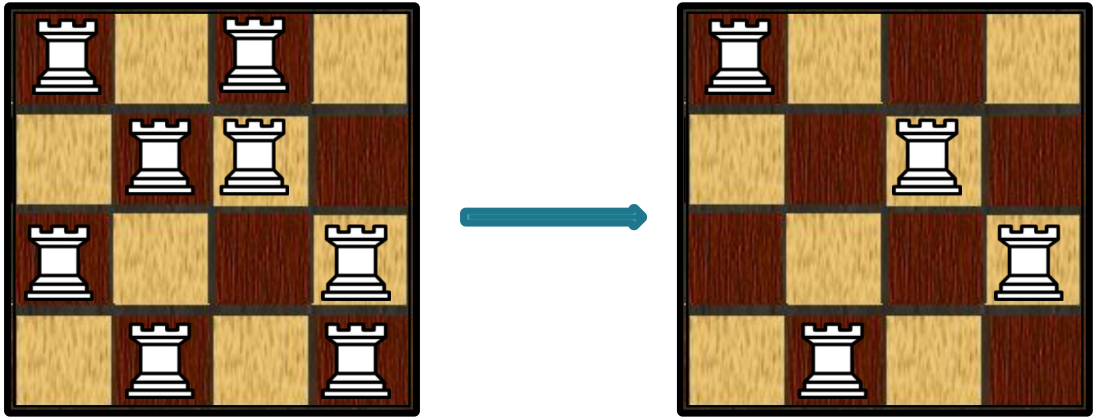
Aplicații cuplaje

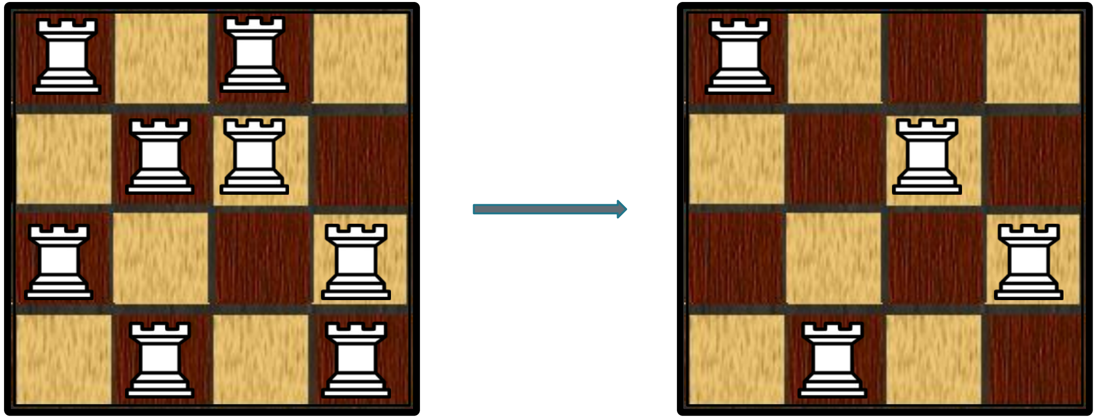
Aplicație:
Matrice de permutări

Probleme

Pe o tablă de tip șah de dimensiuni **nxn** sunt așezate ture, astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană se află **același număr de ture**. Să se arate că se pot păstra pe tablă **n** dintre aceste ture, care nu se atacă două câte două.



Probleme



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

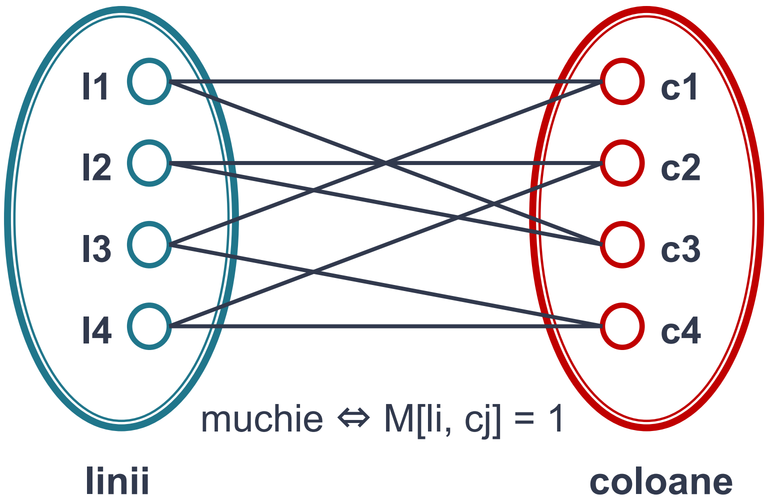
Reformulare cu matrice

Fie $p > 1$ și M o matrice $n \times n$ cu elemente $\{0, 1\}$, astfel încât pe fiecare linie și pe fiecare coloană sunt exact p elemente 1.

Atunci M conține o matrice de permutări (având un unic 1 pe fiecare linie și coloană).

Reformulare cu matrice

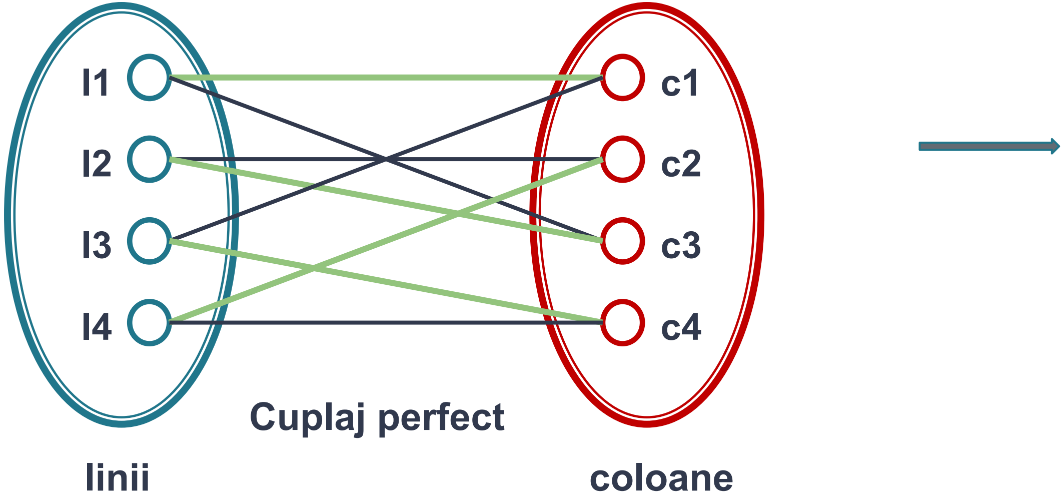
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



G - graf bipartit p-regulat

- **există matrice de permutări în M ⇔** există cuplaj perfect în G
- **rezultă din consecințele teoremei lui HALL (teorema căsătoriei)**

Reformulare cu matrice

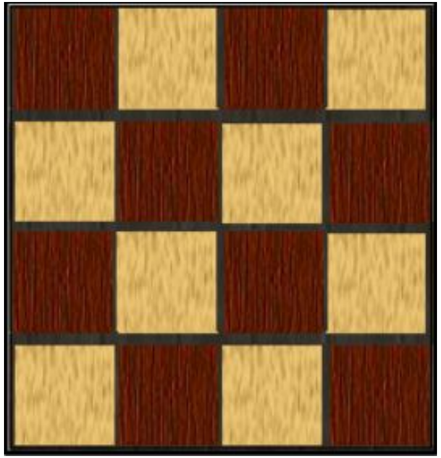


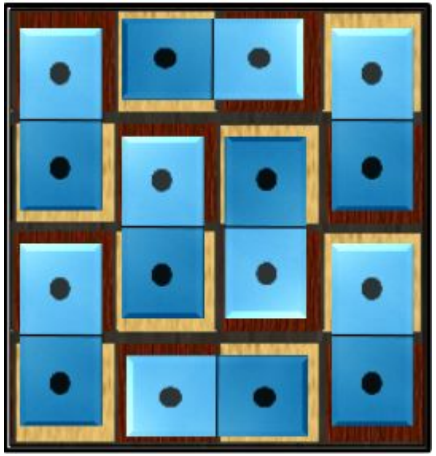
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicație:
Acoperire tablă cu piese de domino

Probleme

Acoperirea unei table cu piese de domino

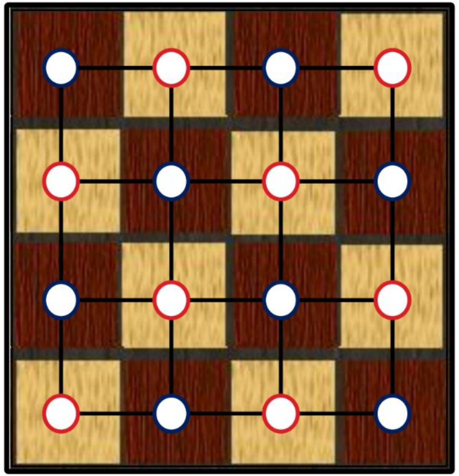


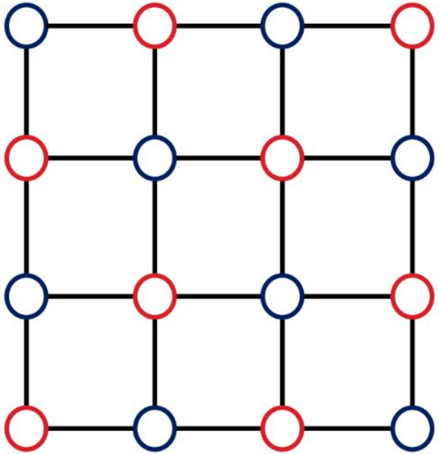


Probleme

Tabla ⇒ **Graful grid**

Acoperire ⇒ **Cuplaj perfect**



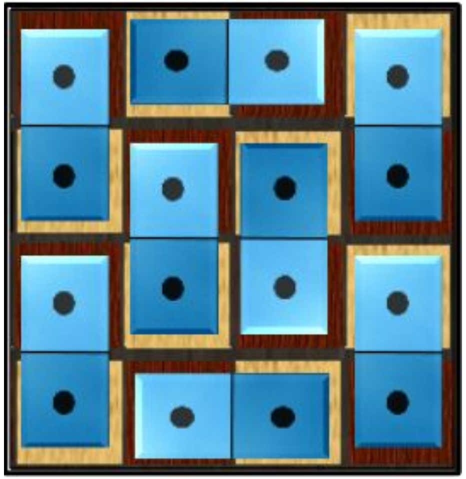


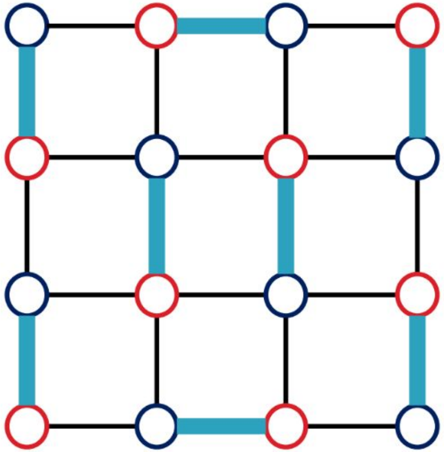
Graful grid

Probleme

Tabla ⇒ **Graful grid**

Acoperire ⇒ **Cuplaj perfect**





Graful grid

Probleme

Acoperirea unei table cu piese de domino

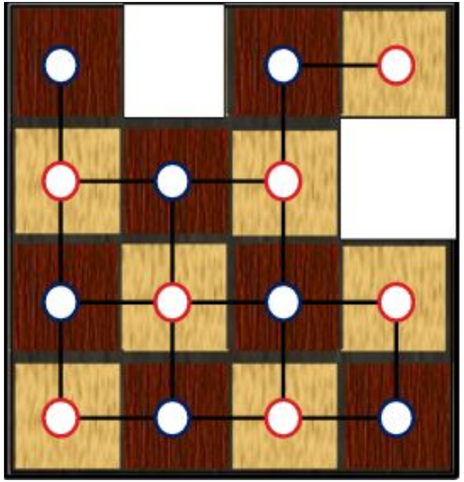
- Tabla poate fi acoperită ⇔ m*n par

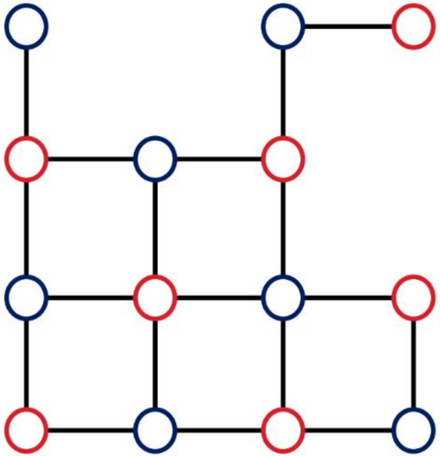
Dacă tabla de șah poate fi acoperită, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?

Probleme

Tabla ⇒ **Graful grid**

Acoperire ⇒ **Cuplaj perfect**





Probleme

Acoperirea unei table cu piese de domino

- Tabla poate fi acoperită ⇔ m*n par

Dacă tabla de șah poate fi acoperită, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?

Dacă și numai dacă pătrățelele au culori diferite

Aplicație:
Sistem de reprezentanți distincți pentru submulțimi

Sistem de reprezentanți distincți

Fie A - mulțime finită cu n elemente

$X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq A$

S. n. **sistem de reprezentanți distincți** pentru colecția de submulțimi $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ un vector $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ cu proprietățile:

- $r_i \in X_i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$
- $r_i \neq r_j, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, m, \ i \neq j$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$X_1 = \{2, 3\} \quad \Rightarrow r_1 = 2$

$X_2 = \{1, 3, 4\} \quad \Rightarrow r_2 = 3$

$X_3 = \{2, 4\} \quad \Rightarrow r_3 = 4$

Sistem de reprezentanți distincți

Nu orice colecție de submulțimi admite un sistem de reprezentanți distincți.

Exemplu:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$X_1 = \{2, 3\}$

$X_2 = \{3\}$

$X_3 = \{2\}$

Sistem de reprezentanți distincți

Condiții necesare și suficiente pentru existența unui sistem de reprezentanți distincți ai unei colecții de submulțimi din A?

Sistem de reprezentanți distincți

Condiții necesare și suficiente pentru existența unui sistem de reprezentanți distincți ai unei colecții de submulțimi din A?

Modelăm problema cu ajutorul unui graf bipartit:

- vârf x_i - asociat submulțimii X_i, i = 1, …, m

  ⇒ mulțimea **X** de vârfuri

- vârf a_j - asociat fiecărui element din A, j = 1, …, n

  ⇒ mulțimea **Y** de vârfuri

- muchie de la $\mathbf{x_i}$ la $\mathbf{a_j}$ ⇔ $a_j \in X_i$

Sistem de reprezentanți distincți

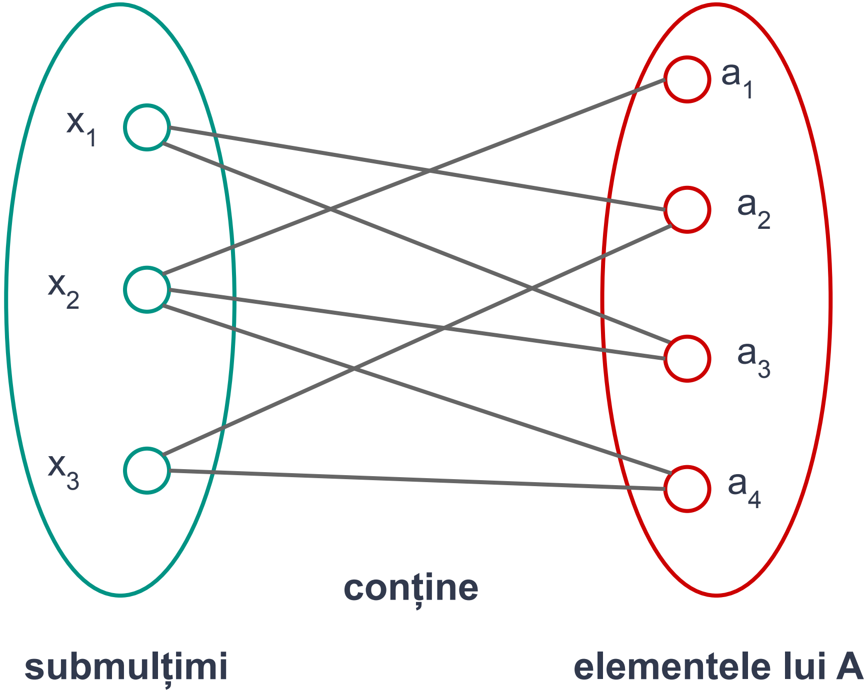
Exemplu:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$X_1 = \{2, 3\}$

$X_2 = \{1, 3, 4\}$

$X_3 = \{2, 4\}$



Sistem de reprezentanți distincți

Observație:

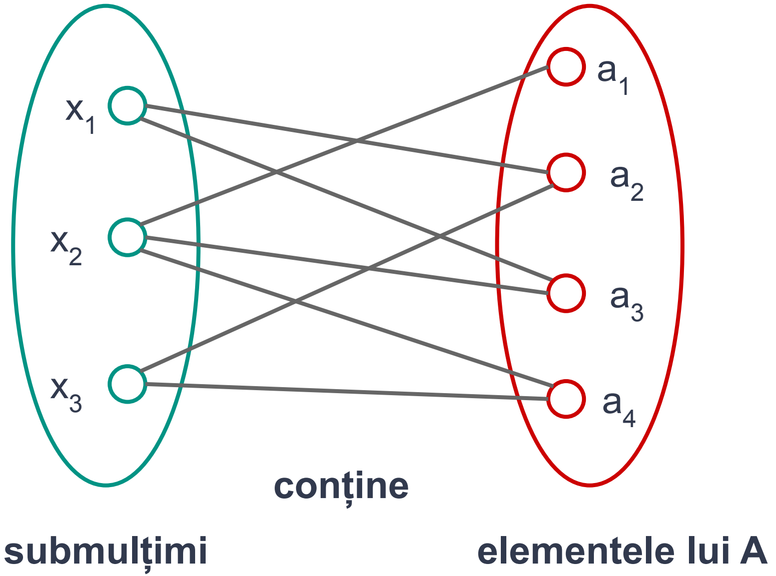
Există un sistem de reprezentanți pentru colecția de submulțimi (X_1, X_2, …, X_m) ale lui A ⇔ **există un cuplaj al lui X în Y în graful asociat**

$X_1 = \{2, 3\}$

$X_2 = \{1, 3, 4\}$

$X_3 = \{2, 4\}$

$r = (2, 3, 4)$



Sistem de reprezentanți distincți

Observație:

Există un sistem de reprezentanți pentru colecția de submulțimi (X_1, X_2, …, X_m) ale lui A ⇔ **există un cuplaj al lui X în Y în graful asociat**

<u>Teorema lui HALL:</u>

Dacă pentru orice submulțime $S = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq X$ avem

$|N(S)| \geq |S| = k$ (imaginea lui S)

$N(S) = X_{i1} \cup X_{i2} \cup \ldots \cup X_{ik}$

Astfel, are loc următorul rezultat

Sistem de reprezentanți distincți

Teoremă - existența unui sistem de reprezentanți distincți

Fie A o mulțime finită și $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ o colecție de submulțimi din A.

Colecția **nu** are un sistem de reprezentanți distincți ⇔

∃ k submulțimi în colecție **a căror reuniune are mai puțin de k elemente**