Schimbarea de reper (coordonate)

Fie $\underbrace{B}_{\{e_1,\dots,e_n\}}, \underbrace{B'}_{\{e_1',\dots,e_n'\}} \subset V$, 2 repere

$\Rightarrow (\forall)\, x \in V$, $(\exists)!\, x_1,\dots,x_n \in K$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$(x_1,\dots,x_n) = [x]_B$

$(\exists)!\, x_1',\dots,x_n' \in K$ a.î. $x = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$

$(x_1',\dots,x_n') = [x]_{B'}$

Putem descompune fiecare elem. $e_j' \in B'$ în fct. de reperul B

$$e_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad (\forall)\, j = \overline{1,n}$$

Avem: $x = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j'\right) e_i$

Dar: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\Rightarrow \boxed{x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j', \quad (\forall)\, i = \overline{1,n}} \longrightarrow$ formulele de sch. de coord.

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \longrightarrow$ m. schimbării de reper sau de trecere de la B la B'

Matriceal, avem: $X = AX'$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

Fie $B'' = \{e_1'',\dots,e_n''\} \subset V$ reper și A' m. de trecere de la B' la B'' | $(x_1'',\dots,x_n'') = [x]_{B''}$ $X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}$

Avem: $X' = A'X''$

$X = AX' = (AA')X'' \Rightarrow AA'$ m. de trecere de la B la B''.

În particular, dacă $\underline{B'' = B}$

$$AA' = I_n \Rightarrow A' = A^{-1}.$$

În concluzie:

$\boxed{P}$

1) Dacă $B \xrightarrow{A} B' \Rightarrow B' \xrightarrow{A^{-1}} B$ (m. de trecere de la un reper la altul este nedegenerată)

2) Dacă $B \xrightarrow{A} B' \xrightarrow{A'} B'' \Rightarrow B \xrightarrow{AA'} B''$

<u>Obs:</u> Matricea de trecere de la reperul canonic la un alt reper al lui K^n se găsește f. ușor: coloana sa de indice $\underline{i}$ este formată din coord. vect. $\underline{e_i}$ în reperul canonic.

În consecință, m. de trecere între 2 repere se poate găsi simplu folosind această observație și proprietatea precedentă: calculele de efectuat fiind inversarea unei matrice și înmulțirea ei cu o alta.

<u>Subspații vectoriale</u>

• <u>Def. Exemple</u>

<u>Def</u>: Fie V/K sp. vect. și $V' \subseteq V$ $(V' \neq \phi)$.

$\underline{V'}$ s.n. subsp. vect. al lui V dacă e închisă (stabilă) la adunarea vectorilor și la înmulțirea cu scalari.

i.e. $\left[\begin{array}{l} (\forall)\ v_1, v_2 \in V' \Rightarrow v_1 + v_2 \in V' \\ (\forall)\ \alpha \in K,\ v \in V' \Rightarrow \alpha v \in V' \end{array} \right]$

Exemple:

$\begin{cases} (\forall) \text{ subsp. vect. } V' \subseteq V, \dim V' = 1 \to \text{dr. vect.} \\ \text{—— " ——}, \dim V' = 2 \to \text{plan vect.} \\ \text{—— " ——}, \dim V' = n-1 \ (\dim V = n) \ \text{H.V} \end{cases}$

1. $\{0_V\}$ și V sunt subspații triviale ale oricărui sp. vectorial
2. $K^m \subseteq K^n \ (n \geq m) \ \{(x_1, \dots, x_m) \equiv (x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{"}n-m\text{" comp.}})\}$
3. $H/_H \subseteq K/_H \ (K - \text{corp}, \underset{\text{subcorp}}{H \subseteq K})$
4. $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, A = {}^tA\} \subset \mathcal{M}_n(K)$

   $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, A = -{}^tA\} \subset \mathcal{M}_n(K)$

   $U = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, \underset{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}{Tr A} = 0\} \subset \mathcal{M}_n(K)$

   $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \,/\, A = \underset{\lambda \in K}{\lambda I_n}\}$
5. $GL(n, \mathbb{R}) \overset{def}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \det A \neq 0\}$

   $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ grup dar nu este subsp. vect. al lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{P}$ Fie $V' \subseteq V$.

V' subsp. vect. $\Leftrightarrow (\forall) \ \underset{\alpha_1, \alpha_2 \in K}{v_1, v_2 \in V'} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V'$

Dem: "$\Rightarrow$": $\underset{\text{ssp vect.}}{V' \subseteq V} \Rightarrow (\forall) \ \underset{\alpha_1, \alpha_2 \in K}{v_1, v_2 \in V'}$ avem $\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2 \in V' \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V'$

"$\Leftarrow$": Pt. $|\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow (\forall) \ v_1, v_2 \in V', v_1 + v_2 \in V'$

$\begin{vmatrix} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (\forall) \ \underset{\alpha \in K}{v \in V'}$ avem $\alpha v \in V'$ $\Bigg| \Rightarrow \underset{\text{ssp. vect.}}{V' \subseteq V}$

$\boxed{P}$ Fie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\underset{\text{ssp. vect}}{V_\alpha \subseteq V}$, $(\forall) \ \alpha \in I$

Atunci: $\underset{\substack{\alpha \in I \\ \text{ssp. vect.}}}{\bigcap V_\alpha \subseteq V}$

Dem: Fie $k_1, k_2 \in K$; $v, w \in \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha \Rightarrow v, w \in V_\alpha, (\forall) \ \alpha \in I$

$\Rightarrow k_1 v + k_2 w \in V_\alpha, (\forall) \ \alpha \in I \Rightarrow k_1 v + k_2 w \in \bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha$ q.e.d.

În continuare dăm o caracterizare simplă a subsp. ve

$\boxed{P}$ Fie $V/_K$ sp. vect și $U \subseteq V$.

U ssp. vect. $\Leftrightarrow U = \overline{U}$

Dem: „$\Leftarrow$" $\overline{U}$ ssp. vect. (prin def.) $\Rightarrow U$ ssp. vect.

„$\Rightarrow$" știm că: $U \subseteq \overline{U}$ și dem. că $\overline{U} \subseteq U$

Fie $v \in \overline{U} \overset{def}{\Rightarrow} v = \sum_i \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in K$, $v_i \in U \Rightarrow v \in U$

Deci: $U = \overline{U}$

Def: Fie $M \subset V$
m. arbitrară

$\overline{M}$ s.n. subsp. generat de M.
$\{Sp\, M\}$

$\boxed{P}$ $\overline{M} = \bigcap_{M \subseteq U} U$, U ssp. vect. {$\overline{M}$ este cel mai mic subsp., în sensul rel. de incluziune, care conține M}

Obs: $\overline{\Phi} = \{0_V\}$

Obs: ! Reuniunea de ssp. vect. nu este ssp. vect.

Def: Fie $V_1, V_2 \subseteq V$
ssp. vect.

$V_1 + V_2 \overset{def}{=} \overline{V_1 \cup V_2}$ ($V_1 + V_2$ s.n. suma ssp. vect. V_1 și V_2)

- Generalizare pt. o familie arbitrară de ssp. vect.

$\boxed{P}$ $V_1 + V_2 = \{ v_1 + v_2 \,/\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$ (*)

„$\supseteq$" evidentă

Def: Suma $V_1 + V_2$ s.n. directă și se notează $V_1 \oplus V_2$

dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

$\boxed{P}$ O sumă e directă $\Leftrightarrow$ descompunerea (*) e unică;

Fie $z \in V_1 \oplus V_2 \Rightarrow (\exists)\, z_1 \in V_1, z_2 \in V_2$ a.î. $z = z_1 + z_2$
Pp. $(\exists)\, z_1' \in V_1, z_2' \in V_2$ a.î. $z = z_1' + z_2'$ $\Big| \Rightarrow z_1 + z_2 = z_1' + z_2'$

$\Rightarrow \underbrace{z_1 - z_1'}_{\in V_1} = \underbrace{z_2 - z_2'}_{\in V_2} \Rightarrow z_1 - z_1' = z_2 - z_2' \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\} \Rightarrow \begin{matrix} z_1 = z_1' \\ z_2 = z_2' \end{matrix} \Rightarrow$ desc. e unică

<u>T. dimensiunii</u> (Grassmann): Fie $V/_K$ sp. vect. finit generat și $V_1, V_2 \subseteq V$ ssp. vect.

Atunci: $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

<u>Dem</u>: Fie $\underset{\text{bază}}{\{f_1, \dots, f_s\}} \subset V_1 \cap V_2$

Cf. th. schimbului $\Rightarrow \underset{\text{bază}}{B_1 = \{f_1, \dots, f_s, e_{s+1}, \dots, e_n\}} \subset V_1$

$\underset{\text{bază}}{B_2 = \{f_1, \dots, f_s, g_{s+1}, \dots, g_m\}} \subset V_2$

Considerăm: $\overline{B = B_1 \cup B_2}$

$B = \{f_1, \dots, f_s, e_{s+1}, \dots, e_n, g_{s+1}, \dots, g_m\} \subset V_1 + V_2$

Dem. că <u>B bază</u>

- B sistem de generatori:

$(\forall)\ v \in V_1 + V_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$

$v_1 = \sum_i \alpha_i f_i + \sum_j \beta_j e_j$

$v_2 = \sum_i \gamma_i f_i + \sum_j \delta_j g_j$

$\Rightarrow v_1 + v_2 = \sum_i \theta_i f_i + \sum_j \beta_j e_j + \sum_k \delta_k g_k$

$\Rightarrow B = B_1 \cup B_2$ sist. de gen. pt. $V_1 + V_2$.

- B sistem de vect. lin. ind.

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n-s} \beta_i e_{s+i} + \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i g_{s+i} = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_i \alpha_i f_i + \sum_i \beta_i e_{s+i}}_{\in V_1} = \underbrace{- \sum_i \gamma_i g_{s+i}}_{\in V_2}$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i g_{s+i} \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m-s} \gamma_i g_{s+i} = \sum_{i=1}^{s} \delta_i f_i$$

$$\underset{B_2 \text{ s.v. lin. ind.}}{\Rightarrow} \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-s} = \delta_1 = \dots = \delta_s = 0 \underset{\substack{(*) \\ B_1 - \text{s.v. lin. ind.}}}{\Rightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_s = \beta_1 = \dots = \beta_{n-s} = 0$$

$\Rightarrow B = B_1 \cup B_2$ s.v. lin. ind.

Deci: B bază pt. $V_1 + V_2$.

$\dim(V_1 + V_2) = n + m - s = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

q.e.d.

Exemple:

1. $\underset{4}{\mathbb{R}^4} = \underset{2}{\{(x,y,0,0)\}} \oplus \underset{2}{\{(0,0,z,t)\}}$

2. $\underset{n^2}{\mathcal{M}_n(K)} = \underset{\frac{n(n+1)}{2}}{\{A \,/\, {}^tA = A\}} \oplus \underset{\frac{n(n-1)}{2}}{\{A \,/\, {}^tA = -A\}}$

3. $\underset{n^2}{\mathcal{M}_n(K)} = \underbrace{\{A \,/\, TrA = 0\}}_{\substack{V_1 \\ n^2-1}} + \underbrace{\{A \,/\, A = \lambda I_n, \lambda \in K\}}_{\substack{V_2 \\ 1}}$

V_1, V_2 ssp. vect. ale lui $\mathcal{M}_n(K)$

Avem: $\underline{\mathcal{M}_n(K) = V_1 \oplus V_2}$ $\{\dim \mathcal{M}_n(K) = \dim V_1 + \dim V_2\}$

Evident: $V_1 + V_2 \subset \mathcal{M}_n(K)$. Ar. că: $\mathcal{M}_n(K) \subset V_1 + V_2$

i.e. $(\forall) A \in \mathcal{M}_n(K), (\exists) A_1 \in V_1, A_2 \in V_2$ a.î. $A = A_1 + A_2$

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ și $A_1 = \left(a_{ij} - \frac{trA}{n}\delta_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$

Obs. că: $Tr A_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{ii} - \frac{trA}{n}\right) = TrA - n\frac{TrA}{n} = 0 \Rightarrow A_1 \in V_1$

Luăm: $A_2 = A - A_1 = \left(\frac{trA}{n}\delta_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$

$\Rightarrow A_2 = \lambda I_n$, unde $\lambda = \frac{trA}{n} \Rightarrow A_2 \in V_2$.

Deci: $A = A_1 + A_2$.

Ar. că: $V_1 \cap V_2 = \{O_n\}$

Fie $A \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} TrA = 0 \\ A = \lambda I_n \end{array}\right| \Rightarrow TrA = n\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow A = O_n$.