FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen ianuarie 2021

Indicaţii:

- În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

  Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

  - două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
  - un simbol de operaţie unară f;
  - un simbol de constantă c.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1,5 puncte] Fie Δ, Θ mulţimi satisfiabile de formule ale logicii propoziţionale LP astfel încât

(i) $\Delta \subseteq \Theta$;

(ii) pentru orice formulă φ, avem că $\varphi \in \Delta$ sau $\neg\varphi \in \Delta$.

Să se arate că $\Delta = \Theta$.

(P2) [1,5 puncte] Fie ψ, σ formule în logica propoziţională LP. Să se arate că

$$\vdash \psi \to (\psi \vee \sigma).$$

(P3) [1,5 puncte] Fie LP logica propoziţională. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, definim evaluarea $e_k : V \to \{0,1\}$ astfel: pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = k; \\ 1, & \text{dacă } n \neq k. \end{cases}$$

Notăm $\mathcal{E} := \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că nu există $\Delta \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Delta) = \mathcal{E}$.

(P4) [1,5 puncte] Fie Γ, Δ mulţimi de enunţuri dintr-un limbaj de ordinul întâi astfel încât Δ este finită şi $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. Să se arate că există o submulţime finită Γ' a lui Γ astfel încât $Mod(\Gamma) = Mod(\Gamma')$.

(P5) [1,5 puncte] Considerăm limbajul egalităţii $\mathcal{L}_=$.

(i) Să se dea exemplu de mulţime de $\mathcal{L}_=$-enunţuri Γ ce are proprietatea că pentru orice $\mathcal{L}_=$-structură $\mathcal{A} = (A)$ (unde A este o mulţime nevidă), avem:

$$\mathcal{A} \models \Gamma \text{ dacă şi numai dacă } A \text{ are un număr impar de elemente.}$$

(ii) Să se axiomatizeze clasa mulţimilor care au între 10 şi 40 elemente sau între 101 şi 130 elemente.

(P6) [1,5 puncte]

(i) Fie B o mulţime numărabilă şi C o mulţime nevidă cel mult numărabilă. Demonstraţi că $B \cup C$ şi $B \times C$ sunt numărabile.

(ii) Fie $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) şi $D_1, \ldots, D_n$ mulţimi numărabile. Demonstraţi că $D_1 \times D_2 \ldots \times D_n$ este mulţime numărabilă.

Partea II. Probleme de tip grilă

(P7) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, C_2 = \{\neg v_2, v_4\}, C_3 = \{\neg v_1, v_3\}, C_4 = \{v_1, v_4\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezoluţie?
☐ A: $C_5 = \{\neg v_2, \neg v_1, v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_3).
☐ B: $C_5 = \{v_2, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_4) şi $C_6 = \{\neg v_1, v_2, v_4\}$ (rezolvent al C_3, C_5).
☐ C: $C_5 = \{v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_3) şi $C_6 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_2, C_5).
☐ D: $C_5 = \{v_1, \neg v_2\}$ (rezolvent al C_2, C_4) şi $C_6 = \{v_1, v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_5).
☐ E: $C_5 = \{v_1, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_2) şi $C_6 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_3, C_5).

(P8) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Considerăm formulele:

$$\varphi := x \dot{<} \dot{3} \text{ şi } \psi := \neg(x \dot{<} \dot{5}), \text{ unde } \dot{3} := \dot{S}\dot{S}\dot{S}\dot{0},\ \dot{5} := \dot{S}\dot{S}\dot{3}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $\mathcal{N} \models (\exists x \psi)[e]$.
☐ B: $\mathcal{N} \models (\exists x \varphi \to \forall x \psi)[e]$.
☐ C: $\mathcal{N} \models (\varphi \vee \psi)[e_{x \leftarrow 7}]$.
☐ D: $\mathcal{N} \models (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e]$.
☐ E: $\mathcal{N} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow 4}]$.

(P9) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \forall x S(x) \wedge \neg \exists y S(y)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\exists x \forall y(\neg S(x) \wedge \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\exists x \exists y(S(x) \vee S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ C: $\forall x \forall y(\neg S(x) \wedge \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\forall x \forall y(S(x) \wedge \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\exists x \exists y \neg(\neg S(x) \vee S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.

(P10) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\varphi := (v_1 \wedge v_3) \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3))$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: φ este tautologie.
☐ B: φ nu este tautologie.
☐ C: Dacă e este o evaluare astfel încât $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e(v_1) = e(v_2) = 1$ şi $e(v_3) = 0$.
☐ D: φ nu este satisfiabilă.
☐ E: Dacă e este o evaluare astfel încât $e(v_1) = e(v_3)$ şi $e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\varphi) = 1$.

(P11) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\theta := \neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \to (v_1 \to v_2)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \wedge v_2) \to (\neg v_2 \vee \neg v_1))$ pentru orice evaluare e.
☐ B: $e^+(\theta) = e^+(v_1 \vee (\neg v_1 \to v_2))$ pentru orice evaluare e.
☐ C: $e^+(\theta) = e^+(\neg(v_1 \vee v_2) \to v_1)$ pentru orice evaluare e.
☐ D: $e^+(\theta) = e^+(v_1 \to (\neg v_1 \to v_2))$ pentru orice evaluare e.
☐ E: $e^+(\theta) = e^+(\neg(v_1 \vee v_2) \to \neg v_1)$ pentru orice evaluare e.

(P12) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \neg\forall y\,((f(y) = c) \to \exists x S(x)) \to (\exists x T(x) \vee \forall y T(y))$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\forall y \forall x \forall u \forall v\,(((f(y) = c) \to S(x)) \vee (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\exists y \forall x \exists u \forall v\,(\neg\,((f(y) = c) \to S(x)) \to (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ C: $\forall y \exists x \exists u \forall v\,(\neg\,((f(y) = c) \to S(x)) \to (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\forall y \exists x \exists u \forall v\,(((f(y) = c) \to S(x)) \vee \neg\,(T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\exists y \forall x \forall u \exists v\,(\neg\,((f(y) = c) \to S(x)) \to (T(u) \vee T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.

(P13) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := (v_1 \to (v_2 \vee v_3)) \to (v_2 \wedge \neg v_3)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FND a lui φ.
☐ B: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_2 \wedge \neg v_3)$ este FND a lui φ.
☐ C: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee v_2 \vee \neg v_3$ este FND a lui φ.
☐ D: $(v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_3) \vee (v_2 \wedge v_3)$ este FND a lui φ.
☐ E: $(v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_2 \vee \neg v_3)$ este FND a lui φ.

(P14) [2 răspunsuri corecte] Fie următorul enunţ în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \exists y \forall x \forall z \exists v((T(x) \to R(x, y)) \vee (S(v) \to R(z, v)))$$

Care dintre următoarele formule sunt forme normale Skolem pentru φ?
☐ A: $\forall x \forall z((T(x) \to R(x, l)) \vee (S(h(z)) \to R(z, h(z))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar h este simbol nou de operaţie unară.
☐ B: $\forall x \forall z((T(x) \to R(x, e)) \vee (S(h(x, z)) \to R(z, h(x, z))))$, unde e este simbol nou de constantă, iar h este simbol nou de operaţie binară.

☐ C: $\forall x \forall z((T(x) \rightarrow R(x, l)) \vee (S(n(x, z)) \rightarrow R(z, n(x, z))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operaţie binară.
☐ D: $\forall x \forall z((T(e(x)) \rightarrow R(e(x), y)) \vee (S(h(v)) \rightarrow R(z, h(v))))$, unde e este simbol nou de constantă, iar h este simbol nou de operaţie unară.
☐ E: $\forall x \forall z((T(x) \rightarrow R(x, l(x))) \vee (S(h(x, z)) \rightarrow R(z, h(z))))$,unde h şi l sunt simboluri noi de operaţii binare.

(P15) [1 răspuns corect] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_4\}, \{v_1, \neg v_2\}, \{v_1, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_4$, $x_3 := v_2$, $x_4 := v_3$ obţinem:
☐ A: $\mathcal{S}_5 = \{\{v_4\}\}$.
☐ B: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_3\}, \{\neg v_3\}\}$.
☐ C: $U_3 = \{\{v_3, \neg v_3\}\}$.
☐ D: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
☐ E: $U_4 = \{v_3\}$.

(P16) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := (v_1 \vee v_2) \rightarrow (\neg v_3 \rightarrow v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ B: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ C: $\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ D: $v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ E: $\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ.