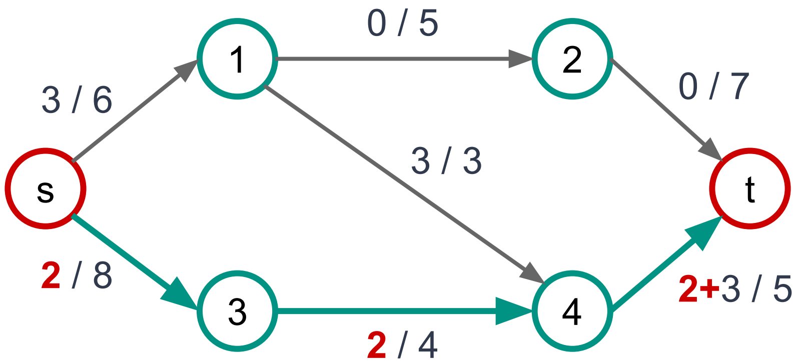
Fluxuri în rețele de transport



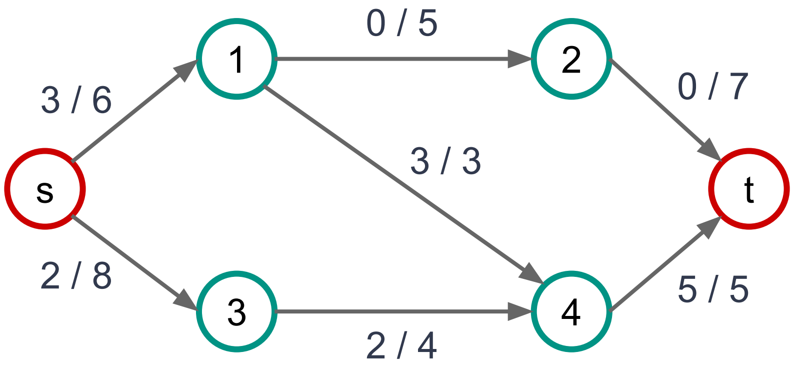
Fluxuri în rețele de transport



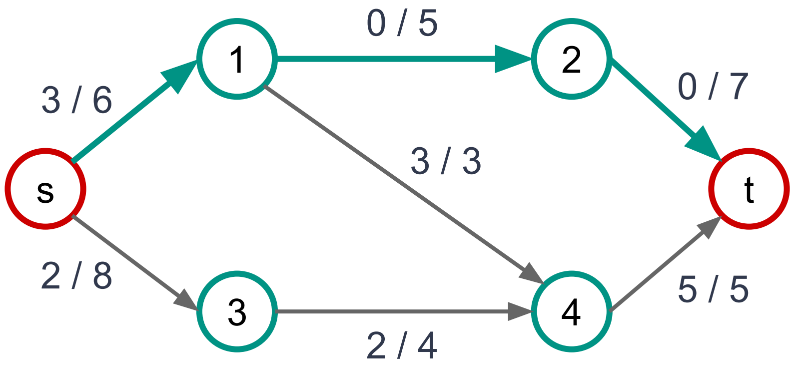
Fluxuri în rețele de transport



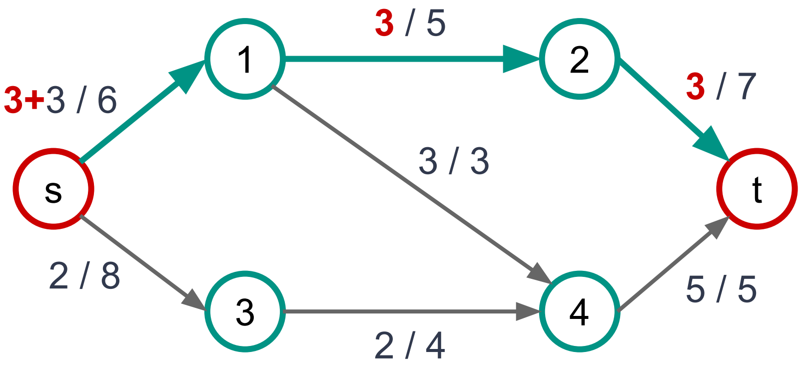
Fluxuri în rețele de transport



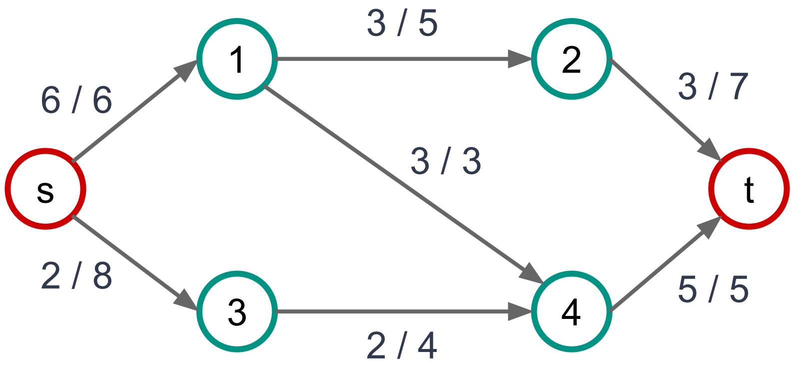
Fluxuri în rețele de transport



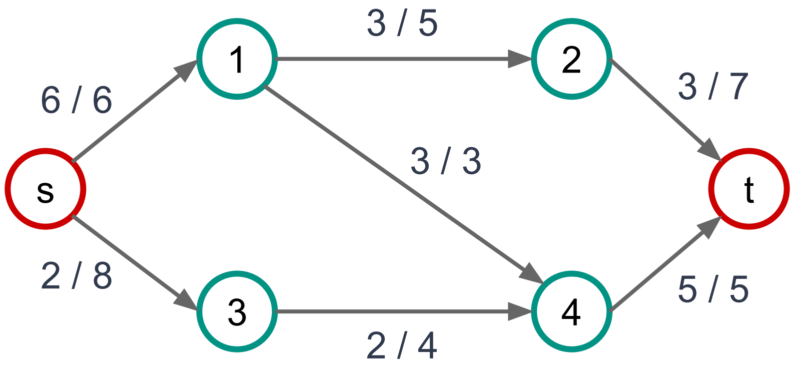
Fluxuri în rețele de transport



Fluxuri în rețele de transport



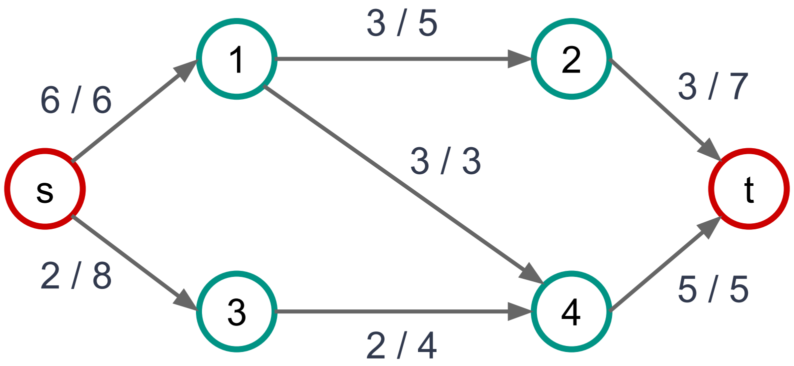
Fluxuri în rețele de transport



Nu mai există drumuri de la s la t pe care mai putem trimite flux

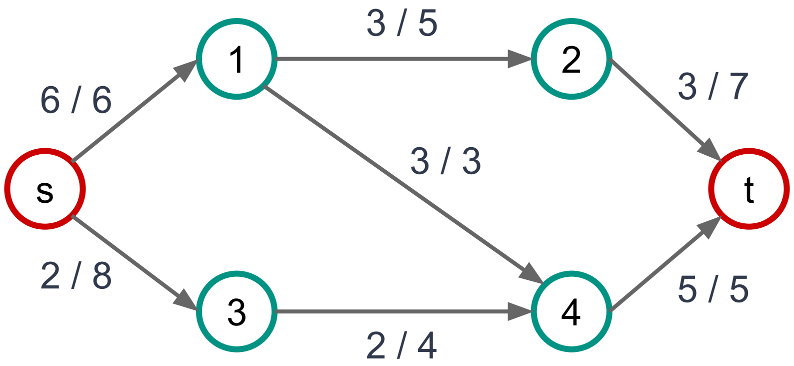
Este maxim fluxul?

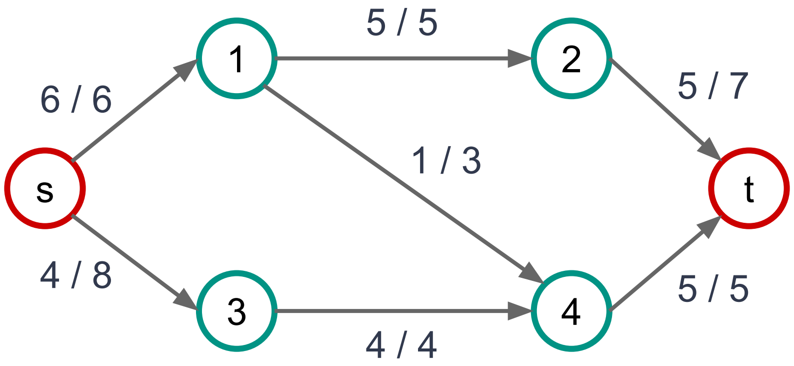
Fluxuri în rețele de transport



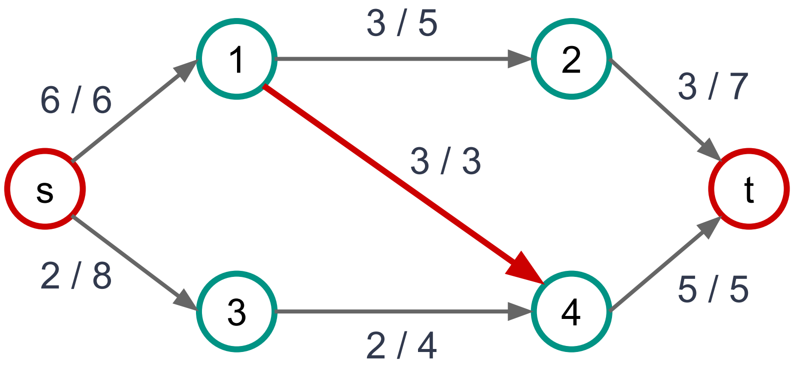
Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greșit pe arcul (1,4), adică pe drumul [s, 1, 4, t]

Fluxuri în rețele de transport

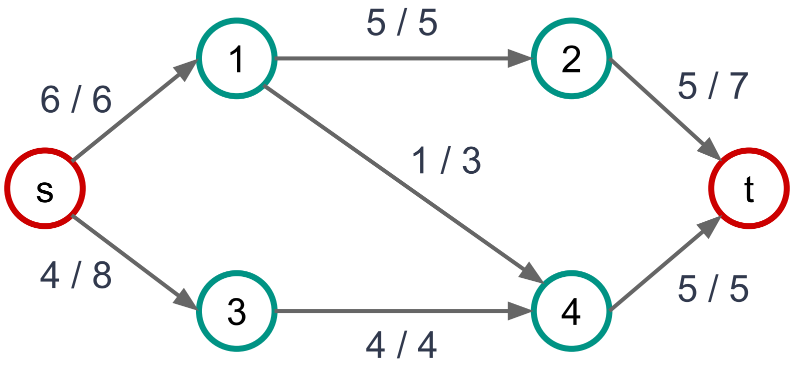




Fluxuri în rețele de transport

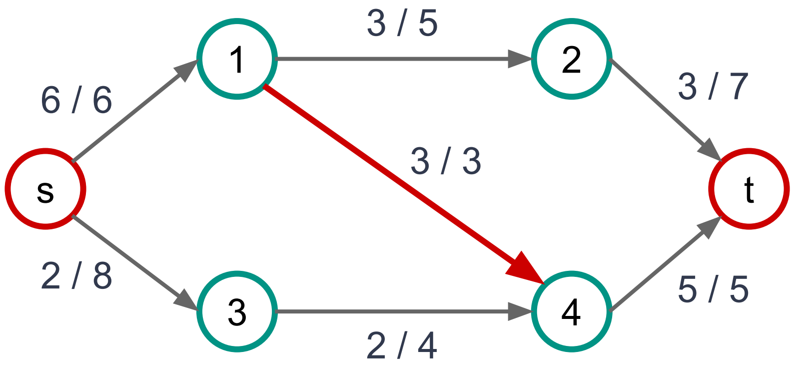


fluxul obținut



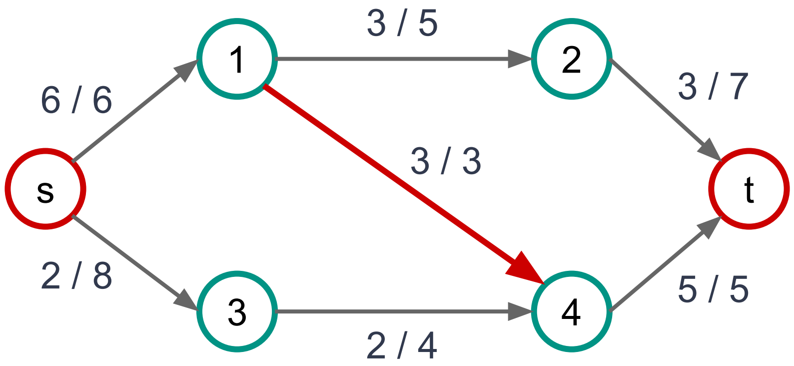
un flux ”mai mare”

Fluxuri în rețele de transport



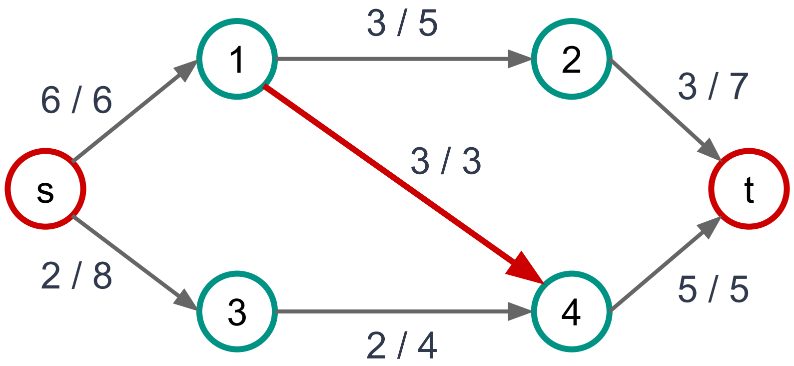
Trebuie să putem corecta (să trimitem flux înapoi pe un arc, pentru a fi direcționat prin alte arce către destinație)

Fluxuri în rețele de transport



Trimitem unități de flux înapoi pe arcul (1, 4)

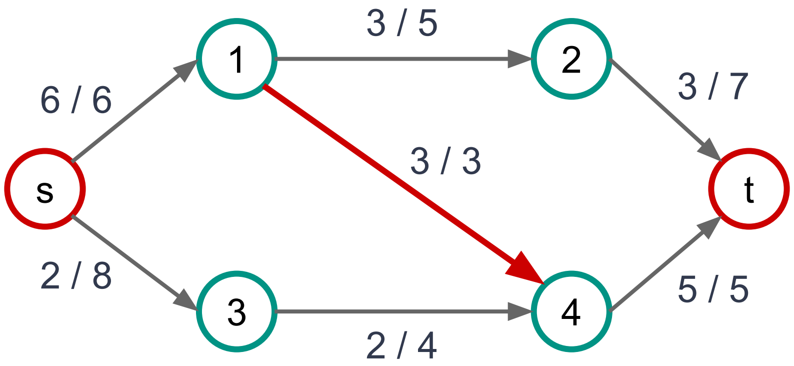
Fluxuri în rețele de transport



Trimitem unități de flux înapoi pe arcul (1, 4)

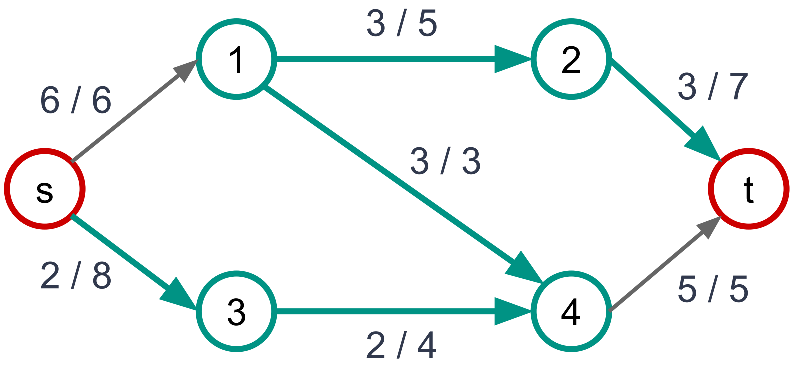
Corecția trebuie făcută pe un lanț de la s la t, nu doar pe un arc, altfel fluxul (marfa) va rămâne într-un vârf intermediar

Fluxuri în rețele de transport



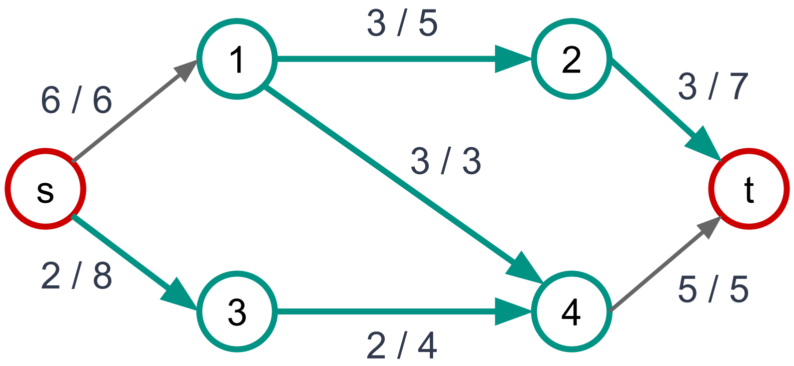
Determinăm un LANȚ (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul

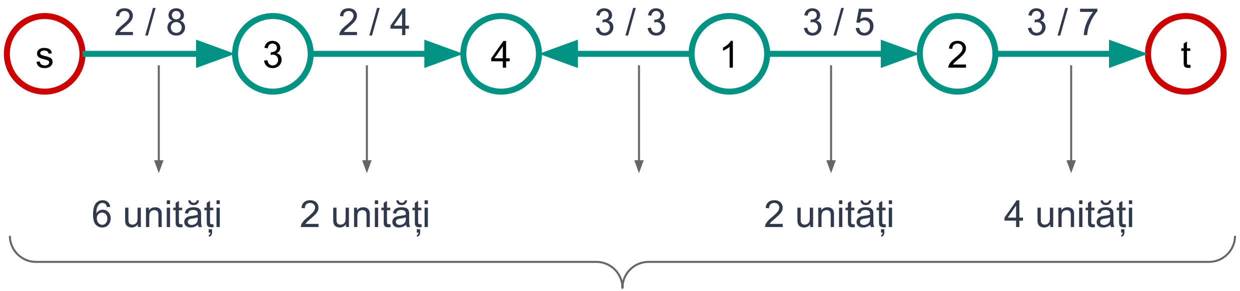
Fluxuri în rețele de transport



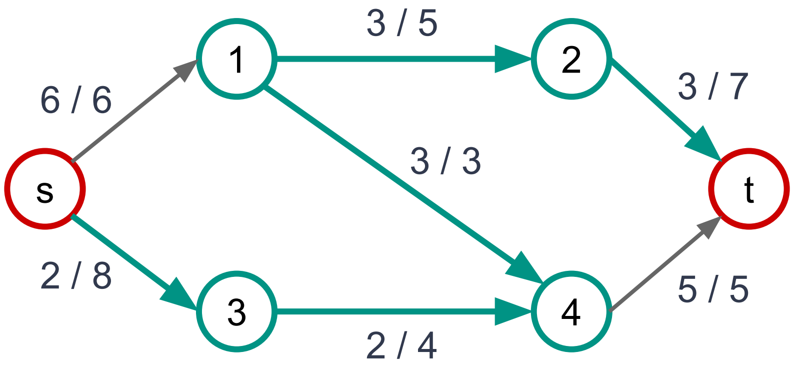
Cu cât putem modifica fluxul pe acest lanț?

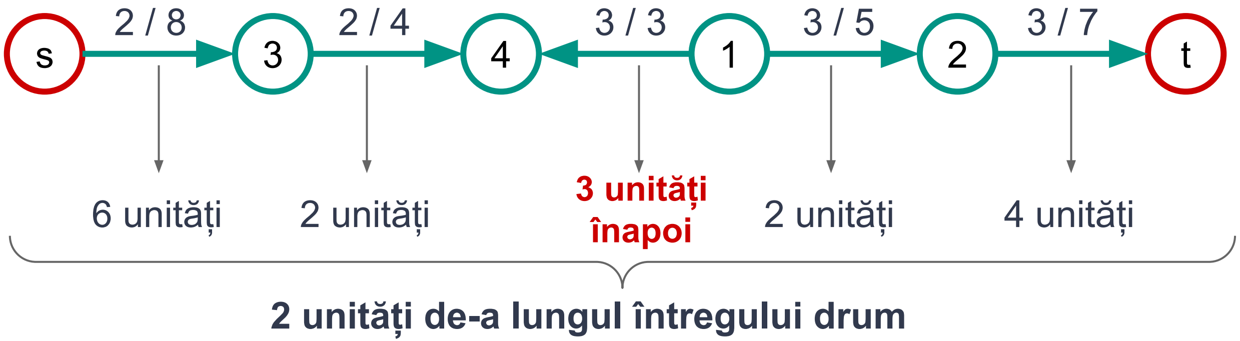
Fluxuri în rețele de transport



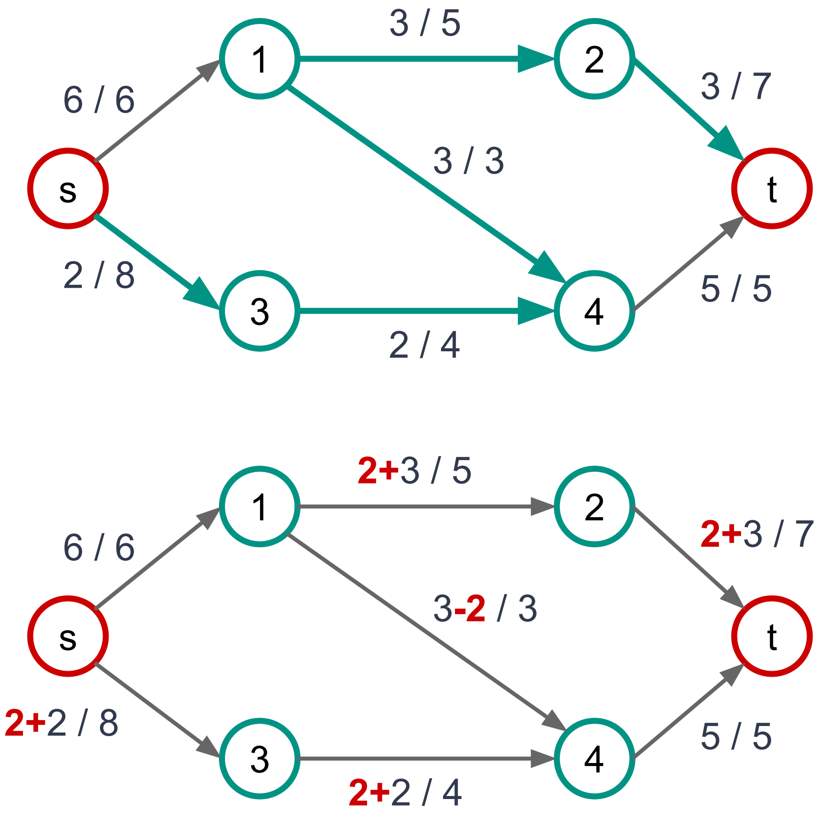


Fluxuri în rețele de transport

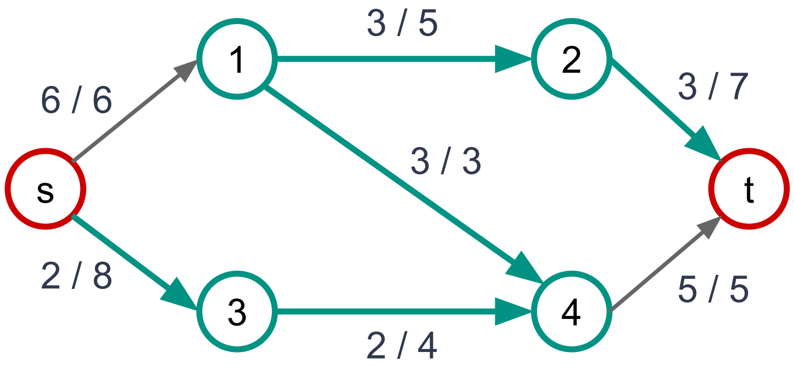


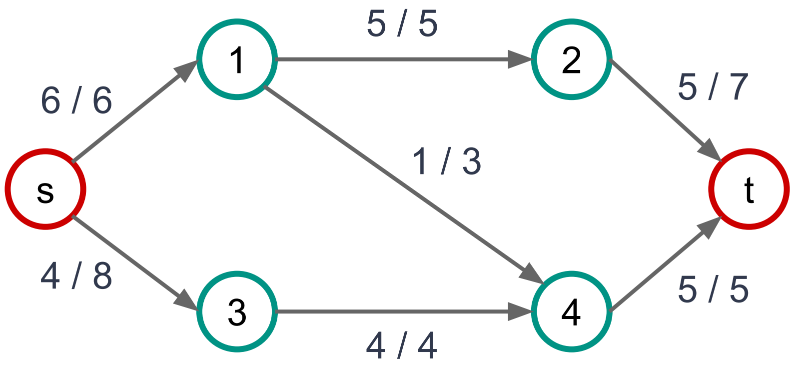


Fluxuri în rețele de transport

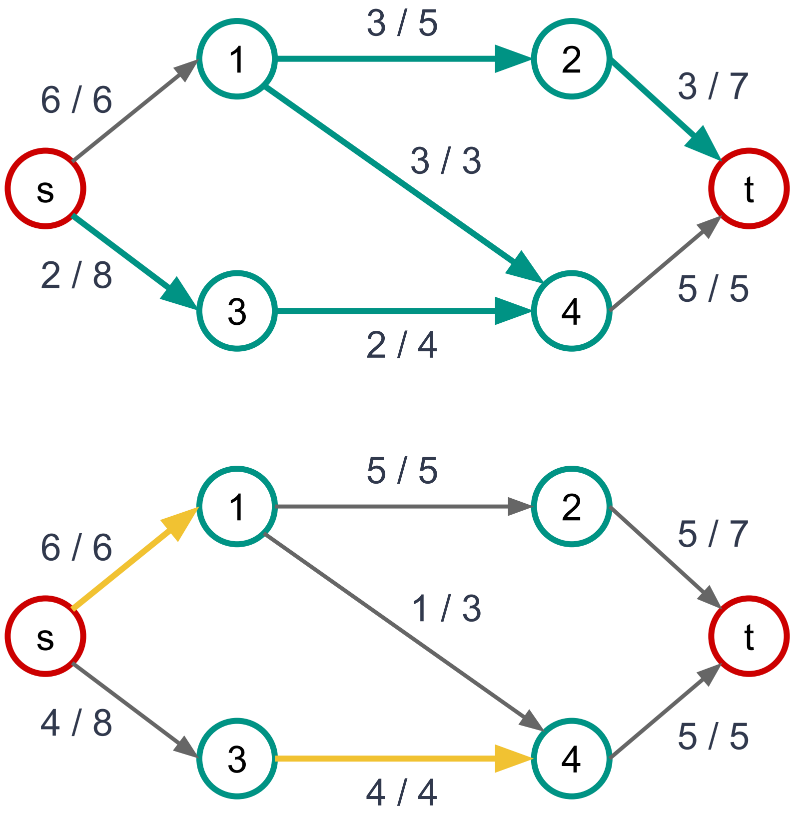


Fluxuri în rețele de transport





Fluxuri în rețele de transport



Definiții

Fluxuri în rețele de transport

Rețea de transport N = (G, S, T, I, c), unde

- G = (V, E) - graf orientat cu
  - $V = S \cup I \cup T$

Fluxuri în rețele de transport

Rețea de transport N = (G, S, T, I, c), unde

- G = (V, E) - graf orientat cu
  - V = S ∪ I ∪ T
  - S, I, T disjuncte, nevide
  - S - **mulțimea surselor (intrărilor)**
  - T - **mulțimea destinațiilor (ieșirilor)**
  - I - **mulțimea vârfurilor intermediare**

Fluxuri în rețele de transport

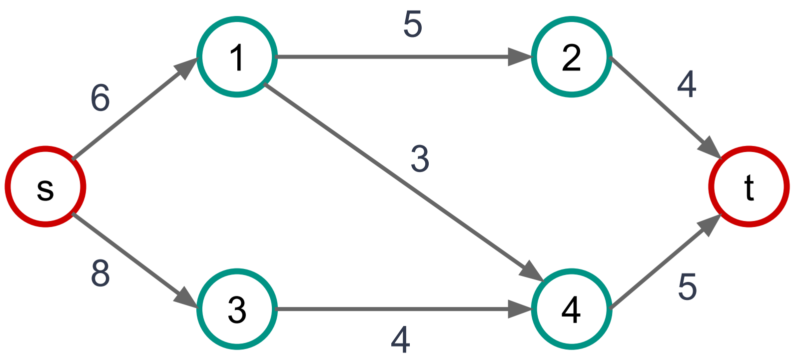
Rețea de transport $N = (G, S, T, I, c)$, unde

- $G = (V, E)$ - graf orientat cu
  - $V = S \cup I \cup T$
  - S, I, T disjuncte, nevide
  - S - **mulțimea surselor (intrărilor)**
  - T - **mulțimea destinațiilor (ieșirilor)**
  - I - **mulțimea vârfurilor intermediare**
- $c : E \to \mathbb{N}$ - funcția de **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)

Fluxuri în rețele de transport

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ - o singură sursă
- $T = \{t\}$ - o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ - în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ - din destinație nu ies arce



Fluxuri în rețele de transport

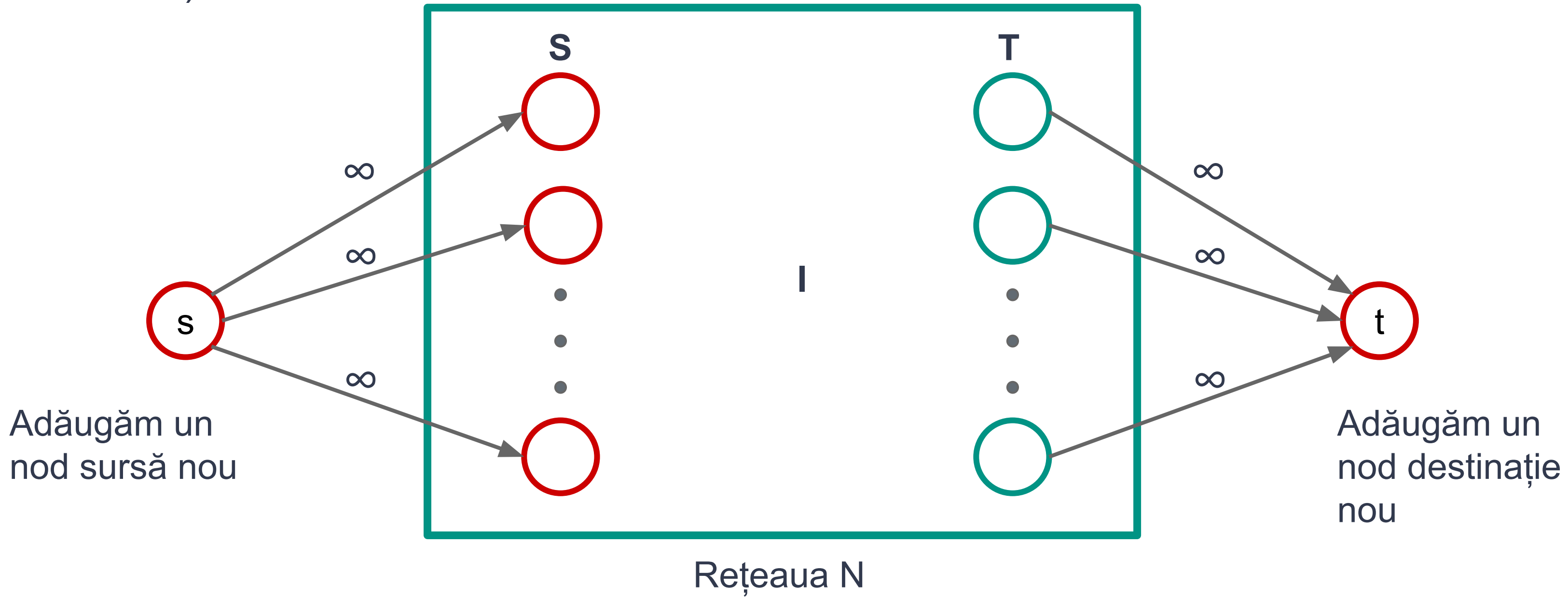
Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ - o singură sursă
- $T = \{t\}$ - o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ - în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ - din destinație nu ies arce

Ipotezele nu sunt restrictive - vom arăta că studiul fluxului într-o rețea cu mai multe surse și destinații se poate reduce la studiul fluxului într-o rețea de acest tip.

Fluxuri în rețele de transport

Ipotezele nu sunt restrictive - vom arăta că studiul fluxului într-o rețea cu mai multe surse și destinații se poate reduce la studiul fluxului într-o rețea de acest tip (din punct de vedere al valorii fluxului)



Fluxuri în rețele de transport

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ - o singură sursă
- $T = \{t\}$ - o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ - în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ - din destinație nu ies arce
- **orice vârf este accesibil din s**

Fluxuri în rețele de transport

Un **flux** într-o rețea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcție $f : E \to \mathbb{N}$ cu proprietățile:

Fluxuri în rețele de transport

Un **flux** într-o rețea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcție $f : E \to \mathbb{N}$ cu proprietățile:

- $0 \le f(e) \le c(e), \quad \forall\ e \in E(G)$ *condiția de* ***mărginire***

Fluxuri în rețele de transport

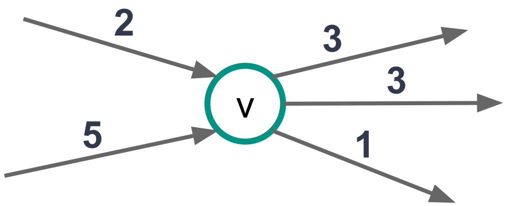
Un **flux** într-o rețea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcție f : E → ℕ cu proprietățile:

- 0 ≤ f(e) ≤ c(e), ∀ e ∈ E(G) *condiția de **mărginire***
- pentru orice vârf **intermediar** v ∈ I

$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$

*condiția de **conservare a fluxului***

(fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)



Fluxuri în rețele de transport

Notații:

- $\overline{X}$
- $f^{-}(v)$, $f^{+}(v)$
- $f(X, Y)$, $X, Y \subseteq V$
- $f^{+}(X)$, $X \subseteq V$

În general, pentru orice funcție $g : E \rightarrow \mathbb{N}$ **vom folosi notații similare**

Fluxuri în rețele de transport

Notații:

$$f^+(v) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$ = fluxul care iese din v

$$f^-(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$ = fluxul care intră in v

Fluxuri în rețele de transport

Notații:

$$f^+(v) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$ = fluxul care iese din v

$$f^-(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$ = fluxul care intră in v

Condiția de **conservare a fluxului** devine:

$$f^-(v) = f^+(v), \quad \forall\ v \in I$$

Fluxuri în rețele de transport

Pentru X, Y ⊆ V disjuncte:

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \in Y}} f(uv)$$ = fluxul de la X la Y

(pe arcele care ies din X către Y)

Fluxuri în rețele de transport

Pentru X ⊆ V disjuncte:

$$f^+(X) = \sum_{\substack{uv \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(uv)$$ = fluxul care iese din X

(din vârfurile din X)

$$f^-(X) = \sum_{\substack{vu \in E \\ u \in X, v \notin X}} f(vu)$$ = fluxul care intră în X

(în nodurile din X)

Fluxuri în rețele de transport

Pentru X, Y ⊆ V disjuncte:

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{uv\in E\\ u\in X, v\in Y}} f(uv)$$ = fluxul de la X la Y

(pe arcele care ies din X către Y)

Avem

$$f^+(X) = f(X, V - X) = f(X, \overline{X})$$

$$f^-(X) = f(\overline{X}, X)$$

Fluxuri în rețele de transport

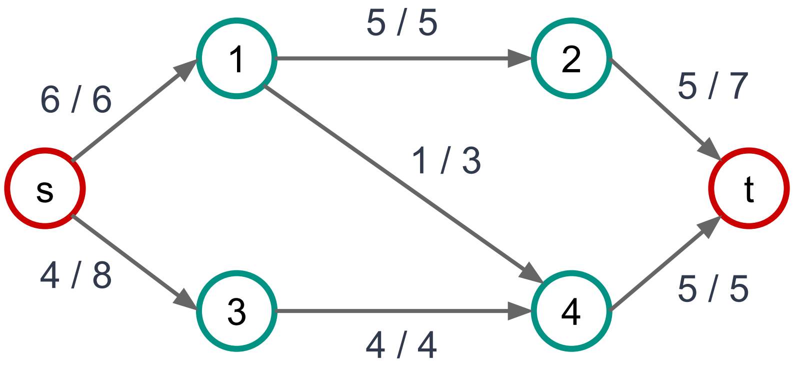
Valoarea fluxului *f* se definește ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$

Fluxuri în rețele de transport

Valoarea fluxului *f* se definește ca fiind

$$val(f) = f^+(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$

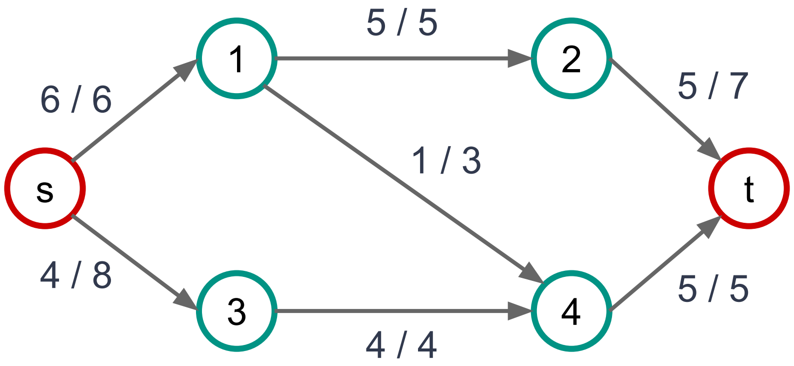


val(f) = ?

Fluxuri în rețele de transport

Valoarea fluxului *f* se definește ca fiind

$$val(f) = f^+(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = f(s, 1) + f(s, 3) = 6 + 4 = 10

Fluxuri în rețele de transport

Valoarea fluxului *f* se definește ca fiind

$$val(f) = f^+(s)$$

Vom demonstra ulterior că are loc relația

$$val(f) = f^+(s) = f^-(t)$$

Problema fluxului maxim

Fie N o rețea.

Un flux f* se numește **flux maxim în N** dacă

$$\mathbf{val(f^*) = \max \{ \, val(f) \;\; | \;\; f \text{ este flux în } N \, \}}$$

Problema fluxului maxim

Fie N o rețea.

Un flux f* se numește **flux maxim în N** dacă

$$\mathbf{val(f^*) = \max \{ val(f) \mid f \text{ este flux în } N \}}$$

Observație. Orice rețea admite cel puțin un flux, spre exemplu fluxul vid:

$$f(e) = 0, \quad \forall\ e \in E$$

Problema fluxului maxim

Fie N o rețea.

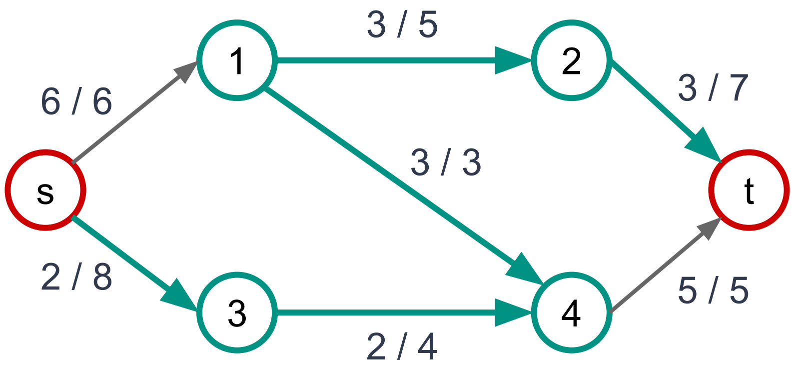
Să se determine f* un **flux maxim în N.**

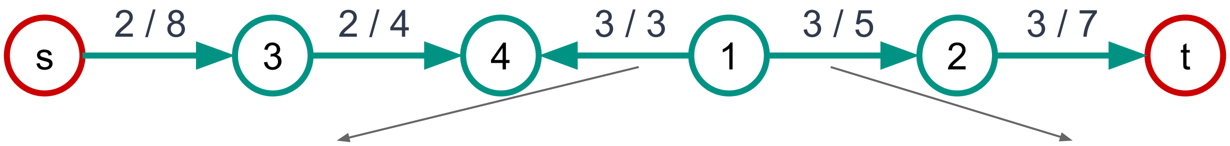
Algoritmul Ford-Fulkerson

de determinare a unui flux maxim
+ a unei tăieturi minime

Algoritmul Ford-Fulkerson

Amintim din exemplele anterioare:

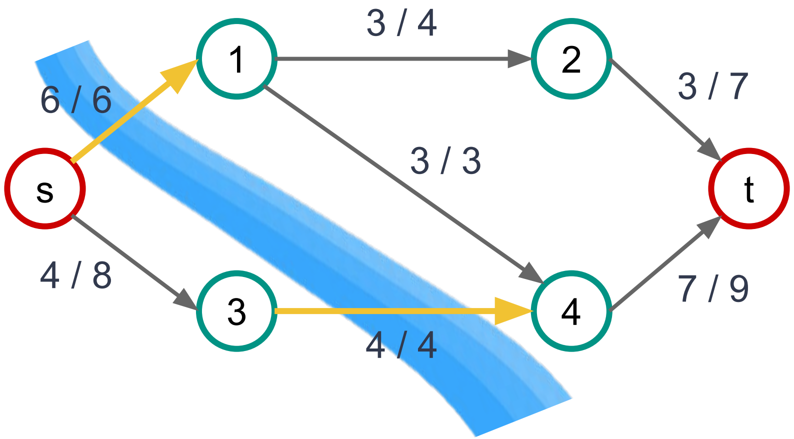




arc în sens invers, putem trimite înapoi 3 unități de flux

arc în sens direct, mai putem trimite 5-3=2 unități de flux

Algoritmul Ford-Fulkerson



Fluxul este maxim - în mulțimea de arce evidențiată, toate arcele au flux=capacitate și nu putem construi drumuri de la s la t care nu conțin arce din această mulțime (s-t tăietură)

Algoritmul Ford–Fulkerson

Definim noțiunile necesare descrierii și studiului algoritmului:

- **s-t lanț f-nesaturat**
  - arc direct
  - arc invers
  - capacitate reziduală arc, lanț
- Operația de **revizuire a fluxului** de-a lungul unui s-t lanț *f-nesaturat*
- **Tăietură în rețea**
  - capacitatea unei tăieturi

Algoritmul Ford–Fulkerson

Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o rețea.

- Un s-t **lanț** este o succesiune de vârfuri **distincte** și arce din G

  $$P = [\ s=v_0,\ e_1,\ v_1,\ \dots,\ v_{k-1},\ e_k,\ v_k=t\ ]$$

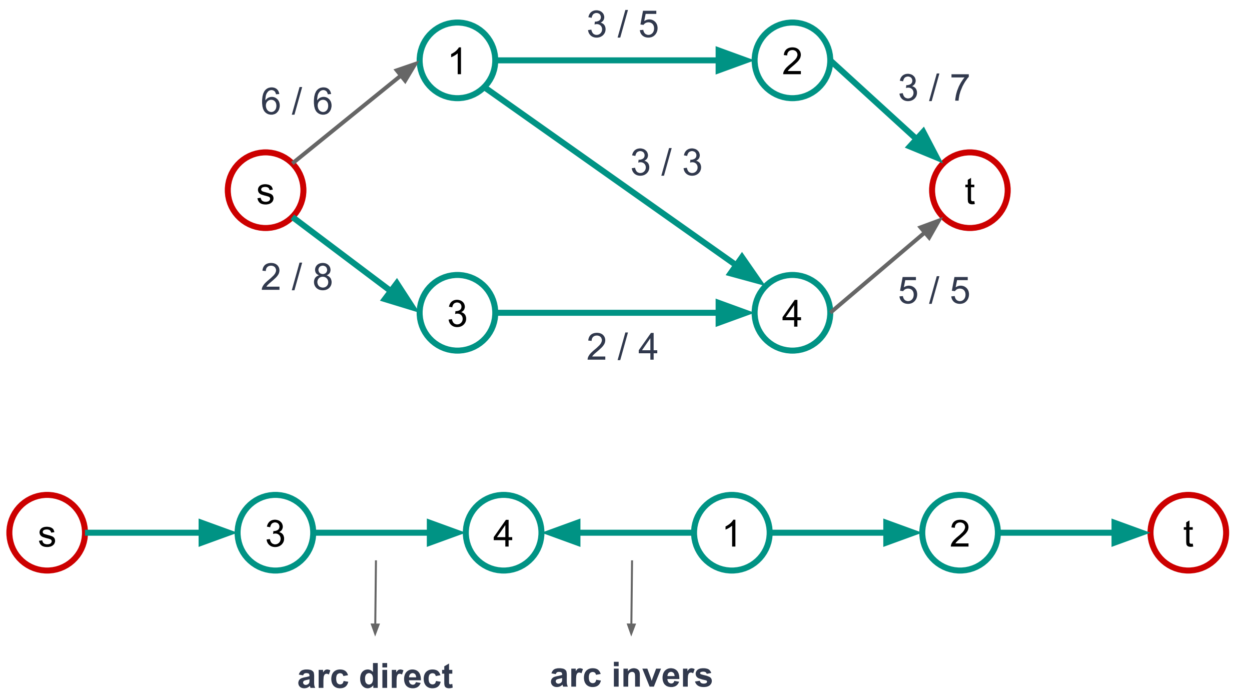
  unde arcul e_i este fie $v_{i-1}v_i$, fie v_iv_{i-1}.
  (P este lanț elementar în graful neorientat asociat lui G)

- Dacă
  - $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$, e_i s.n. **arc direct (înainte)** în P
  - $e_i = v_iv_{i-1} \in E(G)$, e_i s.n. **arc invers (înapoi)** în P

- **Dacă nu există confuzii, vom omite arcele în scrierea lanțului P**

  $$P = [\ s=v_0,\ v_1,\ \dots,\ v_{k-1},\ v_k=t\ ]$$

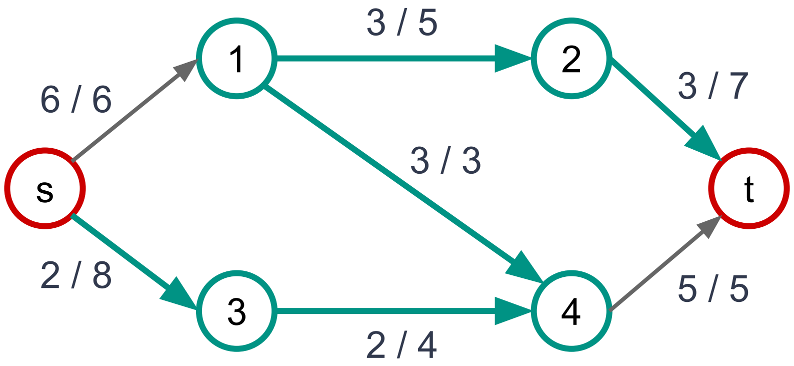
Algoritmul Ford–Fulkerson

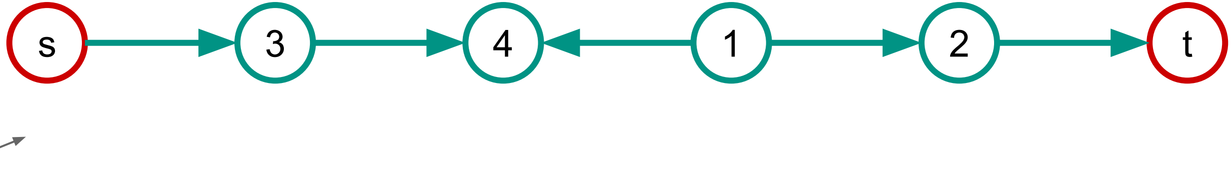


Algoritmul Ford-Fulkerson

Fie N rețea, f flux în N, P un s-t lanț.

Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P.



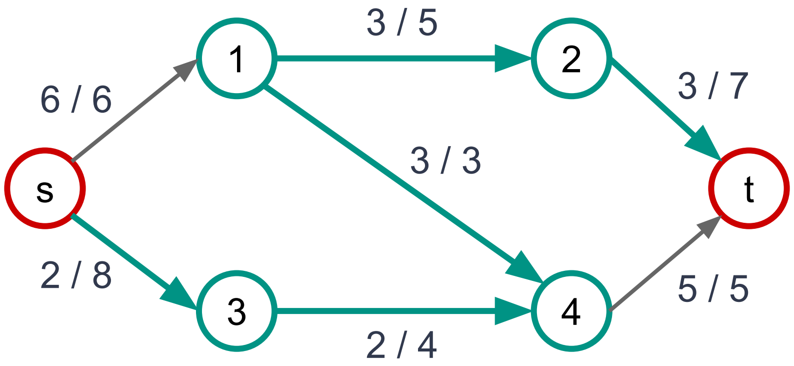


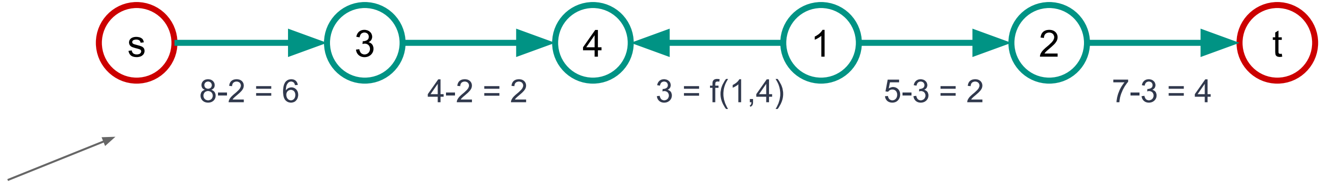
capacități reziduale?

Algoritmul Ford-Fulkerson

Fie N rețea, f flux în N, P un s-t lanț.

Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P.





capacități reziduale?

Algoritmul Ford–Fulkerson

Fie N rețea, f flux în N, P un s-t lanț.

Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P.

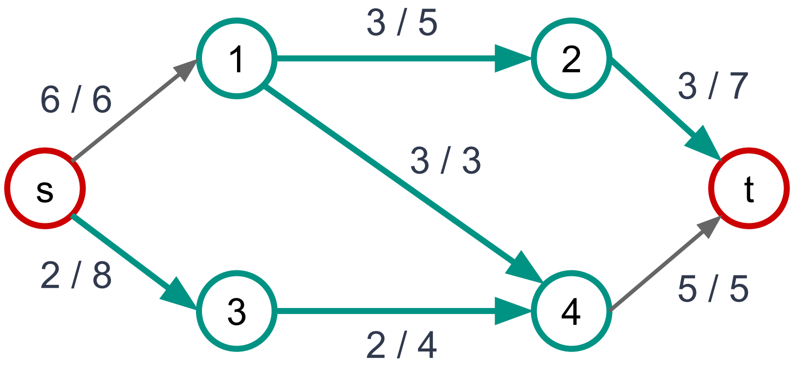
$$i_P(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), & daca\ e\ este\ arc\ direct\ in\ P \\ f(e), & daca\ e\ este\ arc\ invers\ in\ P \end{cases}$$

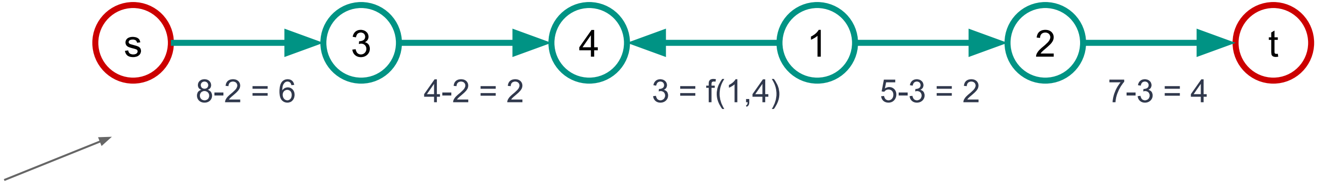
= cu cât mai poate fi modificat fluxul pe arcul e, de-a lungul lanțului P

Algoritmul Ford-Fulkerson

Fie N rețea, f flux în N, P un s-t lanț.

Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P.

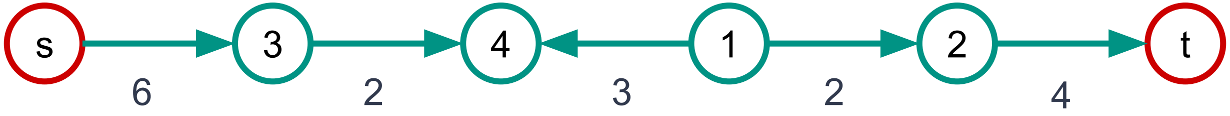




capacități reziduale?

Algoritmul Ford–Fulkerson

Capacitatea reziduală a lanțului P

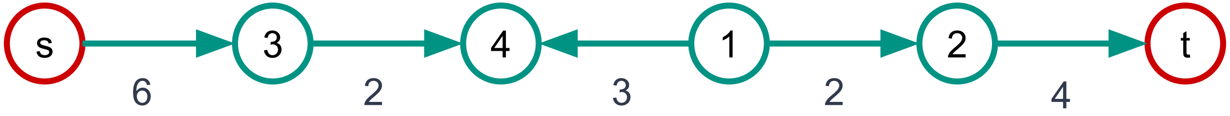


i(P) = ?

= cu cât putem revizui maxim fluxul de-a lungul lui P

Algoritmul Ford–Fulkerson

Capacitatea reziduală a lanțului P



i(P) = min { 6, 2, 3, 2, 4 } = 2

Algoritmul Ford–Fulkerson

Capacitatea reziduală a lanțului P este

$$i(P) = min\{i_P(e) | e \in E(P)\}$$

= cu cât mai poate fi modificat fluxul de-a lungul lanțului P

P se numește

- **f-saturat**, dacă i(P) = 0
- **f-nesaturat,** dacă i(P) ≠ 0

Algoritmul Ford–Fulkerson

Fie N - rețea, f flux în N, P un s-t lanț **f-nesaturat**.

Fluxul revizuit de-a lungul lanțului P se definește ca fiind $f_P : E \to \mathbb{N}$,

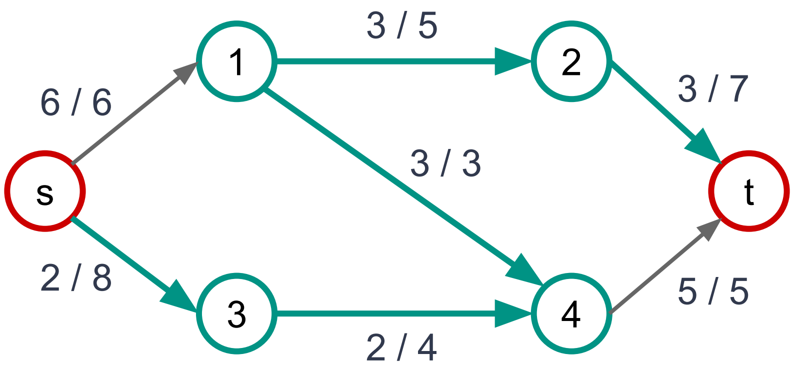
Algoritmul Ford–Fulkerson

Fie N - rețea, f flux în N, P un s-t lanț **f-nesaturat**.

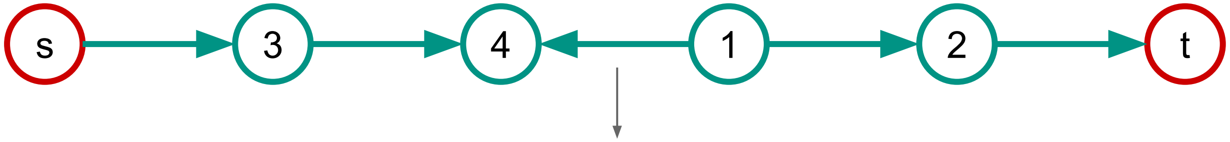
Fluxul revizuit de-a lungul lanțului P se definește ca fiind $f_P : E \to \mathbb{N}$,

$$f_P(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), \textit{daca e este arc direct in P} \\ f(e) - i(P), \textit{daca e este arc invers in P} \\ f(e), \qquad \textit{altfel} \end{cases}$$

Algoritmul Ford–Fulkerson

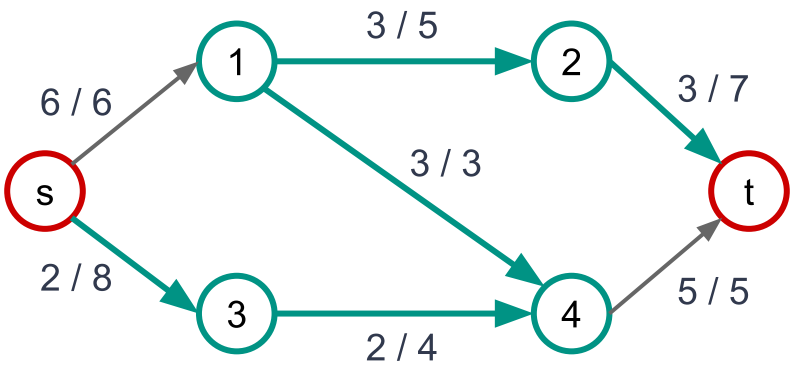


Considerăm s-t lanțul P evidențiat

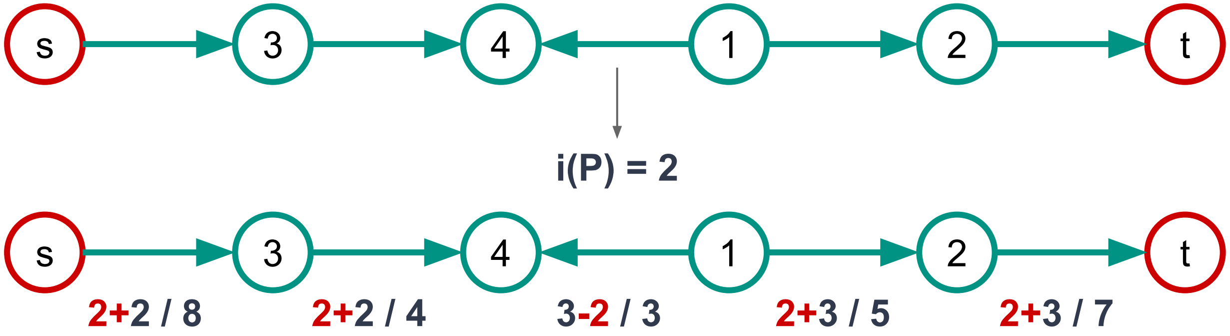


i(P) = ?

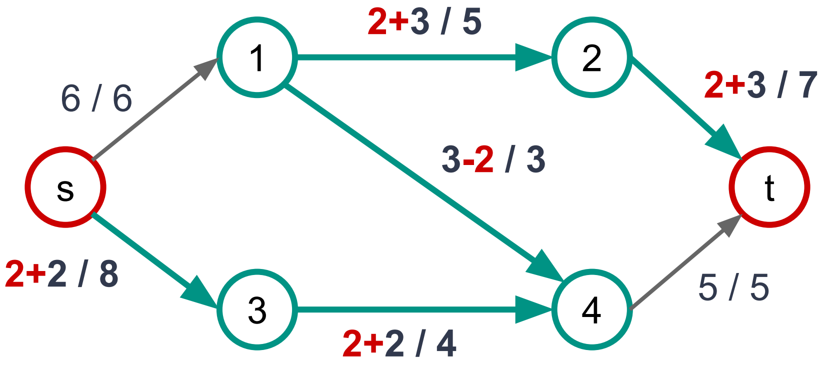
Algoritmul Ford-Fulkerson



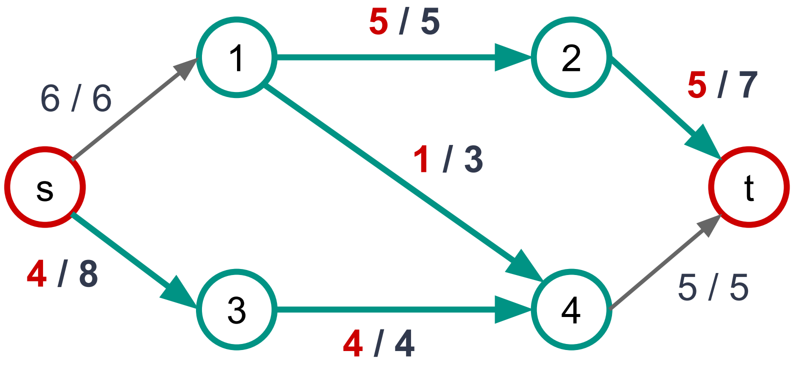
Considerăm s-t lanțul P evidențiat și revizuim fluxul



Algoritmul Ford–Fulkerson



Algoritmul Ford–Fulkerson



Fluxul după revizuirea de-a lungul lanțului P

Algoritmul Ford–Fulkerson

Proprietăți ale fluxului revizuit

Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o rețea și f flux în N.

Fie P un s-t lanț f-nesaturat în G și f_P fluxul revizuit de-a lungul lanțului P.

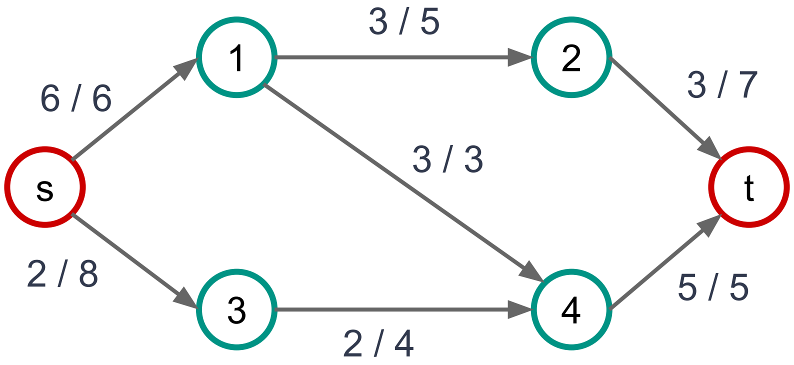
Atunci:

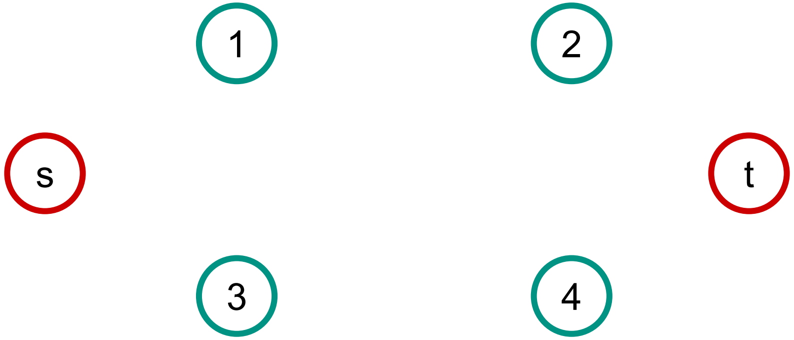
- f_P este flux în G

și

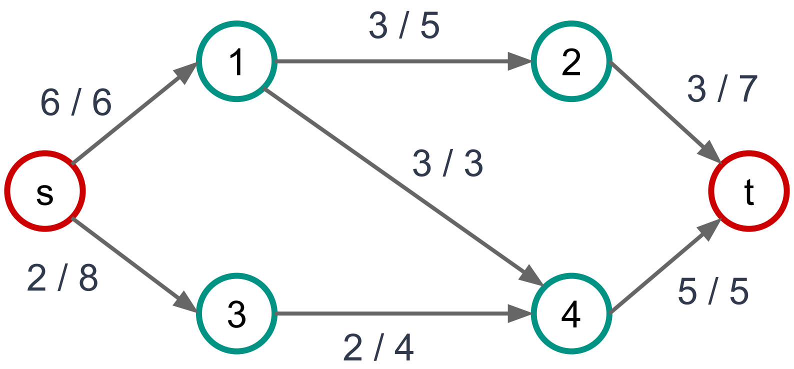
- **val(f_P) = val(f) + i(P) ≥ val(f) + 1**

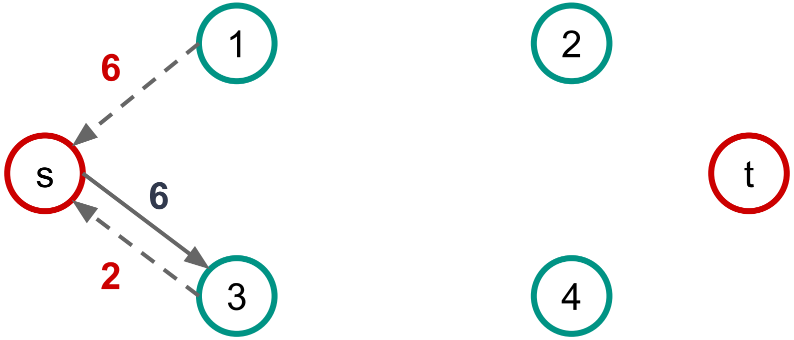
Graf rezidual



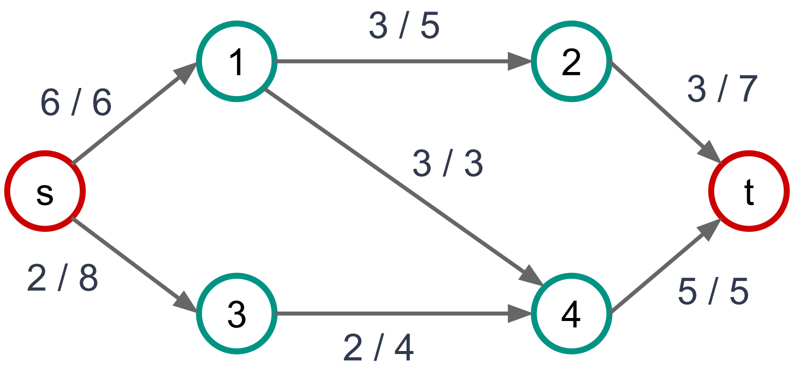


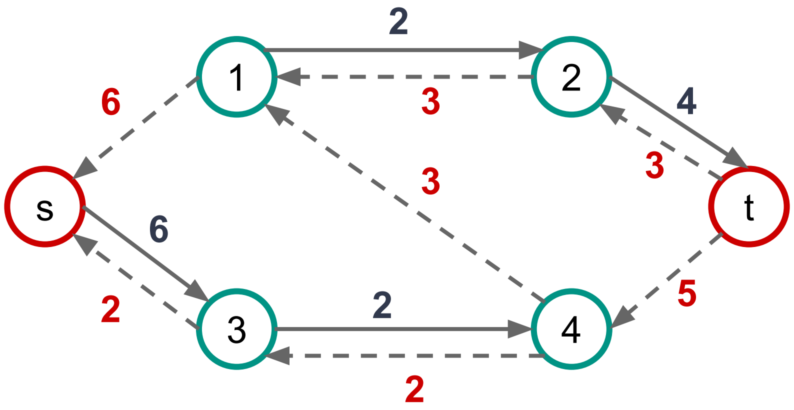
Graf rezidual



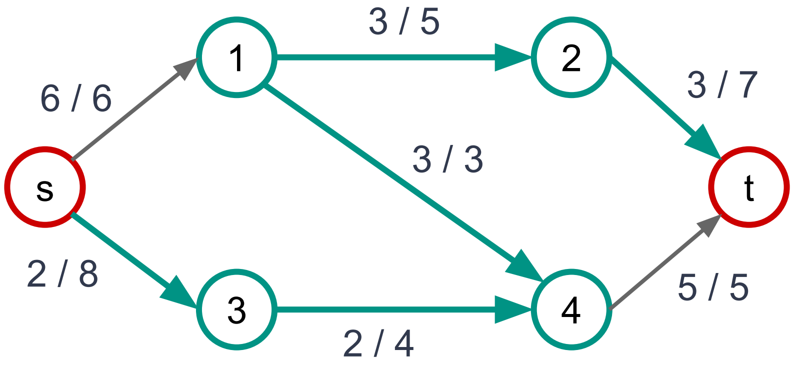


Graf rezidual

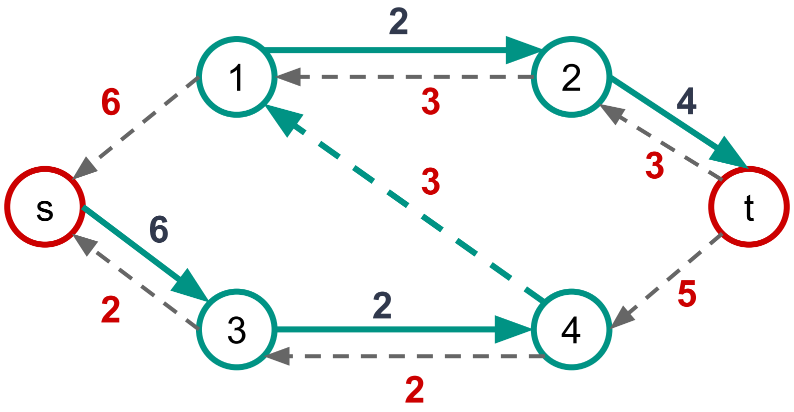




Graf rezidual

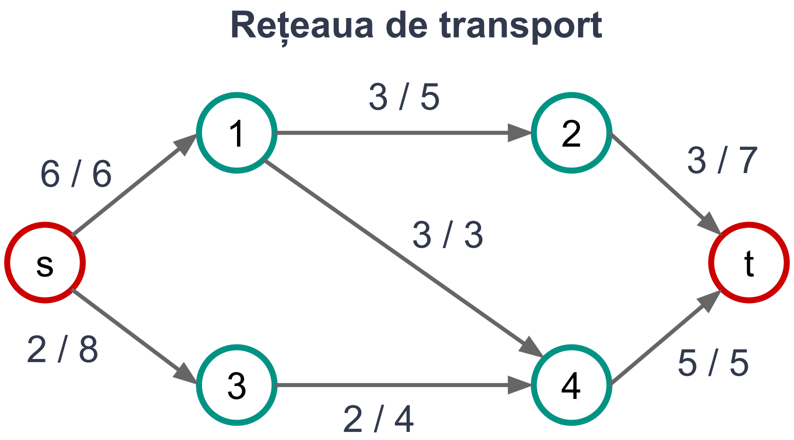


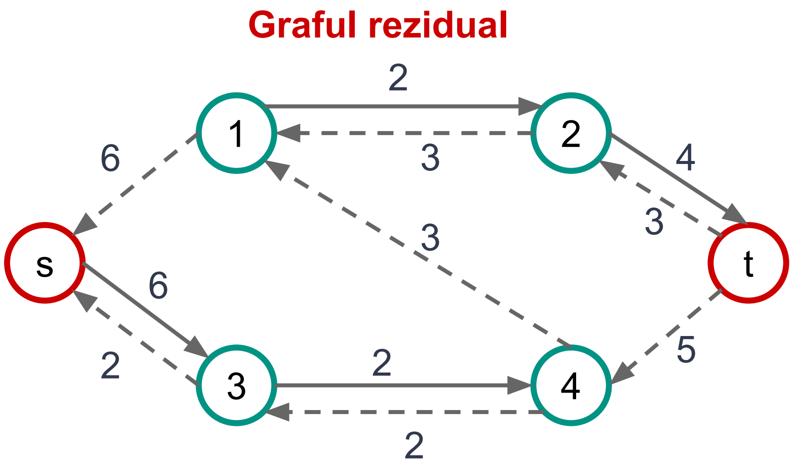
s-t lanț f-nesaturat



s-t drum în graful rezidual

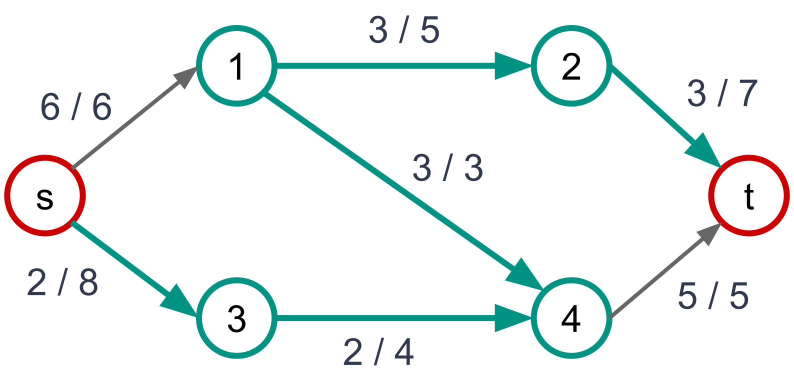
Graf rezidual



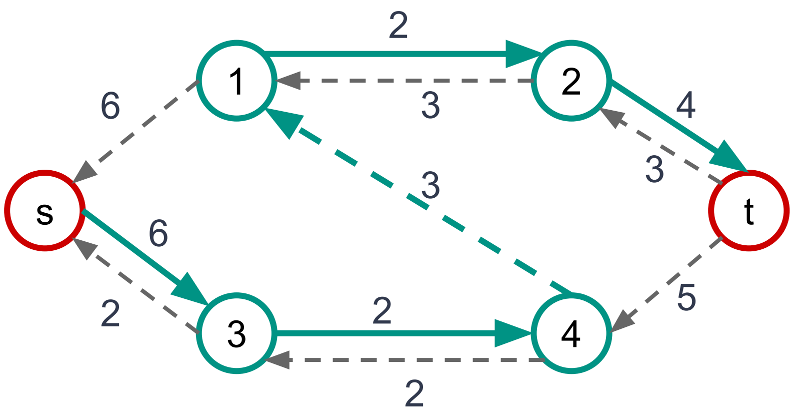


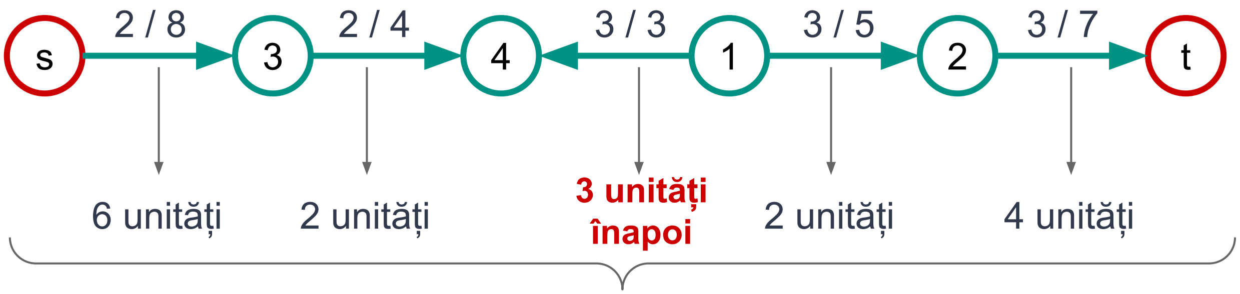
Graf rezidual

Rețeaua de transport



Graful rezidual

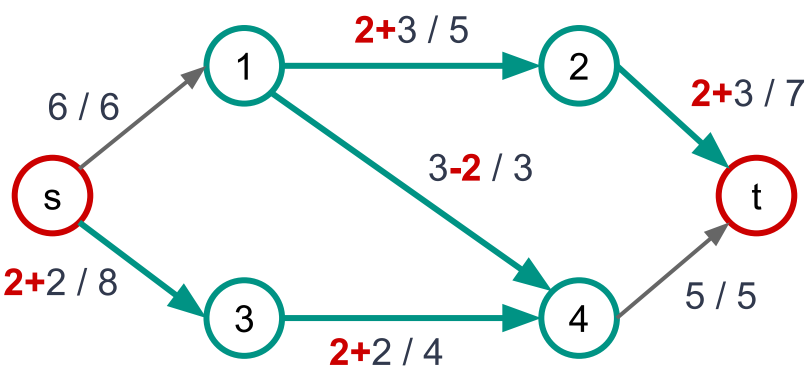




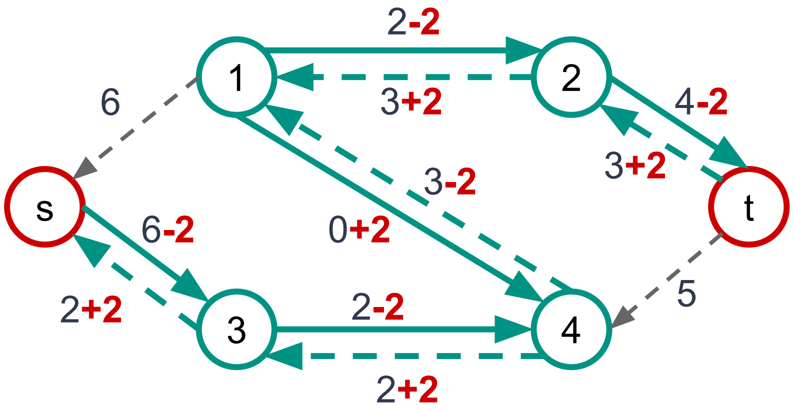
2 unități de-a lungul întregului drum

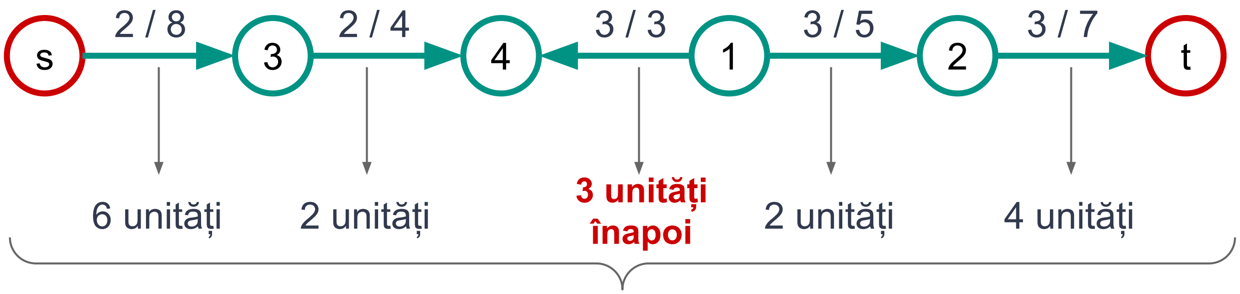
Graf rezidual

Rețeaua de transport



Graful rezidual

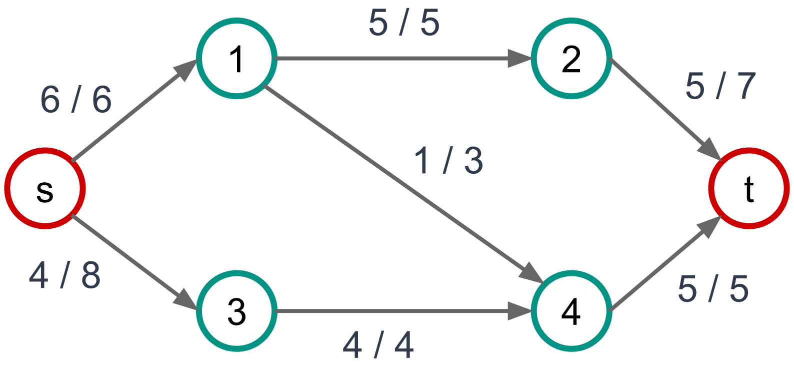




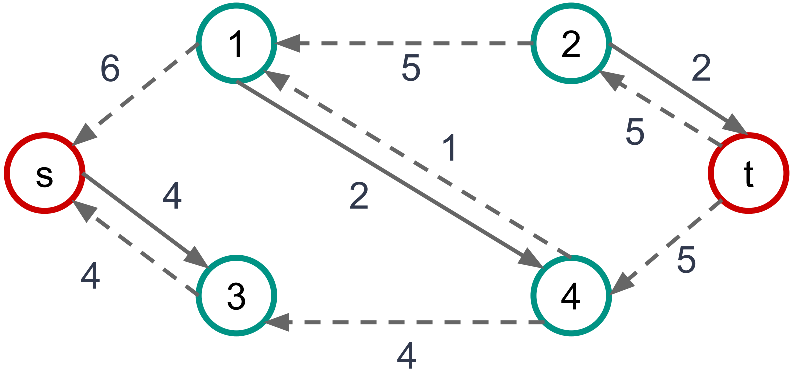
2 unități de-a lungul întregului drum

Graf rezidual

Rețeaua de transport



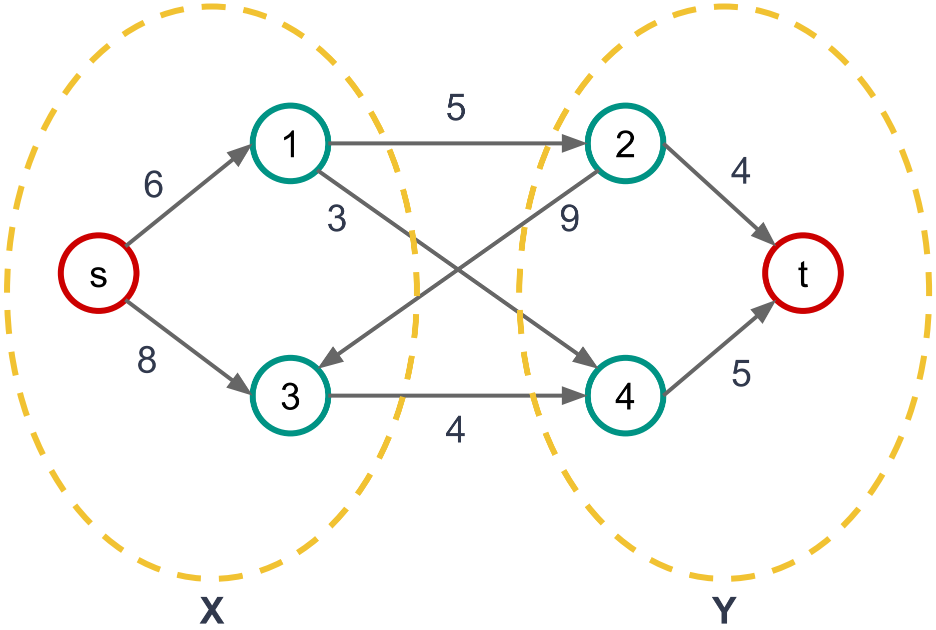
Graful rezidual



Tăietură în rețea

Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o rețea.

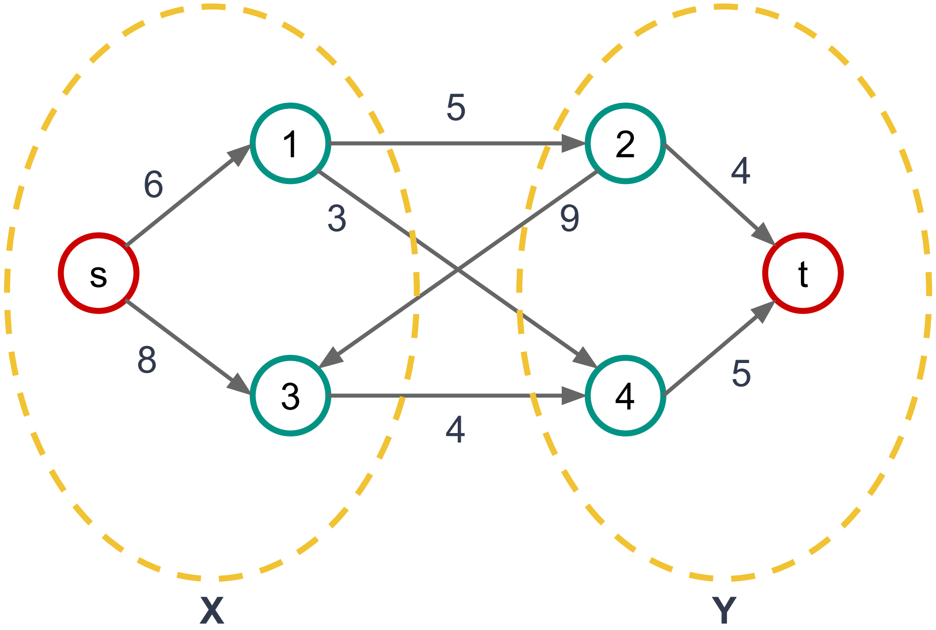
O **tăietură** K = (X, Y) în rețea



Tăietură în rețea

Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o rețea.

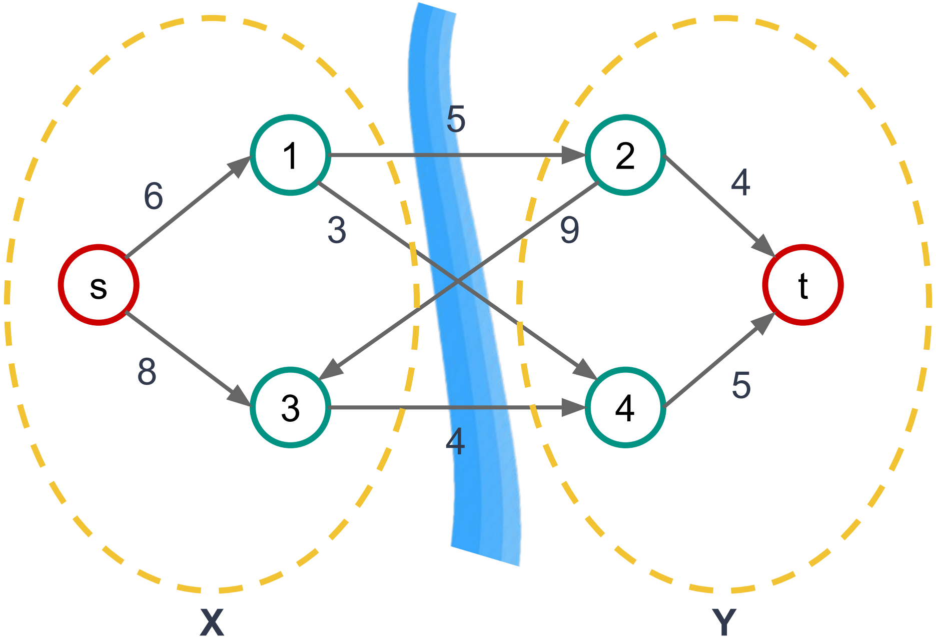
O **tăietură** K = (X, Y) în rețea este o (bi)partiție (X, Y) a mulțimii vârfurilor V, astfel încât s ∈ X și t ∈ Y.



Tăietură în rețea

Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o rețea.

O **tăietură** K = (X, Y) în rețea este o bipartiție (X, Y) a mulțimii vârfurilor V, astfel încât s ∈ X și t ∈ Y.



Tăietură în rețea

Fie K = (X, Y) o tăietură.

Capacitatea tăieturii K = (X, Y)

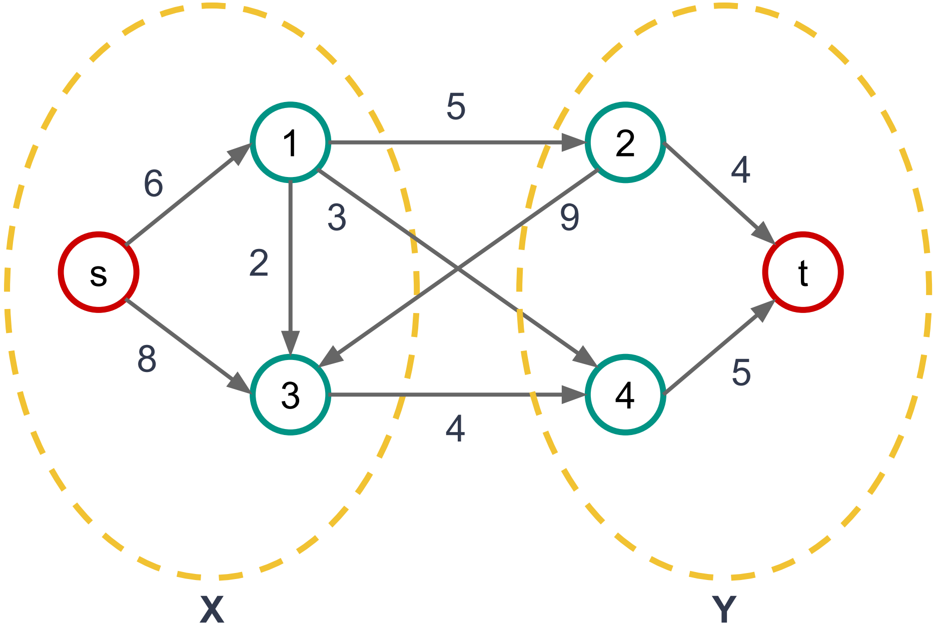
$$c(K) = c(X, Y) = \sum_{\substack{x \in X, y \in Y \\ xy \in E}} c(xy)$$

= suma capacităților arcelor care ies din X către Y

Tăietură în rețea

Fie K = (X, Y) o tăietură.

Capacitatea tăieturii K = (X, Y)

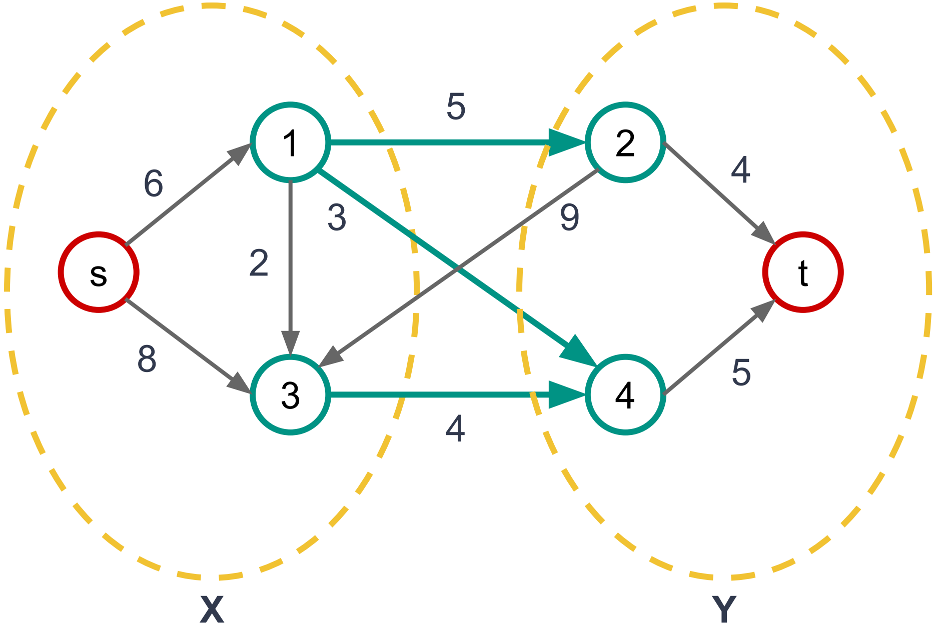


c(K) = c(X, Y) = ?

Tăietură în rețea

Fie K = (X, Y) o tăietură.

Capacitatea tăieturii K = (X, Y)



c(K) = c(X, Y) = 5 + 3 + 4 = 12

Tăietură în rețea

Fie K = (X, Y) o tăietură.

Capacitatea tăieturii K = (X, Y)

$$c(K) = \sum_{\substack{x \in X, y \in Y \\ xy \in E}} c(xy)$$

= suma capacităților arcelor care ies din X către Y

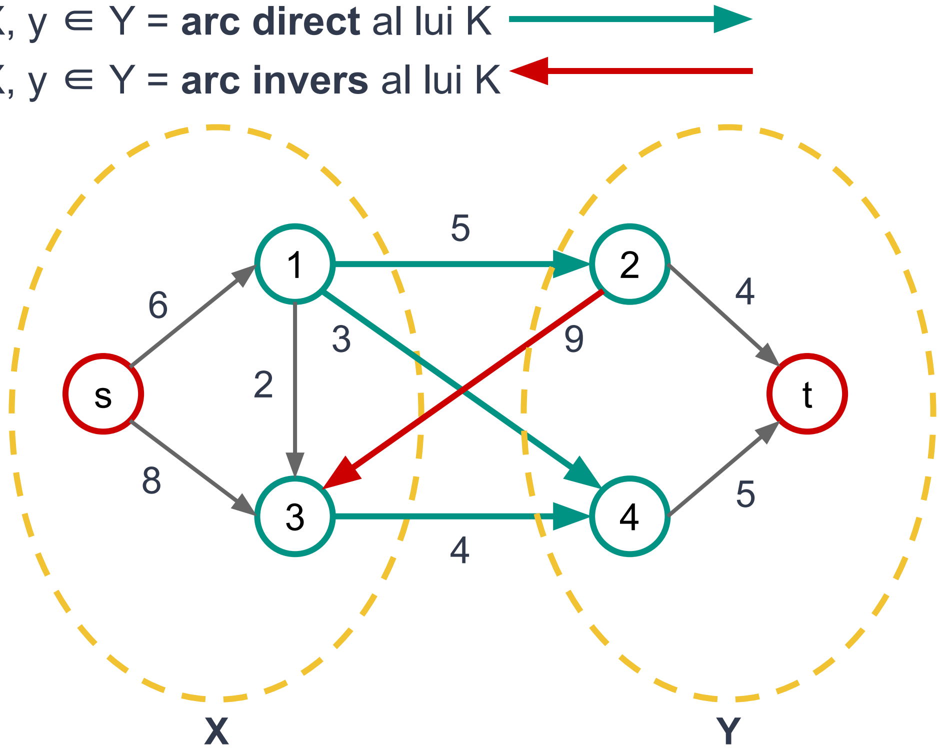
Notăm:

- $E^+(K)$ = mulțimea arcelor de la X la Y
  = { xy ∈ E | x ∈ X, y ∈ Y } = **arce directe** ale lui K
- $E^-(K)$ = mulțimea arcelor de la Y la X
  = { yx ∈ E | x ∈ X, y ∈ Y } = **arce inverse** ale lui K

Tăietură în rețea

Fie K = (X, Y) o tăietură.

- $xy \in E$ cu $x \in X$, $y \in Y$ = **arc direct** al lui K
- $yx \in E$ cu $x \in X$, $y \in Y$ = **arc invers** al lui K



Tăietură în rețea

Fie K = (X, Y) o tăietură.

Notăm:

- $E^{+}(K)$ = mulțimea arcelor de la X la Y
  = $\{ xy \in E \mid x \in X, y \in Y \}$ = **arce directe** ale lui K
- $E^{-}(K)$ = mulțimea arcelor de la Y la X
  = $\{ yx \in E \mid x \in X, y \in Y \}$ = **arce inverse** ale lui K

Atunci avem

$$c(K) = c(E^{+}(K))$$

Tăietură minimă

Fie N o rețea.

O tăietură $\widetilde{K}$ se numește **tăietură minimă în N** dacă

$$c(\widetilde{K}) = \min \{ c(K) \mid K \text{ este tăietură în N} \}$$

Tăietură minimă

Vom demonstra

$$val(f) \leq c(K)$$

Dacă avem egalitate ⇒ f flux maxim, K tăietură minimă

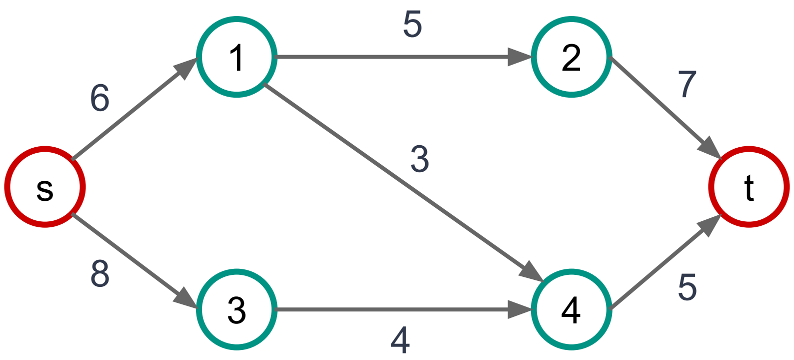
Tăietură minimă - Aplicații

Determinarea unui flux maxim ⇒ determinarea unei tăieturi minime

Aplicații

- **Arce = poduri**
- **Capacitate = costul dărâmării podului**

Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația, iar costul distrugerilor să fie minim?



Tăietură minimă - Aplicații

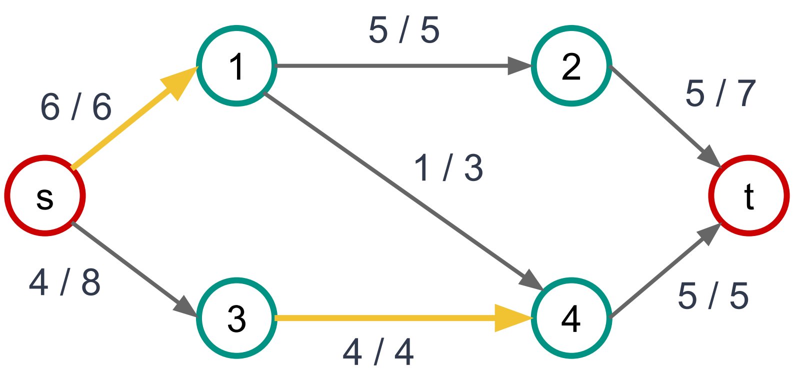
Determinarea unui flux maxim ⇒ determinarea unei tăieturi minime

Aplicații

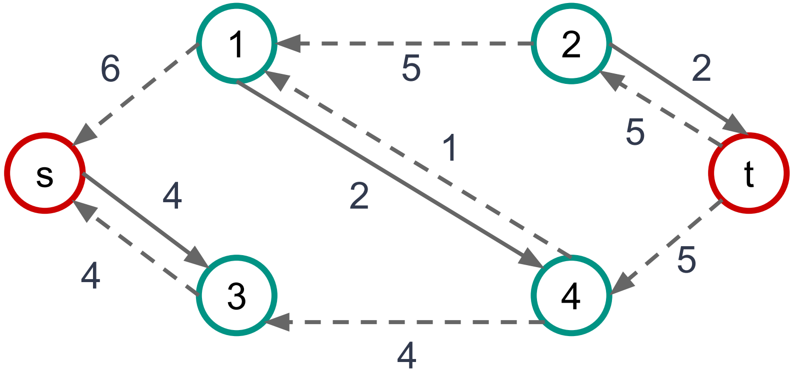
- **Fiabilitatea rețelelor**
- **Probleme de proiectare, planificare**
- **Segmentarea imaginilor**

Tăietură minimă

Rețeaua de transport



Graful rezidual



s-t tăietură saturată rezidual
⇔ nu mai există s-t drum în graful rezidual
⇔ s-t flux maxim

Algoritmul Ford-Fulkerson

Pseudocod

Algoritmul Ford–Fulkerson

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim

Fie f un flux în N (de exemplu, $f \equiv 0$ fluxul vid: $f(e) = 0, \ \forall\ e \in E$)

Cât timp **există un s-t lanț f-nesaturat P în G**

□

□

Algoritmul Ford–Fulkerson

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim

Fie f un flux în N (de exemplu, $f \equiv 0$ fluxul vid: $f(e) = 0, \forall e \in E$)

Cât timp **există un s-t lanț f-nesaturat P în G**

- determinăm un astfel de lanț P
-

Algoritmul Ford–Fulkerson

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim

Fie f un flux în N (de exemplu, $f \equiv 0$ fluxul vid: $f(e) = 0, \forall e \in E$)

Cât timp **există un s-t lanț f-nesaturat P în G**

- determinăm un astfel de lanț P
- revizuiește fluxul f de-a lungul lanțului P

Returnează f

Algoritmul Ford–Fulkerson

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim

Pentru a determina și o s-t tăietură minimă, la finalul algoritmului considerăm:

- X = mulțimea vârfurilor accesibile din s prin lanțuri f-nesaturate
- K = (X, V-X)

Algoritmul Ford-Fulkerson

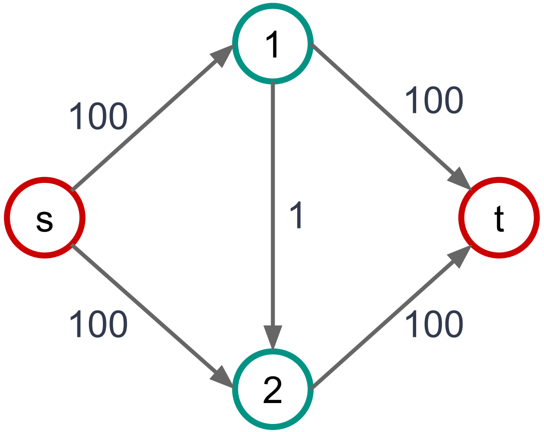
Complexitate

Algoritmul Ford–Fulkerson - Complexitate

- **Algoritmul se termină?**
- **De ce este necesară ipoteza că fluxul are valori întregi?**
- **Care este numărul maxim de etape?**
  - Cum determinăm un lanț f-nesaturat?
  - Criteriul după care construim lanțul f-nesaturat influențează numărul de etape (iterații ”cât timp”)?

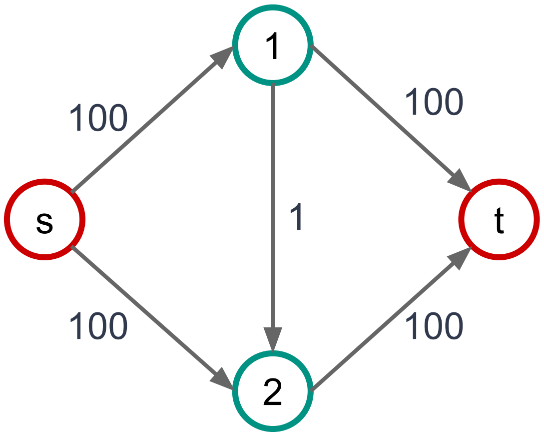
Algoritmul Ford-Fulkerson - Complexitate

Criteriul după care construim lanțul f-nesaturat influențează numărul de etape (iterații ”cât timp”)?



Algoritmul Ford–Fulkerson – Complexitate

Criteriul după care construim lanțul f-nesaturat influențează numărul de etape (iterații ”cât timp”)?



Pasul 1: [s, 1, 2, t] - i(P) = 1

Pasul 2: [s, 2, 1, t] - i(P) = 1

Pasul 3: [s, 1, 2, t] - i(P) = 1

Pasul 4: [s, 2, 1, t] - i(P) = 1

...

Algoritmul Ford–Fulkerson - Complexitate

Complexitate

Algoritmul Ford–Fulkerson - Complexitate

Complexitate

- O(mL), unde

  L = capacitatea minimă a unei tăieturi ≤ $\sum_{su \in E} c(su)$

- O(nmC), unde

  C = $max\{c(e) | e \in E(G)\}$

Algoritmul Ford–Fulkerson

- **Cum determinăm un lanț f-nesaturat?**

Algoritmul Ford–Fulkerson

- **Spre exemplu, prin parcurgerea grafului, pornind din vârful s și considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă** (în raport cu lanțurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

= **s-t drum în graful rezidual**

Algoritmul Ford–Fulkerson

- **Spre exemplu, prin parcurgerea grafului, pornind din vârful s și considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă** (în raport cu lanțurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

Parcurgerea BF ⇒

determinăm s-t lanțuri f-nesaturate de lungime minimă

⇒ Algoritmul EDMONDS-KARP

= Ford-Fulkerson, în care lanțul P ales la un pas are lungime minimă

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Spre exemplu, prin parcurgerea grafului, pornind din vârful s și considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă** (în raport cu lanțurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

Alte criterii de construcție lanț ⇒ alți algoritmi

Algoritmul Ford–Fulkerson - Complexitate

Complexitate O(mL), unde

L = $\sum_{su \in E} c(su)$

Algoritmul Ford–Fulkerson - Complexitate

Complexitate O(mC), unde

$$C = c(\{s\}, V-\{s\}) = c^+(s)$$

Algoritmul Ford-Fulkerson

Corectitudine

Algoritmul Ford–Fulkerson

- **Fluxul determinat de algoritm are valoarea maximă, sau putem determina un flux de valoare mai mare, prin alte metode?**

Trebuie să arătăm că

$\nexists$ s-t lanț f-nesaturat $\Rightarrow$ f flux maxim

Algoritmul Ford–Fulkerson

Vom demonstra că

- **val(f) ≤ c(K)   pentru orice f flux, K tăietură**
-

Algoritmul Ford–Fulkerson

Vom demonstra că

- **val(f) ≤ c(K)   pentru orice f flux, K tăietură**
- **∄ s-t lanț f-nesaturat ⇒ ∃ K cu val(f) = c(K) ⇒ f flux maxim**