Drumuri minime în grafuri ponderate

Aplicații

- **Dată o hartă rutieră, să se determine**
  - **un drum minim între două orașe date**
  - **câte un drum minim între oricare două orașe de pe hartă**

Aplicații

- **Determinarea de drumuri minime / distanțe - numeroase aplicații**
  - probleme de rutare
  - robotică
  - procesarea imaginilor
  - strategii jocuri
  - probleme de planificare (drumuri critice)

Cadru

Fie:

- **G - un graf orientat ponderat**
- **P - un drum**

$$w(P) = \sum_{e \in E(P)} w(e)$$

costul / ponderea / lungimea drumului P

Cadru

Fie:

- **G - un graf orientat ponderat**
- **Presupunem că G nu conține circuite de pondere negativă**

Cadru

- **Fie s, v $\in$ V, s $\neq$ v**
- **Distanța de la s la v**
  - **$\delta_G(s, v) = \min \{ w(P) \mid P \text{ este drum de la } s \text{ la } v \}$**

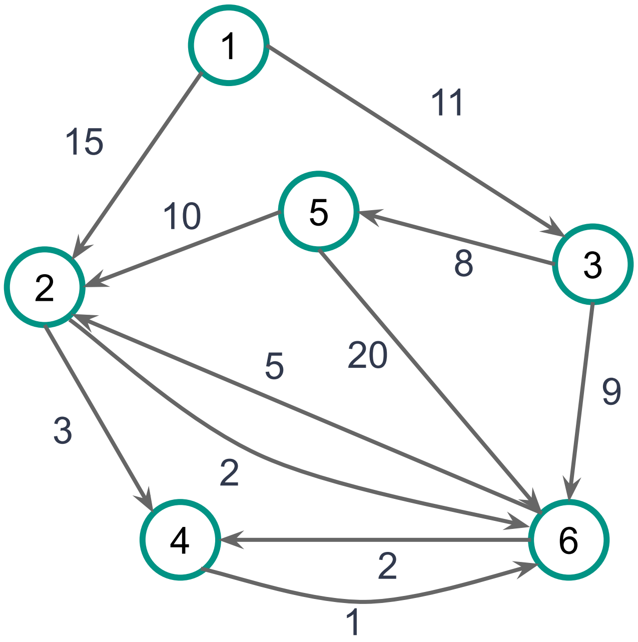
Cadru

- Fie $s, v \in V, s \neq v$
- Distanța de la s la v
  - $\delta_G(s, v) = \min \{ w(P) \mid P \text{ este drum de la } s \text{ la } v \}$
  - $\delta_G(s, s) = 0$

Convenție: $\min \varnothing = \infty$

- Un drum P de la s la v se numește drum minim de la s la v dacă $w(P) = \delta_G(s, v)$

Exemplu



Aplicații

Tipuri de probleme de drumuri minime

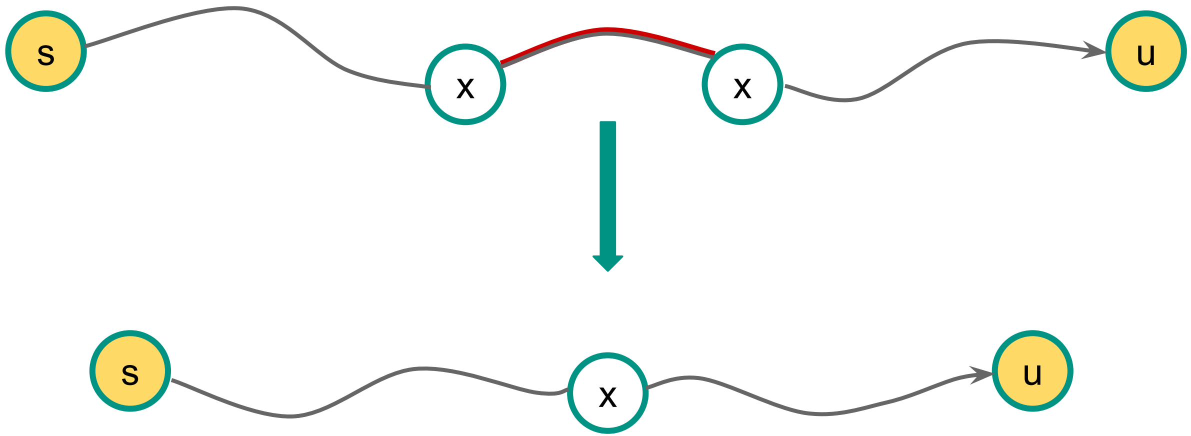
- între două vârfuri date
- de la un vârf la toate celelalte
- între oricare două vârfuri

Situații

- Sunt acceptate și arce de cost negativ?
- Graful conține circuite?
- Graful conține circuite de cost negativ?

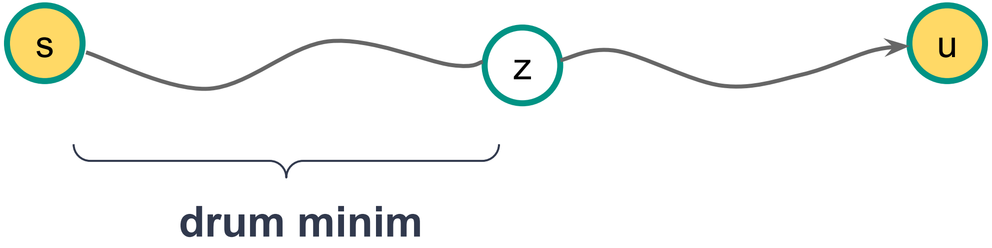
Observații

Observația 1. Dacă P este un drum minim de la s la v și nu există circuite de cost negativ, atunci P este drum elementar.

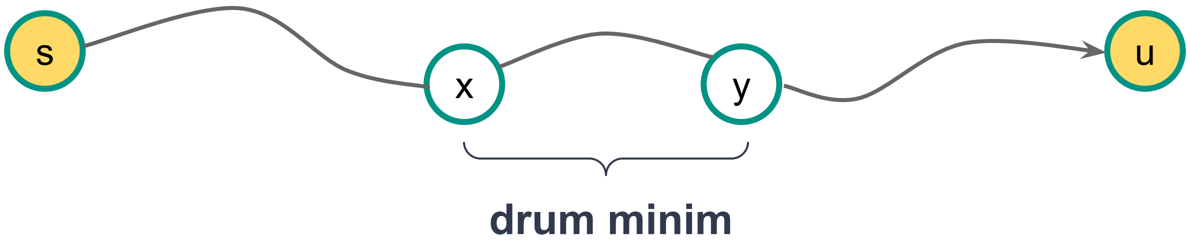


Observații

Observația 2. Dacă P este un drum minim de la s la u și z este un vârf al lui P, atunci subdrumul lui P de la s la z este drum minim de la s la z.



Observații



Drumuri minime de la un vârf s dat la celelalte vârfuri (de sursă unică)

Problemă

Problema drumurilor minime de sursă unică (de la s la celelalte vârfuri)

Se dau:

- **un graf orientat ponderat G = (V, E, w) cu**

  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

- **un vârf de start s**

Să se determine distanța de la s la fiecare vârf x al lui G / la un vârf dat t (și un arbore al distanțelor față de s / un drum minim de la s la t).

Drumuri minime de sursă unică s

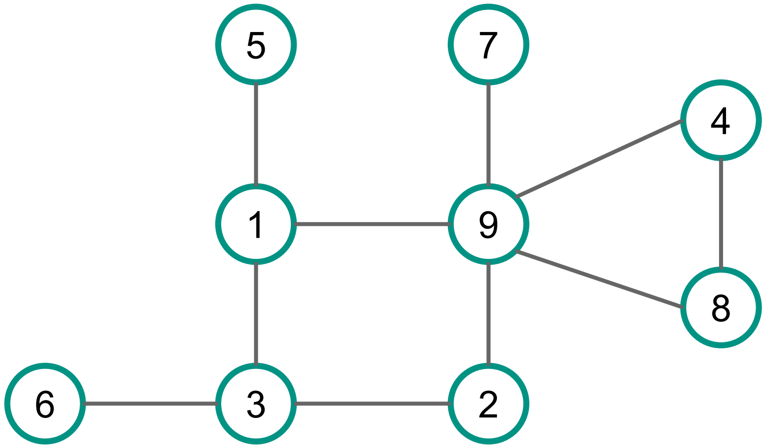
- **Dacă G nu este ponderat, cum putem calcula distanțele față de s?**

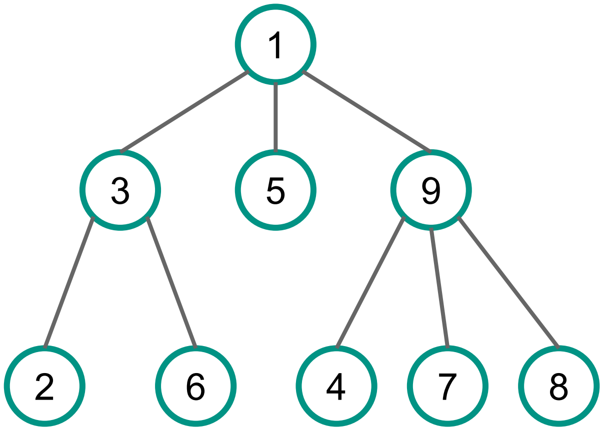
Drumuri minime de sursă unică s

- **Amintim**

În cazul unui graf neponderat, problema se rezolvă folosind parcurgerea BF din s

⇒ arborele BF (al distanțelor față de s)

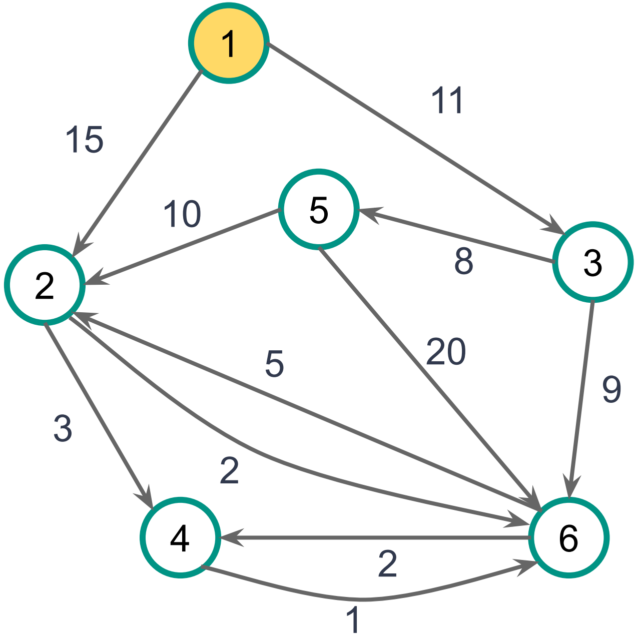




arborele BF

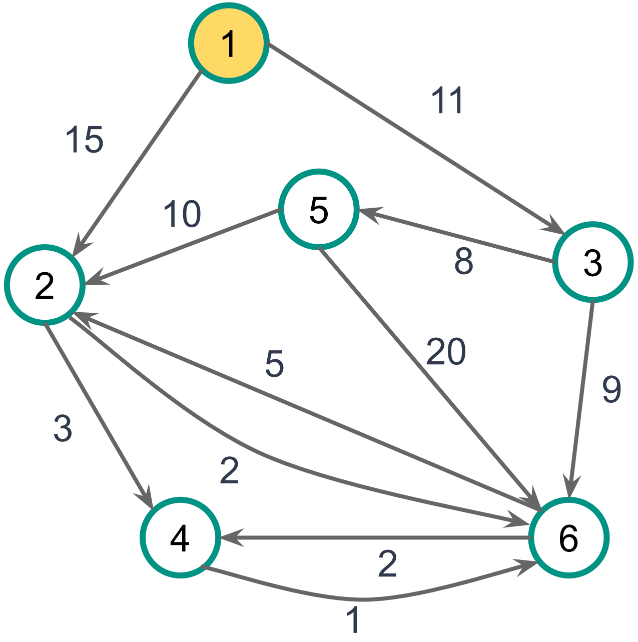
Exemplu

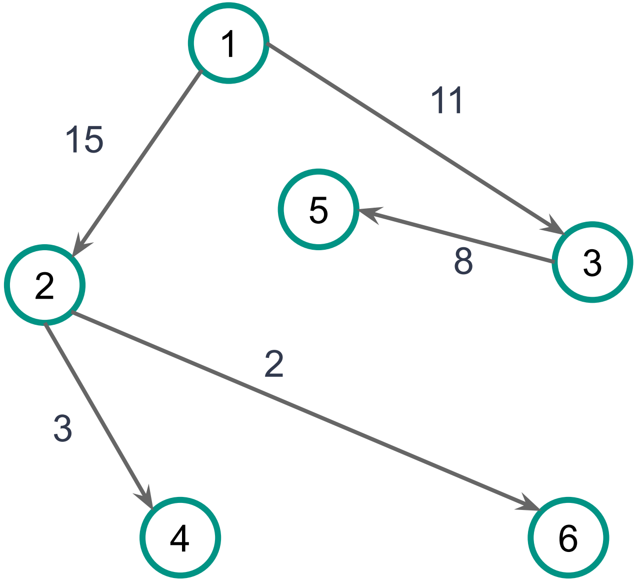
s = 1



Exemplu

s = 1





arborele distanțelor față de 1

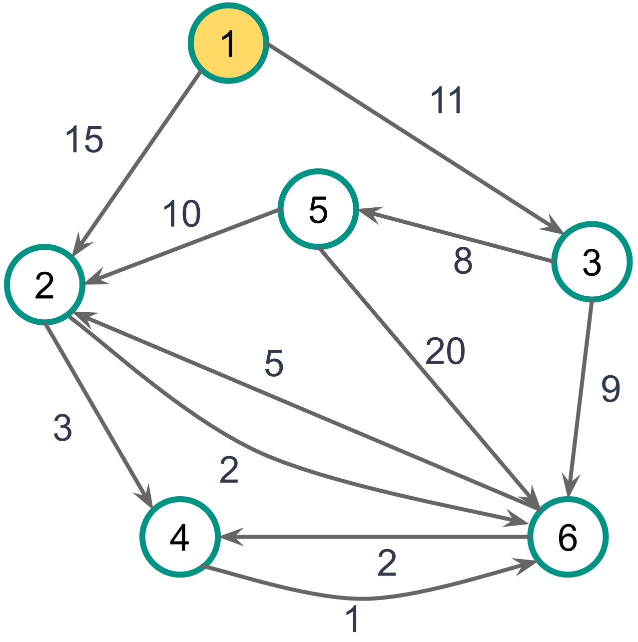
Arborele distanțelor

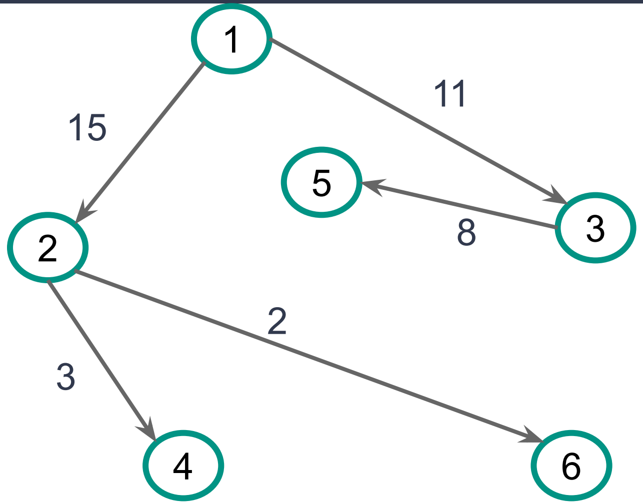
Definiție. Pentru un vârf dat s, un <u>arbore al distanțelor față de s</u> = un subgraf T al lui G, care conservă distanțele de la s la celelalte vârfuri accesibile din s

$$\delta_T(s, v) = \delta_G(s, v), \quad \forall\ v \in V \text{ accesibil din } s,$$

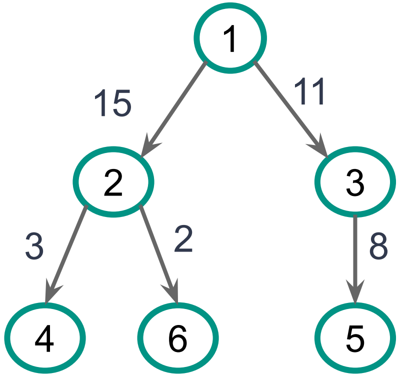
graful neorientat asociat lui T fiind arbore cu rădăcina în s (cu arcele corespunzătoare orientate de la s la frunze).

Arborele distanțelor





arborele distanțelor față de 1

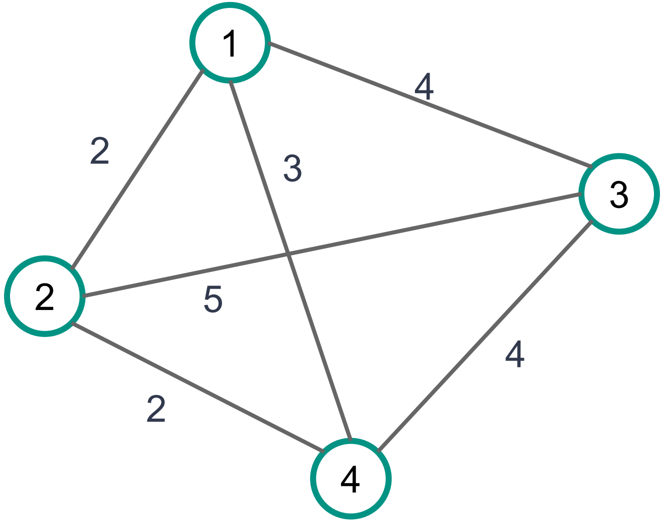


Arborele distanțelor

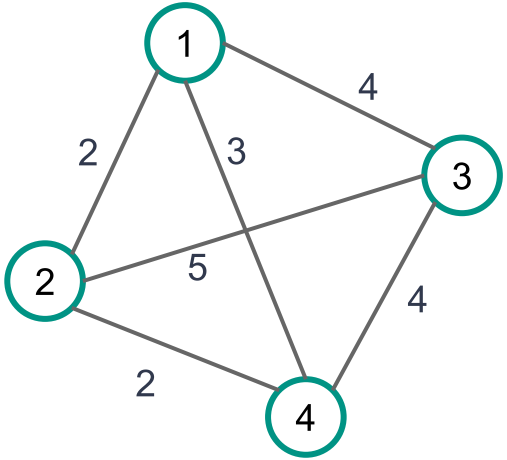
- Presupunem că **toate vârfurile sunt accesibile din s**
- Problema drumurilor minime de sursă unică este echivalentă cu determinarea unui **arbore al distanțelor față de s**

Arborele distanțelor

- **Un arbore parțial de cost minim <u>nu</u> este neapărat un arbore de distanțe minime**



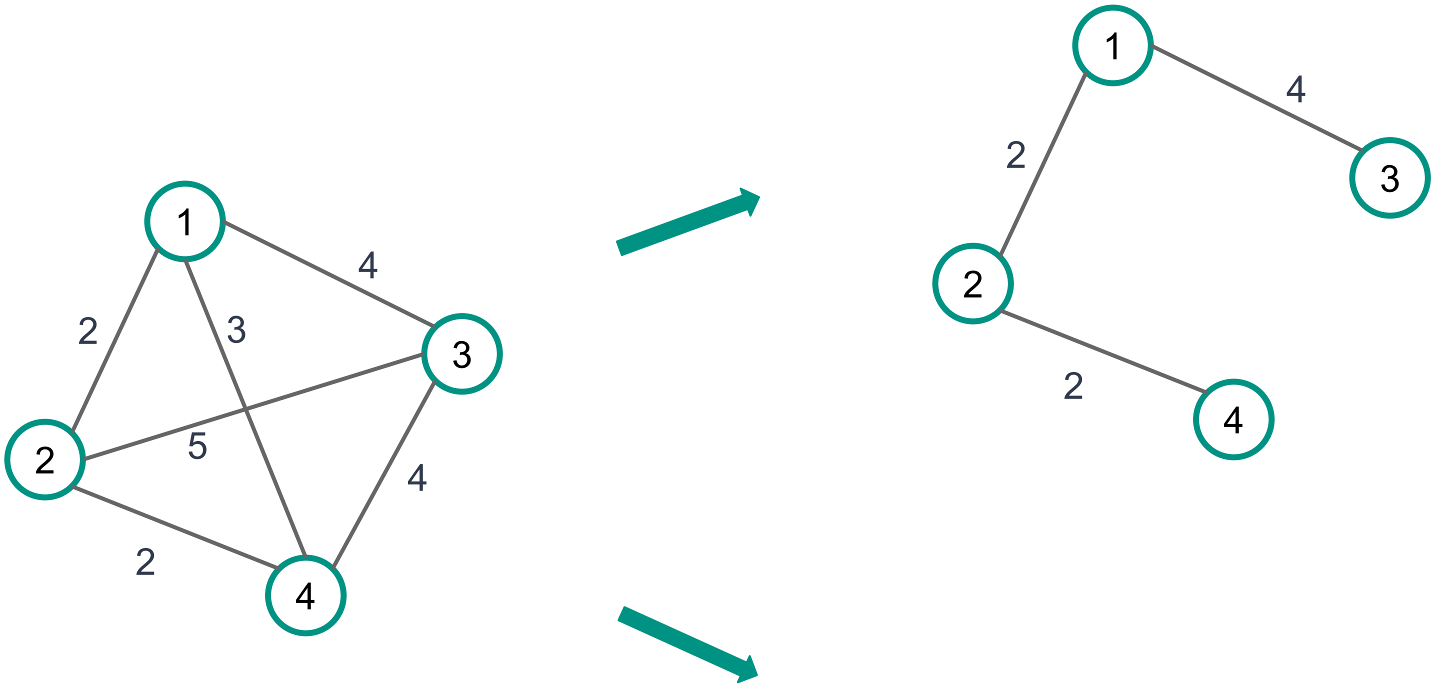
Un arbore parțial de cost minim <u>nu</u> este neapărat un arbore de distanțe minime



apcm

arbore al distanțelor față de 1

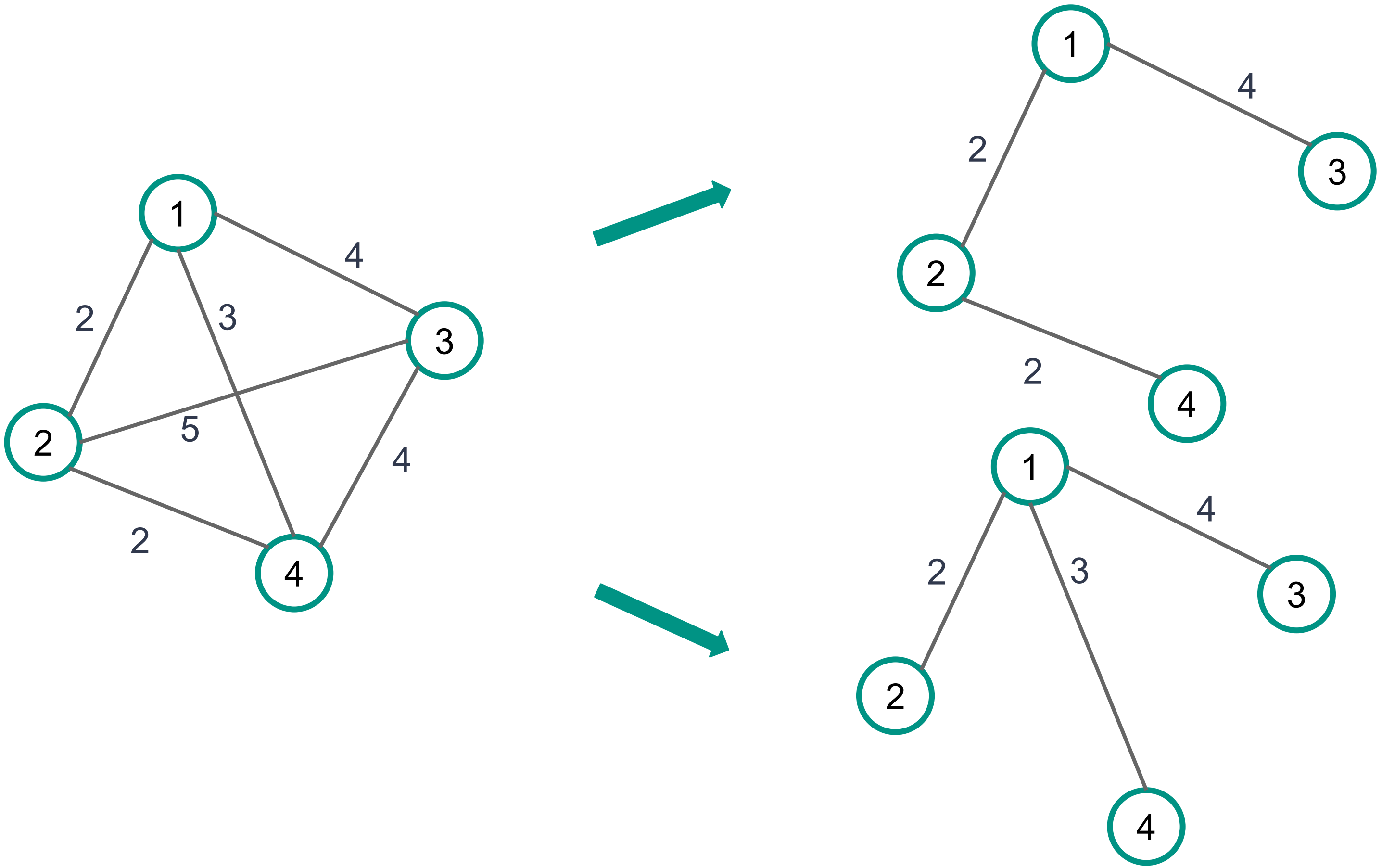
Un arbore parțial de cost minim <u>nu</u> este neapărat un arbore de distanțe minime



apcm

arbore al distanțelor față de 1

- **Un arbore parțial de cost minim <u>nu</u> este neapărat un arbore de distanțe minime**



apcm

arbore al distanțelor față de 1

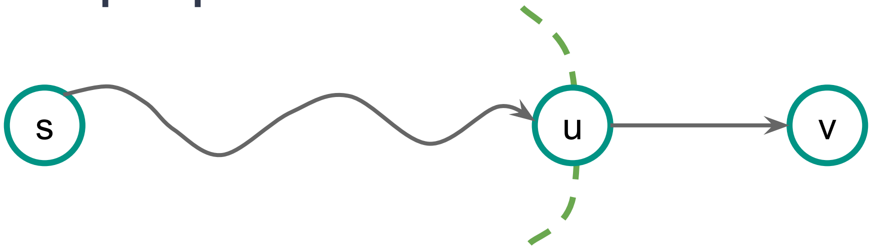
Drumuri minime de sursă unică s

- **În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanțele față de s?**

Drumuri minime de sursă unică s

- **În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanțele față de s?**

”din aproape în aproape”



Dacă u este predecesor al lui v pe un drum minim de la s la v ⇒

$$\boldsymbol{\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(uv)}$$

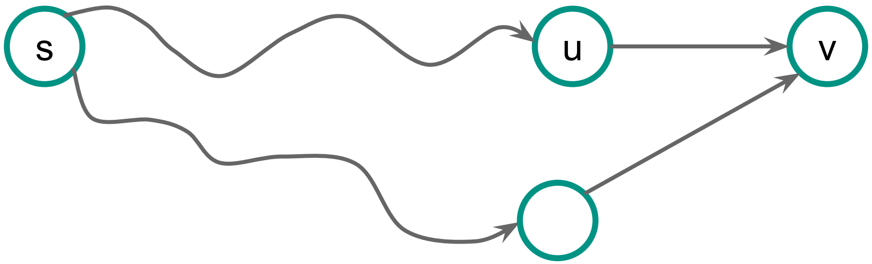
Știm **δ(s, u)** ⇒ aflăm și **δ(s, v)**

Drumuri minime de sursă unică s

- **În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanțele față de s?**

”din aproape în aproape” ⇒ când considerăm un vârf v, **pentru a calcula δ(s, v)**, ar fi util să știm deja δ(s, u), **pentru u cu uv ∈ E (?! toate)**

$$\delta(s, v) = \min \{ \delta(s, u) + w(u, v) \mid uv \in E \}$$

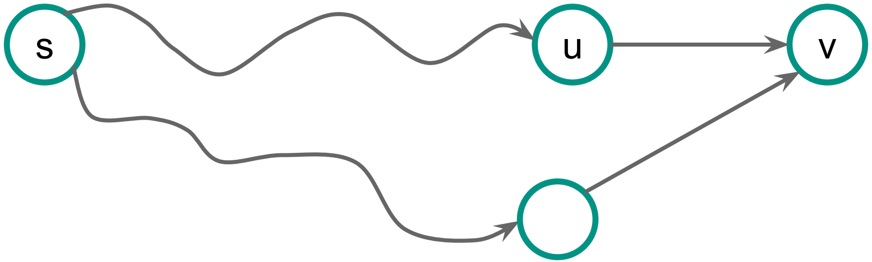


Drumuri minime de sursă unică s

- **În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanțele față de s?**

”din aproape în aproape” ⇒ când considerăm un vârf v, **pentru a calcula δ(s, v)**, ar fi util să știm deja δ(s, u), **pentru orice u cu uv ∈ E**

Ar fi utilă o ordonare a vârfurilor astfel încât, dacă uv E, atunci u se află înaintea lui v



Drumuri minime de sursă unică s

- **În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanțele față de s?**

”din aproape în aproape” ⇒ când considerăm un vârf v, **pentru a calcula δ(s, v)**, ar fi util să știm deja δ(s, u), **pentru orice u cu uv ∈ E**

Ar fi utilă o ordonare a vârfurilor astfel încât, dacă uv E, atunci u se află înaintea lui v

O astfel de ordonare <u>nu există</u> dacă graful conține circuite

Drumuri minime de sursă unică s

- **În ce ordine considerăm vârfurile pentru a calcula distanțele față de s?**

”din aproape în aproape” ⇒ când considerăm un vârf v, **pentru a calcula δ(s, v)**, ar fi util să știm deja δ(s, u), **pentru orice u cu uv ∈ E**

Ar fi utilă o ordonare a vârfurilor astfel încât, dacă uv E, atunci u se află înaintea lui v

O astfel de ordonare <u>nu există</u> dacă graful conține circuite

Dacă există circuite - <u>estimăm</u> distanțele pe parcursul algoritmului și considerăm vârful care este estimat a fi cel mai aproape de s

Drumuri minime de sursă unică s

- Algoritmi pentru grafuri orientate cu circuite, dar cu ponderi pozitive - **Dijkstra**
- Algoritmi pentru grafuri orientate fără circuite (cu ponderi reale) DAGs = Directed Acyclic Graphs
- Algoritmi pentru grafuri orientate cu circuite și ponderi reale, care detectează existența de circuite negative - **Bellman-Ford**

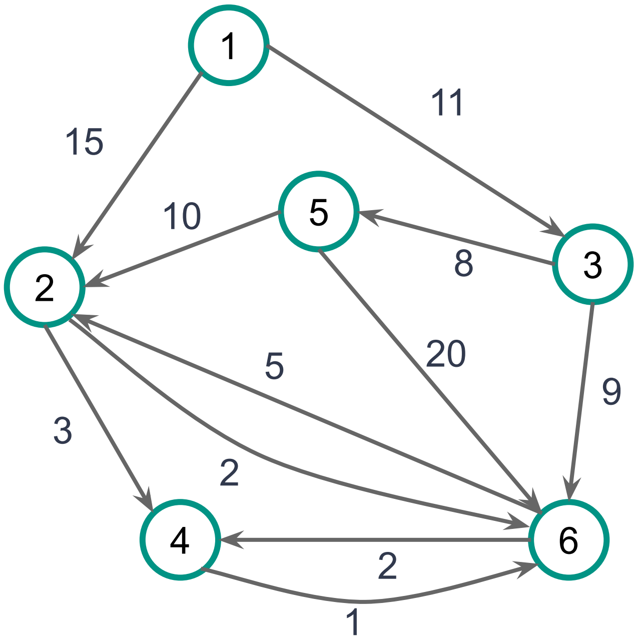
Algoritmul lui Dijkstra

Algoritmul lui Dijkstra

Ipoteză:

Presupunem că arcele au cost pozitiv (graful poate conține circuite)

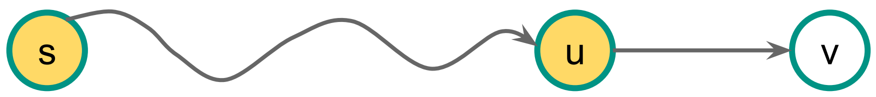
Exemplu



Algoritmul lui Dijkstra

Idee: La un pas, este ales ca vârf curent (vizitat) vârful u care este **estimat a fi cel mai apropiat de s**

- Estimarea pentru u = cel mai scurt drum de la s la u determinat până la pasul curent

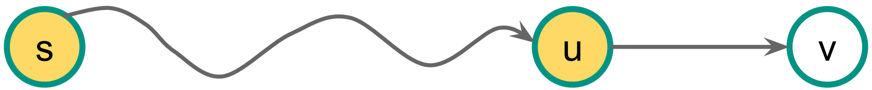


Algoritmul lui Dijkstra

Idee: La un pas, este ales ca vârf curent (vizitat) vârful u care este **estimat a fi cel mai apropiat de s**

- Estimarea pentru u = cel mai scurt drum de la s la u determinat până la pasul curent

\+ se descoperă noi drumuri către vecinii lui ⇒ **se actualizează distanțele estimate pentru vecini**



Algoritmul lui Dijkstra

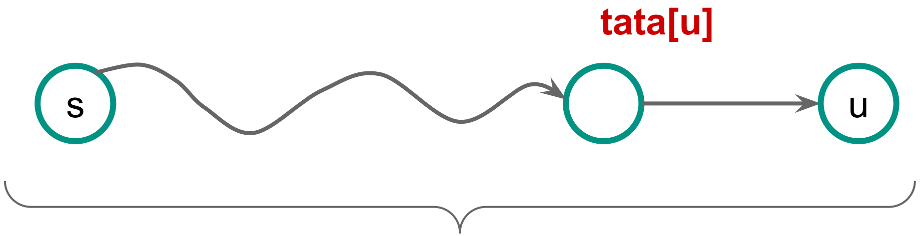
- **Generalizare a ideii de parcurgere BF**
- **Dacă toate arcele au cost egal $\Rightarrow$ Dijkstra $\equiv$ BF**

Pseudocod

Algoritmul lui Dijkstra

Pentru fiecare vârf, reținem etichetele:

- **d[u] -** etichetă de distanță
- **tata[u]**



d[u] = costul minim al unui drum de la s la u descoperit până la acel moment

tata[u] = predecesorul lui u pe drumul de cost minim de la s la u descoperit până la acel moment

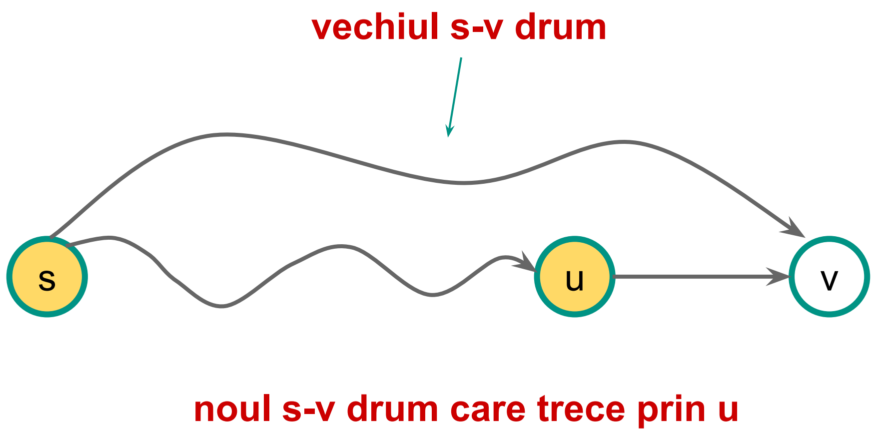
Algoritmul lui Dijkstra

La un pas:

- este selectat un vârf u (neselectat) care **“pare”** cel mai apropiat de s ⇔ are eticheta d minimă
- se actualizează etichetele **d[v]** ale vecinilor lui u - considerând drumuri care trec prin u
  - **tehică de relazare a arcelor care ies din u**

Algoritmul lui Dijkstra

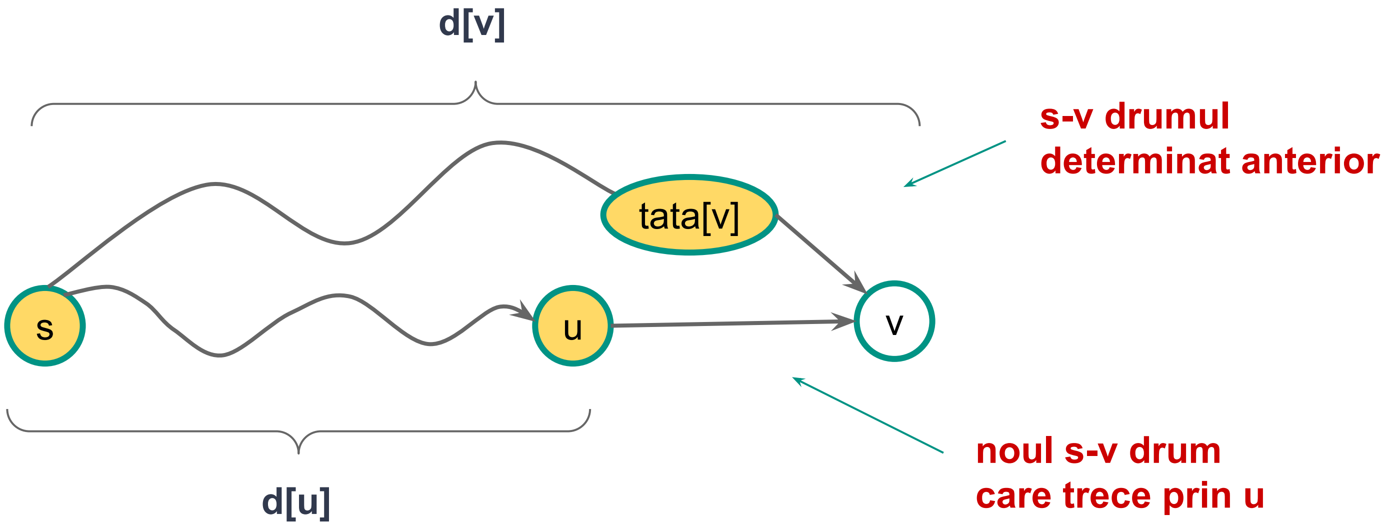
Relaxarea unui arc (u, v) = verificarea dacă d[v] poate fi îmbunătățit, trecând prin vârful u



Algoritmul lui Dijkstra

Relaxarea unui arc (u, v)

```
dacă d[u] + w(u,v) < d[v] atunci
    d[v] = d[u] + w(u,v)
    tata[v] = u
```

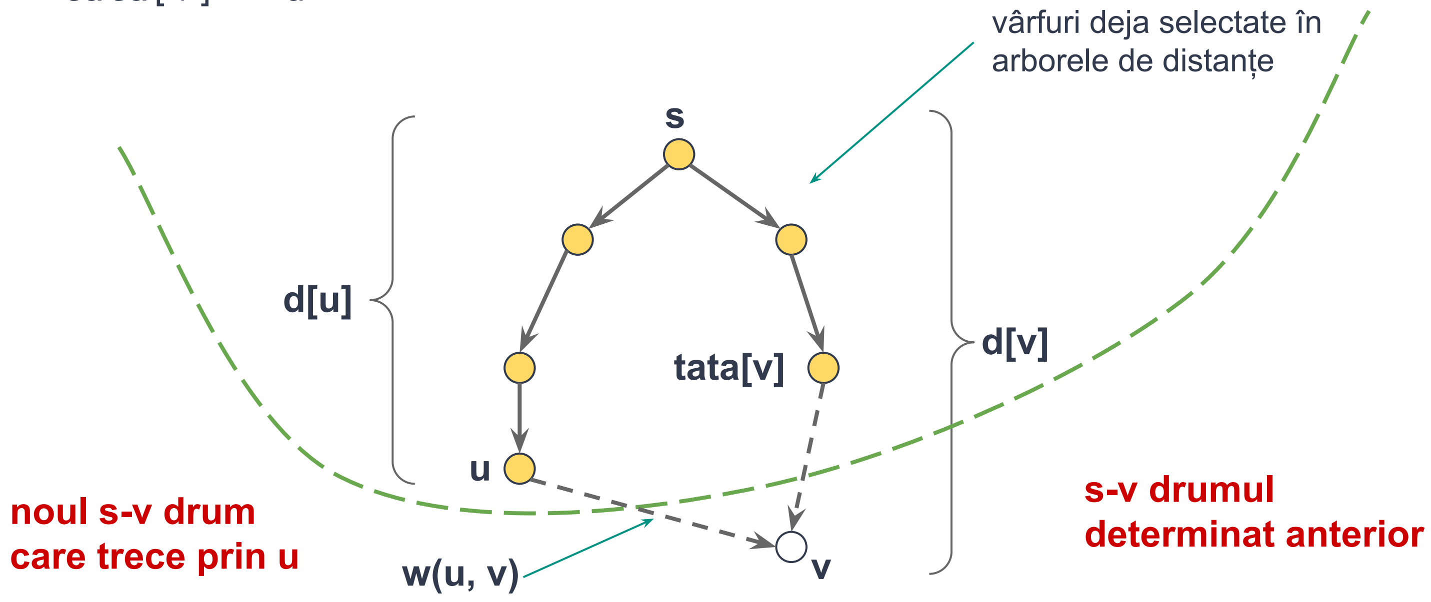


Algoritmul lui Dijkstra

Relaxarea unui arc (u, v)

Raportat la vârfuri deja selectate - similar Prim

```
dacă d[u] + w(u,v) < d[v] atunci
     d[v] = d[u] + w(u,v)
     tata[v] = u
```



Algoritmul lui Dijkstra

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
```

Algoritmul lui Dijkstra

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
```

Algoritmul lui Dijkstra

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
```

Algoritmul lui Dijkstra

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
    cât timp Q≠∅ execută      // ⇔ pentru i=1,n execută
```

Algoritmul lui Dijkstra

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
    cât timp Q≠∅ execută
        u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
```

Algoritmul lui Dijkstra

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
    cât timp Q≠∅ execută
        u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
        pentru fiecare uv∈E execută   // relaxare uv
```

Algoritmul lui Dijkstra

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
    cât timp Q≠∅ execută
        u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
        pentru fiecare uv∈E execută
            dacă v∈Q și d[u]+w(u,v) < d[v] atunci
                d[v] = d[u]+w(u,v)
                tata[v] = u
```

Algoritmul lui Dijkstra

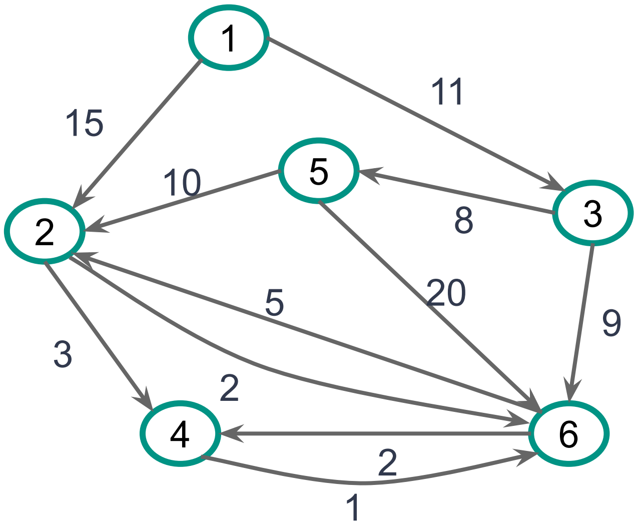
```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
    cât timp Q≠∅ execută
        u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
        pentru fiecare uv∈E execută
            dacă d[u]+w(u,v) < d[v] atunci
                d[v] = d[u]+w(u,v)
                tata[v] = u

    scrie d, tata
    // scrie drum minim de la s la un vârf t dat folosind tata
```

Algoritmul lui Dijkstra

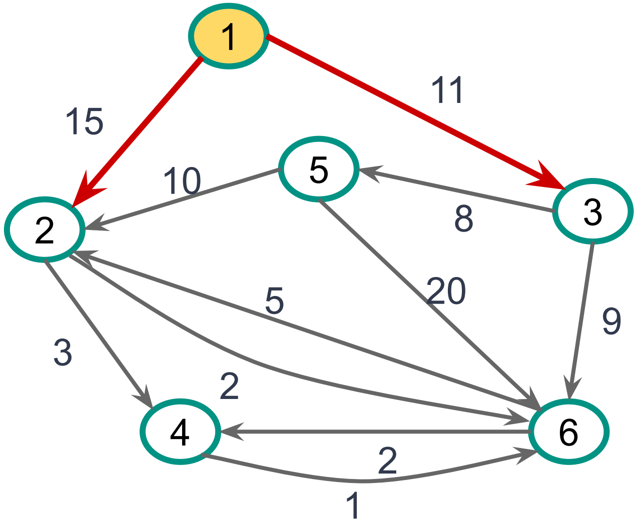
Observatie

Vom demonstra că, atunci când u este extras din Q, eticheta lui d[u] este chiar egală cu $\delta(s, u)$ (este corectă) şi **nu se va mai actualiza ⇒** $\cancel{v \in Q}$

Exemplu



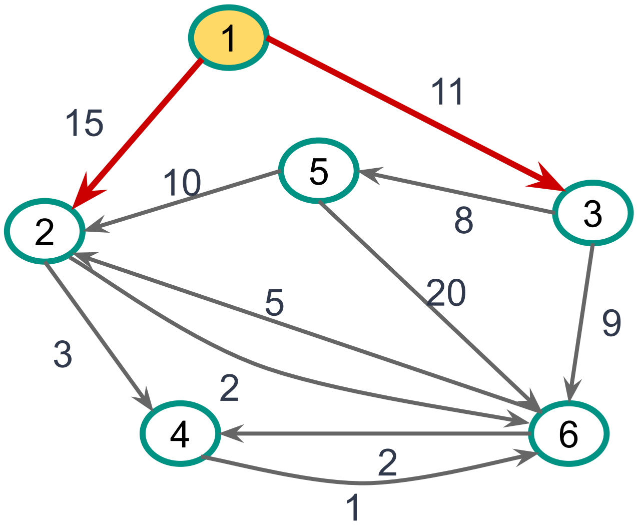
	1	2	3	4	5	6
d/tata =	**[0/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0]**



	1	2	3	4	5	6
d/tata	**[0/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0]**

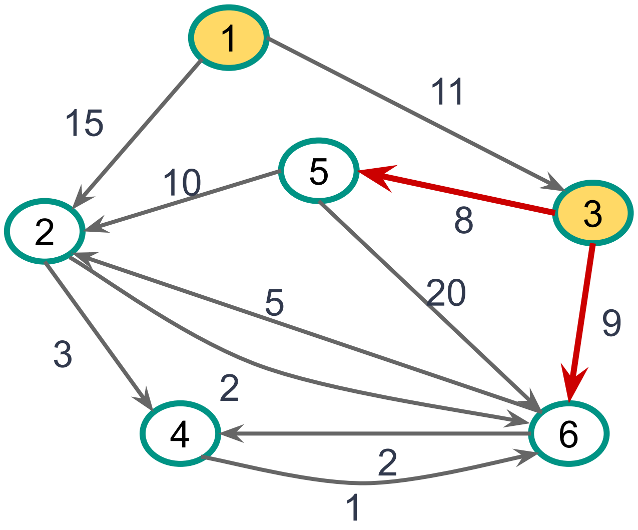
Selectăm 1

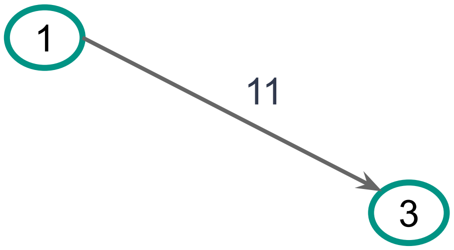
$d[v] = \min \{ d[v], d[u] + w(u, v) \}$



	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

d[v] = min { d[v], d[u] + w(u, v) }

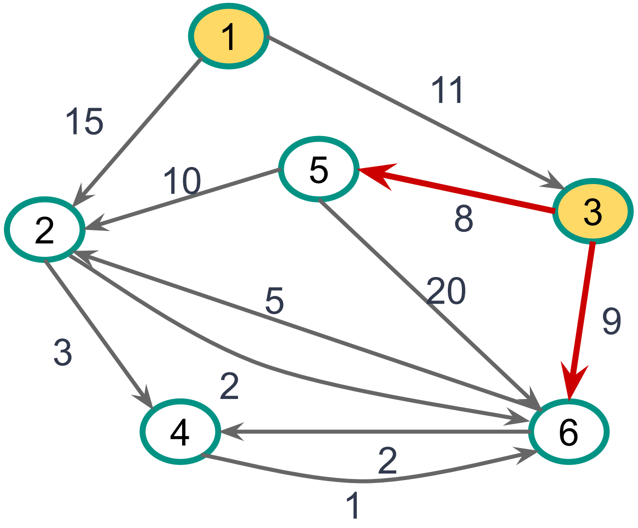


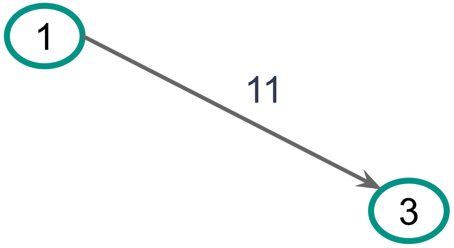


	1	2	3	4	5	6
d/tata	**[0/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0]**
Selectăm 1	**[- ,**	**15/1,**	**11/1,**	**∞/0,**	**∞/0,**	**∞/0]**
Selectăm 3						

d[5] = min { d[5], d[3] + w(3, 5) }

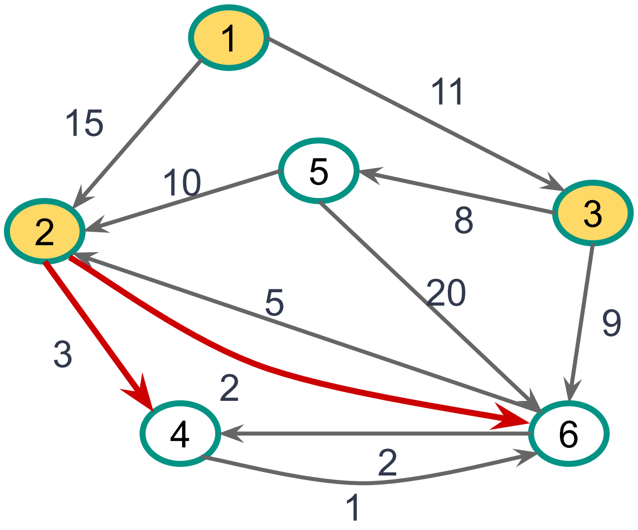
d[v] = min { d[v], d[u] + w(u, v) }

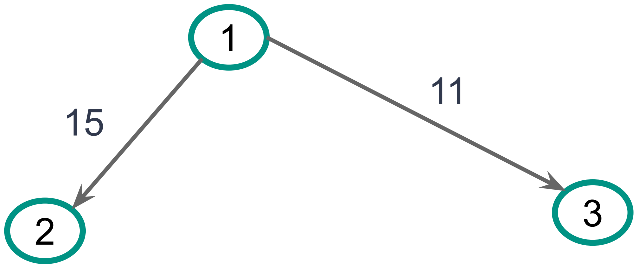




	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]

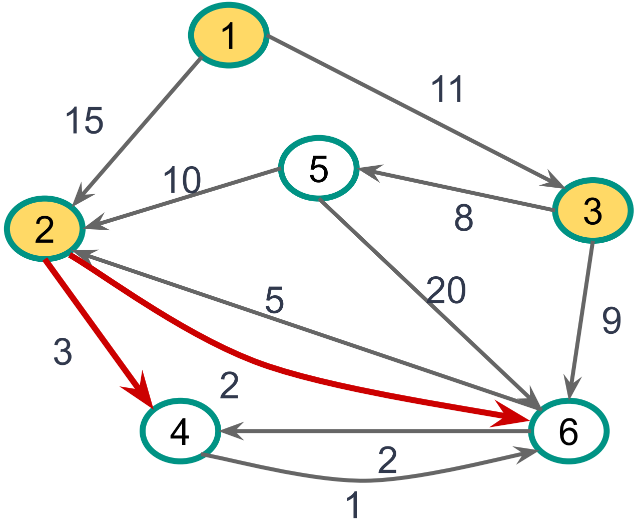
d[v] = min { d[v], d[u] + w(u, v) }

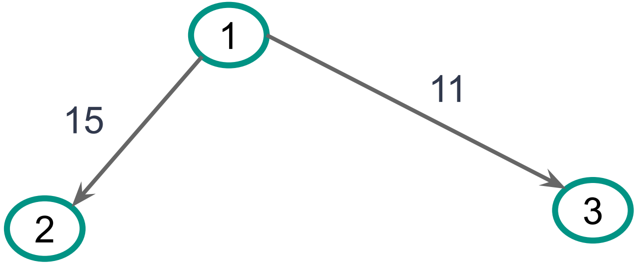




	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2						

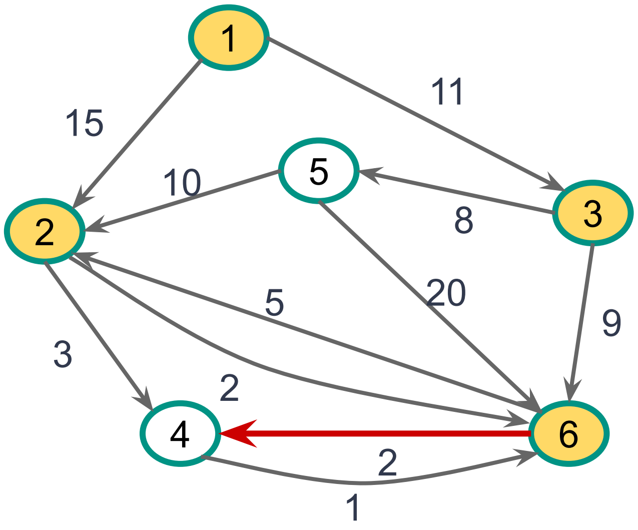
d[v] = min { d[v], d[u] + w(u, v) }

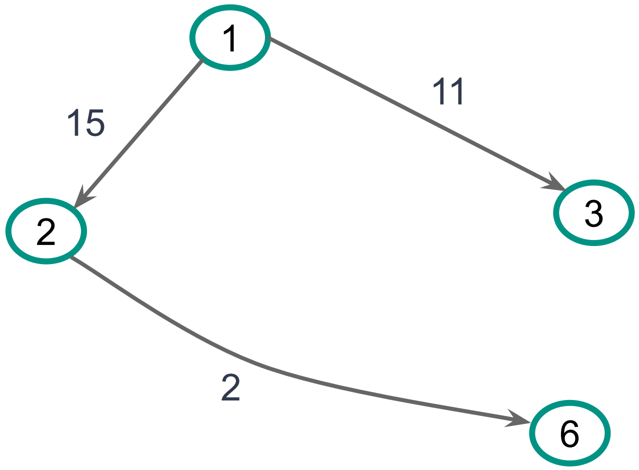




	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	17/2]

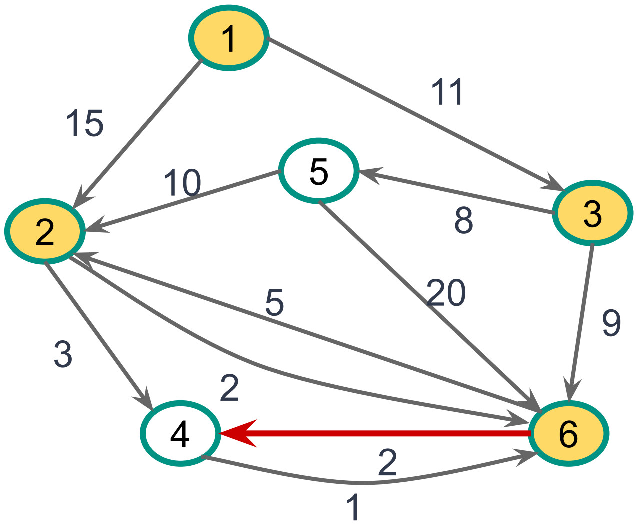
$d[v] = \min \{ d[v], d[u] + w(u, v) \}$

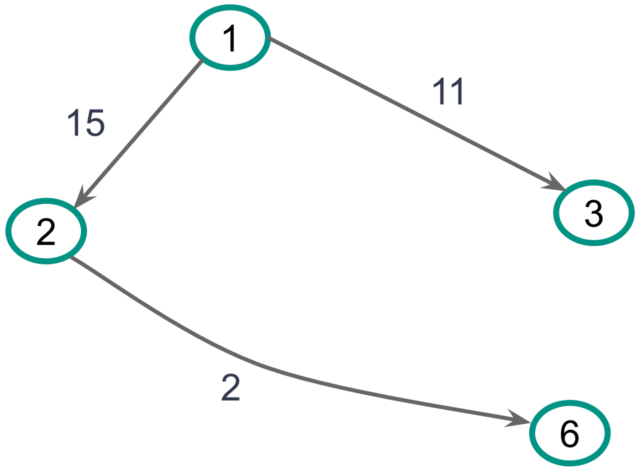




	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	17/2]
Selectăm 6						

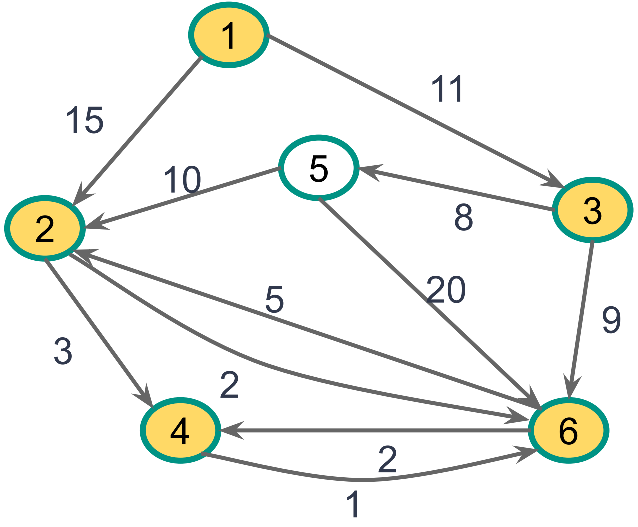
d[v] = min { d[v], d[u] + w(u, v) }

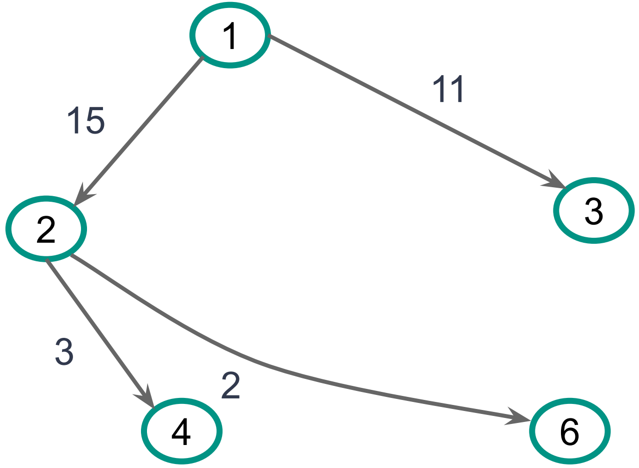




	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	17/2]
Selectăm 6	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	-]

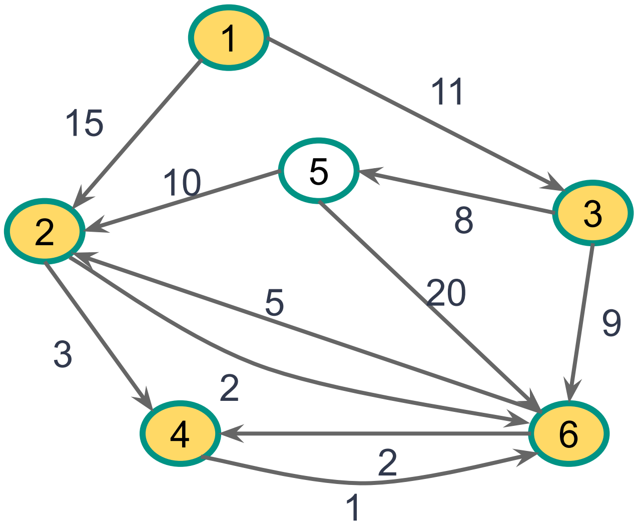
d[v] = min { d[v], d[u] + w(u, v) }

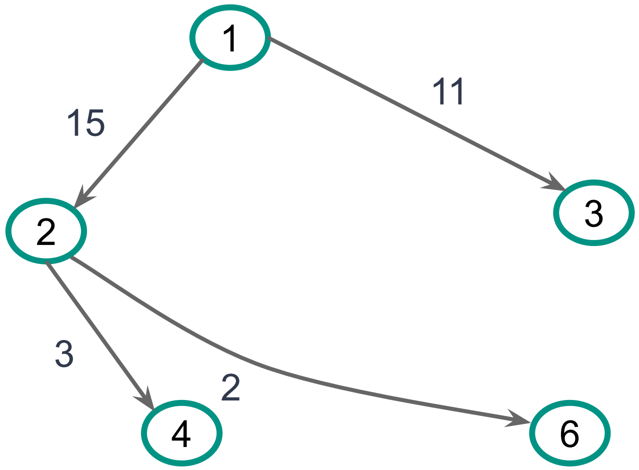




	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	17/2]
Selectăm 6	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	-]
Selectăm 4						

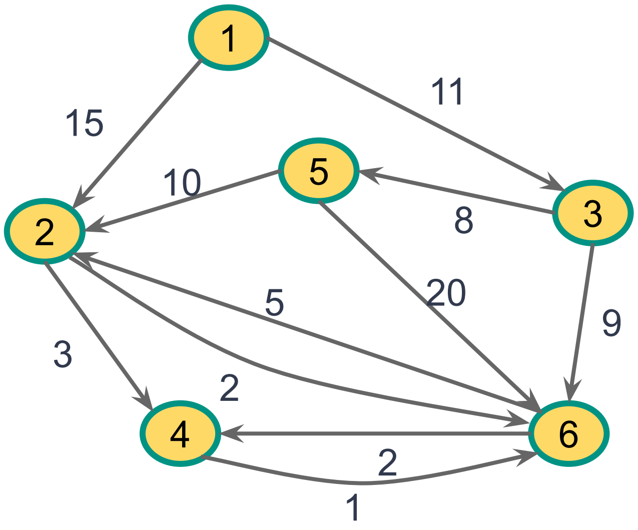
$d[v] = \min \{ d[v], d[u] + w(u, v) \}$

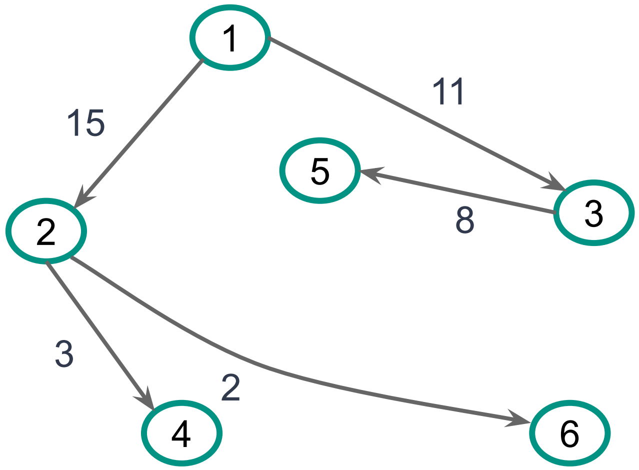




	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	17/2]
Selectăm 6	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	-]
Selectăm 4	[- ,	- ,	- ,	- ,	19/3,	-]

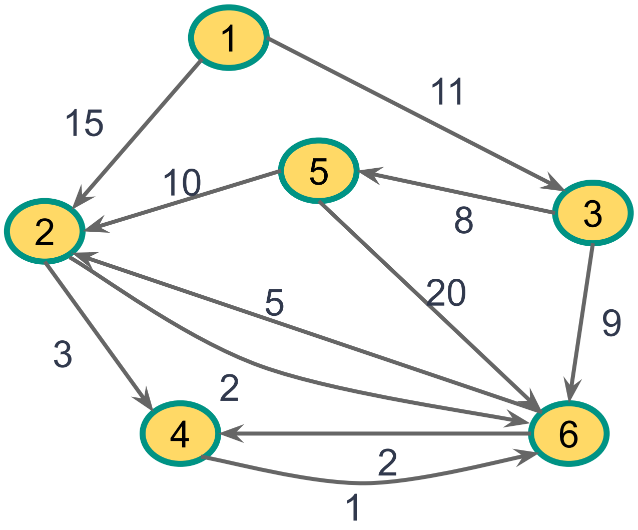
$d[v] = \min \{ d[v], d[u] + w(u, v) \}$

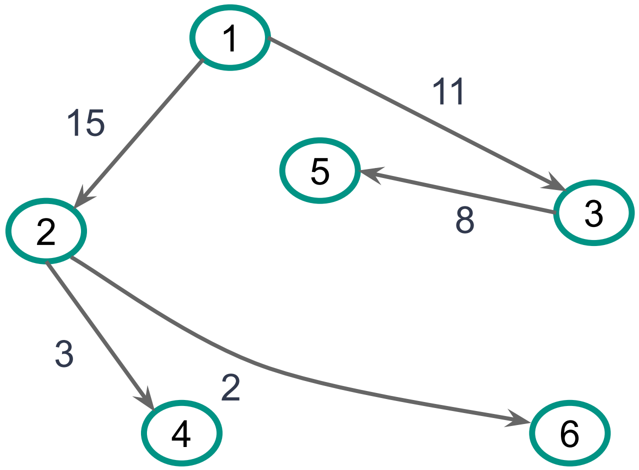




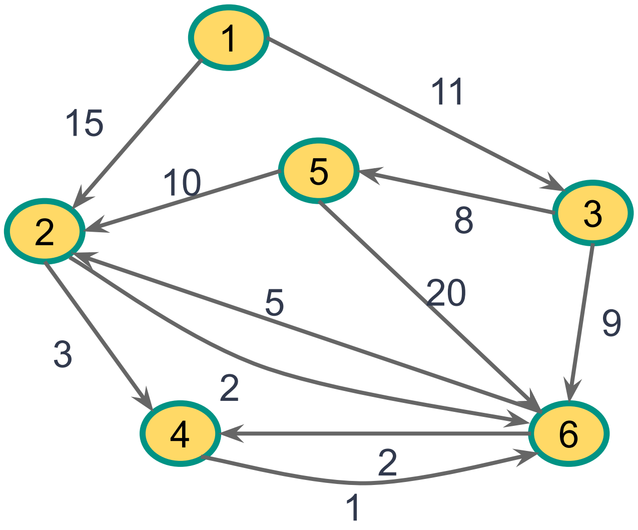
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	17/2]
Selectăm 6	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	-]
Selectăm 4	[- ,	- ,	- ,	- ,	19/3,	-]
Selectăm 5						

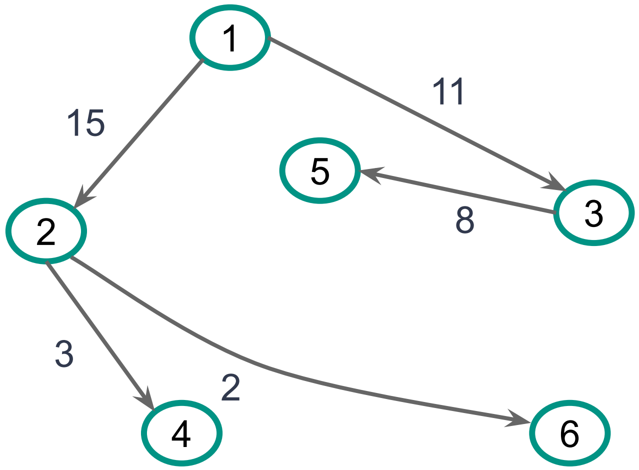
$d[v] = \min \{ d[v], d[u] + w(u, v) \}$





	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 1	[- ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Selectăm 3	[- ,	15/1,	- ,	∞/0,	19/3,	20/3]
Selectăm 2	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	17/2]
Selectăm 6	[- ,	- ,	- ,	18/2,	19/3,	-]
Selectăm 4	[- ,	- ,	- ,	- ,	19/3,	-]
Selectăm 5	[- ,	- ,	- ,	- ,	- ,	-]





	1	2	3	4	5	6
d/tata	**[0/0,**	**15/1,**	**11/1,**	**18/2,**	**19/3,**	**17/2]**

SOLUȚIE

Un drum minim de la 1 la 6?

Algoritmul lui Dijkstra

Observații

- **Dacă vârful u curent are eticheta d[u] = ∞, algoritmul se poate opri**
- Vectorul **tata** memorează **arborele distanțelor față de s** (vârfurile neaccesibile din s rămân cu tata 0)

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

```
Dijkstra(G, w, s)
    inițializează mulțimea vârfurilor neselectate Q cu V
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
    cât timp Q≠∅ execută
        u = extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
        pentru fiecare uv∈E execută
            dacă d[u]+w(u,v) < d[v] atunci
                d[v] = d[u]+w(u,v)
                tata[v] = u

    scrie d, tata
    // scrie drum minim de la s la un vârf t dat folosind tata
```

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

- **Cum memorăm Q = vârfurile încă neselectate?**

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Q poate fi (ca și în cazul algoritmului lui Prim)

- **vector**
  - Q[u] = 1, dacă u este selectat ($u \notin Q$)
    0, altfel ($u \in Q$)
- **min-ansamblu (heap)**

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 1 - reprezentarea lui Q ca vector

Q[u] = 1, dacă u este selectat (u ∉ Q)
0, altfel (u ∈ Q)

- **Inițializare Q** →
- **n * extragere vârf minim** →
- **actualizare etichete vecini** →

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 1 - reprezentarea lui Q ca vector

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \text{ este selectat } (u \notin Q) \\ 0, & \text{altfel } (u \in Q) \end{cases}$$

- **Inițializare Q** → O(n)
- **n * extragere vârf minim** →
- **actualizare etichete vecini** →

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 1 - reprezentarea lui Q ca vector

Q[u] = 1, dacă u este selectat ($u \notin Q$)
0, altfel ($u \in Q$)

- **Inițializare Q** → O(n)
- **n * extragere vârf minim** → $O(n^2)$
- **actualizare etichete vecini** →

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 1 - reprezentarea lui Q ca vector

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \text{ este selectat } (u \notin Q) \\ 0, & \text{altfel } (u \in Q) \end{cases}$$

- **Inițializare Q** → O(n)
- **n * extragere vârf minim** → $O(n^2)$
- **actualizare etichete vecini** → O(m)

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 1 - reprezentarea lui Q ca vector

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \text{ este selectat } (u \notin Q) \\ 0, & \text{altfel } (u \in Q) \end{cases}$$

- **Inițializare Q** → $O(n)$
- **n * extragere vârf minim** → $O(n^2)$
- **actualizare etichete vecini** → $O(m)$

$O(n^2)$

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 2 - reprezentarea lui Q ca min-heap

- **Inițializare Q** →
- **n * extragere vârf minim** →
- **actualizare etichete vecini** →

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

```
Dijkstra(G, w, s)  // - Q min-heap în raport cu d
    pentru fiecare u∈V execută
        d[u] = ∞; tata[u] = 0
    d[s] = 0
    Q = V   // creare heap cu cheile din d
    cât timp Q≠∅ execută
        u = extrage_min(Q)
        pentru fiecare uv∈E execută
            dacă d[u]+w(u,v) < d[v] atunci
                d[v] = d[u]+w(u,v)
                repara(Q, v)
                tata[v] = u

    scrie d, tata
    // scrie drum minim de la s la un vârf t dat folosind tata
```

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 2 - reprezentarea lui Q ca min-heap

- **Inițializare Q** → O(n)
- **n * extragere vârf minim** → O(n logn)
- **actualizare etichete vecini** →

Algoritmul lui Dijkstra – Complexitate

Varianta 2 - reprezentarea lui Q ca min-heap

- **Inițializare Q** → O(n)
- **n * extragere vârf minim** → O(n logn)
- **actualizare etichete vecini** → O(m logn)
  !! + actualizare Q

O(m logn)

Algoritmul lui Dijkstra

Observație. Pentru a determina drumul minim între două vârfuri s și t **date**, putem folosi algoritmul lui Dijkstra, cu următoarea modificare:

- dacă vârful u ales este chiar t, **algoritmul se oprește**
- drumul de la s la t se afișează folosind vectorul tata (vezi BF)

Algoritmul lui Dijkstra

- **Dijkstra ≈ Prim** (versiunea $O(n^2)$ / $O(m \log n)$)

Algoritmul lui Dijkstra

- **Algoritmul funcționează și pentru grafuri neorientate?**

Algoritmul lui Dijkstra

- **De ce nu funcționează corect algoritmul dacă avem arce cu cost negativ? Exemplu.**

- **Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?**

Algoritmul lui Dijkstra

- **De ce nu funcționează corect algoritmul dacă avem arce cu cost negativ? Exemplu.**

- **Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?**

Putem aduna o constantă la costul fiecărui arc, astfel încât toate arcele să aibă cost pozitiv. Drumul minim între 2 vârfuri rămâne la fel?

Algoritmul lui Dijkstra

- **De ce nu funcționează corect algoritmul dacă avem arce cu cost negativ? Exemplu.**

- **Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?**

  Putem aduna o constantă la costul fiecărui arc, astfel încât toate arcele să aibă cost pozitiv. Drumul minim între 2 vârfuri rămâne la fel?

  - NU

Algoritmul lui Dijkstra

Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?

Algoritmul BELLMAN-FORD (suplimentar)

- La un pas, nu relaxăm arcele dintr-un vârf selectat u, ci **din toate vârfurile** (deci relaxăm toate arcele)

Algoritmul lui Dijkstra

Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?

<u>**Algoritmul BELLMAN-FORD**</u> (suplimentar)

- La un pas, nu relaxăm arcele dintr-un vârf selectat u, ci **din toate vârfurile** (deci relaxăm toate arcele)

```
pentru i = 1, n-1 execută
    pentru fiecare uv∈E execută
        dacă d[u]+w(u,v) < d[v] atunci
            d[v] = d[u]+w(u,v)
            tata[v] = u
```

Algoritmul lui Dijkstra

Cum putem rezolva problema dacă avem și arce de cost negativ?

Algoritmul BELLMAN-FORD

- La un pas, nu relaxăm arcele dintr-un vârf selectat u, ci **din toate vârfurile** (deci relaxăm toate arcele)

```
pentru i = 1, n-1 execută
    pentru fiecare uv∈E execută
        dacă d[u]+w(u,v) < d[v] atunci
            d[v] = d[u]+w(u,v)
            tata[v] = u
```

- După pasul i → d[u] = costul minim al unui s-u drum cu cel mult i arce

Algoritmul lui Dijkstra - Corectitudine

Algoritmul lui Dijkstra – Corectitudine

Lema 1. Pentru orice $u \in V$, la orice pas al algoritmului lui Dijkstra, avem:

- **dacă d[u] < ∞**, există un drum de la s la u în G, de cost d[u], iar acesta se poate determina din vectorul tata:
  - tata[u] = predecesorul lui u pe un drum de la s la u de cost d[u]
- **d[u] ≥ δ(s, u)**

Algoritmul lui Dijkstra – Corectitudine

Lema 1. Pentru orice $u \in V$, la orice pas al algoritmului lui Dijkstra, avem:

- **dacă d[u] < ∞**, există un drum de la s la u în G, de cost d[u], iar acesta se poate determina din vectorul tata:
    - tata[u] = predecesorul lui u pe un drum de la s la u de cost d[u]
- **d[u] ≥ δ(s, u)**

Consecință. Dacă, la un pas al algoritmului, avem, pentru un vârf u, relația **d[u] = δ(s, u)**, atunci d[u] nu se mai modifică până la final.

Algoritmul lui Dijkstra – Corectitudine

Teoremă

Fie $G = (V, E, w)$ un graf orientat ponderat cu

$w : E \to \mathbb{R}_+$ și $s \in V$ fixat.

La finalul algoritmului lui Dijkstra, avem:

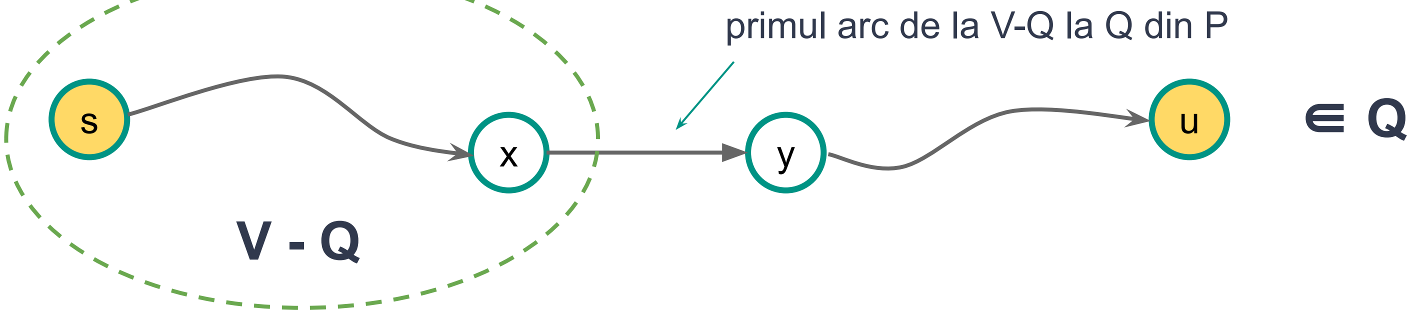
$d[u] = \delta(s, u)$, pentru orice $u \in V$

și tata memorează un arbore al distanțelor față de s.

Algoritmul lui Dijkstra – Corectitudine

Demonstrație (idee). Inducție: $d[x] = \delta(s, x)$, $\forall\ x \notin Q$ (= deja selectat)

Când un vârf u este selectat: fie P un s-u drum minim



din modul în care este ales u

după relaxarea lui xy (mai mult, are loc chiar egalitate:
$d[y] = \delta(s, x) + w(x, y) = w(s \overset{P}{-} y) = \delta(s, y)$)

$$d[u] \quad \leq \quad d[y] \quad \leq \quad d[x] + w(x, y) \quad = \quad \delta(s, x) + w(x, y) \quad = \quad w(s \overset{P}{-} y) \quad \leq \quad w(P) \quad \leq \quad d[u]$$

$$\Rightarrow d[u] = d[y] = w(P) = \delta(s, u)$$

ipoteza de inducție pentru x