Examen[1] GAL, an I, sem. II, Informatică, Seria 13
25.06.2021

Nume și prenume: ______________________________

Grupa: __________

1. Decideți care dintre următoarele mulțimi sunt subspații vectoriale reale ale lui $\mathbb{R}^3$: (1 punct)
   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 5z^2 = 0\}$; (0.2p)
   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 7z^2 = 0\}$; (0.2p)
   (c) $W_3 = \{\alpha(1, -1, 4) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; (0.2p)
   (d) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 1\}$; (0.2p)
   (e) $W_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 4z = 0\}$. (0.2p)
   Justificați răspunsurile.

2. Fie aplicația $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, (2 puncte)

$$f(x, y, z) = (2x - 2y, -2x + y - 2z, -2y).$$

   (a) Arătați că f este aplicație liniară și scrieți matricea lui f în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. (0.5p)
   (b) Arătați că f este un endomorfism diagonalizabil. (1p)
   (c) Determinați o bază în care f are forma diagonală. (0.5p)

3. În spațiul euclidian $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, < \, , \, >)$ (unde $< \, , \, >$ este produsul scalar canonic) se consideră vectorii $f_1 = (1, -2, -1)$ și $f_2 = (2, 1, 2)$. (2.5 puncte)
   (a) Calculați $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ și unghiul dintre f_1 și f_2. (0.5p)
   (b) Determinați un vector nenul $f_3 \in \mathbb{E}^3$ astfel încât f_3 să fie perpendicular pe f_1 și f_2. (0.5p)
   (c) Pentru f_3 obținut la punctul (b), ortonormați sistemul $\{f_1, f_2, f_3\}$ prin procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt. (1p)
   (d) Determinaţi coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ în reperul ortonormat obţinut la punctul (c). (0.5p)

4. Fie $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ conica de ecuație (2 puncte)

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6xy + 6x - 6y + 4 = 0.$$

   (a) Să se precizeze natura şi genul conicei date. (0.5p)
   (b) Să se reducă $\mathcal{C}$ la forma canonică, precizându-se schimbarea izometrică de reper efectuată. (1p)
   (c) Să se calculeze excentricitatea conicei $\mathcal{C}$. (0.5p)

5. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică, fie planele (1.5 puncte)

$$(\pi_1) : \; x_1 + 3x_2 - x_3 - 1 = 0;$$

$$(\pi_2) : \; 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0.$$

   (a) Decideţi dacă punctul $A = (2, 1, 1) \in \pi_1 \cap \pi_2$; (0.5p)
   (b) Fie $B = (1, 2, -1)$. Determinaţi planul π ce conţine punctul B astfel încât $\pi \| \pi_1$. (1p)

[1]Subiectele 1-5 sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore. Baftă!