GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs
Sisteme de ecuaţii

Pentru a începe să discutăm despre rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, vom introduce în cele ce urmează rangul unei matrice.

Definiţia 1. Se numeşte *rangul* matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R), A \neq 0_{m,n}$, ordinul maxim al unui minor nenul al matricii A . Vom nota rangul cu $\mathrm{rang}(A)$. Prin convenţie $\mathrm{rang}(0_{m,n}) = 0$.

Aşadar $\mathrm{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul şi toţii minorii de ordin mai mare (dacă există) sunt nuli.

Observaţia 2. (1) $\mathrm{rang}(A) \leqslant \min\{m, n\}$

(2) $\mathrm{rang}({}^tA) = \mathrm{rang}(A)$

(3) $\mathrm{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul şi toţi minorii de ordin $r+1$ nuli.

Demonstraţie: "$\Rightarrow$ "Clar. "$\Leftarrow$" Din formula Laplace, un minor de ordin $s > r+1$, deci e nul. Sau altfel: Folosind dezvoltarea după o linie, rezultă că orice minor de ordin $r+2$ e combinaţie liniară de ordin $r+1$. deci nul, şi aşa mai departe prin inducţie.

$\square$

(4) $\mathrm{rang}(A \cdot B) \leqslant \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}$ ptr. orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$.

Demonstraţie: Din formula Binet-Cauchy un minor de ordin r a matricei $A \cdot B$ este o combinaţie liniară de minori de ordin r ai matricei A (respectiv B), deci $\mathrm{rang}(A \cdot B) \leqslant \mathrm{rang}(A)$ şi $\mathrm{rang}(A \cdot B) \leqslant \mathrm{rang}(B)$.

$\square$

(5) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R), U \in \mathcal{M}_m(R)$ inversabilă şi $V \in \mathcal{M}_n(R)$ inversabilă, atunci $\mathrm{rang}(U \cdot A) = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A \cdot V)$.

Demonstraţie: $\mathrm{rang}(U \cdot A) \leqslant \min\{\mathrm{rang}(U), \mathrm{rang}(A)\} \leqslant \mathrm{rang}(A)$ şi $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(U^{-1}(U \cdot A)) \leqslant \mathrm{rang}(U \cdot A)$. Din cele două inegalităţi ne rezultă prima egalitate. Similar se demonstrează şi a două egalitate.

$\square$

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$. Notăm cu $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ coloanele matricei A. $C_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$.

Teorema 3 (Kronecker). $\operatorname{rang}(A) = \dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$

Deci teorema Kronecker ne spune că $\operatorname{rang}(A)$ este egal cu dimensiunea spaţiului generat de coloanele matricei A. Acest spaţiu este un subspaţiu în $\mathbb{R}^m$.

Demonstraţie: Dacă $A = 0$, este clar. Presupunem $A \neq 0$. Fie $r \in \mathbb{N}^*$ a.î. există un minor nenul de ordin r şi toţi minorii de ordin $r+1$ care-l bordează, (în caz că există) sunt nuli. Arătăm că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= r$. Cum $\operatorname{rang}(A)$ este un astfel de r, va rezulta că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= \operatorname{rang}(A)$. În plus, rezultă că orice astfel de r este egal cu $\operatorname{rang}(A)$.

Fără a restrânge generaliatea putem presupune că minorul Δ aflat la intersecţia primelor r linii cu primele r coloane din A este nenul. Atunci $C_1(A), \ldots, C_r(A)$ sunt liniar independente. Altfel, am avea o relaţie de tipul $C_j(A) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r; i \neq j} \alpha_i C_i(A)$, pentru nişte $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r; i \neq j}$. Notând cu $\widetilde{C_i(A)}$ coloana de lungime r obţinută luând primele r linii din $C_i(A)$, obţinem $\widetilde{C_j(A)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r; i \neq j} \alpha_i \widetilde{C_i(A)}$, deci în Δ o coloană este combinaţie de celelalte coloane, deunde $\Delta = 0$, o contradicţie. Deci coloanele $C_1(A), \ldots, C_r(A)$ sunt liniar independente de unde $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) > \geqslant r$.

Arătăm că $C_j(A) \in < C_1(A), \ldots, C_r(A) >$ pentru orice $j > r$, de unde va rezulta că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= r$.

Fie $j > r$ e si $1 \leqslant i \leqslant m$. Atunci $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$ deoarece pentru $1 \leqslant i \leqslant r$ acest determinant are două linii (i şi $r+1$) egale, iar pentru $i > r$ e un minor de ordin $r+1$ care bordează Δ.

Dezvoltând după ultima linie rezultă $d_1 \cdot a_{i1} + \ldots + d_r \cdot a_{ir} + \Delta \cdot a_{ij} = 0$, iar $d_1, \ldots d_r$ sunt nişte complemenţi algebrici ce nu depind de i.

Obţinem că $a_{ij} = -\Delta^{-1} d_1 a_{i1} - \ldots - \Delta^{-1} d_r a_{ir}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$, de unde $C_j(A) = -\Delta^{-1} d_1 C_1(A) - \ldots - \Delta^{-1} d_r C_r(A)$, ceea ce doream.

□

Teorema 4 (versiunea pe linii a teoremei Kronecker). $\operatorname{rang}(A) = \dim < L_1(A), \ldots, L_m(A) >$, *unde $L_i(A)$ sunt liniile matricei A, $L_i(A) \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie: Rezultă din faptul că $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}({}^t A)$.

□

Corolarul 5 (al demonstraţiei teoremei Kronecker). *Dacă pentru matricea A există un minor de ordin r nenul şi toţi minorii de ordin $r+1$ care-l bordează sunt nuli, atunci* $\operatorname{rang}(A) = r$.

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Sistemul scris mai sus este un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute. Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ iar coloana termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Sistemul (1) se poate scrie sub formă matriceală $AX = B$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e matricea necunoscutelor.

Considerăm şi matricea extinsă,

$$A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R}).$$

care se obţine din matricea A adăugând coloana $n+1$ formată din membrii drepţi ai sistemului. Fiecare coloană este un vector în $\mathbb{R}^m$.

Definiţia 6. Se numeşte *soluţie* a sistemului de mai sus un vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ care verifică toate ecuaţiile sistemului.

Un sistem care admite cel puţin o soluţie se numeţe *compatibil.* Altfel acesta se numeşte *incompatibil.*

Teorema 7 (Kronecker-Capelli). *Sistemul* (1) *este compatibil dacă şi numai dacă* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^e)$.

Demonstraţie: Observăm că $AX = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A)$, deci sistemul (1) este echivalent cu $x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) = B$.

"$\Rightarrow$" Dacă sistemul (1) este compatibil, fie $x_1, x_2, \ldots x_n$ o soluţie. Atunci $B = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) \in < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$ şi deci $< C_1(A), \ldots, C_n(A), B > = < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$. Avem $\dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >) = \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A) >)$, şi din teorema Kronecker rezultă $\operatorname{rang}(A^e) = \operatorname{rang}(A)$.

"$\Leftarrow$" Avem $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^e) \Rightarrow \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A) >) = \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >)$. Dar $< C_1(A), \ldots, C_n(A) > \subset < C_1(A), \ldots, C_n(A), B >$, şi pentru că avem egalitate de dimensiuni atunci avem egalitatea spaţiilor. Rezultă că $B \in < C_1(A), \ldots, C_n(A)$, adică există $x_1, \ldots, x_n$ a.î. $B = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) \Rightarrow x_1, \ldots, x_n$ este soluţie a sistemului (1) .

□

Cum se rezolvă sistemul (1) atunci când $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^e)$?

Voi prezenta în continuare metoda eliminării Gauss-Jordan.

Observăm că un sistem liniar peste corpul $\mathbb{R}$ este echivalent (adică are aceleaşi soluţii) cu un sistem obţinut prin aplicarea de un număr finit de ori a unor operaţii de tipul:

- permutarea a două ecuaţii
- înmulţirea unei ecuaţii cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- adunarea la o ecuaţie a unei alte ecuaţii înmulţite cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Pentru sistemul (1) scris sub forma matriceală $AX = B$, aceste operaţii înseamnă:

- permutarea a două linii
- înmulţirea unei linii cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- adunarea la o linie a unei alte linii înmulţite cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$

operaţii aplicate matricelor A şi B, deci matricei extinse $A^e = (A|B)$.

Definiţia 8. Se numeşte matrice eşalon o matrice cu proprietăţile:

- liniile nule (dacă) există se află sub liniile nenule
- primul element nenul (de la stânga la dreapta) de pe fiecare linie nenulă este 1: acesta numindu-se pivotul liniei

- pivotul de pe linia $i+1$ este la dreapta pivotului de pe linia i, pentru orice i
- orice pivot este singurul element nenul de pe coloana sa

Propoziţia 9. *Orice matrice poate fi transformată după un număr finit de operaţii cu linii într-o matrice eşalon.*

Putem da acum algoritmul după Gauss-Jordan de rezolvare a sistemelor de ecuaţii. Scriem matricea A^e a sistemului şi o aducem la forma eşalon. Dacă există un pivot pe ultima coloană atunci sistemul este incompatibil (în sistemul echivalent avem o ecuaţie $0 = 1$).

Altfel, necunoscutele corespunzatoare coloanelor cu pivoţi sunt coloanele principale, celelalte secundare. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept şi le dam valori arbitrare în $\mathbb{R}$ şi apoi calculam necunoscutele principale în funcţie de cele secundare. Sistemul e compatibil determinat (adică are soluţie unică) daca avem un pivot pe fiecare coloană în afară de ultima.

Observam că numărul pivoţilor $=$ rang(A^e) iar rang(A) numărul pivoţilor din primele n coloane şi totodată numărul variabilelor principale.

Exemplul 1. Fie matricea
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Vedem că primul element de pe prima linie este 1, deci din definiţia pivotului acesta este pivotul primei linii. Cum pivotul este singurul nenul pe coloana sa vom elimina elementele de pe prima coloană folosind acest pivot. Astfel $L_2' = L_2 + L_1$ şi $L_3' = L_3 - 4L_1$. Avem

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Vedem că elementul de pe a doua linie şi a doua coloană este nenul. Acesta va fi pivotul celei de-a doua linii. Pentru a obţine 1 în acea poziţie trebuie să împărţim linia a doua cu 4, deci facem transformarea $L_2' = \frac{1}{4}L_2$. Astfel obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Cu pivotul al doilea, cel de pe linia a doua, facem eliminări astfel încât acesta să rămână singurul nenul pe coloana sa. Eliminările sunt $L_1' = L_1 - L_2$, $L_3' = L_3 + L_1$. Obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \end{pmatrix}$. Elementul nenul de pe linia 3 este -9, pe coloana a treia. Aici obţinem al treilea pivot împărţind L_3 cu -9. După această operaţie matricea devine $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. În sfârşit vom face ultimele eliminări pe coloana a treia a.î. pivotul să rămână singurul nenul pe coloana sa.

Transformările sunt $L_1' = L_1 - L_3$ şi $L_2' = L_2 - L_3$. Forma eşalon a matricii este

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Algoritmul Gauss-Jordan este folositor pentru a obţine şi inversa unei matrice.

Exemplul 2. Voi considera pentru uşurinţă matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ care este formată din primele coloane ale matricei A din exemplul anterior. Vom calcula folosind operaţii cu linii (înmulţiri la stânga cu matrice inversabile) inversa B^{-1}.

Aplicăm acest algoritm matricei $(B|I_3)$. Înmulţim la stânga cu B^{-1} şi avem $B^{-1}\cdot(B|I_3) = (B^{-1}\cdot B|B^{-1}\cdot I_3) = (I_3|B^{-1})$. Făcând eliminare Gauss-Jordan pentru matricea $(B|I_3)$ vom obţine matricea $(I_3|B^{-1})$, deci în dreapta, inversa lui B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 4L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2' = \frac{1}{4}L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1' = L_1 - L_2 \\ L_3' = L_3 + L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3' = -\frac{1}{9}L_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1' = L_1 - L_3 \\ L_2' = L_2 - L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{12} & -\frac{8}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{12} & \frac{10}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array}\right).$$

Deci

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{36} & -\frac{8}{36} & \frac{4}{36} \\ -\frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{4}{36} \\ \frac{15}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{4}{36} \end{pmatrix} = \frac{1}{-36}\begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ 6 & -10 & -4 \\ -15 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Numitorul -36 este binecînţeles $\det(B)$. Se verifică uşor că $B \cdot B^{-1} = I_3$.

Este un algoritm mult mai economic decât cel de aflare a adjunctei matricei (deci a cofactorilor). Inversa este adjuncta înmulţită cu inversul determinantului matricei.

O ultimă observaţie, anume că forma eşalon a unei matrice inversabile este matricea unitate I_n. În acest exemplu forma eşalon a matricii B este I_3.

Sisteme liniare omogene

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Considerăm sistemul liniar $AX = 0$, unde $0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, adică

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Bineînţeles că un sistem omogen are întotdeauna soluţia nulă. deci orice sistem omogen este compatibil.

Aplicăm acelaşi algoritm de rezolvare ca şi în cazul sistemelor cu coloana termenilor liberi nenulă. Începem cu calculul rangului matricei. Cel mai economic este aplicarea algoritmul Gauss-Jordan. care ne dă nu numai rangul matricii. dar şi o formă simplă. echivalentă, a sistemului de unde aflăm cu uşurinţă soluţia.

Exemplul 3. Să rezolvăm sistemul omogen $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = 0 \end{cases}$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, matricea din **exemplul 1** .

Forma eşalon ştim că este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Rangul este 3. primele trei necunoscute sunt principale şi depind de a patra necunoscută. cea secundară. Sistemul devine $\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_4 & = 0 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_4 & = 0 \\ x_3 + \frac{4}{3}x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = -\frac{2}{3}x_4 \\ x_2 & = \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 & = -\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$

Soluţia are un parametru, $x_4 \in \mathbb{R}$.

Mulţimea soluţiilor este $S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^1$.