② Spații vectoriale euclidiene:

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ - spațiu vectorial real

și $F: V\times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită

- F se numește produs scalar pe V.

.. Un spațiu vectorial real V dotat cu un produs scalar se numește spațiu vectorial euclidian

Exemplu: Fie sp. vectorial real $(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$

Definim $< , > : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ (\forall)\ x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\downarrow$

produsul scalar canonic

$(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, < , >) \to$ spațiu vectorial euclidian

- $\|x\| = \sqrt{<x, x>}, \ (\forall)\ x \in V$

- $d: V\times V \to \mathbb{R}_+$,

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{<y-x, y-x>}, \ (\forall)\ x, y \in V$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)

În orice sp. vectorial euclidian $(E/_{\mathbb{R}}, < , >)$ are loc inegalitatea:

$$|<x, y>| \leq \|x\| \, \|y\|, \ (\forall)\ x, y \in E.$$

„=" $\Leftrightarrow \{x, y\}$ sistem vectorial liniar dependent (i e x și y sunt vectori coliniari)

Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt:

$(\forall)\ \underbrace{\{f_1, \dots, f_n\}}_{\text{bază arbitrară}} \subset E/_{\mathbb{R}} \Rightarrow (\exists)\ \underbrace{\{e_1, \dots, e_n\}}_{\text{bază ortonormată}} \subset E/_{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\overline{\{e_1, \dots, e_i\}} = \{f_1, \dots, f_i\}, \ (\forall)\ i = \overline{1, n}$$

$\boxed{\text{Ap1.}}$ În spațiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$ să se construiască o bază ortonormată pornind de la baza:

$\langle , \rangle$ = {produsul scalar canonic}

$B = \{f_1 = (-1,1,1),\ f_2 = (1,-1,1),\ f_3 = (1,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$

folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt (P.O.G-S)

Rez: Avem:

(V1)
$$\begin{cases} e_1' = f_1 \\ e_i' = f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{\langle f_i, e_j' \rangle}{\|e_j'\|^2} e_j',\ (\forall)\, i = \overline{2,n} \end{cases} \to \{e_1', \dots, e_n'\} \text{ bază ortogonală}$$

$\{$i.e. $\langle e_i', e_j' \rangle = 0$, $(\forall)\, 1 \le i \ne j \le n\}$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|},\ (\forall)\, i = \overline{1,n} \to \{e_1, \dots, e_n\} \text{ bază ortonormată}$$

$\{$i.e. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,n}\}$

δ_{ij} – simbolul lui Kronecker

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}}$$

În cazul nostru obținem:

$$\begin{cases} e_1' = f_1 = (-1,1,1) \\ e_2' = f_2 - \dfrac{\langle f_2, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2} e_1' = (1,-1,1) + \dfrac{1}{3}(-1,1,1) = \dfrac{2}{3}(1,-1,2) \\ e_3' = f_3 - \dfrac{\langle f_3, e_1' \rangle}{\|e_1'\|^2} e_1' - \dfrac{\langle f_3, e_2' \rangle}{\|e_2'\|^2} e_2' = \end{cases} \to \text{bază ortogonală}$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} \cdot 6} \cdot \frac{2}{3}(1,-1,2) =$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{e_1'}{\|e_1'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \\ e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \\ e_3 = \dfrac{e_3'}{\|e_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \end{cases} \to \text{bază ortonormată.}$$

V_2 Avem: $\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \dfrac{e_i'}{\|e_i'\|}, \text{ unde } e_i' = f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \langle f_i, e_j \rangle e_j, \ (\forall)\, i = \overline{2,n} \end{cases}$

Prin calcul obținem:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}, \quad e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$$
$$= (1,-1,1) - \tfrac{1}{3}(-1)(-1,1,1)$$
$$= (1,-1,1) + \tfrac{1}{3}(-1,1,1) = \tfrac{2}{3}(1,-1,2)$$
$$\|e_2'\| = \tfrac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$e_2 = \frac{3}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3}(1,-1,2) = \underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}, \quad e_3' = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2$$
$$= (1,1,-1) - \tfrac{1}{3}(-1)(-1,1,1) - \tfrac{1}{6}(-2)(1,-1,2)$$
$$= (1,1,-1) + \tfrac{1}{3}(-1,1,1) + \tfrac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$
$$\|e_3'\| = \sqrt{2}$$

$$e_3 = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$$

Așadar: $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ bază ortonormată obținută prin (P.O. G-S) din baza dată.

! $\boxed{\text{Temă}}$ Aceeași enunț, ca în aplicația anterioară pentru baza.

$$B = \{ f_1 = (1,1,1),\ f_2 = (1,1,-1),\ f_3 = (1,-1,-1) \}$$

Spații vectoriale euclidiene

Ap1. Pornind de la baza

$B = \{f_1 = (0,1,1),\ f_2 = (1,0,1),\ f_3 = (1,1,0)\} \subset E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$, ($\langle , \rangle$ = produsul scalar canonic)

determinați o bază ortonormată prin utilizarea procedeului de ortonormalizare Gram-Schmidt

Rez. Reamintim
$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \dfrac{e_i'}{\|e_i'\|}, \text{ unde } e_i' = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle f_i, e_j \rangle e_j, (\forall) i = \overline{2,n} \end{cases}$$

Avem: $\|f_1\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

$$e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1 = (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) =$$
$$= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2,-1,1)$$
$$\|e_2'\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Rezultă $e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{1}{2}(2,-1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$

$$e_3' = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2 =$$
$$= (1,1,0) - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}_{=1/2}(0,1,1) - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}}_{=1/6}(2,-1,1) =$$
$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1,1,-1)$$

$\| e_3' \| = \frac{2}{3}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\underset{\sim}{e_3} = \frac{e_3'}{\| e_3' \|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(1,1,-1) = \underset{\sim}{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)}$

Verificare: $\begin{cases} < e_1, e_2 > = < e_1, e_3 > = < e_2, e_3 > = 0 \\ \| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1 \end{cases}$

adică: $< e_i, e_j > = \delta_{ij}, (\forall) i, j = \overline{1,3} \Leftrightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată.

În concluzie, baza ortonormată obținută prin procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt din baza inițială $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ este $B' = \{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1), e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \}$

$\boxed{A_p 1.}$ Considerând spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{p.s.c}{<,>})$ și baza ortonormată B' obținută în aplicația anterioară, să se determine coordonatele următorilor vectori în această bază:

a) $v = (1,2,3)$

b) $w = (-1,1,2) \rightarrow \boxed{\text{TEMA}}$

Rez: Considerăm scrierea vectorului v în baza B' dată:

$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$

Atunci: $< v, e_1 > = v_1 \overbrace{< e_1, e_1 >}^{=1} + v_2 \overbrace{< e_2, e_1 >}^{0} + v_3 \overbrace{< e_3, e_1 >}^{0} = v_1$

$\Rightarrow v_1 = < v, e_1 >$

Analog $\Rightarrow v_2 = < v, e_2 >$

$v_3 = < v, e_3 >$

Deci: $v = < v, e_1 > e_1 + < v, e_2 > e_2 + < v, e_3 > e_3$, unde $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată

Calculând, obținem:

$v_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $v_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}$, $v_3 = 0$

Deci: $[v]_{B'} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$

$\boxed{A_p 1}$ În spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, < >)$

{produsul scalar canonic}

se consideră vectorii $f_1 = (2,2,1)$ și $f_2 = (-2,-1,2)$.

a) Calculați $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ și unghiul dintre f_1 și f_2.

b) Determinați un vector nenul $f_3 \in E_3$ a.î. f_3 să fie perpendicular pe f_1 și f_2.

c) Pentru f_3 obținut la punctul (b), ortonormați sistemul $\{f_1, f_2, f_3\}$ prin procedeul de ortonormalizare Gram–Schmidt.

Rez: a) $\|f_1\| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$

$\|f_2\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2} = 3$

Not: $\theta = \sphericalangle(f_1, f_2)$

Avem: $\cos\theta = \frac{< f_1, f_2 >}{\|f_1\| \, \|f_2\|} = -\frac{4}{9} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$
$= \pi - \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$

b) Fie $f_3 = (\alpha, \beta, \gamma) \in E_3$ a.î. $\begin{cases} f_3 \perp f_1 \\ f_3 \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} < f_3, f_1 > = 0 \\ < f_3, f_2 > = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ α, β nec. principale; $\gamma = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ nec. secundară

$\operatorname{rg} A = 2$

Rescriem sistemul:

$$\begin{cases} 2\alpha+2\beta = -\lambda \\ -2\alpha-\beta = -2\lambda \end{cases} \Big|^{+} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \beta = -3\lambda \\ \alpha = \frac{5}{2}\lambda \\ \gamma = \lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow f_3 = \lambda\left(\frac{5}{2}, -3, 1\right),\ \lambda\in\mathbb{R}^*$ (deoarece $f_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$)

Așadar, determinarea lui f_3 nu este unică.

Luăm $\boxed{\lambda = 2} \Rightarrow f_3 = (5,-6,2)$

(pentru ușurința rezolvării apl. la pct. c)

c) $\boxed{\text{TEMĂ}}$ Ortonormați sistemul:

$\{f_1 = (2,2,1),\ f_2 = (-2,-1,2),\ f_3 = (5,-6,2)\}$

prin $\underline{\text{P.O.G-S}}$.

$\boxed{\text{Obs}}$ $\langle f_1, f_3\rangle = \langle f_2, f_3\rangle = 0$ (așa a fost construit f_3)

$\Rightarrow$ raționament $\underline{\text{simplificat}}$.

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$

$\boxed{\text{produsul scalar canonic}}$

Determinați suplementul ortogonal al următoarelor subspații vectoriale:

a) $U = \langle \overbrace{(0,0,1)}^{u_1}, \overbrace{(1,1,0)}^{u_2} \rangle = Sp\{u_1, u_2\}$

b) $V = \langle \overbrace{(1,2,3)}^{v} \rangle = Sp\{v\}$

$\underline{\text{Rez:}}$ Reamintim: Fie $(E/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ sp. vectorial euclidian

$U \subset E$

subspațiu vectorial

$U^{\perp} = \{ y \in E / y \perp x, (\forall) x \in U \}$

$\downarrow$

s.n. complementul ortogonal al lui U

Dacă $U \oplus U^{\perp} = E \Rightarrow U^{\perp}$ s.n. suplementul ortogonal al lui U.

$\boxed{P}$ $(\forall)$ $U \subset E$ $\Rightarrow (\exists)!$ suplementul ortogonal $U^{\perp}$

subsp. vectorial

Revenim la rezolvarea aplicației date:

a) $U^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^3 / y \perp x, (\forall) x \in U \}$

$B = \{u_1, u_2\} \subset U$

bază

E suficient să verificăm rel. pe bază.

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\begin{cases} y \perp u_1 \\ y \perp u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y, u_1 \rangle = 0 \\ \langle y, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg A = 2$

$\Rightarrow$ | y_2, y_3 nec principale

| $y_1 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ nec secundară

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda \\ y_2 = -\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ y_3 = 0 \end{cases}$

Deci $y = \lambda(1, -1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

$U^{\perp} = \{ \lambda(1,-1,0) / \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle (1,-1,0) \rangle$

$\hookrightarrow$ suplementul ortogonal al lui U (ssp. vect. 1-dimensional)

b) $V^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^3 / y \perp x, (\forall) x \in V \}$

$B = \{ v \} \subset V$ bază

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $y \perp v \iff \langle y, v \rangle = 0$

$\iff y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$

Deci: $V^{\perp} = \{ \underset{(y_1, y_2, y_3)}{\underset{\shortparallel}{y}} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \}$

$\downarrow$

supl. ortogonal al lui V (este un ssp. vectorial 2-dimensional)

$\boxed{\text{Temă:}}$ Același enunț ca în aplicația anterioară pentru:

a) $U = \langle (1,2,1), (1,-1,2) \rangle$

b) $V = \langle (2,-3,1) \rangle$