Sortarea topologică

Sortarea topologică

Fie G = (V, E) un **graf orientat**.

Sortarea topologică a lui G =

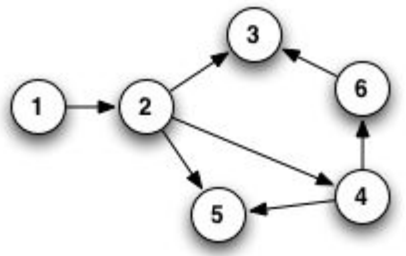
ordonarea vârfurilor astfel încât, dacă uv ∈ E, atunci u se află înaintea lui v în ordonare.

Nu este neapărat unică!

Sortarea topologică – Aplicații

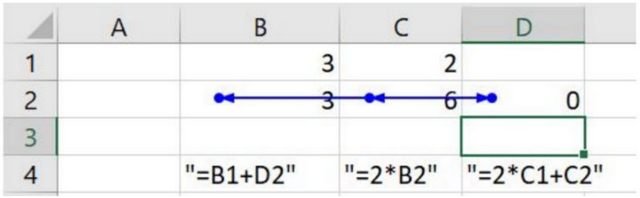
- Ordinea de calcul în proiecte în care intervin relații de dependență / precedență (**exemplu**: calcul de formule, ordinea de compilare când clasele/pachetele depind unele de altele)
- Detecție de deadlock
- Determinarea de drumuri critice

Activitatea 5 depinde de activitatea 4, deci trebuie să se desfășoare după ea



În ce ordine trebuie executate activitățile?

Formulele din celulele B2..D2

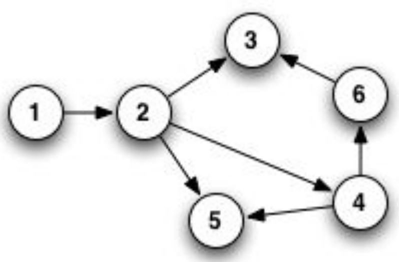


În ce ordine se evaluează formulele?

Probleme: dacă există dependențe circulare

Sortarea topologică – Aplicații

- planificarea de proiecte, ordinea de execuție a unor operații: compilarea pachetelor, ordinea de calcul a formulelor din excel etc
- determinarea de drumuri minime în grafuri fără circuite



În ce ordine trebuie executate activitățile?

	A	B	C	D
1		3	2	
2		3	6	0
3				
4		"=B1+D2"	"=2*B2"	"=2*C1+C2"

În ce ordine se evaluează formulele?

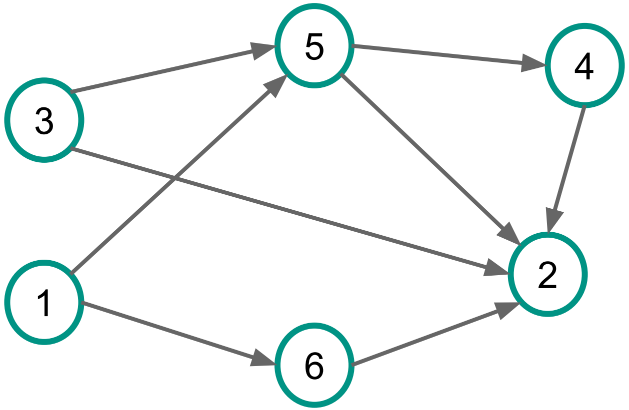
Probleme: dacă există dependențe circulare

Sortarea topologică

Fie G = (V, E) un **graf orientat**.

Sortarea topologică a lui G =

ordonarea vârfurilor astfel încât, dacă uv ∈ E, atunci u se află înaintea lui v în ordonare.



Sortarea topologică

Fie G = (V, E) un **graf orientat**.

Sortarea topologică a lui G =
ordonarea vârfurilor astfel încât, dacă $uv \in E$, atunci u se află înaintea lui v în ordonare.

Propoziție. Dacă G este aciclic, atunci G are o sortare topologică.

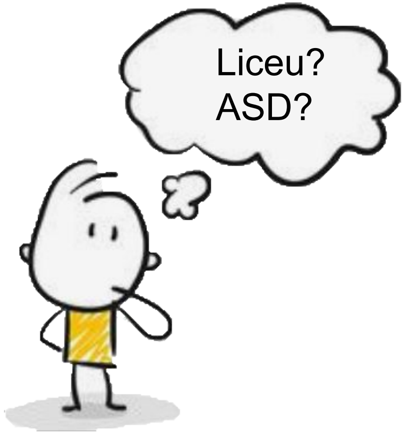
Sortarea topologică

Fie G = (V, E) un **graf orientat**.

Sortarea topologică a lui G =
ordonarea vârfurilor astfel încât, dacă uv ∈ E, atunci u se află înaintea lui v în ordonare.

Propoziție. Dacă G este aciclic, atunci G are o sortare topologică.

- Demonstrație ⇒ Algoritm?



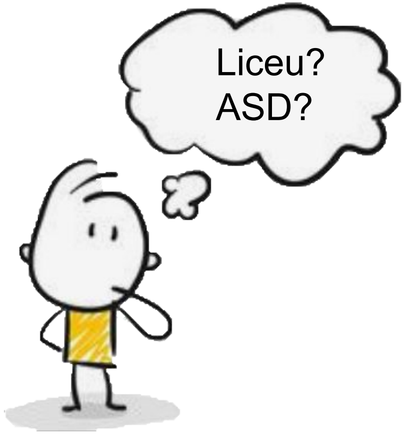
Sortarea topologică

Fie G = (V, E) un **graf orientat**.

Sortarea topologică a lui G =
ordonarea vârfurilor astfel încât, dacă uv ∈ E, atunci u se află înaintea lui v în ordonare.

Propoziție. Dacă G este aciclic, atunci G are o sortare topologică.

- Demonstrație ⇒ Algoritm?
- **Care poate fi primul nod în sortarea topologică?**



Sortarea topologică

Fie G = (V, E) **graf orientat.**

Lemă. Dacă G este aciclic, atunci G are cel puţin un vârf v cu gradul intern 0 ($d^-(v) = 0$).

Pseudocod

Sortarea topologică – Pseudocod

```
cât timp |V(G)|>0 execută
    alege v cu d⁻(v)=0
    adauga v in ordonare
    G ← G - v
```

Corectitudine: rezultă din **Lemă** + inducție

Sortarea topologică – Pseudocod

```
cât timp |V(G)|>0 execută
    alege v cu d⁻(v)=0
    adauga v in ordonare
    G ← G - v
```

Implementare? Complexitate?

Sortarea topologică – Pseudocod

```
cât timp |V(G)|>0 execută
    alege v cu d⁻(v)=0
    adauga v in ordonare
    G ← G - v
```

Implementare - similar BF

- pornim cu <u>toate</u> vârfurile cu grad intern 0 și le adăugăm într-o coadă

Sortarea topologică – Pseudocod

```
cât timp |V(G)|>0 execută
    alege v cu d⁻(v)=0
    adauga v in ordonare
    G ← G - v
```

Implementare - similar BF

- pornim cu toate vârfurile cu grad intern 0 și le adăugăm într-o coadă
- repetăm:
  - extragem un vârf din coadă
  - îl eliminăm din graf (**scădem gradele interne ale vecinilor, nu îl eliminăm din reprezentare**)

Sortarea topologică – Pseudocod

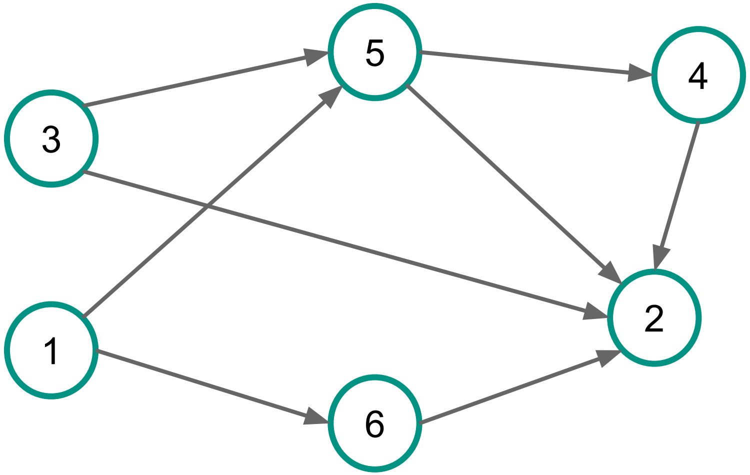
```
cât timp |V(G)|>0 execută
    alege v cu d⁻(v)=0
    adauga v in ordonare
    G ← G - v
```

Implementare - similar BF

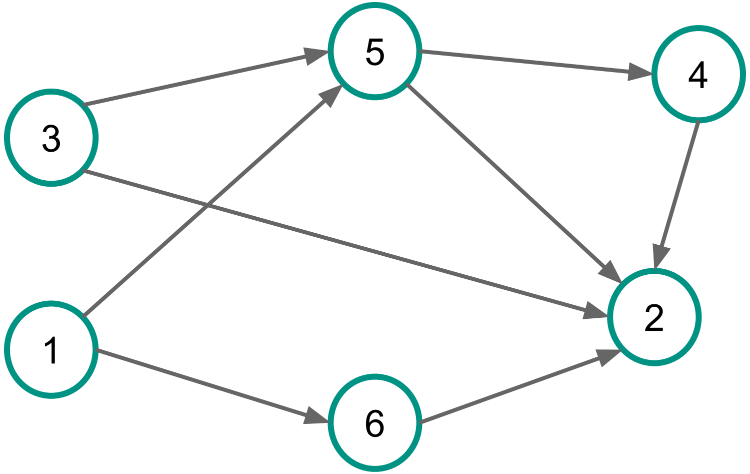
- pornim cu <u>toate</u> vârfurile cu grad intern 0 și le adăugăm într-o coadă
- repetăm:
    - extragem un vârf din coadă
    - îl eliminăm din graf (**scădem gradele interne ale vecinilor, nu îl eliminăm din reprezentare**)
    - adăugăm în coadă vecinii al căror grad intern devine 0

Exemplu

Sortare topologică – Exemplu

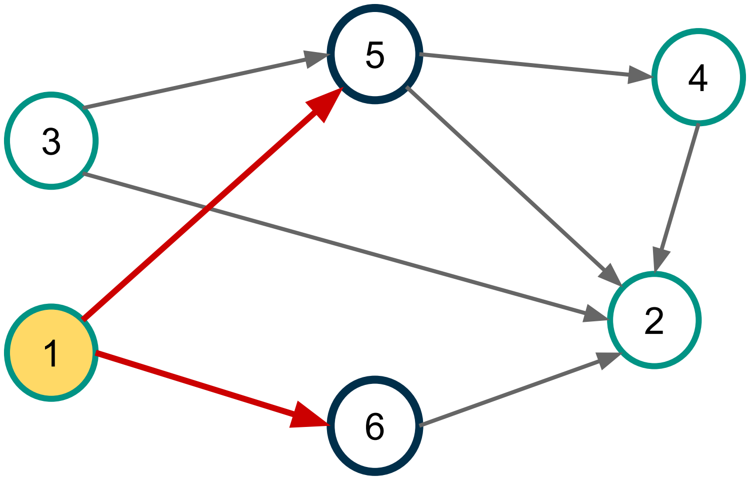


Sortare topologică – Exemplu



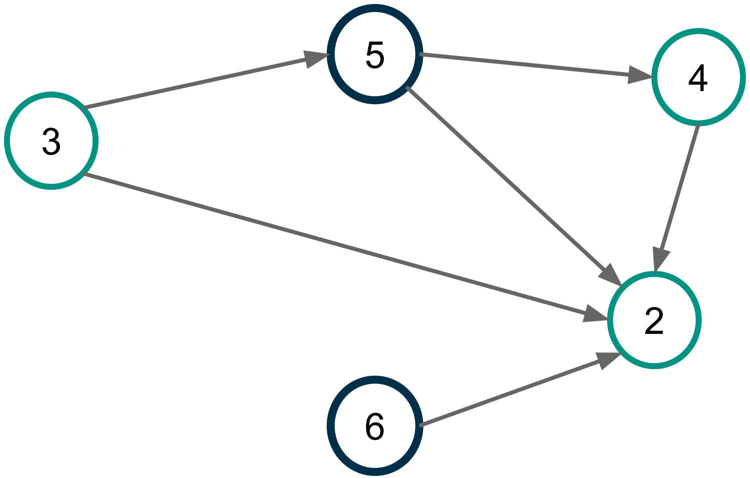
C: 1 3

Sortare topologică – Exemplu



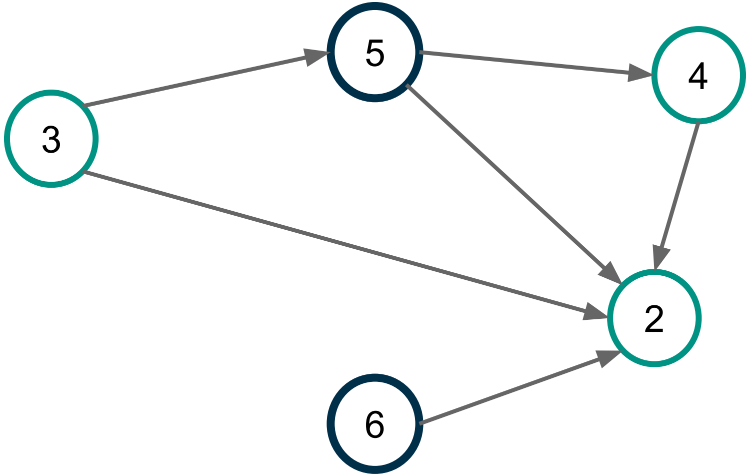
C: **1** 3

Sortare topologică – Exemplu



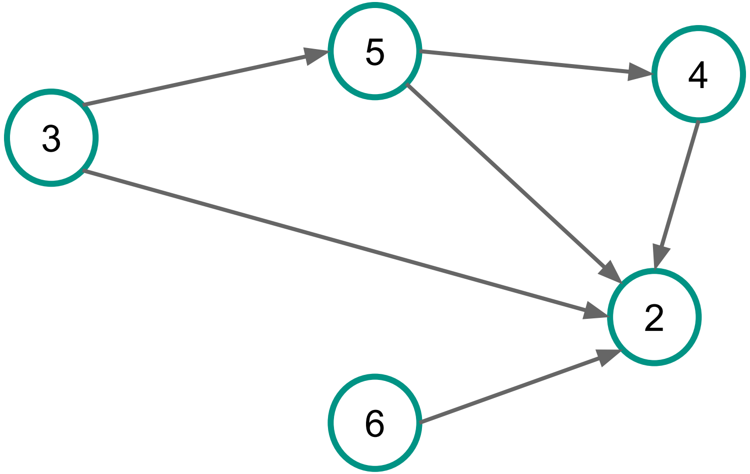
C: **1** 3

Sortare topologică – Exemplu



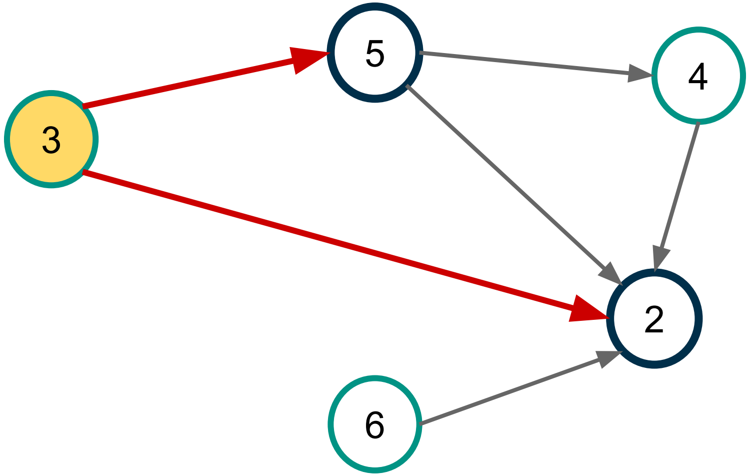
C: 1 3 6

Sortare topologică – Exemplu



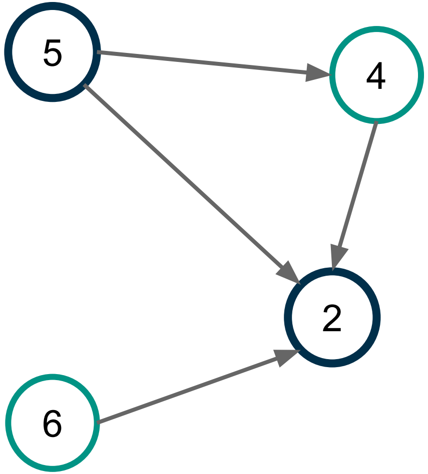
C: **1** 3 6

Sortare topologică – Exemplu



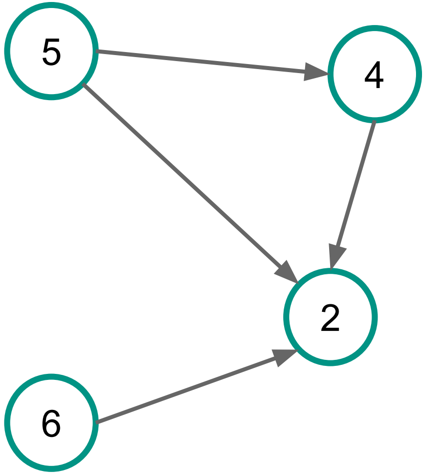
C: **1** **3** 6

Sortare topologică – Exemplu



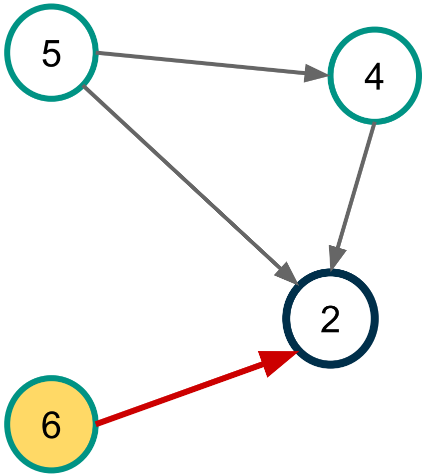
C: **1** **3** 6

Sortare topologică – Exemplu



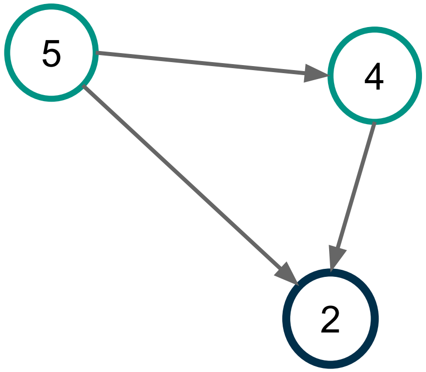
C: 1 3 6 5

Sortare topologică – Exemplu



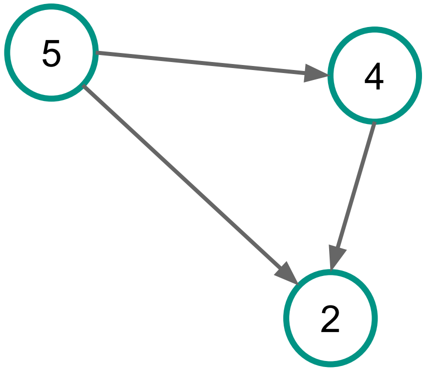
C: 1 3 6 5

Sortare topologică – Exemplu



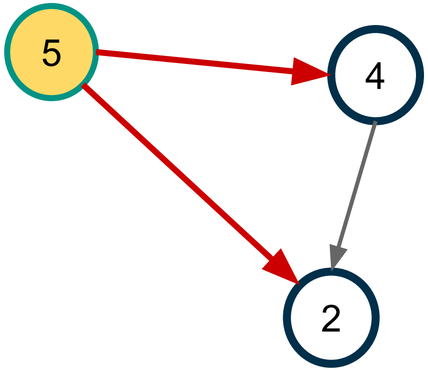
C: **1 3 6** 5

Sortare topologică – Exemplu



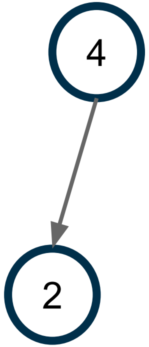
C: 1 3 6 5

Sortare topologică – Exemplu



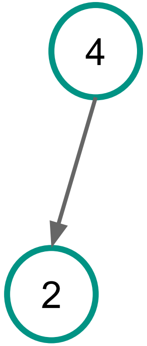
C: **1 3 6 5**

Sortare topologică – Exemplu



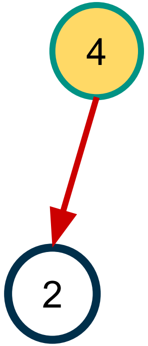
C: **1 3 6 5**

Sortare topologică – Exemplu



C: **1 3 6 5** 4

Sortare topologică – Exemplu



C: **1 3 6 5 4**

Sortare topologică – Exemplu

C: 1 3 6 5 4

Sortare topologică – Exemplu

C: 1 3 6 5 4 2

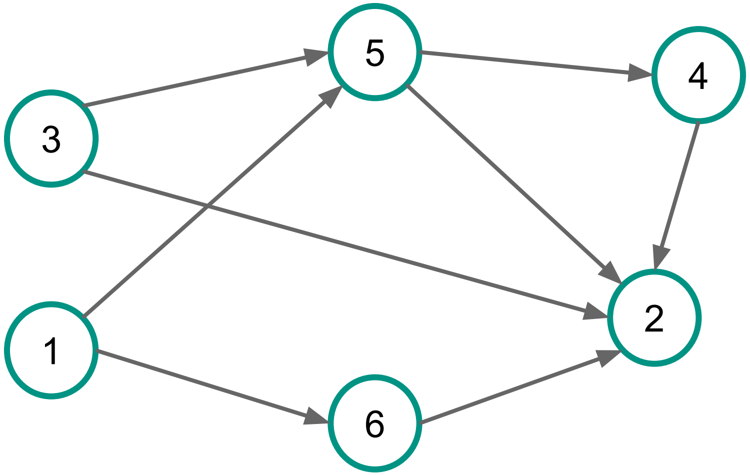
Sortare topologică – Exemplu

C: 1 3 6 5 4 2

Sortare topologică – Exemplu

C: 1 3 6 5 4 2

Sortare topologică – Exemplu



SORTARE TOPOLOGICĂ: 1 3 6 5 4 2

Algoritm

Sortare topologică – Algoritm

```
coada C ← ∅
adauga in C toate varfurile v cu d⁻[v]=0
```

Sortare topologică – Algoritm

```
coada C ← ∅
adauga in C toate varfurile v cu d⁻[v]=0

cat timp C ≠ ∅ executa
    i ← extrage(C)
    adauga i in sortare
    pentru ij ∈ E executa
```

Sortare topologică - Algoritm

```
coada C ← ∅
adauga in C toate varfurile v cu d⁻[v]=0

cat timp C ≠ ∅ executa
    i ← extrage(C)
    adauga i in sortare
    pentru ij ∈ E executa
        d⁻[j] = d⁻[j] - 1
```

Sortare topologică – Algoritm

```
coada C ← ∅
adauga in C toate varfurile v cu d⁻[v]=0

cat timp C ≠ ∅ executa
    i ← extrage(C)
    adauga i in sortare
    pentru ij ∈ E executa
        d⁻[j] = d⁻[j] - 1
        daca d⁻[j] = 0 atunci
            adauga(j, C)
```

Sortare topologică – Algoritm

Ce se întâmplă dacă graful conține, totuși, circuite?

Cum detectăm acest lucru pe parcursul algoritmului?

Alt algoritm

Sortare topologică - Alt algoritm

Suplimentar

Există un algoritm bazat pe DF, pornind de la următoarea **observație:**

- dacă **final[u]** = momentul la care a fost **finalizat** vârful u în parcurgerea DF, avem:
  - $uv \in E \Rightarrow f[u] > f[v]$

Sortare topologică – Alt algoritm

Suplimentar

Există un algoritm bazat pe DF, pornind de la următoarea **observație:**

- dacă **final[u]** = momentul la care a fost <u>**finalizat**</u> vârful u în parcurgerea DF, avem:
  - $uv \in E \Rightarrow f[u] > f[v]$

- atunci sortarea topologică = sortare descrescătoare în raport cu **final**

Sortare topologică – Alt algoritm

Dacă **final[u]** = momentul la care a fost **finalizat** vârful u în parcurgerea DF, avem: uv ∈ E ⇒ f[u] > f[v]

- atunci sortarea topologică = sortare descrescătoare în raport cu **final**

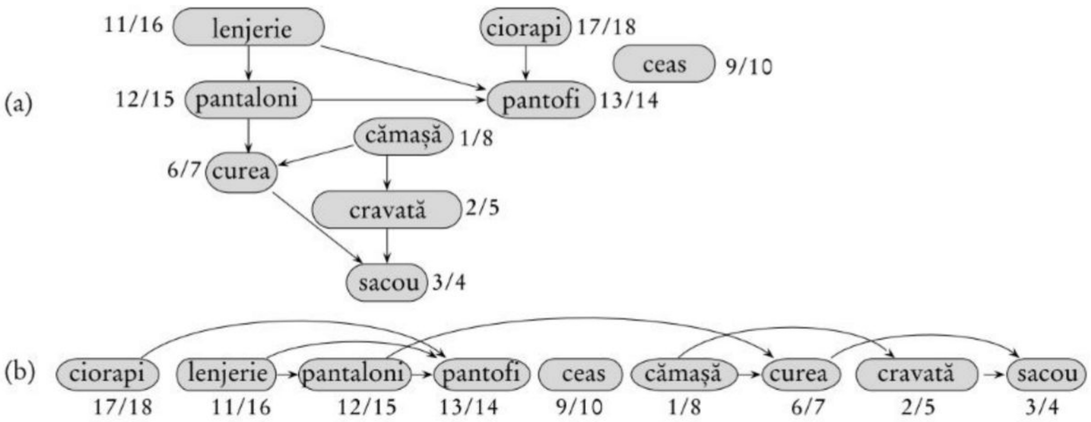


Figura 23.7 **(a)** Profesorul Bumstead îşi sortează topologic îmbrăcămintea când se îmbracă. Fiecare muchie (u, v) înseamnă că articolul u trebuie îmbrăcat înaintea articolului v. Timpii de descoperire şi de terminare dintr-o căutare în adâncime sunt prezentaţi alături de fiecare vârf. **(b)** Acelaşi graf sortat topologic. Vârfurile lui sunt aranjate de la stânga la dreapta în ordinea descrescătoare a timpului de terminare. Se observă că toate muchiile orientate merg de la stânga la dreapta.

Sortare topologică – Alt algoritm

Dacă **final[u]** = momentul la care a fost **finalizat** vârful u în parcurgerea DF, avem: uv ∈ E ⇒ f[u] > f[v]

- atunci sortarea topologică = sortare descrescătoare în raport cu **final**

Sortare_Topologică(G)

1. apelează CA(G) pentru a calcula timpii de terminare f[v] pentru fiecare vârf v
2. pe măsură ce fiecare vârf este terminat, inserează în capul unei liste înlănțuite
3. returnează lista înlănțuită de vârfuri