Curs 1

Geometrie și Algebră liniară

I. Sisteme de ec. liniare

1. Matrice. Determinanți
2. Regula lui Cramer
3. Teorema Kronecker – Cappelli
4. Teorema Rouche

II Spații vectoriale

1. Definiție. Exemple
2. Baze. Dimensiune
3. Subspații vectoriale
4. Aplicații liniare
5. Forme biliniare și forme pătratice

III Spații vectoriale euclidiene

1. Baze ortonormate
2. Suplementul ortogonal al unui subsp.
3. Aplicații ortogonale
4. Conice și cuadrice

IV Geometrie analitică euclidiană

Ec. unei varietăți liniare.

Varietăți liniare perpendiculare. Cazuri particulare

Repr. analitică a dreptei, resp. planului.
Poziția relativă a 2 dr., resp. a 2 plane
Perpendiculara comună a 2 dr.

Bibliografie:

1. A. Mihai, Algebră liniară și Geometrie analitică, Ed. Conspress, 2014.
2. I. P. Popescu, Geometrie afină și euclidiană, 1984
3. L. Ornea, A. Turtoi, O introducere în geometrie, Ed. Theta, București, 2011.
4. M. Berger, Geometrie, Vol 1-5, Cedic Fernand Nathan, 1987

I Sisteme de ec. liniare

ⓐ Matrice ⓑ Determinanți

ⓐ Fie $M = \{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{N}^*$ $K \to$ corp comutativ
$N = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}^*$

Definim $f : M \times N \to K$,

$f(i,j) = a_{ij} \in K$, $(\forall)\ (i,j) \in M \times N$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$\downarrow$ matrice de tipul (m,n) cu elem. din K

În particular, avem:

$\mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$

Operații cu matrice:

1) Adunarea matricelor
2) Înmulțirea matricelor
3) Înmulțirea matricelor cu scalari

Proprietăți

$\boxed{\text{Adunarea}}$ matricelor

$+$ (1)
- asociativă
- comutativă
- admite elem. neutru
- orice matrice are un opus

• $\boxed{\text{Înmulțirea}}$ matricelor {între ele}

(2)
- asociativă
- distributivă la stânga, resp. la dreapta, față de înmulțire

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

În cazul particular al matricelor pătratice are loc propr:

$\boxed{P}$ În mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ există un element neutru față de înmulțire:

$$AI_n = I_nA = A, \ (\forall)\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

matricea unitate

$\{ I_n = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \}$$

(simbolul lui Kronecker)

• Înmulțirea matricelor **nu** este comutativă, în general.

i.e. $AB \neq BA$, în general. $\{A, B \in \mathcal{M}_n(K)\}$

• $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ inel

(3) Înmulțirea matricelor (cu scalari)

$\boxed{P}$ 1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$, $(\forall) \lambda \in \mathbb{C}$

2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$, $(\forall) \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$, $(\forall) \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

4) $1 \cdot A = A$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$

Transpusa unei matrice

$\boxed{P}$ 1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$

2) ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{C})$

3) ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$, $(\forall) \lambda \in \mathbb{C}$

(b) Determinanți

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Def: Scalarul $\boxed{\det A \overset{not}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$,

unde S_n = mulțimea tuturor permutărilor de gradul n

și $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ, se numește

determinantul matricei A și se notează astfel:

$$\det A = \{|A|\} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Obs: 1) Noțiunea de determinant al unei matrice are sens numai pentru matrice pătratice.

Este o mare deosebire între matrice și determinantul său: matricea este o funcție pe când determinantul matricei este un simplu scalar.

2) În formula determinantului unei matrice există $n!$ termeni de tipul $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ dintre care $\frac{n!}{2}$ au semnul (+) iar $\frac{n!}{2}$ au semnul (−).

Cazuri particulare:

$n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regula lui Sarrus

Regula Δ

Proprietățile determinanților:

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\boxed{P_1}$ $\det A = \det {}^tA$

$\boxed{P_2}$ Dacă $C_i(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$

coloana "i" a lui A

Analog pt. linii.

$\boxed{P_3}$ Dacă matricea B se obține prin permutarea a 2 coloane (linii) ale lui A atunci $\det B = -\det A$

$\boxed{P_4}$ Dacă $C_i(A)$ este proporțională cu $C_j(A)$ $\{i \neq j\}$ atunci $\det A = 0$. {Analog pt. linii}

$\boxed{P_5}$ Dacă $C_i(B) = \lambda C_i(A)$ (coloana "i" a lui B este $\lambda \cdot$ col. "i" a lui A)

$\Rightarrow \det B = \lambda \det A$ {Analog pt. linii}

! $\boxed{P_6}$ Dacă $C_i(A) = (b_{ji} + c_{ji})_{1 \le j \le n}$ și B respectiv C sunt matricele din A în care $C_i(B) = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$, resp. $C_i(C) = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\det A = \det B + \det C}$ {Analog pt. linii}

$\boxed{P_7}$ Dacă la o coloană a lui A adunăm elem. altei coloane înmulțite cu același scalar și obținem matricea B, atunci $\underline{\det B = \det A}$. {Analog pt. linii}

$\boxed{P_7'}$ Dacă o coloană a lui A este o combinație liniară de celelalte coloane, atunci $\underline{\det A = 0}$. {Analog pt. linii}

<u>Interpretarea geometrică a determinantului de ordin 3.</u>

Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 3 vectori necoplanari cu originea în punctul O.
Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ este $|\underbrace{\langle u \times v, w \rangle}_{\text{produs mixt}}|$

<u>Dem:</u> Fie $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$
$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$
$\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3$, unde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sunt versorii axelor de coord.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$$

$$\langle \vec{u}\times\vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$V_{\text{paralelipipedului}} = |\langle u\times v, w\rangle|$$

! <u>Obs:</u> 1) <u>Fiecare proprietate a determinanților are o interp. geom.</u>
2) Generalizare pt. un paralelipiped n-dimensional ← MOTIVAȚIA GEOMETRICĂ

Determinantul VANDERMONDE

Fie $a_i \in K$, $(\forall) i=\overline{1,n}$, $n \geq 2$ {K-corp comutativ}

$$V(a_1, \dots, a_n) \stackrel{not}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \rightarrow \text{det. VANDERMONDE}$$

Arătați că: $V(a_1, \dots a_n) = \prod\limits_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$ (seminar)

Ind: • Inducție matematică

• $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Notație: Fie $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{card}\, I = k$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$

$J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{card}\, J = k$, $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ $(j_1 < j_2 < \dots < j_k)$

$A_{I,J} \in \mathcal{M}_k(K) \stackrel{not}{=}$ submatricea obținută din A prin intersecția liniilor cu indice din I cu coloanele cu indice din J

Exp: • $I = \{i\}$, $J = \{j\} \Rightarrow A_{I,J} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_1(K)$

• $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $I = J = \{1, 2\} \Rightarrow A_{I,J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Notație: $(\forall) I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, notăm cu $\overline{I} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$ (complementara lui I în $\{1, 2, \dots, n\}$)

$M_{I,J}^{A} \overset{\text{not}}{=} \det A_{I,J}$, $(\forall)\ I, J \subset \{1,2,\dots,n\}$ a.î.

minor (algebric)

$I = \{i_1, \dots, i_k\}$ $\quad$ $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J = k$

$J = \{j_1, \dots, j_k\}$

· Complementul algebric al minorului $M_{I,J}$ este:

$$M'_{I,J} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \cdot M_{\overline{I},\overline{J}} =$$

$$= (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \cdot \det A_{\overline{I},\overline{J}}$$

Revenim la exemplul anterior și avem: $A_{\overline{I},\overline{J}} = (a_{33})$,

pentru $A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$

$\boxed{\text{Teorema (LAPLACE)}}$: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1,2,\dots,n\}$

$$\text{Atunci: } \det A = \sum_{\substack{J \subset \{1,2,\dots,n\} \\ \operatorname{card} J = k}} M_{I,J} \cdot M'_{I,J}$$

Caz particular: $I = \{i\}$, $\operatorname{card} I = 1 \implies A_{I,J} = (a_{ij})$

Obținem: $\det A = \sum_{\substack{J \subset \{1,2,\dots,n\} \\ \operatorname{card} J = 1}} \det A_{I,J} \cdot M'_{I,J} =$

$= a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \det\left(A_{\overline{I},\overline{1}}\right) + a_{i2}(-1)^{i+2} \det\left(A_{\overline{I},\overline{2}}\right) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \cdot \det\left(A_{\overline{I},\overline{n}}\right)$

{i.e. dezvoltarea după linia "i" a $\det A$}

Obs: Un caz particular al teoremei lui LAPLACE este reprezentat de binecunoscuta dezv. după o linie (sau o coloană) a unui determinant.

Apl! (seminar)

Calculați det A, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

a) folosind dezvoltarea după prima linie

b) folosind regula lui LAPLACE prin dezvoltarea după primele 2 linii.
(th)