$\boxed{\text{Apl. 2}}$ Fie conica :

$$\Gamma : x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

Clasificați din pct. de vedere metric (i.e. prin izometrii) conica dată.

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \delta = \det A = 0$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \Delta = \det A' = -1 \neq 0$

$\to \Gamma$ parabolă

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$\iff \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \quad < \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$ valorile proprii

Subspații proprii ① $V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda_1 v\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -v_1 - v_2 = 0 \implies \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = -\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_1} = \{\alpha(1,-1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,-1)}_{\text{not } f_1} \rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \{v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda_2 v\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \{\alpha(1,1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,1)}_{\text{not } f_2} \rangle$$

$$f_1 \to e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$$f_2 \to e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

Efectuăm rotația :

$$r \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases}$$

$$r(\Gamma):\ 2(x_1')^2 - \sqrt{2}(x_1' + x_2') + 2\sqrt{2}(-x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 - 3\sqrt{2}\,x_1' + \sqrt{2}\,x_2' + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 + \sqrt{2}(-3x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2\left((x_1')^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x_1'\right) + \sqrt{2}\,x_2' + 1 = 0$$

$$2\left(x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2}\,x_2' - \frac{5}{4} = 0$$

Efectuăm translația t:

$$t \begin{cases} x_1'' = x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2'' = x_2' \end{cases} \Rightarrow$$

$$(t\circ r)(\Gamma):\ 2(x_1'')^2 + \sqrt{2}\,x_2'' - \frac{5}{4} = 0$$

$$2{x_1''}^2 + \sqrt{2}\left(x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$t' \begin{cases} x_1''' = x_1'' \\ x_2''' = x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t'\circ t\circ r)(\Gamma):\ 2{x_1'''}^2 + \sqrt{2}\,x_2''' = 0$$

$$\boxed{{x_1'''}^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'''} \rightarrow V(\overset{0}{x_1'''}, \overset{0}{x_2'''})$$

$$\Updownarrow$$

$$t'\circ t\circ r:\ \begin{cases} x_1''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Deci $V\left(\frac{11}{8}, -\frac{1}{8}\right) \rightarrow$ vârful PARABOLEI

Axa parabolei: $x_1''' = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 - \frac{3}{2} = 0}$

Proprietățile optice ale conicelor:

1. Proprietatea optică a elipsei:

$\boxed{P_1}$ Tangenta și normala la elipsa E în pct. M_0 sunt bisectoarele $\sphericalangle$ determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

Dem: Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $b^2 = a^2 - c^2$

$M_0(x_0, y_0) \in E \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$

Fie $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$ focarele elipsei E.

Suporturile razelor focale sunt dreptele:

$M_0F: y - 0 = \frac{y_0}{x_0 - c}(x - c) \Longleftrightarrow y_0 x - (x_0 - c)y - cy_0 = 0$

$-y_0 x + (x_0 - c)y + cy_0 = 0$

$M_0F': y - 0 = \frac{y_0}{x_0 + c}(x + c) \Longleftrightarrow y_0 x - (x_0 + c)y + cy_0 = 0$

Dacă: $x_0 = 0 \Rightarrow \Delta F'M_0F$ isoscel, tangenta M_0T este orizontală, iar normala M_0N este verticală (coincide cu Oy).

Pp. $x_0 \neq 0$ și avem identitățile:

$\sqrt{y_0^2 + (x_0 + c)^2} = \frac{a^2 + cx_0}{a} = a + ex_0$; $\sqrt{y_0^2 + (x_0 - c)^2} = \frac{a^2 - cx_0}{a} = a - ex_0$

$tg_{M_0}: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{b^2}{y_0}\left(-\frac{x_0}{a^2} x + 1\right)$

$m_{tg_{M_0}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$ Dar: $m_{tg} \cdot m_{nor} = -1$ $(\perp)$

Rezultă că: $m_{nor} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0}$; $nor_{M_0}: y - y_0 = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$

Ec. bisectoarei:

$$\frac{|y_0 x-(x_0+c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\frac{|-y_0 x+(x_0-c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}$$

Rezultă că: panta normalei este egală cu panta bisect., deci aceste 2 dr. coincid.

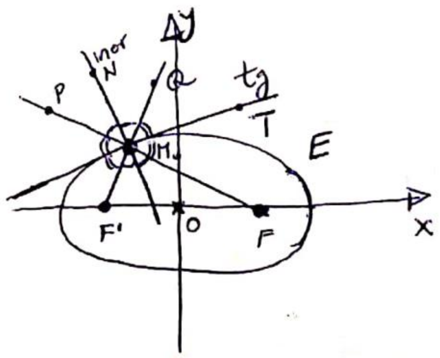
<u>Obs</u>: Proprietatea geometrică anterioară corespunde următorului fenomen optic: razele de lumină ce pornesc dintr-o sursă fixată într-unul din focarele unei oglinzi eliptice sunt reflectate de oglindă în celălalt focar.

Proprietăți <u>analoage</u> avem și pentru hiperbolă, respectiv parabolă:

$\boxed{P_2}$ Tangenta și normala la o <u>hiperbolă</u> H în pct. M_0 sunt bisectoarele ∢ determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

$\boxed{P_3}$ Tangenta și normala la o <u>parabolă</u> P în pct. M_0 sunt bisectoarele ∢ determinate de suportul razei focale a lui M_0 și de paralela (||) prin M_0 la axa parabolei.

Fig. $\boxed{P_1}$



Geometrie și algebră liniară

$\boxed{\text{Cuadrice}}$ (în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$)

$\boxed{\text{Apl}}$ Fie cuadrica

$$\Gamma: \overbrace{x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z}^{=f(x,y,z)}=0$$

Să se aducă cuadrica Γ la o formă canonică prin izometrii.

<u>Rez:</u> Avem $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\delta = \det A_3 = -36 \neq 0 \Rightarrow \Gamma$ are centru <u>unic</u>.

$\Delta = \det A = 36 \neq 0 \Rightarrow \Gamma$ cuadrică nedegenerată

Determinăm coordonatele centrului unic, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+6z-2=0 \\ 2x+10y+2z+6=0 \\ 6x+2y+2z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=1 \\ x+5y+z=-3 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$$

$\downarrow$ Sistem Cramer (comp. determinat) cu sol. unică $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}$

$P_0(\overset{x_0}{\overbrace{-\tfrac{1}{3}}}, \overset{y_0}{\overbrace{-\tfrac{2}{3}}}, \overset{z_0}{\overbrace{\tfrac{2}{3}}}) \to$ centrul unic al cuadricei Γ

Efectuăm translația $t\begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \\ z'=z-z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+\frac{1}{3} \\ y'=y+\frac{2}{3} \\ z'=z-\frac{2}{3} \end{cases} \to \begin{cases} x=x'-\frac{1}{3} \\ y=y'-\frac{2}{3} \\ z=z'+\frac{2}{3} \end{cases}$

Obținem:

<u>$t(\Gamma)$:</u> $x'^2+5y'^2+z'^2+2x'y'+6x'z'+2y'z'\underbrace{-1}_{=\frac{\Delta}{\delta}=f(x_0,y_0,z_0)}=0$

Determinăm valorile proprii și subspațiile proprii coresp. matricei A_3:

- Ec. caracteristică: (rezolvare în $\mathbb{R}$)

$$\underbrace{\det(A_3 - \lambda I_3)}_{P(\lambda)} = 0 \iff \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$$

$P(\lambda)$ (polinomul caracteristic)

Valorile proprii: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$ (multiplicitățile algebrice)

$$V_{\lambda_1=3} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \,/\, A_3 v = \lambda_1 v \}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(A_3 - \lambda_1 I_3) v = O_{(3,1)}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$\to$ sistem liniar omogen $\to$ $\det(A_3 - \lambda_1 I_3) = 0$ $\to$ admite și sol. nenule

$$(\Delta_p) = \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A_3 - \lambda_1 I_3) = 2$$

minor principal

$\to$ x_1, x_2 necunoscute principale

$x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ nec. secundară

Rescriem sistemul $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -3\alpha & |\cdot(-2) \\ x_1 + 2x_2 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow 5x_1 = 5\alpha \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \alpha \end{cases}$

Deci: $V_{\lambda_1=3} = \{ \alpha(1,-1,1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,-1,1)}_{f_1} \rangle$

Analog, obținem: $V_{\lambda_2=6} = \{ \beta(1,2,1) \,/\, \beta \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,2,1)}_{f_2} \rangle$

$V_{\lambda_3=-2} = \{ \gamma(-1,0,+1) \,/\, \gamma \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(-1,0,+1)}_{f_3} \rangle$

Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt vom obține o bază ortonormată pornind de la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ formată din vectori proprii.

Obs: $f_1 \perp f_2$ i.e. $\{f_1, f_2, f_3\}$ bază ortogonală.
$f_2 \perp f_3$
$f_1 \perp f_3$

În consecință, trebuie doar să normăm vectorii f_1, f_2, f_3 pentru a obține baza ortonormată căutată.

Luăm:
$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1) \\ e_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \end{cases}$$

Efectuăm rotația r
$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x'-y'+z') \\ y'' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x'+2y'+z') \\ z'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x'+z') \end{cases}$$

$$\underset{\text{m. rotației}}{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\det R = 1$

$R^t R = I_3$

$\Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y'' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}z'' \\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}y'' \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x'' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y'' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z'' \end{cases}$$

$(r \circ t)(\Gamma)$: $3x''^2 + 6y''^2 - 2z''^2 - 1 = 0 \iff \boxed{\dfrac{x''^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{y''^2}{\frac{1}{6}} - \dfrac{z''^2}{\frac{1}{2}} - 1 = 0}$

$\{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0\}$

$\Rightarrow \Gamma$ este un HIPERBOLOID CU O PÂNZĂ.