Exemple:

1. $\underset{4}{\mathbb{R}^4} = \underset{2}{\{(x,y,0,0)\}} \oplus \underset{2}{\{(0,0,z,t)\}}$

2. $\underset{n^2}{\mathcal{M}_n(K)} = \underset{\frac{n(n+1)}{2}}{\{A \mid {}^tA = A\}} \oplus \underset{\frac{n(n-1)}{2}}{\{A \mid {}^tA = -A\}}$

3. $\underset{n^2}{\mathcal{M}_n(K)} = \underbrace{\{A \mid \operatorname{Tr}A = 0\}}_{V_1,\ n^2-1} + \underbrace{\{A \mid A = \lambda I_n, \lambda \in K\}}_{V_2,\ 1}$

V_1, V_2 ssp. vect. ale lui $\mathcal{M}_n(K)$

Avem: $\underline{\mathcal{M}_n(K) = V_1 \oplus V_2}$ $\{\dim \mathcal{M}_n(K) = \dim V_1 + \dim V_2\}$

Evident: $V_1 + V_2 \subset \mathcal{M}_n(K)$. Ar. că: $\mathcal{M}_n(K) \subset V_1 + V_2$

i.e. $(\forall) A \in \mathcal{M}_n(K)$, $(\exists) A_1 \in V_1, A_2 \in V_2$ a.î. $A = A_1 + A_2$

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ și $A_1 = \left(a_{ij} - \frac{\operatorname{tr}A}{n}\delta_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$

Obs. că: $\operatorname{Tr}A_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii} - \frac{\operatorname{tr}A}{n}\right) = \operatorname{Tr}A - n\frac{\operatorname{Tr}A}{n} = 0 \Rightarrow A_1 \in V_1$

Luăm: $A_2 = A - A_1 = \left(\frac{\operatorname{tr}A}{n}\delta_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$

$\Rightarrow A_2 = \lambda I_n$, unde $\lambda = \frac{\operatorname{tr}A}{n} \Rightarrow A_2 \in V_2$.

Deci: $A = A_1 + A_2$.

Ar. că: $V_1 \cap V_2 = \{O_n\}$

Fie $A \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{Tr}A = 0 \\ A = \lambda I_n\end{cases} \Rightarrow \operatorname{Tr}A = n\lambda = 0$
$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow A = O_n$.

• $\boxed{\text{Aplicații liniare (Morfisme de sp. vectoriale)}}$

Def: Fie $V, W/_K$ – spații vectoriale.

O aplicație $f: V \to W$ s.n. apl. liniară (sau morf. de sp. vect.)

dacă: $\begin{cases}1)\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ 2)\ f(\lambda x) = \lambda f(x)\end{cases}$, $(\forall)\ x, y \in V$, $\lambda \in K$ $\Leftrightarrow [f(\alpha x + \beta y) =$
$= \alpha f(x) + \beta f(y), (\forall)\ x, y \in V, \alpha, \beta \in K]$

Obs: $f(0_V) = 0_W$

Exemple:

1) V/K sp. vect.

$0_V : V \to V$, $0_V(x) = 0$, $(\forall) x \in V$ (apl. nulă)

$1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$, $(\forall) x \in V$ (apl. identică)

2) $T_r : \mathcal{M}_n(K) \to K$, $T_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (apl. urmă)

Avem: $T_r(A+B) = T_r A + T_r B$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(K)$
$T_r(\lambda A) = \lambda T_r A$, $\lambda \in K$

3) $f : \mathcal{M}_n(K) \to K^{n^2}$

$f(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$, $(\forall) A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

4) Fie $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$f_A : K^n \to K^m$, $f_A(X) = \underset{(m,n)(n,1)\to(m,1)}{AX}$

Avem: $f_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f_A(X) + f_A(Y)$, $(\forall) X, Y \in K^n$

$f_A(\lambda X) = A(\lambda X) = (A\lambda)X = (\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda f_A(X)$, $(\forall) X \in K^n$, $\lambda \in K$

Obs: 1) $(\exists)$ tot atâtea apl. liniare câte matrice.
2) $(\forall)$ apl. liniară e de tipul acesta.

5) $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ nu e apl. liniară pt. că $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Fie $f : V \to W$ apl. liniară

Definim: $\underset{(\text{nucleul})}{\mathrm{Ker} f} = \{x \in V / f(x) = 0_W\} \subseteq V$

$\underset{(\text{imaginea})}{\mathrm{Im} f} = \{y \in W / (\exists) x \in V \text{ a.î. } f(x) = y\} \subseteq W$

$\boxed{P}$ $\mathrm{Ker} f$ (respectiv $\mathrm{Im} f$) e subsp. vect. în V (resp. W).

Dem: Fie: $x, y \in \mathrm{Ker} f$, $\alpha, \beta \in K$: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{f(x)}_{0} + \beta \underbrace{f(y)}_{0} = 0_W \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \mathrm{Ker} f$
$\Rightarrow \mathrm{Ker} f \subseteq V$ ssp. vect.

Fie: $z, t \in \mathrm{Im} f \Rightarrow (\exists) x, y \in V$ a.î. $f(x) = z$, $f(y) = t$
$\alpha, \beta \in K$

$\alpha z + \beta t = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha z + \beta t \in \mathrm{Im} f$
$\Rightarrow \mathrm{Im} f \subseteq W$ ssp. vect.

Semnificația acestor subsp. vect. în studiul apl. lin rezultă și din

$\boxed{P}$ a) O apl. lin. $f: V \to W$ e inj. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0_V\}$

b) O apl. lin. $f: V \to W$ e surj $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} f = W$

c) O apl. lin $f: V \to W$ e bij $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mathrm{Ker} f = \{0_V\} \\ \mathrm{Im} f = W \end{cases}$

Dem: a) Fie $f: V \to W$ inj. și $x \in \mathrm{Ker} f$

$\underline{f(x) = f(0_V)} = 0_W \Rightarrow x = 0_V \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_V\}$

Reciproc, dacă $\mathrm{Ker} f = \{0_V\}$, fie $x_1, x_2 \in V$

Pp. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0_W \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker} f$

Dar $\mathrm{Ker} f = \{0_V\}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Deci f inj.

b) $\left[\begin{array}{l} f \text{ surj} \Rightarrow \mathrm{Im} f = W \\ \text{Reciproc, dacă } \mathrm{Im} f = W \Rightarrow f \text{ surj.} \end{array}\right]$ Evident.

C4

Def: O apl. lin $f: V \to W$ bij. s.n. izomorfism al sp. vect V și W. Exemplu ③ e izomorf de sp. vect.

$\boxed{T}$ Fie $V, W/K$ – 2 sp. vect.

$f: V \to W$ apl. lin.

Atunci: $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V$ (Tehnica de dem. e asemănătoare cele din T.G)

Dem: Fie $\underbrace{\{e_1, \dots, e_r\}}_{\text{bază}} \subset \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(e_i) = 0, (\forall) i = \overline{1,r}$ (*)

$\Rightarrow B = \underbrace{\{e_1, \dots, e_r, \dots, e_n\}}_{\text{bază}} \subset V \Rightarrow (\forall) x \in V$ avem: $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \alpha_i \in K$

$\Rightarrow f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_r f(e_r) + \alpha_{r+1} f(e_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(e_n)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = \alpha_{r+1} f(e_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(e_n)$

$\Rightarrow G = \underbrace{\{f(e_{r+1}), \dots, f(e_n)\}}_{\text{sist. de gen. pt. } \mathrm{Im} f} \subset \mathrm{Im} f$

Dem că: G bază pt. $\mathrm{Im} f$, în consecință arătăm că G – s.v. lin. ind.

Fie: $\beta_{r+1} f(e_{r+1}) + \dots + \beta_n f(e_n) = 0_W \overset{f \text{ lin}}{\Rightarrow} f(\beta_{r+1} e_{r+1} + \dots + \beta_n e_n) = 0_W$

$\Rightarrow \beta_{r+1} e_{r+1} + \dots + \beta_n e_n \in \mathrm{Ker} f \underset{\substack{\{e_1, \dots, e_r\} \\ \text{bază pt. } \mathrm{Ker} f}}{\Rightarrow} (\exists)\ \gamma_1, \dots, \gamma_r \in K$ a.î.

$\beta_{r+1} e_{r+1} + \dots + \beta_n e_n = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r \Rightarrow \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r - \beta_{r+1} e_{r+1} - \dots$

$- \beta_n e_n = 0_V \underset{\substack{B \subset V \\ \text{bază}}}{\Rightarrow} \gamma_1 = \dots = \gamma_r = \beta_{r+1} = \dots = \beta_n = 0 \Rightarrow$ S.V.L.I.

1

Deci. $G \subset \mathrm{Im} f$
bază $\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = n-r$

Avem: $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = r+n-r = n = \dim V$ q.e.d.

$\boxed{T}$ Fie $V_1, V_2 /_K$ – sp. vect.
$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Dem: „$\Leftarrow$" Fie $\dim V_1 = \dim V_2 = n$
și $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V_1$
$B_2 = \{f_1, \dots, f_n\} \subset V_2$
baze

Definim $f : V_1 \to V_2$ apl. lin.
$f(e_i) = f_i, (\forall) i = \overline{1,n}$

$(\forall)\ x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V_1 \Rightarrow f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j \in V_2$

Arătăm că f bijectivă.

1) f inj. $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$
Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = 0_{V_2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0_{V_2}$
$\xRightarrow{B_2 \subset V_2 \text{ bază}} x_i = 0, (\forall) i = \overline{1,n} \Rightarrow x = 0_{V_1}$

2) f surj $\Leftrightarrow f(V_1) = V_2$
Fie $y \in V_2 \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(e_i) = f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i}_{\text{not. } x \in V_1}\right) = f(x)$

Deci: $f : V_1 \to V_2$ apl. lin. bij., deci izomorfism ($V_1 \cong V_2$)

„$\Rightarrow$" Fie $V_1 \overset{f\ \text{izo}}{\cong} V_2$ și $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V_1$ ($\dim V_1 = n$)
bază

Luăm $B_2 = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \subset V_2$ și arătăm că B_2 bază pt. V_2
(i.e. $\dim V_2 = n$)

1) B_2 - s.v. l.i.
$\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = 0_{V_2} \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = 0_{V_2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathrm{Ker} f$
Dar: f inj $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_{V_1}\}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0_{V_1} \xRightarrow{B_1 \text{ bază}} x_i = 0, (\forall) i = \overline{1,n}$ ✓

2) B_2 - s. de gen. pt. V_2
f surj $\Rightarrow (\forall)\ y \in V_2, (\exists) x \in V_1$ a.î. $y = f(x)$
Dar: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ deoarece $B_1 \subset V_1$ bază $\Bigg| \Rightarrow$

$$y=f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i) \quad V$$

Deci: $\dim V_1=\dim V_2$.

! În particular, $(\forall)$ sp. vect. real, n-dimensional este izomorf cu $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$.

- **Matricea asociată unui morf. $f:V_1\to V_2$ când se fixează un reper în V_1 și un reper în V_2**

Fie $f:V_1 \to V_2$ apl. lin.

V_1 (n), V_2 (m)

$B_1=\{e_1,\dots,e_n\}\subset V_1$

$B_2=\{f_1,\dots,f_m\}\subset V_2$

2 repere vectoriale

Avem: $f(e_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}f_j$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$

$f(e_i)\in V_2$

$A=(a_{ji})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}\in\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

s.n. matricea asoc. apl. lin. f la fixarea rep. $B_1\subset V_1$ și $B_2\subset V_2$

<u>Schimbarea reperului</u>

Fie $B_1'=\{e_1',\dots,e_n'\}\subset V_1$

$B_2'=\{f_1',\dots,f_m'\}\subset V_2$

alte 2 repere

Avem: $f(e_i')=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}'f_j'$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$

$A'=(a_{ji}')\in\mathcal{M}_{(m,n)}(K)\to$ m. asoc. lui f în rap. cu rep. B_1', resp. B_2'.

<u>Determinăm rel. dintre A și A'!</u>

Fie $B_1 \xrightarrow{C} B_1'$ și $B_2 \xrightarrow{D} B_2'$, C, D m. de trecere $\left\{ C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} ;\ D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,m}} \right\}$

Avem: $e_i' = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$

$f_i' = \sum_{l=1}^{m} d_{li} f_l$, $(\forall)\ i = \overline{1,m}$

$$f(e_i') = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} f_j\right) = \sum_{k,j} c_{ki} a_{jk} f_j$$

și

$$f(e_i') = \sum_{j=1}^{m} a'_{ji} f'_j = \sum_{j=1}^{m} a'_{ji}\left(\sum_{k=1}^{m} d_{kj} f_k\right) = \sum_{j,k} a'_{ji} d_{kj} f_k \Rightarrow$$

Deci: $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ avem: $\sum_{k=1}^{n} c_{ki} a_{jk} = \sum a'_{ki} d_{jk}$

Matriceal: $AC = DA' \mid \cdot D^{-1}$ la stg. $\Rightarrow \boxed{A' = D^{-1} A C}$

În particular, dacă $f: V \to V$ endomorf. al lui V, $\underbrace{B_1, B_1' \subset V}_{\text{2 repere}}$ și $B_1 \xrightarrow[\text{m. de trecere}]{C} B_1'$

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \to$ m. asoc. endom. f în rap. cu rep. B_1

$A' = (a'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \to$ ——— B_1'

Avem: $\boxed{A' = C^{-1} A C}$ (deoarece $D = C$)

$\Updownarrow$

$AC = CA'$

<u>SAU</u> (varianta matriceală).

Fie $f: V_1 \to V_2$ apl. lin.

$B_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V_1$
$B_2 = \{f_1, \dots, f_m\} \subset V_2$ > 2 repere vectoriale

Avem: $\underbrace{Y}_{(m,1)} = f(X) = \underbrace{AX}_{(m,n)(n,1)}$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ m. asoc. apl. lin. f în rap. cu rep. B_1, resp. B_2
$\left[f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i,\ (\forall)\ j = \overline{1,n} \right]$

Schimbarea reperului:

Fie $B_1' = \{e_1', \dots, e_n'\} \subset V_1$ alte 2 repere vect.
$B_2' = \{f_1', \dots, f_m'\} \subset V_2$

Avem: $Y' = f(X') = A'X'$, unde $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}$

$A' = (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K) \to$ m. asoc. lui f în rap. cu rep. B_1', rep. B_2'

Determinăm rel dintre A și A'!

Fie $B_1 \xrightarrow{C} B_1'$ și $B_2 \xrightarrow{D} B_2'$, $C, D \to$ m. de trecere
$C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$

Avem: $X = CX'$, $\{ e_i' = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, (\forall) i = \overline{1,n} \}$
$Y = DY'$, $\{ f_j' = \sum_{l=1}^{m} d_{lj} f_l, (\forall) j = \overline{1,m} \}$

Matriceal, obținem:
$Y = AX \Rightarrow DY' = A(CX') = (AC)X' \Rightarrow Y' = D^{-1}ACX'$
Dar: $Y' = A'X'$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\underset{(m,n)}{A'} = \underset{(m,m)}{D^{-1}} \underset{(m,n)}{A} \underset{(n,n)}{C}}$

În particular, dacă $f: V \to V$ endomorf. al lui V
$B_1, B_1' \subset V$ 2 repere și $B_1 \xrightarrow{C} B_1'$ m. de trecere

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \to$ m. asoc. endom. f în rap. cu rep. B_1
$A' = (a'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \to$ —————"————— B_1'

Avem cazul particular: $D = C \Rightarrow \boxed{\underset{(n,n)}{A'} = \underset{(n,n)}{C^{-1}} \underset{(n,n)}{A} C}$
$\Updownarrow$
$AC = CA'$