Endomorfisme diagonalizabile
(Vectori și valori proprii)

Fie $f: V \to V$ endomorfism al sp. vect. V/K

Def: Un vector $v \in V^*$ s.n. vector propriu al endm. f dacă: $(\exists)\lambda \in K$ a.î. $f(v) = \lambda v$.

λ s.n. valoare proprie coresp. vect. propriu v, iar v s.n. vector propriu coresp. valorii proprii λ.

$V_\lambda \overset{not}{=} \{v \in V / f(v) = \lambda v\} \subset V$ | Mulț. val. proprii ale unui endm. s.n. spectrul endm.

$\boxed{P}$ $V_\lambda \subset V$ subsp. vect. (numit sp. propriu coresp. val. proprii λ)

Dem: Fie $x, y \in V_\lambda$ și $\alpha, \beta \in K$

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) =$$
$$= \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V_\lambda \quad \text{q.e.d.}$$

Căutăm, în continuare, o cond. nec. și suf. pt. ca $\lambda \in K$ să fie val. proprie

Fie $\underset{\text{reper}}{B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V}$ și $\lambda \in K$ val. proprie coresp. vect. propriu $v \in V^*$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

$$f(v) = \lambda v \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i f(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \quad (*)$$

Not. $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ m. asociată endm f în reperul B

$$\Rightarrow f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, (\forall) i = \overline{1,n}$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j\right) = \lambda \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i\right) e_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_{ji} - \lambda \delta_{ji}) v_i = 0, (\forall) j = \overline{1,n} \to S.L.O \ (**)$$

Impunem cond: $\det(a_{ji} - \lambda \delta_{ji})_{i,j=\overline{1,n}} = 0 \iff \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{polinom de grad } n \text{ în } \lambda} = 0$

(C5) **Def**: 1) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ s.n. polinomul caract. al endom. f

2) $P(\lambda) = 0 \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$ s.n. ec. caract. coresp. endom. f.

1) $\boxed{P}$ Polinomul caracteristic nu depinde de alegerea reperului lui V.

Dem: Schimbăm reperul

Fie $B' = \{e_1', \ldots, e_n'\} \subset V$ reper și $B \xrightarrow{C} B'$ (m. de trecere); A' – m. asoc. lui f în rep. B' $\Big| \Rightarrow A' = C^{-1}AC$.

$$\det(A' - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda I_n) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}I_nC)$$

$$= \det[C^{-1}(A - \lambda I_n)C] = \det C^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det C = \det(A - \lambda I_n)$$

Deci: definiția este corectă.

În concluzie:

$\boxed{P}$ $\lambda \in K$ val. proprie a lui $f \iff \lambda$ răd. a ec. caract. $\underbrace{\det(A - \lambda I_n) = 0}_{P(\lambda)=0}$

{Rădăcinile din K ale pol. caract. sunt valorile proprii ale endom. f}

Obs: Cf. th. fund. a algebrei $\Rightarrow (\forall)$ endom. al unui sp. vect. complex are valori proprii în nr. egal cu dim V

Obs: Pt. fiecare val. proprie $\lambda \in K$, aflam vect. proprii coresp. din V_λ revine la rezolvarea S.L.O (**).

Exemple de endom. fără nici o val. proprie:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-y, x)$ $\quad A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$

$\{\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \Rightarrow f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(v) = iv\}$

$\lambda^2 + 1 = 0$ nu are răd. reale

2) $V_{/\mathbb{R}}$ – sp. vect. real, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

$J : V \to V$, $J^2 = -\mathbb{1}_V$ ($\Rightarrow$ această egalitate forțează paritate dimensiunii lui V).

Pp. $\lambda \in \mathbb{R}$ val. proprie $\{J(v) = \lambda v, \quad\}$ $\Rightarrow -v = J^2(v) = J(\lambda v) = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$ fals.

Dem: J nu are nicio val. proprie.

Exerc: Dați exemple de endm. care nu au nicio val. proprie.

$\boxed{P}$ Fie $f : V \to V$ endm

$\lambda \in K$ val. proprie, $m_\lambda \overset{not}{=}$ ordinul de multiplicitate al lui λ

Atunci: $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$

$$\begin{array}{ccc} \dim V_\lambda & \leq & m_\lambda \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ m_g(\lambda) & \leq & m_a(\lambda) \end{array}$$

{m. geom. $\leq$ m. alg.}

Dem: Ind. R.A.

$\boxed{P}$ Fie $f : V \to V$ endm. și $v_1, \dots, v_m$ vect. proprii coresp. val. proprii distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_m \Rightarrow$ ei sunt lin. ind.

Def: Un endm. $f : V \to V$ s.n. diagonalizabil dacă:

$(\exists)$ $B \subset V$ reper a.î. matricea coresp. A să aibă forma diagonală. (n – dimensional)

$\boxed{T}$ Fie $V_{/K}$ sp. vect. finit dimensional.

$f : V \to V$ endm. diagonalizabil $\Leftrightarrow$ 1) toate răd. pol. caract. (ec. caract.) sunt în K și 2) multipl. lor sunt egale cu dimensiunile subsp. proprii coresp.

i.e.

Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ – val. proprii coresp. lui f

$m_1, \dots, m_p$ – ordinele de multiplicitate

f endm. diag. $\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ m_1 + \dots + m_p = \dim_K V = n \\ 2) \ \dim V_{\lambda_i} = m_i, \ (\forall)\, i = \overline{1,p} \end{cases}$

$(m_g = m_a, (\forall)\, i = \overline{1,p})$

„$\Rightarrow$"

Dem: Fie $f: V \to V$ endom. diag. $\Rightarrow (\exists)\ B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ reper a.î. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$ $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distincte$\} \in K$

m. coresp. lui f în rap. B

Evident: $m_1 + \dots + m_r = n = \dim_K V$ (1)

$P(X) = \det(A - XI_n) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} \dots (x-\lambda_r)^{m_r}$

Rădăcinile sunt $\lambda_i \in K$ cu multipl. m_i, $i = \overline{1,r}$.

În particular, valorile proprii ale lui f sunt λ_i, elemente din K.

Din def. m. asoc. unui endom. într-un reper $\Rightarrow$

$f(e_j) = \lambda_1 e_j, (\forall) j = \overline{1, m_1}$

$f(e_l) = \lambda_2 e_l, (\forall) l = \overline{m_1+1, \dots, m_1+m_2}$

$\vdots$

$f(e_k) = \lambda_r e_k, (\forall) k = \overline{m_1+\dots+m_{r-1}+1, \dots, m_1+m_2+\dots+m_r}$

Deci V_{λ_1} conține cel puțin vect. lin. ind. $e_1, \dots, e_{m_1}$, V_{λ_2} îi conține pe $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_2}$, etc.

$\Rightarrow \dim V_{\lambda_i} \geq m_i, (\forall) i = \overline{1,r}$
Dar: $\dim V_{\lambda_i} \leq m_i, (\forall) i = \overline{1,r}$ $\Bigg| \Rightarrow$ „="

„$\Leftarrow$" Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – val. proprii $\in K$ a.î. $m_1 + \dots + m_r = n$ (cu multiplicitățile $m_1, \dots, m_r$) și $\dim V_{\lambda_i} = m_i, (\forall) i = \overline{1,r}$

Fie reperele
$$\begin{cases} B_1 = \{e_1, \dots, e_{m_1}\} \subset V_{\lambda_1} \\ B_2 = \{e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_2}\} \subset V_{\lambda_2} \\ \vdots \\ B_r = \{e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}, \dots, e_{\underbrace{m_1+\dots+m_r}_{n}}\} \subset V_{\lambda_r} \end{cases}$$

Vom dem. că $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r \overset{\text{reper}}{\subset} V$

E suficient să arătăm că B – s.v. lin. ind. (card $B = n$)

Fie $\underbrace{\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i e_i}_{f_1} + \underbrace{\sum_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_i e_i}_{f_2} + \dots + \underbrace{\sum_{i=m_1+\dots+m_{r-1}+1}^{n} \alpha_i e_i}_{f_r} = 0$ $\quad f_i \in V_{\lambda_i}, (\forall) i = \overline{1,r}$

$\boxed{P} \Rightarrow \{f_1, \dots, f_r\}$ s. v. lin. ind. (deci $f_i \neq 0_V, (\forall) i = \overline{1,r}$) $\Big| \Rightarrow f_i = 0, (\forall) i = \overline{1,r}$

Dar: $f_1 + \dots + f_r = 0_V$

$\underset{\text{reper}}{\overset{B_i \subset V_{\lambda_i}}{\Longrightarrow}} \alpha_i = 0, (\forall) i = \overline{1,n}$

Deci: $\underset{\text{reper}}{B \subset V}$. În acest reper $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{m. asoc.} \\ \text{endm } f.}}{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \}m_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_r \}m_r & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}}_{\overset{not}{=} D} \to$ m. diag.

$\Rightarrow f$ endm. diagonalizabil. q.e.d.

Obs: $f: V \to V$ endm. diag.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{C} & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & A' = D \end{array}$$

Atunci: $\boxed{D = C^{-1} A C}$

Obs: Dacă K nu este algebric închis (IR) $\Rightarrow$ puține endm. diag., însă funcționează un alt tip de "formă canonică", valabilă peste orice corp, anume forma Jordan. $\to$ $\boxed{\text{ALGEBRĂ}}$.

Forme biliniare. Forme pătratice

1. Forme biliniare

Def: S.n. forme biliniară a sp. vect. $V/_K$ o apl. $g: V \times V \to K$, liniară în raport cu fiecare argument, i.e.

1) $g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 g(x_1, y) + \alpha_2 g(x_2, y)$, $(\forall)$ $x_1, x_2, y \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$

2) $g(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 g(x, y_1) + \beta_2 g(x, y_2)$, $(\forall)$ $x, y_1, y_2 \in V$, $\beta_1, \beta_2 \in K$

Dacă, în plus avem 3) $g(x,y) = g(y,x)$, $(\forall) x, y \in V$

spunem că f. bilin g este simetrică.

Obs: Pt. a defini o f.b.s sunt suficiente cond. 1), 3) sau 2), 3)

$\boxed{P}$ $\mathcal{G} = \{ g : V\times V \to K \, / \, g - f.b \}$

$\mathcal{G}$ poate fi dotată cu o str. de sp. vect. peste K.

$\mathcal{G}_s = \{ g : V\times V \to K \, / \, g - f.b.s \} \subset \mathcal{G}$
ssp. vect.

$V = \mathbb{R}^n / \mathbb{R}$

<u>Exemplu:</u> $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $(\forall)\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$y = (y_1, \dots, y_n)$

$g - f.b.s.$

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V/K$
reper

$g_{ij} \overset{not}{=} g(e_i, e_j)$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,n}$

$G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$

s.n. matrice asociată f.b. g în reperul B.

Fie $x, y \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $x_i, y_i \in K$

$y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ $\quad (\forall)\, i = \overline{1,n}$

$g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g(e_i, e_j) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$! Este suf. să cunoaștem imag. prin g a elem. unui reper pt. a cunoaște f.b. g

Matriceal scriem: $g(X,Y) = {}^tX\, G\, Y$, $(\forall)\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\boxed{P}$. O f.b. $g : V\times V \to K$ este simetrică

$\Leftrightarrow$ G (matricea asociată într-un reper arbitrar) simetrică

<u>Dem:</u> „$\Rightarrow$" g f.b.s.

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V/K$
reper.

Avem: $g(e_i, e_j) = g(e_j, e_i)$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ – m. simetrică

$\Rightarrow g_{ij} = g_{ji}$, —"—

„$\Leftarrow$" G – m. simetrică $\Rightarrow g_{ij} = g_{ji}$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ji} y_j x_i = g(y,x)$, $(\forall)\, x, y \in V$