<u>T (Jacobi)</u>: Dacă matricea asociată unei forme pătratice reale date $Q: V \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j, \quad g_{ij} = g_{ji}, (\forall) i,j = \overline{1,n}$$

are toți minorii diagonali principali nenuli, atunci $(\exists)$ un reper canonic a.î. Q să aibă forma canonică următoare:

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2,$$

unde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ sunt minorii diagonali principali.

<u>Dem</u>: Spre deosebire de metoda folosită la t. Gauss, care ne conduce la forma canonică a lui Q prin transf. succesive de coord., metoda Jacobi constă în a alege o bază canonică $\{f_1, \dots, f_n\}$ obținută din baza inițială prin relații de forma:

$$\begin{cases} f_1 = p_1^1 e_1 \\ f_2 = p_2^1 e_1 + p_2^2 e_2 \\ f_3 = p_3^1 e_1 + p_3^2 e_2 + p_3^3 e_3 \\ \vdots \\ f_n = p_n^1 e_1 + p_n^2 e_2 + \dots + p_n^n e_n \end{cases} \quad (*)$$

Not: $P = (p_i^j)_{i,j=\overline{1,n}}$, cu $\det P = p_1^1 p_2^2 \dots p_n^n \neq 0$, deoarece P este m. de trecere între 2 baze.

Vom determina P a.î. să obținem forma din enunț.

Fie g forma polară a lui Q

$$g(x,y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)], (\forall) x, y \in V$$

Not. cu $b_{jm} = g(f_j, f_m)$ coord. lui Q în baza canonică $\{f_1, \dots, f_n\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{jm} = 0, & j \neq m \\ b_{jj} \neq 0, & j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Deoarece g este simetrică, în rel. (*) considerăm numai ecuațiile ce corespund lui $j < m$, $m = \overline{2,n}$.

Avem: $b_{jm} = g(f_j, f_m) = g(p_j^1 e_1 + p_j^2 e_2 + \dots + p_j^j e_j, f_m) =$

$$= p_j^1 g(e_1, f_m) + p_j^2 g(e_2, f_m) + \dots + p_j^j g(e_j, f_m)$$

Atunci:

$$(**) \quad \begin{aligned} b_{jm} = 0 &\Rightarrow g(e_1, f_m) = \dots = g(e_j, f_m) = 0, \; 1 \leq j < m \\ b_{mm} = 1 &\Rightarrow g(e_m, f_m) = 1, \; m = \overline{1,n} \end{aligned}$$

Pt. determinarea coef. p_i^j vom procede prin inducție:

$$g(e_1, f_1) = 1 \Rightarrow g_{11} p_1^1 = 1 \Rightarrow p_1^1 = \frac{1}{g_{11}}$$

Pp. că am determinat coef. (p_j^i) până la vectorul f_{m-1}.
Pt. m fixat, rel. (**) se scriu:

$$g(e_1, f_m) = g(e_1, p_m^1 e_1 + p_m^2 e_2 + \dots + p_m^m e_m) =$$
$$= p_m^1 g_{11} + \dots + p_m^m g_{1m} = 0$$

Obținem sistemul:
$$\begin{cases} g_{11} p_m^1 + \dots + g_{1m} p_m^m = 0 \\ \vdots \\ g_{m-1,1} p_m^1 + \dots + g_{m-1,m} p_m^m = 0 \\ g_{m1} p_m^1 + \dots + g_{mm} p_m^m = 1 \end{cases}$$

Determinantul sist. este $\Delta_m \neq 0 \Rightarrow$ sistemul e de tip CRAMER, deci are sol. unică

Avem: $p_m^m = \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}$, iar $p_m^m = b_{mm}$, deoarece:

$b_{mm} = g(f_m, f_m) = p_m^1 g(e_1, f_m) + \ldots + p_m^m g(e_m, f_m) = p_m^m$.

Exp:

Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Determinați o formă canonică a lui Q folosind:

a) metoda Gauss

b) metoda Jacobi

Rez: a) $Q(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3) + 5x_2^2 - 4x_3^2 =$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2^2 + x_2x_3 - 2x_3^2) =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 9x_3^2$$

Efectuăm sch. de coord: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

$Q(x) = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2 \to$ f. canonică a lui Q

$p = 2 \qquad s = p - q$

$q = 1 \qquad \boxed{s = 1} \to$ signatura f.p. Q

b) Matricea asociată lui Q în reperul canonic (din $\mathbb{R}^3$) este:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Avem: $\Delta_1 = 1$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_3 = \det G = -36$$

Th. Jacobi $\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2$

$$\boxed{Q(x) = y_1^2 + \frac{1}{4} y_2^2 - \frac{1}{5} y_3^2} \to \text{f. canonică}$$

Pt. metoda lui Jacobi, fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică.

Vom determina o bază $\{f_1, f_2, f_3\}$ în care Q are f. canonică.

$$\begin{cases} f_1 = p_1^1 e_1 \\ f_2 = p_2^1 e_1 + p_2^2 e_2 \\ f_3 = p_3^1 e_1 + p_3^2 e_2 + p_3^3 e_3 \end{cases}$$

p_i^j se determină din relațiile:

$$g_{11} p_1^1 = 1 \Rightarrow \boxed{p_1^1 = 1}$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2^1 \\ p_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2^1 \\ p_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_2^1 = -\frac{1}{4} \\ p_2^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3^1 \\ p_3^2 \\ p_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3^1 \\ p_3^2 \\ p_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_3^1 = \frac{5}{2} \\ p_3^2 = -\frac{1}{2} \\ p_3^3 = -6 \end{cases}$$

În concluzie: $f_1 = e_1 = \underline{(1, 0, 0)}$

$$f_2 = -\frac{1}{4} e_1 + \frac{1}{4} e_2 = \underline{\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)}$$

$$f_3 = \frac{5}{2} e_1 - \frac{1}{2} e_2 - 6 e_3 = \underline{\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -6\right)}$$

Spații vectoriale euclidiene

Dem: Fie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ f.b.s, poz. def.

Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x,y)=0, (\forall)\, y \in V \overset{y=x}{\Longrightarrow} g(x,x)=0$

$\Rightarrow Q(x)=0 \Rightarrow x=0$, i.e. $\operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Leftrightarrow g$ nedegenerată

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ - sp. vectorial real

și $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o f.b,s, pozitiv def.

- g s.n. produs scalar pe V
- Un spațiu vectorial real V dotat cu un produs scalar s.n. spațiu vectorial euclidian.

Not. $(E/_{\mathbb{R}}, <,>) \to$ sp. vect. eucl.

Exemple: 1. $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}$

$$<,> : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, (\forall)\, x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, \underbrace{<,>}_{\text{p.s. canonic}})$ sp. vect. eucl.

Obs: 1) $(\forall)$ sp. vect. eucl. poate fi dotat cu o normă.

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>}, (\forall)\, x \in V$$

2) $(\forall)$ sp. vect. eucl poate fi organizat ca spațiu metric

III

$d : V \times V \to \mathbb{R}_+$

$d(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{\langle y-x, y-x\rangle}$, $(\forall)\ x,y \in V$

Th. (Inegalit. Cauchy-Buniakovski-Schwartz):

În $(\forall)$ sp. vect. euclidian $(E/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$ are loc inegalitatea:

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, $(\forall)\ x,y \in E$. $(*)$

„=" $\Leftrightarrow$ $\{x,y\}$ s.v. lin. dep.

Dem: Fie $x,y \in E$

$\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrar

$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0$

$\|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Delta = \langle x,y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$

$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, $(\forall)\ x,y \in E$

P.p. $\{x,y\}$ s.v. lin. dep. $\Rightarrow (\exists)\ \alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $y = \alpha x$

$\left.\begin{array}{l} |\langle x,y\rangle| = |\langle x,\alpha x\rangle| = |\alpha|\,\|x\|^2 \\ \|x\|\,\|y\| = \|x\|\cdot\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|^2 \end{array}\right| \Rightarrow$ „="

Invers, dacă în rel. $(*)$ avem „=" $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (\exists)\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$

a.î. $\langle x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y\rangle = 0 \xRightarrow[\text{nedeg.}]{\langle , \rangle} x + \lambda_0 y = 0 \Rightarrow \{x,y\}$ s.v. lin. dep.

q.e.d.

C7 Definim: $\cos(x,y) = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$, $(\forall)\ x,y \in V^*$ Obs: $|\cos(x,y)| \leq 1$, $(\forall)\ x,y \in V$

$x \perp y \Leftrightarrow \cos(x,y) = 0 \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$
(x și y s.v. ortogonali)

L: $(\forall)$ sistem de vectori nenuli, mutual ortogonali este lin. indep.

Dem: Fie $\cancel{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha}$

$S' = \{e_1, \dots, e_m\}$, $e_i \perp e_j$, $(\forall) 1 \le i \ne j \le m$

Considerăm: $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m = 0_V$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $\quad \langle\,,e_i\rangle$
$(\forall) i = \overline{1,m}$

$$\langle \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m, e_i \rangle = 0, \ (\forall)\ i = \overline{1,m}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{\langle e_1, e_i\rangle}_{0} + \dots + \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle e_m, e_i\rangle}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{>0} = 0 \xRightarrow{\langle,\rangle \text{ nedeg}} \alpha_i = 0, \ (\forall)\ i = \overline{1,m} \quad \text{q.e.d.}$$

Baze ortonormate

Def: a) Fie $\underbrace{B = \{e_1, \dots, e_n\}}_{\text{bază}} \subset E/_{\mathbb{R}}$ cu propr. $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, $(\forall) 1 \le i \ne j \le n$

B s.n. bază ortogonală

b) Dacă, în plus, $\|e_i\| = 1$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$

B s.n. bază ortonormată.

Obs: 1) B – bază orton. $\Leftrightarrow$ $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $(\forall)\ i,j = \overline{1,n}$

2) $(\forall)$ bază ortogonală se poate transf. într-una ortonormată

$$\underbrace{B = \{e_1, \dots, e_n\}}_{\text{b. ortog.}} \longrightarrow \underbrace{B' = \left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}}_{\text{b. orton.}}$$

Exemplu: $(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, \underbrace{\langle\,,\rangle}_{\text{p.s.c.}})$ sp. vect. euclidian.

$\underbrace{B_0 = \{e_1, \dots, e_n\}}_{\text{b. canonică}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow$ bază orton. ($\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $(\forall)\ i,j = \overline{1,n}$)

Th. (Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt):

$(\forall)\ \underbrace{\{f_1, \dots, f_n\}}_{\text{bază arbitrară}} \subset E/_{\mathbb{R}} \Rightarrow (\exists)\ \underbrace{\{e_1^*, \dots, e_n^*\}}_{\text{bază orton.}} \subset E/_{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\overline{\{e_1^*, \dots, e_i^*\}} = \overline{\{f_1, \dots, f_i\}}, \ (\forall)\ i = \overline{1,n}$$

Scanned with CamScanner

Dem: Construcția este inductivă.

$n=1$ Considerăm $e_1' = f_1$

P_p. $\{e_1', e_2', \dots, e_p'\}$ construiți cu prop. că: $\langle e_i', e_j' \rangle = 0$, $(\forall) i \neq j$, $1 \le i, j \le p$

Luăm: $e_{p+1}' = f_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i'$
$\langle e_{p+1}', e_i' \rangle = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1,p}$ $\Rightarrow \alpha_i = -\dfrac{\langle f_{p+1}, e_i' \rangle}{\|e_i'\|^2}$, $(\forall)\, i = \overline{1,p}$

Avem: $\begin{cases} e_1' = f_1 \\ e_i' = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{\langle f_i, e_j' \rangle}{\|e_j'\|^2} e_j' & (\forall)\, i = \overline{2,n} \end{cases}$

cf. L $\{e_1', \dots, e_n'\}$ s.v. lin. indep., $\dim E = n$ $\Rightarrow \{e_1', \dots, e_n'\} \subset E/\mathbb{R}$ b. ortog.

$\Rightarrow \{\underbrace{\frac{e_1'}{\|e_1'\|}}_{e_1''}, \dots, \frac{e_n'}{\|e_n'\|}\} \subset E/\mathbb{R}$ bază orton.

$- \overline{\{e_1', \dots, e_p'\}} = \overline{\{f_1, \dots, f_p\}}$

$\Rightarrow \overline{\{e_1', \dots, e_p', e_{p+1}'\}} = \overline{\{e_1', \dots, e_p'\}} + \overline{\{e_{p+1}'\}} =$
$= \overline{\{f_1, \dots, f_p\}} + \overline{\{f_{p+1}\}} = \overline{\{f_1, \dots, f_{p+1}\}} \Rightarrow \overline{\{e_1, \dots, e_{p+1}\}} = \overline{\{f_1, \dots, f_{p+1}\}}$ $(\forall)\, p = \overline{0, n-1}$

q.e.d.

Schimbare de repere ortonormate:

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ > 2 repere orton.

$B \xrightarrow{A} B'$

A - m. de trecere de la B la B'.

Avem:

$$\delta_{ij} = \langle e_i', e_j' \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l \rangle = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

<u>Dem</u>: Se procedează pe bază de inducție.

Pt. $n=1$ considerăm: $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$.

Pp. că am construit $\{e_1, \dots, e_p\}$ a.î. $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$ $(\forall)\, i,j = \overline{1,p}$

Luăm: $e'_{p+1} = f_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$

Impunem cond.: $<e'_{p+1}, e_i> = 0$ $(\forall)\, i = \overline{1,p}$

$\Leftrightarrow <f_{p+1}, e_i> + \alpha_i \underbrace{<e_i, e_i>}_{=1} = 0 \Rightarrow \alpha_i = -<f_{p+1}, e_i>$, $(\forall)\, i = \overline{1,p}$

$$e'_{p+1} = f_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} <f_{p+1}, e_i> e_i \text{, iar } e_{p+1} = \frac{e'_{p+1}}{\|e'_{p+1}\|}$$

Avem: $\begin{cases} e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|} \end{cases}$, unde $e'_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} <f_i, e_j> e_j$

$(\forall)\, i = \overline{2,n}$

Scanned with CamScanner

Matriceal, avem: ${}^tA\,A = I_n$, adică A este m. ortog.

$\boxed{\text{Th}}$ Matricea de trecere între 2 repere ortonormate este ortog.

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; {}^tA\,A = I_n\}$$

- $(O(n), \cdot) \to$ grupul ortogonal
- $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$

$$SO(n) = \{A \in O(n) \;/\; \det A = 1\} \subset O(n)$$

$\downarrow$

grupul special ortogonal