Rez: $\boxed{\text{Regula lui LAPLACE}}$

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $1 \le p \le n$, $p \in \mathbb{N}$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \to$ compl. alg. al elem. a_{ij}

$C = (-1)^s M_c$, $s = (i_1 + i_2 + \ldots + i_p) + (j_1 + j_2 + \ldots + j_p)$

$\boxed{\text{Th. LAPLACE}}$ Determinantul matricei A e egal cu suma produselor minorilor de ordin p (ce se pot construi cu elem. a p linii (col.) fixate ale matricei A) prin compl. lor algebrici.

$\boxed{\text{C.P.}}$ $p = 1$

$(\forall)\, i = \overline{1,n}$: $\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$

(reg. de dezv. a det. matricei A după linia i).

$$\det A = \sum M \cdot M' = \sum \det(A_{IJ}) \cdot (-1)^{i_1 + \ldots + i_p + j_1 + \ldots + j_p} \det(A_{\bar{I}\bar{J}})$$

M minor de ordin p în A obț. din liniile $\{i_1, \ldots, i_p\}$ și din p coloane

$1 \le p \le n$; $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n$

$\boxed{\text{OBS}}$ Suma are C_n^p termeni.

Regula lui LAPLACE

Rez: (5) $\Delta = \det A =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= +0 - 1 \cdot 18 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 7 - 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 =$$

$$= -18 + 12 + 7 - 5 - 1 = 19 - 24 = \underline{\underline{-5}}$$

Deci: $\boxed{\Delta = -5}$

$\boxed{T}$ $\boxed{A.1}$ Calculați det A

a) folosind dezvoltarea după coloana 4

b) folosind regula lui Laplace prin dezv. după liniile $i_1=1, i_2=4$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rez: b) $\Delta = \det A = \overset{j_1=1,\, j_2=2}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}} \cdot (-1)^{1+4+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{\overset{j_1=1,\, j_2=3}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}}_{=0} \cdot \cancel{(-1)^{1+4+1+3}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \overset{j_1=1,\, j_2=4}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \cdot (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{\overset{j_1=2,\, j_2=3}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}}_{=0} \cdot \cancel{(-1)^{1+4+2+3}} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \overset{j_1=2,\, j_2=4}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} \cdot (-1)^{1+4+2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{\overset{j_1=3,\, j_2=4}{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}}_{=0} \cdot \cancel{(-1)^{1+4+3+4}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 7\cdot(-8) + (-1)\cdot 5 + 11(-1)\cdot 7 = -56-5-77 = \underline{-138}$

Ap!: Considerăm următoarele matrice date pe blocuri:

1) $A = \begin{pmatrix} M_m & N \\ O & P_p \end{pmatrix} \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{m,p} \end{cases} \Rightarrow \det A = \det M \cdot \det P$

2) $A = \begin{pmatrix} M_m & O \\ N & P_p \end{pmatrix} \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{p\times m} \end{cases} \Rightarrow \det A = \det M \cdot \det P$

3) $A = \begin{pmatrix} N & M_m \\ P_p & O \end{pmatrix} \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{m\times p} \end{cases} \Rightarrow \det A = (-1)^{mp} \det M \cdot \det P$

4) $A = \begin{pmatrix} O & M_m \\ P_p & N \end{pmatrix} \to \begin{cases} M_{m\times m} \\ P_{p\times p} \\ N_{p\times m} \end{cases} \Rightarrow \det A = (-1)^{mp} \det M \cdot \det P$

$\boxed{\text{Obs:}}$ 1) $\underset{\text{Transpunere}}{\Rightarrow}$ 2)

Rez: 1) $A = \begin{pmatrix} M_m & N_{m\times p} \\ O_{p\times m} & P_p \end{pmatrix}$

Dem. că: $\boxed{\det A = \det M \cdot \det P}$

Calculăm $\det A$ cu regula lui LAPLACE, dezvoltând după primele "m" linii $(i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_m = m)$.

Obținem: $\det A = \sum B \cdot B' =$

B este un minor de ord. "m" din A determinat de liniile $\{i_1, \dots, i_m\}$ și coloanele $\{j_1 < \dots < j_m\} \subset \{1, \dots, m+p\}$

compl. algebric al lui B

$= \det M \cdot \underbrace{(-1)^{2(1+2+\dots m)}}_{+1} \cdot \det P + 0$

Arătăm că: pt. $\{j_1, \dots, j_m\} \neq \{1, \dots, m\} \Rightarrow \underline{B' = 0}$

Minorii din B' coresp. liniilor $\{m+1, \dots, m+p\}$ și la coloanele $\{1, \dots, m+p\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$

Deoarece $\{j_1, \dots, j_m\} \neq \{1, \dots, m\}$

$\underbrace{\qquad}_{\text{"m" elem}}$ $\Rightarrow (\exists)\ \underline{k} \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$

Așadar, coloana "k" din matricea A este folosită în minorul B' și deci e o coloană formată doar din 0 $\Rightarrow$ $\underline{B' = 0}$

În consecință: $\boxed{\det A = \det M \cdot \det P}$

Analog 3) și 4).

$\boxed{\text{Determinanți VANDERMONDE}}$

Fie $a_i \in K$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, $n \geq 2$

$$V(a_1, \dots, a_n) \overset{not}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \to \text{det. VANDERMONDE}$$

• Dem. că: $V(a_1, \dots, a_n) = \prod\limits_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$: $P(n)$

Dem: $\to$ Inducție după $\underline{n}$

I $P(2)$: $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \Rightarrow P(2)$ adev.

II Pp. $P(n-1)$ adev. $\Rightarrow P(n)$ adev.

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_1^2 & a_2^2 - a_1^2 & \dots & a_n^2 - a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} C_2' \to C_2 - C_1 \\ C_3' \to C_3 - C_1 \\ \vdots \\ C_n' \to C_n - C_1 \end{cases}$$

Știm că: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Obs: De pe fiecare coloană C_i scoatem factor comun $\boxed{a_i - a_1}$, $\boxed{\text{pt. } (\forall)\ i=\overline{2,n}}$

În continuare, dezv. după L_1 și obținem:

$$V(a_1,\dots,a_n) = (a_2-a_1)\dots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2+a_1 & \dots & a_n+a_1 \\ a_2^2+a_1a_2+a_1^2 & \dots & a_n^2+a_1a_n+a_1^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}+a_2^{n-3}a_1+\dots+a_1^{n-2} & \dots & a_n^{n-2}+a_n^{n-3}a_1+\dots+a_1^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2' = L_2 - a_1L_1 \\ \vdots \\ L_{n-2}' = L_{n-2} - a_1 L_{n-3} \\ L_{n-1}' = L_{n-1} - a_1 L_{n-2}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & \\ a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \cdot (a_2-a_1)\dots(a_n-a_1) =$$

$$= (a_2-a_1)\dots(a_n-a_1)\,V(a_2,\dots,a_n) \underset{P(n-1)}{\overset{\text{Ip. de ind}}{=}}$$

$$= (a_2-a_1)\dots(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j) = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j) \Rightarrow P(n) \text{ adev.}$$

Obs: Fie $a_i \in K$ $(\forall)\ i=\overline{1,n}$
corp com.

$\Rightarrow$ 1) $V(a_1,\dots,a_n) = 0 \Leftrightarrow (\exists)\ 1\le i\ne j\le n$ a.î. $a_i = a_j$

2) $V(a_1,\dots,a_n) \neq 0 \Leftrightarrow a_1,\dots,a_n$ distincte

*

$\boxed{Apl}$. Să se calculeze:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Rez:
$$\Delta_n \underset{\substack{L_2' \to L_2 + L_1 \\ L_3' \to L_3 + L_1 \\ \vdots \\ L_n' \to L_n + L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 2\cdot 3 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n = n!$$

$\boxed{Apl}$ Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a, x \in \mathbb{R}$.

Notăm cu: $A_n(a,x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietățile următoare:

1) are $\underline{x}$ pe orice poziție de pe diagonala principală;

2) are $\underline{a}$ pe orice altă poziție

a) Calculați $\underline{\det A_n(a,x)}$

b) Determinați n, a, x a.î. $A_n(a,x)$ este inversabilă.

① c) Calc. $A_3(1,2)^{-1}$

Rez a)
$$\det A_n(a,x) = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2' \to L_2 - L_1 \\ L_3' \to L_3 - L_1 \\ \vdots \\ L_n' \to L_n - L_1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a-x & x-a & 0 & \dots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a-x & 0 & 0 & & x-a \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+\dots+C_n}{=} \begin{vmatrix} (n-1)a+x & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= [(n-1)a+x](x-a)^{n-1}$$

Deci: $\det A_n(a,x) = [(n-1)a+x](x-a)^{n-1}$

$\left.\begin{array}{l} n=3 \\ a=1 \\ x=2 \end{array}\right| \Rightarrow \det A_3(1,2) = 4 \neq 0$

b) $A_n(a,x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

m. inversabilă $\Leftrightarrow \det A_n(a,x) \neq 0 \Leftrightarrow [(n-1)a+x](x-a)^{n-1} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-a \neq 0 \\ (n-1)a+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a \\ x \neq (1-n)a \end{cases}$$

$\boxed{Ap1}$ Să se rezolve ecuația:

a)
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

Rez: a)
$$\Delta_1 \underset{L_1' \to L_1+L_2+L_3+L_4}{=} \begin{vmatrix} x+3a & x+3a & x+3a & x+3a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x+3a)\cdot 1\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3$$

$$\Delta_1 = 0 \iff (x+3a)(x-a)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3a \\ x_2 = x_3 = x_4 = a \end{cases} \quad \underline{\underline{\text{sol.}}}$$

b)
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-x & x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ -x^2 & 1 & x-1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ -x^2 & 1 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & x & (x-1)^2 & x-1 \\ 1 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & (x^2+1)(x-1) & x^2+1 \\ 0 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} x & (x-1)^2 & x-1 \\ 1 & (x^2+1)(x-1) & x^2+1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (x-1)^2+x & -x^2+x-1 \\ 0 & (x^2+1)(x-1)+1 & x^2-x+1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} x^2-x+1 & -x^2+x-1 \\ x(x^2-x+1) & x^2-x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2-x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = (x+1)(x^2-x+1)^2$$

$\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)^2 = 0$

$\mathbb{R} \longrightarrow x_1 = -1 \quad S'_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \left.\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = x_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ x_4 = x_5 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}\right\} S'_{\mathbb{C}}.$$

T1

$\boxed{Ap1.}$ Calculați determinantul de ordinul n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & a & a & \dots & a \\ a & -1 & a & \dots & a \\ a & a & -1 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Rez: $\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & a & a & \dots & a \\ a+1 & -a-1 & 0 & \dots & 0 \\ a+1 & 0 & -a-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+1 & 0 & 0 & \dots & -a-1 \end{vmatrix} =$

$L_2' = L_2 - L_1$

$L_3' = L_3 - L_1$

$\vdots$

$L_n' = L_n - L_1$

$$\underset{C_1+C_2+\dots+C_n}{=} \begin{vmatrix} (n-1)a-1 & a & a & \dots & a \\ 0 & -a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= [(n-1)a-1](-a-1)^{n-1} = \underline{(-1)^{n-1}(a+1)^{n-1}[(n-1)a-1]}$$

Deci: $\Delta_n = (-1)^{n-1}(a+1)^{n-1}[(n-1)a-1]$

$\boxed{\text{Apl}}$ Să se calculeze determinantul:

a) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt răd. ec.: $x^4+ax^2+bx+c=0$

Rez. $$\Delta_1 \underset{C_1+C_2+C_3+C_4}{=} (x_1+x_2+x_3+x_4) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ 1 & x_4 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

Dar cf. rel. lui Viète $x_1+x_2+x_3+x_4=0$

$\Rightarrow \Delta_1 = 0$

T b) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$, unde x_1, x_2, x_3 sunt răd. ec. $x^3-2x^2+2x+17=0$

$\boxed{T}$ Verificați egalitățile:

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

b) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-b)(b-c)(c-a)$

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, care are 1 pe diagonala principală, 2 pe pozițiile $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n), (n,1)$ și 0 pe restul pozițiilor. Notăm cu: $\Delta_n = \det(A_n)$

a) Calculați Δ_3 și Δ_4

b) Generalizați pt. $\underline{\Delta_n}$.

<u>Rez:</u> a) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+8 = 9$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-16 = -15$$

b) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\underset{\text{Dezv. } C1}{=} 1\cdot(-1)^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta \quad \Delta'_{n-1}} + 2\cdot(-1)^{n+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta''_{n-1} \quad \nabla}$$

$$= \Delta'_{n-1} + (-1)^{n+1}\, 2\, \Delta''_{n-1}$$

Dar: $\Delta'_{n-1} = 1^{n-1} = 1$

$\Delta''_{n-1} = 2^{n-1}$

Deci: $\boxed{\Delta_n = 1 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n}$, $n \geq 2$

T) Fie $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$

1.) care are 1 pe diagonala principală,
3 pe pozițiile $(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n), (n,1)$
și 0 pe restul pozițiilor. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

a) Calculați Δ_3 și Δ_4.
b) Generalizați pt. Δ_n.

* *

Apl. Fie $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ $\{\Delta_n = \det A_n\}$

a.î. A_n are 1) $\underline{3}$ pe orice poziție de pe diag. principală;

2) $\underline{2}$ pe pozițiile $(1,2), (2,3), \dots, (n-1, n)$;

3) $\underline{1}$ pe pozițiile $(2,1), (3,2), \dots, (n, n-1)$;

4) $\underline{0}$ pe toate celelalte poziții.

Arătați că: a) $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$, $(\forall)\, n \geq 3$

b) $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$, $(\forall)\, n \geq 3$.

Rez: a) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & 0 \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & 1 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & 3 & 2 \\ 0 & & & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\underset{L_1}{\underline{\underline{\text{Dezv.}}}}$

$$= 3\cdot(-1)^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \\ & \ddots & 3 & 2 \\ 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} + 2\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\Delta_{n-1} - 2\cdot 1\cdot(-1)^2 \Delta_{n-2} = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$$

Deci: $\boxed{\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2},\ (\forall)\, n \geq 3}$ $\to$ rel. de recurență (determinant recurent)

b) $\Delta_n - 3\Delta_{n-1} + 2\Delta_{n-2} = 0$

$r^2 - 3r + 2 = 0$ $\to r_1 = 1$, $\to r_2 = 2$

$\Delta_n = A r_1^n + B r_2^n$

$\Delta_n = A\cdot 1^n + B\cdot 2^n$

$= B\cdot 2^n + A$, $A, B \in \mathbb{R}$

ct.

Calculăm: $\underline{\Delta_3 = 15} = B \cdot 2^3 + A = 8B + A \ (1)$

$\underline{\Delta_4 = 31} = B \cdot 2^4 + A = 16B + A \ (2)$

$\overset{(2)-(1)}{\Longrightarrow} 8B = 16 \Rightarrow \boxed{B = 2}$

$\boxed{A = -1}$

Deci: $\Delta_n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1, \ (\forall) n \geq 3$

$$\boxed{\Delta_n = 2^{n+1} - 1, \ (\forall) n \geq 3}$$

T Fie $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \ \{\Delta_n = \det A_n\}$

a.î. A_n are:
1) 4 pe orice poziție de pe diagonala principală;
2) 3 pe pozițiile $(1,2), (2,3), \dots, (n-1, n)$;
3) 1 pe pozițiile $(2,1), (3,2), \dots, (n, n-1)$;
4) 0 pe toate celelalte poziții.

a) Determinați o relație de recurență pt. Δ_n.

b) Calculați (efectiv) Δ_n, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$