Seminar 1

Geometrie și Algebră liniară

Sisteme de ecuații liniare

(a) Matrice

(b) Determinanți

Apl 1

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $AB = BA$.

Arătați că: $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$ au loc relațiile:

i) $A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1})$

(T) ii) $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j A^j \cdot B^{k-j}$, unde $A^0 = B^0 = I_n$

Rez: Dem că: $A^r B^s = B^s A^r$, $(\forall)\ r, s \in \mathbb{N}$ $(*)$

$A^r B^s = \underbrace{A \ldots A}_{r \text{ ori}} \cdot \underbrace{B \ldots B}_{s \text{ ori}} = A \ldots B A \ldots B = \ldots = B \underbrace{A \ldots A}_{r} \underbrace{B \ldots B}_{s-1 \text{ ori}} =$

$= \underbrace{\ldots}_{rs \text{ permutări}} = B^s A^r$

$(A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1}) =$

$= A^k + A^{k-1}B + \ldots + A^2B^{k-2} + AB^{k-1} - BA^{k-1} - B A^{k-2} B - \ldots - BAB^{k-2} - B^k$

$= A^k + A^{k-1}B + \ldots + A^2B^{k-2} + AB^{k-1} - BA^{k-1} - B^2A^{k-2} - \ldots - B^{k-1}A - B^k$

$\overset{(*)}{=} A^k + \cancel{A^{k-1}B} + \ldots + \cancel{A^2B^{k-2}} + \cancel{AB^{k-1}} - \cancel{A^{k-1}B} - \cancel{A^{k-2}B^2} - \ldots - \cancel{AB^{k-1}} - B^k$

$= A^k - B^k$ V

Def: 1) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s.n. involutivă dacă $A^2 = I_n$

2) $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s.n. idempotentă dacă $B^2 = B$

Apl. 2

Arătați că: a) Dacă B e idempotentă $\Rightarrow 2B - I_n$ e involutivă.

b) Dacă A e involutivă $\Rightarrow \frac{1}{2}(A+I_n)$ e idempotentă.

Rez: a) B idempotentă $\Rightarrow B^2 = B$

$(2B - I_n)^2 = (2B - I_n)(2B - I_n) = 4B^2 - 2BI_n - 2I_nB + I_n^2$

$= 4B^2 - 4B + I_n^2 = \cancel{4B} - \cancel{4B} + I_n = I_n$

Deci: $(2B - I_n)^2 = I_n \Rightarrow 2B - I_n$ e involutivă

b) A involutivă $\Rightarrow A^2 = I_n$

$\left[\frac{1}{2}(A+I_n)\right]^2 = \frac{1}{4}(\underbrace{A^2}_{= I_n} + I_n + 2A) = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cancel{2}(A + I_n) =$

$= \frac{1}{2}(A + I_n) \Rightarrow \frac{1}{2}(A+I_n)$ idempotentă

① Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $A + B = AB$. Dem. că: $AB = BA$

Apl 3

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, $\det A \neq 0$.

Arătați că: $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A$ $\{ A^{**} \overset{not}{=} (A^*)^* \}$

Rez: Th: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

A m. inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \underbrace{A^*}_{\text{m. adjunctă}}$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow (A^*)^{-1} = \frac{1}{\det A^*}(A^*)^* \Rightarrow \underline{A^{**} = (\det A^*)(A^*)^{-1}}$$

$$A^* = (\det A)A^{-1} \Rightarrow \underline{\det A^*} = (\det A)^n \cdot \underbrace{\det(A^{-1})}_{\frac{1}{\det A}} = \underline{(\det A)^{n-1}} \ (*)$$

$$\underline{(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det A} A \ (**)}$$

Din rel. $(*)$ și $(**)$ $\Rightarrow A^{**} = (\det A)^{n-2} \cdot A$

Am folosit următoarele propr. ale determinantului:

- $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}$
- $B = \alpha A \Rightarrow \det B = \alpha^n \det A \quad \{B^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} \,/\, \det A \neq 0, \alpha \neq 0\}$
- $\underline{\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}} \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

<u>Ap. 1.4</u>

Calculați A^{2021}, unde $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<u>Rez</u>: Se dem. că:

(T) $\boxed{P}$ Dacă $A = \begin{pmatrix} \cos e & +\sin e \\ -\sin e & \cos e \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \cos ne & \sin ne \\ -\sin ne & \cos ne \end{pmatrix}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \cos e = \frac{1}{2} \\ \sin e = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{\pi}{3}$$

$$A^{2021} = \begin{pmatrix} \cos(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) & \sin(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) \\ -\sin(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) & \cos(2021 \cdot \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

$$2021 \frac{\pi}{3} = 673\frac{2}{3}\pi = 672\pi + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \cdot 336 + \frac{5}{3}\pi$$

$$\cos\frac{5}{3}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = +\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{5}{3}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Deci: $A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<u>Def:</u> Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, K - corp comutativ

a) Dacă ${}^tA = A$ atunci A s.n. <u>matrice simetrică</u>

b) Dacă ${}^tA = -A$ atunci A s.n. <u>matrice antisimetrică</u>

Ap1 Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ matrice antisimetrică și n - nr. impar.

Calculați $\det A = ?$

<u>Rez:</u> ${}^tA = -A \Rightarrow \det {}^tA = (-1)^n \det A \Rightarrow \det A = -\det A$

Dar $\underbrace{\det {}^tA = \det A}_{n\text{ - impar}} \Rightarrow \boxed{\det A = 0}$

- $O(n) \stackrel{not}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid {}^tA\, A = A\, {}^tA = I_n\}$

  ↳ mulțimea matricelor <u>ortogonale</u>

- $GL_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det A \neq 0\} \rightarrow$ <u>grupul general liniar</u>

$(GL_n(K), \cdot)$ grup necomutativ.

Fie $A, B \in GL_n(K) \Rightarrow \det A \neq 0$, $\det B \neq 0 \Rightarrow \det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$

$\Rightarrow AB \in GL_n(K)$

- ASOCIATIVITATE (cadru <u>general</u>)
- NECOMUTATIVITATE (Înmulțirea matricelor nu este comutativă <u>în general</u>)
- $(\exists)$ ELEM. NEUTRU

  $I_n \in GL_n(K)$, $I_n^{-1} = I_n$
- $(\forall)$ ELEM. ADMITE UN INVERS

  Dacă $A \in GL_n(K) \Rightarrow (\exists) A^{-1} \in GL_n(K)$

  $(A^{-1})^{-1} = A$

P (Apl) $(G(n),\cdot) \subset (GL_n(K),\cdot)$

subgrup {grupul ortogonal}

Dem: • Fie $A \in G(n) \Rightarrow {}^tA\,A = I_n \overset{\det}{\Longrightarrow} (\det {}^tA)(\det A) = \det I_n$, unde $\det {}^tA = \det A$

$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$

$\not\Leftarrow$ Reciproca nu este, în general, adevărată

• $A \in G(n) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = {}^tA}$

Fie $A, B \in G(n) \Rightarrow AB \in G(n)$

${}^t(AB)(AB) = {}^tB\,\underbrace{{}^tA\,A}_{I_n}\,B = {}^tB\,I_n\,B = {}^tB\,B = I_n$ ✓

$A \in G(n) \Rightarrow {}^tA \in G(n) \Rightarrow A^{-1} \in G(n)$ ✓

q.e.d.

$SO(n) = \{A \in G(n) \mid \det A = +1\}$

$(SG(n),\cdot) \subset (G(n),\cdot)$

subgrup {grupul <u>special</u> ortogonal}

Obs: $G^-(n) = \{A \in G(n) \mid \det A = -1\} \rightarrow$ NU ESTE PARTE STABILĂ la înmulțirea matricelor

Apl: Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=\overline{1,n}}$

Ar. că: a) $\det \overline{A} = \overline{\det A}$

b) $\det(A\overline{A}) = |\det(A)|^2 \geq 0$

Rez: a) $\overline{\det A} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)}}\,\overline{a_{2\sigma(2)}} \ldots \overline{a_{n\sigma(n)}} = \det \overline{A}$ ✓

b) $\det(A\overline{A}) = (\det A)(\det \overline{A}) = (\det A)(\overline{\det A}) = |\det(A)|^2 \geq 0$ ✓

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a.î. $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$, $(\forall)\ i,j=\overline{1,n}$

Arătați că: $\det A \in \mathbb{R}$.

Rez: $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$, $(\forall)\ i,j=\overline{1,n} \iff A=\overline{A^T}$

$\Rightarrow \det A = \det \overline{A^T}$

Dar. $\det \overline{A^T} = \overline{\det A^T} = \overline{\det A}$

$\Rightarrow \det A = \overline{\det A}$

$\Rightarrow \det A \in \mathbb{R}$ q.e.d.

$\boxed{\text{Apl.}}$ Calculați $\det A$

1. (a) folosind dezvoltarea după prima linie

(b) folosind regula lui Laplace prin dezv. după primele 2 linii.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rez: $\boxed{\text{Regula lui LAPLACE}}$

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $1 \le p \le n$, $p \in \mathbb{N}$

$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \to$ compl. alg. al elem. a_{ij}

$c = (-1)^s M_c$, $s=(i_1+i_2+\dots+i_p)+(j_1+j_2+\dots+j_p)$

$\boxed{\text{Th. LAPLACE}}$ Determinantul matricei A e egal cu suma produselor minorilor de ordin p (ce se pot construi cu elem. a p linii (col) fixate ale matricei A) prin compl. lor algebrici.

$\boxed{\text{C.P.}}$ $p=1$

$(\forall)\ i=\overline{1,n}$: $\det A = a_{i1}c_{i1}+a_{i2}c_{i2}+\dots+a_{in}c_{in}$

(reg. de dezv. a det. matricei A după linia i)

$\det A = \sum M\cdot M' = \sum \det(A_{IJ})\cdot(-1)^{i_1+\dots+i_p+j_1+\dots+j_p}\det(A_{\bar{I}\bar{J}})$

M minor de ordin p în A obț. din liniile $\{i_1,\dots,i_p\}$ și din p coloane

$1 \le p \le n$; $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n$

$\boxed{\text{OBS}}$ Suma are C_n^p termeni.

$\boxed{\text{Regula lui LAPLACE}}$

<u>Rez:</u> 5) $\Delta = \det A =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= +0 - 1 \cdot 18 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 7 - 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 =$$

$$= -18 + 12 + 7 - 5 - 1 = 19 - 24 = \underline{\underline{-5}}$$

Deci: $\boxed{\Delta = -5}$

Scanned with CamScanner