Soluție ”Cadourile lui Moș Crăciun”

Ştefan Popescu

Cerință

(30p) O clasă de elevi este formată din m copii. La această clasă Moș Crăciun aduce n cadouri, fiecare dintre ele având o valoare notată $val_1, val_2, ..., val_n$. Moșul, grăbit fiind, lasă task-ul împărțirii cadourilor pe umerii profesorului de informatică. Acesta își alege următorul obiectiv pentru împărțirea cadourilor: sa maximizeze valoarea cadourilor primite de către copilul care primește cel mai puțin. (Altfel spus, copilul cel mai “vitregit” în urma împărțirii să primească totuși cadouri de o valoare cât mai bună / Să existe un “spread” cât mai bun al cadourilor). În timp ce se gândește la o soluție de implementare, profesorul își amintește de la cursurile de algoritmică din facultate că astfel de probleme de optim sunt NP-hard! Fiind cuprins de groază (dar și de o nostalgie pentru cursurile de algoritmică din facultate) el vă cere vouă ajutorul.

Notații:

OPT – soluția optimă care există: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai “vitregit” în o configurație optima

ALG – soluția oferită de algoritmul vostru: Valoarea totală a cadourilor primite de copilul cel mai “vitregit” în urma algoritmului vostru

$C[k]$ - lista cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$W(K)$ – valoarea totala a cadourilor primite de către copilul k la finalul algoritmului vostru

$val(i)$ – valoarea cadoului i

$Val = \sum_{1 \le i \le n} val(i)$ – valoarea totală a cadourilor

Copiii vor fi indexați folosind variabile de forma k, q, k', q', etc... Cadourile vor fi indexate folosind variabile de forma i, j, i', j', etc. . . .

Restricții: Considerăm că $n \ge m$ și că $val(i) \le \frac{Val}{2m}$ pentru oricare cadou i.

Cerințe:

a) Descrieți un algoritm $\frac{1}{2}$ aproximativ pentru problema cadourilor in complexitate $\mathcal{O}(n \log m)$ **(10p)**

b) Fie k acel copil pentru care $ALG = W(K)$. Fie i ultimul cadou primit de un copil oarecare q ($q \ne k$). Care este relația între $W(K)$ și $W(Q) - val(i)$? Justificaţi. **(5p)**

c) Pe baza punctului b) arătați că $ALG \ge \frac{Val}{2m}$ **(5p)**

d) Demonstrați că algoritmul descris la punctul a) este $\frac{1}{2}$ aproximativ **(5p)**

e) Dați un exemplu format din minimum 2 copii și 4 cadouri pentru care algoritmul vostru nu găsește soluția optima. Spuneți care este soluția optima. Spuneți care este soluția dată de algoritmul vostru. **(5p)**

Soluție

a) **for** $k \in [1:m]$ **do**: *// initializare*

  $C[k] \leftarrow \emptyset$; $W(K) \leftarrow 0$;

for $i \in [1:n]$ **do**: *// pentru fiecare cadou 'i'; $\mathcal{O}(n)$*

  $q \leftarrow k$ cu proprietatea ca W(K) - minima; *//alegem pe cel mai "vitregit" copil; $\mathcal{O}(\log m)$ cu minheap sau priority queue*

  $C[q] \leftarrow C[q] \cup \{i\}$ *//adaugam cadoul 'i' in lista de cadouri ale lui 'q'*

  $W(Q) \leftarrow W(Q) + val(i)$ *//se actualizeaza valoarea totala a cadourilor lui 'q'.*

b) Deoarece cadoul i este atribuit copilului q, înseamnă că, la acel moment, q avea cadourile de valoare totală cea mai mică, deci în mod evident mai mică decât cea a lui k. Deci avem relația $W(K) \geq W(Q) - val(i)$. Aceasta poate fi rescrisă ca $W(K) + val(i) \geq W(Q)$

c) Fie k acel copil pentru care $ALG = W(K)$. Vom presupune prin absurd că $W(K) < \frac{Val}{2m}$. Deoarece $W(K) + val(i) \geq W(Q)$ și $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$ avem:

$$\begin{aligned} Val = \sum_{1 \leq q \leq m} W(Q) &= W(K) + \sum_{1 \leq q \leq m}^{q \neq k} W(Q) \\ &\leq W(K) + (m-1)(W(K) + \frac{Val}{2m}) \\ &\leq m * W(K) + (m-1) * \frac{Val}{2m} \\ &< m * W(K) + \frac{Val}{2} \\ &< m * \frac{Val}{2m} + \frac{Val}{2} \\ &< \frac{Val}{2} + \frac{Val}{2} \\ &< Val(!) \end{aligned}$$

d) Știm că $OPT \leq \frac{Val}{m}$ (cazul unei egalități ar implica un "spread" perfect). Am demonstrat la punctul *c)* că $ALG \geq \frac{Val}{2m}$. Rezultă deci că $2 * ALG \geq \frac{Val}{m} \geq OPT$; Iar în final avem relația dorită: $\mathbf{ALG \geq \frac{1}{2} * OPT}$

e) * $m = 2$, $n = 4$; Cadourile au valorile: $2, 3, 1, 6$. [1] Soluția optimă implică faptul că primul copil primește cadoul 4 iar cel de-al doilea cadourile $1, 2, 3$. În acest caz ambii copii primesc cadouri în valoare de 6 unități. Algoritmul nostru va rezulta în alocarea primului copil cadourile $1, 3$, celui de-al doilea copil cadoul 2 iar cadoul 4 oricăruia dintre cei doi. În orice caz, copilul cel mai vitregit primește cadouri în valoare de doar 3 unități.

[1] Acest exemplu are o scăpare:nu respectă restricția $val(i) \leq \frac{Val}{2m}$