Suplementul ortogonal

Fie $x \in E$, $\underset{\text{ssp. vectorial}}{U \subset E}$

Def: $x^{\perp} \stackrel{def}{=} \{ y \in E \,/\, y \perp x \}$ ⟶ ssp. vectoriale

subsp. ortogonal lui x

$U^{\perp} = \{ y \in E \,/\, y \perp x, (\forall) x \in U \}$

complementul ortogonal al lui U

Dacă: $U \oplus U^{\perp} = E$ atunci $U^{\perp}$ s.n. suplementul ortogonal al lui U

$\boxed{P}$ $(\forall)\, \underset{\text{ssp. vectorial}}{U \subset E} \Rightarrow (\exists)!$ suplementul ortogonal $U^{\perp}$.

Dem: $\underline{(\exists)}$ Fie $\underset{\text{ssp. vect.}}{U \subset E}$ și $\underset{\text{bază orton.}}{\{e_1, \dots, e_k\} \subset U}$

Completăm $\Rightarrow \underset{\text{bază}}{\{e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_n\} \subset E} \xrightarrow{\text{P.O.G-S}} \underset{\text{bază orton.}}{\{e_1, \dots, e_n\} \subset E}$

$\overline{\{e_{k+1}, \dots, e_n\}} \stackrel{not}{=} U'$

Avem $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1,k}$, $j = \overline{k+1,n}$ $\Rightarrow U' \perp U$

Fie $u \in U \cap U' \Rightarrow u \perp u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow U \cap U' = \{0_V\}$

Deci $E = U \oplus U'$, unde $U' \perp U$ $(U' \stackrel{not}{=} U^{\perp})$

! Fie $U'' \subset E$ a.î. $E = U \oplus U''$, $U \perp U''$
ssp. vect.

Fie $v \in \underline{E = U \oplus U' = U \oplus U''}$ (cf. (L) anterioare)

$\Rightarrow v = u + u' = w + w''$, $u, w \in U$, $u' \in U'$, $w'' \in U''$

$\Rightarrow \underbrace{u - w}_{\in U} = w'' - u' \Rightarrow w'' - u' \in U$; $w'', u' \perp U \Rightarrow w'' - u' \perp U$ $\Big| \Rightarrow \langle w'' - u', w'' - u' \rangle = 0$

$\Rightarrow w'' - u' = 0_V \Rightarrow w'' = u' \Rightarrow U'' = U'$.

Deci: $\underline{U^{\perp} = U'}$. q.e.d.

Aplicații ortogonale

Def: Fie $(E_1, <,>_1)$, $(E_2, <,>_2)$ 2 sp. vect. eucl. și $f: E_1 \to E_2$ o apl. liniară.

f s.n. aplicație ortogonală dacă:
$\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$, $(\forall)\, x, y \in E_1$

C.P.: $E_1 = E_2 (=E) \Rightarrow$ endomorf $f: E \to E$ s.n. transf. ortogonală

$\boxed{P}$ $(\forall)$ apl. ortogonală conservă normele.
În particular, o apl. ortog. este injectivă.

Dem: $\|x\|_1 = \sqrt{\langle x, x \rangle_1} = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle_2} = \|f(x)\|_2$, $(\forall)\, x \in E_1$

Dacă: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, deci f e injectivă.

$\boxed{P}$ $(\forall)$ transf. ortogonală este izomorfism

$\boxed{P}$ 1) O compunere de apl. ortogonale e apl. ortogonală
2) Inversa unei transf. ortog. e tot transf. ortogonală.
3) Mulțimea transf. ortog. ale unui sp. vect. eucl. e grup.
$(E, <,>)$ sp. vect. euclidian
$(\mathcal{O}(E, <,>), \circ)$ grup.

Fie $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E_1$ $\quad f : E_1 \to E_2$

$B_2 = \{f_1, \dots, f_m\} \subset E_2$ $\quad$ apl. ortog.

2 repere ortonormate

A m. asoc. lui f în rap. cu reperele B_1, resp. B_2.

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, unde $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$, $(\forall) j = \overline{1,n}$

Avem: $\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle_1 = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle_2 = \langle \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k, \sum_{l=1}^{m} a_{lj} f_l \rangle_2$

$= \sum_{k,l=1}^{m} a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} a_{kj}$, $(\forall) i,j = \overline{1,n}$

Deci: $\sum_{k=1}^{m} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$, $(\forall) i,j = \overline{1,n}$ $(*)$

C.P: $m = n$ Matriceal, rel. $*$ devine ${}^tA A = I_n$ i.e A m. ortogonală

Th: a) O apl. lin. $f : E_1 \to E_2$ e apl. ortog. $\iff$ A - matricea sa asociată în 2 repere orton. satisface rel $(*)$

b) Un endomorfism $f : \underset{n}{E} \to E$ e transf. ortog. $\iff$ A - matricea sa asoc. într-un rep. orton. e ortogonală

i.e. $O(E, \langle , \rangle) \cong O(n)$

Obs: Deoarece $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ poate fi privită ca matricea unei schimbări de reper orton. pe E

Deci: o transf. ortogonală poate fi privită ca o sch. de reper orton

C8

Exemple: 1) Fie $E = (\mathbb{R}^2, \underset{p.s.c.}{\langle , \rangle})$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(X) = AX$ unde

(a) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad$ 1 $\quad$ {rot. de $\measuredangle\, \theta$ în sens trig.}

(b) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad$ -1 $\quad$ $A^2 = I_2$ {simetrii ortog}

$\theta \in [0, 2\pi)$

Scanned with CamScanner

2) Fie $E = (\mathbb{R}^3, \underset{p.s.c}{<,>})$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = AX$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(a) ①

(a) → rot. de $\measuredangle\theta$ în planul $\{\overline{e_2, e_3}\}$, în jurul axei $< e_1 >$

(b) ⊖1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(b) → comp. dintre o rot. de $\measuredangle\theta$ în planul $\{\overline{e_2, e_3}\}$, în jurul axei $< e_1 >$ și o simetrie de axă $\{\overline{e_2, e_3}\}$ și direcție $< e_1 >$

• Orientarea sp. vectoriale reale și produs vectorial în $\mathbb{R}^3$

Def: 2 repere ale unui sp. vect. real sunt la fel orientate (sau au orientare opusă) dacă matricea de trecere are det. poz (resp. neg)

Obs: Relația „a fi la fel orientate" este o rel. de echiv. pe mulț. reperelor unui sp. vect. real.

! În sp. vect. $\mathbb{R}^n$, prin convenție, clasa reperului canonic dă orientarea pozitivă.

Fie $(\mathbb{R}^3, \underset{p.s.can.}{<,>})$

$\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$
b. can → pozitiv orientată

$\det(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$, unde $x = \sum_i x_i e_i$, $y = \sum_i y_i e_i$, $z = \sum_i z_i e_i$

Def: Produsul vectorial al vect. $x, y \in \mathbb{R}^3$ este unicul vector, notat $x \times y$, dat prin $< x \times y, z > = \det(x, y, z)$, $(\forall)\, z \in \mathbb{R}^3$.

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

$\boxed{P}$ 1) $x \times y = -y \times x$ (anticom.)

2) $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (biliv.), i.e. $(ax + by) \times z = a(x \times z) + b(y \times z)$
$x \times (ay + bz) = a(x \times y) + b(x \times z)$

3) $x \times y = 0 \Leftrightarrow \{x, y\}$ s.v. lin. dep.

4) $< x \times y, x > = < x \times y, y > = 0$

4) $\Rightarrow \mathcal{R}\{x, y, x\times y\} \subset \mathbb{R}^3$ reper vect.

$\det(x, y, x\times y) = \langle x\times y, x\times y\rangle = \|x\times y\|^2 > 0$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ este la fel orientat cu rep. can. (i.e. pozitiv orientat)

Formularea matematică a „regulii burghiului".

$(\forall)\, x, y, u, v \in V$ $*$

$\langle u\times v, x\times y\rangle = \begin{vmatrix} \langle u,x\rangle & \langle u,y\rangle \\ \langle v,x\rangle & \langle v,y\rangle \end{vmatrix}$

$\|x\times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2\|y\|^2(1-\cos^2\theta) = \|x\|^2\|y\|^2\sin^2\theta$

$\boxed{\|x\times y\| = \|x\|\|y\|\sin\theta}$

i.e. în sp. geometric, mărimea prod. vect. a 2 vect. este egală cu aria paralelogr. construit pe cei 2 vect.

Obs: Produsul vect. nu e op. asociativă

$(x\times y)\times z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x$

Identitatea lui Jacobi: $(x\times y)\times z + (y\times z)\times x + (z\times x)\times y = 0$.

Endomorfisme simetrice

Fie $(E, \langle,\rangle)$ un endomorf. al. sp. vect. euclidian $(E,\langle,\rangle)$.

Def: Fie $f: E\to E$ un endomorf. al. sp. vect. euclidian $(E,\langle,\rangle)$. f s.n. simetric dacă $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$, $(\forall)\, x, y\in E$

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ reper ortonormat

$A \to$ m. asoc lui f în reperul B

$\langle f(e_i), f e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle$, $(\forall)\, i, j = \overline{1,n}$

$\Leftrightarrow \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j\rangle = \langle e_i, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l\rangle$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \underbrace{\langle e_k, e_j\rangle}_{=\delta_{kj}} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \underbrace{\langle e_i, e_l\rangle}_{=\delta_{il}}$

$\Leftrightarrow a_{ji} = a_{ij}$, $(\forall)\, i, j = \overline{1,n} \Leftrightarrow {}^tA = A$ (i.e. A m. simetrică)

$\boxed{P}$ $f: E\to E$ endom. sim. al sp. vect. eucl. $(E,\langle,\rangle)$

$\Leftrightarrow$ matricea asoc. endom. f într-un reper ortonormat este simetrică.

Proprietăți:

Th: Rădăcinile polinomului caract. al unui endm. simetric f sunt toate reale.

Th: Vectorii proprii corez. la valori proprii distincte ale unui endm. simetric sunt ortogonali.

Dem: Fie $\lambda \neq \mu$ valori proprii dist. ale lui f.

Fie $x, y \in E$ a.î. $f(x) = \lambda x$

și $f(y) = \mu y$

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \Leftrightarrow \lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = \mu} \ \vee$$

Propr. de diagonalizare a endm. simetrice:

Th: Pentru orice endm. simetric $(\exists)$ un reper ortonormat format din vectori proprii, în care matricea asociată lui f are formă diagonală.

(C9) Deci: $(\forall)$ endm. simetric este diagonalizabil.

Endm. simetrice pot fi puse în legătură cu formele bilin. simetrice.

Fie $g: V \times V \to \mathbb{R}$ f.b.s reală

G - matricea asociată lui g în rep. cu reperul $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormat

$\downarrow$

m. simetrică

$g(x,y) = {}^t X G Y$

Considerăm $f: V \to V$ endomorfism a.î. G să fie matricea asociată în reperul B. Cum G - m. simetrică $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ endm. simetric și avem:

$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j, (\forall) x, y \in V$, $x = \sum_i x_i e_i, y = \sum_i y_i e_i$

Spunem că endm. sim. f este asociat f.b.s. g și f.p. Q coresp.

Izometrii

Fie $(E/_{\mathbb{R}}, <,>)$ sp. vectorial euclidian.

Def: O aplicație $f: E \to E$ s.n. izometrie dacă:

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)), (\forall)\, x,y \in E$$

$\boxed{\text{Th}}$ O condiție necesară și suficientă ca $f: E \to E$ să fie izometrie este să existe un reper ortonormat $B = \{e_1, ..., e_n\} \subset E$ a.î. coord. $(x_1', ..., x_n')$ ale lui $f(x)$ în raport cu coord. $(x_1, ..., x_n)$ ale lui x în reperul considerat, să fie de forma:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad (\forall)\, i = \overline{1,n}$$

și $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \to$ m. ortogonală

Matriceal avem: $f(x) = AX + B$

Exemple:

$n=2$ $\quad t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + v_1 \\ x_2' = x_2 + v_2 \end{cases}, \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

$t \to$ izometrie, mai exact o translație

$r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to$ izometrie (rotație de $\sphericalangle \alpha$)

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_2' = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 2\pi)$$