T. dimensiunii (Grassmann)

Fie V/K sp. vect. (finit dimensional) și $V_1, V_2 \subseteq V$ ssp. vect.

Atunci $\boxed{\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$

$\boxed{\text{Apl}}$ Fie $V_1 = \{(x,y,0) \,/\, x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

$V_2 = \{(t,0,t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că $\underset{\text{ssp vect.}}{V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3}$ și precizați dimensiunile lor

b) Determinați $V_1 + V_2 = ?$

Rez: a) Fie $u_1, u_2 \in V_1 \Rightarrow u_1 = (x_1, y_1, 0)$, $u_2 = (x_2, y_2, 0)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, 0)$, unde $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in V_1 \Rightarrow \underset{\text{ssp. vect.}}{V_1 \subset \mathbb{R}^3}$

$V_1 \ni (x,y,0) = x e_1 + y e_2 \Rightarrow B_1 = \{e_1, e_2\} \subset V_1$ bază $\Rightarrow \dim B_1 = 2$ (plan vectorial)

$x, y \in \mathbb{R}$

Analog se arată că: $\underset{\text{ssp. vect}}{V_2 \subset \mathbb{R}^3}$ și $\dim V_2 = 1$ (dr. vect.)

$B_2 = \{(1,0,1)\} \subset V_2$ bază

$V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Aplicăm t. dimensiunii (Grassmann):

$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Obs: $V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow x = y = t = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 2 + 1 - 0 = 3$

Dar: $\underset{\text{ssp. vect.}}{V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \boxed{V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3}$ sumă directă (deoarece $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$)

$\boxed{\text{T}}$ Fie $V_1 = \{(x,y,0) \,/\, x,y \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(u,0,v) \,/\, u,v \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $\underset{\text{ssp vect}}{V_2 \subset \mathbb{R}^3}$ și precizați $\dim V_2$

b) Dem. că: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ (E adev. și rel. $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$?)

$\boxed{Ap1}$ Fie $V_1 = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$

(T) $V_2 = \{(u, 0, v) / u, v \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect. și precizați $\dim V_2$.

b) Dem. că: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ (E adev. și rel. $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$?)

Rez.

a) Fie $w_1, w_2 \in V_2 \Rightarrow w_1 = (u_1, 0, v_1)$, $w_2 = (u_2, 0, v_2)$, $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, 0, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, unde $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in V_2 \Rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect.

$V_2 \ni (u, 0, v) = u e_1 + v e_3 \Rightarrow B_2 = \{e_1, e_3\}$ bază $\Rightarrow \dim V_2 = 2$ (plan vectorial)

$u, v \in \mathbb{R}$

b) T. dimensiunii (Grassmann)

$$\boxed{\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)}$$

$V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow \begin{cases} x = u \ (\overset{not}{=} t) \\ y = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{(t, 0, 0) / t \in \mathbb{R}\} = \{t e_1 / t \in \mathbb{R}\} = \langle e_1 \rangle$

$\Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 = 1$

Avem: $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$

Așadar: $\dim (V_1 + V_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \dim(V_1+V_2)=3 \\ \text{Dar}: V_1+V_2 \underset{\text{ssp. vect.}}{\subseteq} \mathbb{R}^3 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_1+V_2=\mathbb{R}^3}$$

! Relația $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ <u>nu</u> este adevărată deoarece:

$V_1 \cap V_2 \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (mai exact, $V_1 \cap V_2 = \langle e_1 \rangle$).

$\boxed{Apl}$ Fie $V_1 = \{(x, y, 0, 0) / x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$
$V_2 = \{(0, 0, z, t) / z, t \in \mathbb{R}\}$

a) Arătați că: $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ ssp. vectoriale și precizați dimensiunile lor.

b) Dem. că: $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$

Sol: Fie $u_1, u_2 \in V_1$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow u_1 = (x_1, y_1, 0, 0)$, $u_2 = (x_2, y_2, 0, 0)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, 0, 0)$, unde $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in V_1 \Rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^4$ ssp. vect.

$V_1 \ni (x, y, 0, 0) = x e_1 + y e_2$, $x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow B_1 = \{e_1, e_2\} \subset V_1$ bază $\Rightarrow \dim V_1 = 2$ (plan vectorial)

Analog se arată că: $V_2 \subset \mathbb{R}^4$ ssp. vect. și $\dim V_2 = 2$ (——"——)
$B_2 = \{e_3, e_4\} \subset V_2$ bază

Aplicăm th dimensiunii (Grassmann):
$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)$

Obs: $V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow x = y = z = t = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$\Rightarrow \dim (V_1 + V_2) = 2 + 2 - 0 = 4$
Dar: $V_1 + V_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ ssp. vect.
$\Rightarrow \boxed{V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4}$

· $(\forall)\ v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(\exists)!\ v_1 = (x, y, 0, 0) \in V_1$, $v_2 = (0, 0, y, z) \in V_2$ a.î. $v = v_1 + v_2$

$\boxed{Ap\,1.}$ Fie $\mathcal{S} = \{ A \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, {}^tA = A \} \subset \mathcal{M}_n(K)$

$\mathcal{A} = \{ B \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, {}^tB = -B \}$

a) Dem. că: $\mathcal{S}, \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(K)$ ssp. vectoriale

b) Arătați că: $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

c) Verificați teorema dimensiunii în acest caz.

Sol: a) $\mathcal{S} \Rightarrow$ mulțimea matricelor simetrice

$\mathcal{A} \rightarrow$ —"— antisimetrice

$\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(K)$
ssp. vectorial

Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow {}^tA_1 = A_1$

$\alpha_1, \alpha_2 \in K \qquad {}^tA_2 = A_2$

Avem: ${}^t(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = {}^t(\alpha_1 A_1) + {}^t(\alpha_2 A_2) =$

$= \alpha_1\, {}^tA_1 + \alpha_2\, {}^tA_2 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \Rightarrow \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in \mathcal{S}$

Deci: $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(K)$
ssp. vectorial (al matricelor simetrice)

Analog se arată că $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(K)$
ssp. vectorial (al matricelor antisimetrice)

Evident: $\mathcal{S} + \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(K)$. Vom demonstra că: $\mathcal{M}_n(K) \subset \mathcal{S} + \mathcal{A}$

i.e. $(\forall)\, C \in \mathcal{M}_n(K), (\exists)\, A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{A}$ a.î. $C = A + B$

Obs: Fie $C \in \mathcal{M}_n(K) \qquad C = A + B$

${}^tC = {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A - B$

$\Rightarrow 2A = C + {}^tC \Rightarrow A = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$

$2B = C - {}^tC \Rightarrow B = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$

Luăm: $A = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$ $\{{}^tA = A\}$

şi $B = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$ $\{{}^tB = -B\}$

Deci: $(\forall)\ C \in \mathcal{M}_n(K)$, $(\exists)\ A \in \mathcal{S}$ şi $B \in \mathcal{A}$ a.î. $C = A + B$,

i.e. $\mathcal{M}_n(K) \subset \mathcal{S} + \mathcal{A}$

În concluzie, $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$

Arătăm că: $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{O_n\}$

Fie $C \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} {}^tC = C \\ {}^tC = -C \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow C = -C \Rightarrow 2C = O_n \\ \Rightarrow \underline{C = O_n} \end{array}$

Aşadar: $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

$\uparrow$ suma directă

c) Verificarea th. dimensiunii în acest caz presupune verificarea următoarei egalităţi:

$$\dim_K \mathcal{M}_n(K) = \dim_K \mathcal{S} + \dim_K \mathcal{A}$$

Ştim că: $\dim_K \mathcal{M}_n(K) = n^2$

Determinăm dimensiunile celor 2 sp. vectoriale $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{A}$.

• Fie $A \in \mathcal{S}$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$${}^tA = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji},\ (\forall)\ i,j = \overline{1,n} \quad (*)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{1 \le j \le i \le n} a_{ij} E'_{ij}, \text{ unde } E'_{ij} = \begin{array}{r} \\ (i) \end{array}\begin{pmatrix} & & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ matricea care are 1 pe poziţiile (i,j) şi (j,i) şi în rest 0.

$(\forall)\ 1 \le j \le i \le n$

$$B_{\mathcal{S}} = \{E'_{ij}\}_{1\le j\le i\le n} \subset \mathcal{S}$$

$$\underset{(T)}{\underline{\text{bază}}} \Rightarrow \dim \mathcal{S} = \operatorname{card} B_{\mathcal{S}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Fie $B \in \mathcal{A}$, $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$${}^tB = -B \iff b_{ij} = -b_{ij},\ (\forall)\ i,j=\overline{1,n}$$

<u>Obs</u>: Pt. $i=j \Rightarrow b_{ii} = -b_{ii} \Rightarrow 2b_{ii} = 0 \Rightarrow b_{ii} = 0,\ (\forall)\ i=\overline{1,n}$

{(∀) matrice antisimetrică are diagonala principală nulă}

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b_{21} & \cdots & -b_{n1} \\ b_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{n1} & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{1\le j<i\le n-1} b_{ij} E''_{ij}, \text{ unde } E''_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & \boxed{-1} \\ & 0 & \\ \boxed{1} & & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ matricea care are 1 pe poz (i,j) $\{j>i\}$ şi -1 pe poz. (j,i), 0 în rest.

$$B_{\mathcal{A}} = \{E''_{ij}\}_{1\le j<i\le n-1} \subset \mathcal{A}$$

$$\underset{(T)}{\underline{\text{bază}}} \Rightarrow \dim \mathcal{A} = \operatorname{card} B_{\mathcal{A}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Avem: $\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$ ✓

(verificarea th. dimensiunii, în acest caz).

7* Fie $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \underset{\text{urma}}{Tr}\, A = 0\}$

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A = \lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$

---

a) Ar. că: $V_1, V_2 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssp. vect.

b) Dem. că: $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

c) Verificați teorema dimensiunii în acest caz.

Aplicații liniare

(morfisme de spații vectoriale)

<u>Def</u>: Fie $V, W / K$ → spații vectoriale

O aplicație $f: V \to W$ s.n. aplicație <u>liniară</u> (sau morfism de sp. vect.) dacă: $\begin{cases} 1) \ f(x+y) = f(x) + f(y), & (\forall)\, x, y \in V \\ 2) \ f(\lambda x) = \lambda f(x), & \lambda \in K \end{cases} \iff$

$\iff \left[f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),\ (\forall)\ x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K \right]$

<u>Obs</u>: $f(0_V) = 0_W$.

Exemple:

1) $V/_K$ sp. vect.

$0_V : V \to V$, $0_V(x) = 0$, $(\forall)\, x \in V$ (apl. nulă)

$1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$, $(\forall)\, x \in V$ (apl. identică)

2) $T_r : \mathcal{M}_n(K) \to K$, $T_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (apl. urmă)

Avem: $\begin{cases} T_r(A+B) = T_r(A) + T_r(B) \\ T_r(\lambda A) = \lambda T_r(A) \end{cases}$, $(\forall)\, A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\lambda \in K$

3) $f : \mathcal{M}_n(K) \to K^{n^2}$

$f(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$, $(\forall)\, A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

4) Fie $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$f_A : K^n \to K^m$, $f_A(X) = AX$

Avem: $f_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f_A(X) + f_A(Y)$, $(\forall)\, X, Y \in K^n$

$f_A(\lambda X) = A(\lambda X) = (A\lambda)X = (\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda f_A(X)$, $(\forall)\, X \in K^n$, $\lambda \in K$

Obs: 1) $(\exists)$ tot atâtea apl. liniare câte matrice.

2) $(\forall)$ apl. liniară e de tipul acesta.

5) $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ nu e apl. liniară pt. că $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Fie $f : V \to W$ apl. liniară

$\operatorname{Ker} f = \{x \in V \,/\, f(x) = 0_W\} \subseteq V$ ssp. vect.
(nucleul)

$\operatorname{Im} f = \{y \in W \,/\, (\exists)\, x \in V$ a.î. $f(x) = y\} \subseteq W$ ssp. vect.
(imaginea)

$\boxed{P}$ a) O apl. lin. $f: V \to W$ e inj. $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

b) O apl. lin $f: V \to W$ e surj. $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$

c) O apl. lin $f: V \to W$ e bij $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \\ \operatorname{Im} f = W \end{cases}$

T (rang-defect)

Fie $V, W /_K$ – 2 sp. vect. (finit dimensionate).

$f: V \to W$ apl. liniară.

Atunci: $\underbrace{\dim_K \operatorname{Ker} f}_{\text{" } def(f)} + \underbrace{\dim_K \operatorname{Im} f}_{\text{" } rg(f)} = \dim_K V$

$\boxed{Ap1}$: Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$f(x,y) = (x+y, x-y, y)$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Ar. că f e aplicație liniară.

b) Scrieți matricea asociată lui f în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

Rez:

a)

(V_1) Fie $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ $\in \mathbb{R}^2$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Atunci: $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2)) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 (x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2), \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= \alpha_1 (x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2) = \alpha_1 f(x_1, y_1) + \alpha_2 f(x_2, y_2) =$

$= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

(V2) Scriem $f(X) = AX$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(f matriceală)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R})$$

Fie: $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$

$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1) + A(\alpha_2 X_2)$$

$$= (A\alpha_1)X_1 + (A\alpha_2)X_2 = (\alpha_1 A)X_1 + (\alpha_2 A)X_2 = \alpha_1(AX_1) + \alpha_2(AX_2)$$

$$= \alpha_1 f(X_1) + \alpha_2 f(X_2) \Rightarrow f \text{ apl. lin. (morf. de sp. vect.)}$$

b) $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ → m. asoc. apl. lin. f în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

$\begin{matrix} \| & \| \\ f(e_1) & f(e_2) \end{matrix}$, unde $\underbrace{\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2}_{\text{b. canonică}}$

$f(e_1) = f(1,0) = (1,1,0)$

$f(e_2) = f(0,1) = (1,-1,1)$

(T) Aceleași cerințe pentru: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x-y-z)$

$\boxed{\text{Apl}}$: Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$f(x,y) = (x+y, x, -y)$ apl. liniară.

a) Determinați $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$

b) Precizați dacă f e injectivă, surjectivă, resp. bijectivă

c) Verificați t. rang-defect în acest caz.

Rez: a) $\mathrm{Ker}\, f = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$
(nucleul) $\quad v = (x,y)$

Teorie S.L.O.

$$f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \text{ sol. unică}$$

$$(\mathrm{rg}\, A = 2), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Deci: $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$\mathrm{Im}\, f = \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, (\exists)\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ a.î. } f(x,y) = (x',y',z') \}$
(imaginea)

$$f(x,y) = (x',y',z') \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x' & (1) \\ x = y' & (2) \\ -y = z' \Leftrightarrow y = -z' & (3) \end{cases}$$

(2)(3) în (1)
$\Leftrightarrow y' - z' = x' \Leftrightarrow x' - y' + z' = 0$

Deci: $\mathrm{Im}\, f = \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, x' - y' + z' = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect.

b) $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Leftrightarrow f$ injectivă

$\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}^3$ subsp. propriu $\Rightarrow f$ nu este surj

$\Rightarrow f$ nu este nici bijectivă.

c) Verificăm T. rang-defect în acest caz, i.e.

$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim \mathbb{R}^2$

Evident: $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$

și $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Determinăm $\dim \mathrm{Im}\, f$.

(V_1) $\quad rg\, f = \underline{\dim(\operatorname{Im} f)} = n - rg\, \underset{\overset{\shortparallel}{(1\ -1\ 1)}}{\underline{A'}} = 3 - 1 = \underline{2}$

<u>sau</u>

(V_2) $\quad \operatorname{Im} f \ni (x', y', z') = (x', x'+z', z') = (x', x', 0) + (0, z', z')$

$$x' - y' + z' = 0 \Leftrightarrow y' = x' + z'$$

$= x' \underbrace{(1,1,0)}_{v_1} + z' \underbrace{(0,1,1)}_{v_2} = x'v_1 + z'v_2 \quad \Rightarrow B = \{v_1, v_2\} \subset \operatorname{Im} f$

$x', z' \in \mathbb{R}$ $\quad$ s. de generatori

+ s.v. <u>lin. indep.</u>

(se verifică ușor)

$\Rightarrow B \subset \operatorname{Im} f$

<u>bază</u> $\Rightarrow \underline{\dim(\operatorname{Im} f) = 2}$

Revenim, și observăm că:

$0 + 2 = 2$, i.e. $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2$,

echivalent cu $\boxed{\operatorname{def} f + rg\, f = 2}$.