Schimbarea de reper (coordonate)

$\boxed{Ap\,1.}$ Considerăm sistemele vectoriale:

$$B_1 = \{ f_1 = (0,1,2),\ f_2 = (1,0,2),\ f_3 = (2,2,2) \}$$
$$B_2 = \{ g_1 = (1,1,-1),\ g_2 = (1,-1,1),\ g_3 = (-1,1,1) \}$$

a) Ar. că $\underset{\text{baze}}{B_1, B_2} \subset \mathbb{R}^3$

b) Determinați coord. vect. f_1, f_2, f_3 în raport cu baza B_2

c) Determinați matricele de trecere de la baza B_1 la baza B_2, resp. de la B_2 la B_1.

Rez: a) Construim matricele:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\ f_1\ \ f_2\ \ f_3 \qquad\qquad\qquad\quad g_1\ \ g_2\ \ g_3$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \det A_1 = 6 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{bază}}{B_1} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \det A_2 = -4 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{bază}}{B_2} \subset \mathbb{R}^3$$

b) $\underset{\text{bază}}{B_2} \subset \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (\forall)\, v \in \mathbb{R}^3, (\exists)!\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a.î.

$$v = \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3$$
$$(\alpha, \beta, \gamma) = [v]_{B_2}$$

Luăm:

$v = f_1 \Rightarrow (\exists)!\ \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ a.î. $f_1 = \alpha_1 g_1 + \beta_1 g_2 + \gamma_1 g_3$ (1)

$v = f_2 \Rightarrow (\exists)!\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f_2 = \alpha_2 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_2 g_3$ (2)

$v = f_3 \Rightarrow (\exists)!\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $f_3 = \alpha_3 g_1 + \beta_3 g_2 + \gamma_3 g_3$ (3)

În consecință: $[f_1]_{B_2} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

$$[f_2]_{B_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

$$[f_3]_{B_2} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

Pt. determinarea efectivă a coordonatelor, înlocuim în (1),(2),(3) cu datele cunoscute:

După efectuarea calculelor obținem următoarele sist. de ecuații

$$(1) \Rightarrow^{(S_1)} \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 1 \\ -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2 \end{cases} \qquad (2) \Rightarrow^{(S_2)} \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 = 1 \\ \alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 2 \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow^{(S_3)} \begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 = 2 \\ \alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3 = 2 \\ -\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 2 \end{cases}$$

În continuare fie rezolvăm efectiv cele 3 sisteme, fie facem observația că matricea coresp. celor 3 sisteme este aceeași (A_2) și recurgem la o scriere matriceală a lor.

$$(S_1) \Leftrightarrow A_2 \cdot [f_1]_{B_2} = [f_1]_{B_0} \;\Big|\cdot A_2^{-1} \quad - [f_1]_{B_2} = A_2^{-1} [f_1]_{B_0}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow A_2 \cdot [f_2]_{B_2} = [f_2]_{B_0} \;\Big|\cdot A_2^{-1} \Rightarrow - [f_2]_{B_2} = A_2^{-1} \cdot [f_2]_{B_0}$$

$$(S_3) \Leftrightarrow A_2 [f_3]_{B_2} = [f_3]_{B_0} \;\Big| A_2^{-1} \quad - [f_3]_{B_2} = A_2^{-1} [f_3]_{B_0}$$

Calculând obținem: $A_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

respectiv: $[f_1]_{B_2} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

$$[f_2]_{B_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

$$[f_3]_{B_2} = (2, 2, 2)$$

Obs: În mod analog se pot determina și coordonatele vect. g_1, g_2, g_3 în raport cu baza B_1.

c) Matricea de trecere (sch. de reper) de la baza B_1 la baza B_2 (not A_{12}) și este formată din exprimarea vect. bazei B_2 în raport cu baza B_1.

Analog pt. matricea de trecere (sch. de reper) de la baza B_2 la B_1.

În cazul nostru: $B_1 \xrightarrow{A_{12}} B_2$, unde $A_{12} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [g_1]_{B_1} & [g_2]_{B_1} & [g_3]_{B_1} \end{pmatrix}$

$B_2 \xrightarrow{A_{21}} B_1$

respectiv $A_{21} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [f_1]_{B_2} & [f_2]_{B_2} & [f_3]_{B_2} \end{pmatrix}$

Așadar: $A_{21} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Analog se face determinarea pt. A_{12}.

• Altă variantă de rezolvare presupune cunoașterea următoarelor rezultate teoretice:

$\boxed{P}$ 1) Dacă $B_1 \xrightarrow{A_{12}} B_2 \Rightarrow B_2 \xrightarrow{A_{12}^{-1}} B_1$

2) Dacă $B_1 \underset{A_{12}^{-1}}{\overset{A_{12}}{\rightleftarrows}} B_2 \underset{A_{23}^{-1}}{\overset{A_{23}}{\rightleftarrows}} B_3 \Rightarrow B_1 \xrightarrow{A_{12}A_{23}} B_3$

$\Rightarrow B_3 \longrightarrow B_1$

$(A_{12}A_{23})^{-1} = A_{23}^{-1}A_{12}^{-1}$

$\boxed{\text{Obs:}}$ Matricea de trecere de la reperul canonic la un alt reper al lui K^n/K se găsește f. ușor: coloana sa de indice "i" este formată din coord. vect. $\underline{e_i}$ în reperul canonic.

În consecință, m. de trecere între 2 repere se poate găsi simplu folosind această observație și propr. precedentă: calc de efectuat fiind inversarea unei matrice și înmulț. ei cu o alta.

$$B \xrightarrow{A} B' \Rightarrow [v]_B = A \cdot [v]_{B'} \quad | \cdot A^{-1}$$

m. de trecere de la B la B' $\Rightarrow$ $\boxed{[v]_{B'} = A^{-1}[v]_B}$

- În cazul nostru:

$B_0 \xrightarrow{A_2} B_2$

m. de trecere de la b. canonică B_0 la baza B_2

$$[f_1]_{B_2} = A_2^{-1}[f_1]_{B_0}$$
$$[f_2]_{B_2} = A_2^{-1}[f_2]_{B_0}$$
$$[f_3]_{B_2} = A_2^{-1}[f_3]_{B_0}$$

$B_0 \xrightarrow{A_1} B_1$

m. de trecere de la b. canonică B_0 la baza B_2

$$[g_1]_{B_1} = A_1^{-1}[g_1]_{B_0}$$
$$[g_2]_{B_1} = A_1^{-1}[g_2]_{B_0}$$
$$[g_3]_{B_1} = A_1^{-1}[g_3]_{B_0}$$

- $B_0 \xrightarrow{A_1} B_1 \xrightarrow{A_{12}} B_2$, $B_0 \xrightarrow{A_2} B_2$

$$\Rightarrow A_1 \cdot A_{12} = A_2 \quad | \cdot A_1^{-1} \text{ la stg}$$

$$\Rightarrow A_{12} = A_1^{-1}A_2$$

$B_2 \xrightarrow{A_{12}^{-1}} B_1$

$$A_{21} = A_{12}^{-1} = (A_1^{-1}A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1$$

sau

$B_0 \xrightarrow{A_2} B_2 \xrightarrow{A_{21}} B_1$, $B_0 \xrightarrow{A_1} B_1$

$$A_2 \cdot A_{21} = A_1 \quad | \cdot A_2^{-1} \text{ la stg}$$

$$\Rightarrow A_{21} = A_2^{-1}A_1$$