Sisteme de ecuații liniare.

Metoda eliminării Gauss-Jordan

- Considerăm următorul sist. de ec. liniare:

$$(S): \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ (\forall)\ i=\overline{1,m}$$

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \ (\forall)\ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,n}$$

S este un sist. de <u>m</u> ec. liniare cu n necunoscute.

Not: $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) \ ; \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(m,1)}(\mathbb{R})$$

Forma matriceală a sist. (S): $\boxed{AX = b}$

$(A|b) \stackrel{def}{=} A^e$ ← matricea extinsă a sistemului

- <u>Compatibilitatea sistemelor:</u>

S → incompatibil
S → compatibil → determinat
compatibil → nedeterminat

Def: 2 sisteme sunt echivalente dacă au aceleași soluții.

Obs: Următoarele transf. asupra ec. sist. $AX=b$ conduc la un sist. echivalent.

1) permutarea a 2 ec.
2) înmulțf. unei ec. cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$
3) adunarea unei ec. la o altă ec, eventual după înmulțf. cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Transf. aplicate asupra unei matrice sunt: (în echivalență)

1) permutarea a 2 linii
2) înmulțirea unei linii cu $a \in \mathbb{R}^*$
3) adunarea unei linii la o altă linie, eventual după înmulțirea cu $a \in \mathbb{R}$

Def: O matrice s.n. matrice în <u>formă eșalon</u> dacă:

1) liniile nule se află sub toate liniile nenule
2) pe fiecare linie nenulă, primul elem. din stânga este $\neq 0$
   → PIVOT
3) pivotul de pe linia $i+1$ este la dreapta pivotului de pe linia i.

+ SUPLIMENTAR → toți pivoții $= 1$
  și
  → deasupra pivoților avem numai 0

→ <u>formă eșalon redusă</u>

P: $(\forall)$ matrice poate fi transformată, după un <u>nr. finit</u> de operații cu linii, într-o matrice eșalon. (de tipul celor precizate anterior)

<u>Metoda eliminării (complete) Gauss-Jordan</u>
{ALGORITMUL GAUSS-JORDAN}

Considerăm sist. liniar: $\boxed{AX=b}$

Scriem <u>matricea extinsă</u> a sist. $A^e \overset{def}{=} (A|b)$ și o aducem la <u>formă eșalon (redusă)</u>

Scanned with CamScanner

(2)

! Dacă există un pivot pe ultima coloană $\Rightarrow$ sistemul este $\boxed{\text{incompatibil}}$ (în sist. echivalent avem $0 = 1$)

Altfel, nec. coresp. coloanelor cu pivoți sunt nec. principale iar nec. coresp. coloanelor fără pivoți sunt nec. secundare.

Trecem nec. secundare în membrul drept și le dăm valori arbitrare (în $\mathbb{R}$) și apoi calculăm nec. principale în fct. de cele secundare.

- Sist. e compatibil determinat (i.e. are sol. unică) dacă: avem pivot pe fiecare coloană în afară de ultima.

Obs: Nr. pivoților $=$ rang (A^e)

și Nr. pivoților din primele n coloane $=$ rang A (și totodată nr. variabilelor principale).

Scanned with CamScanner

Apl. 2 Rezolvați următoarele sist. de ec. liniare, utilizând met. eliminării complete (alg. Gauss - Jordan):

a) $(S_1)\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y+2z=4 \end{cases}$ b) $(S_2)\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ x-y+2z+t=3 \\ x+2y-3z-2t=6 \end{cases}$

Rez: a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

m. sistemului

$A^{e} \overset{def}{=} (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

m. extinsă a sist.

Aducem m. extinsă a sist. A^e la forma eșalon (redusă)

$A^e \underset{\substack{L_2'=L_2-L_1 \\ L_3'=L_3-2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{L_2'=-\frac{L_2}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$

$\underset{\substack{L_1'=L_1-L_2 \\ L_3'=L_3+L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \underset{L_3'=\frac{1}{3}L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\underset{L_2'=L_2+L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=0 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

Obs: $rg\,A = rg\,A^e = 3$

Deci: (S_1) sistem. comp. det. (sol. unică) $\mathcal{S}_1=\{(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2})\}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

m. sistemului

$$A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

m. extinsă a sist.

Aducem matricea extinsă a sist A^e la forma eşalon (vechiu...

$$A^e \underset{L_1' = \frac{1}{2}L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2' = L_2 - L_1 \\ L_3' = L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{-\frac{3}{2}} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2' = \frac{L_2}{\frac{3}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right)$$

$$A^e \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2' = L_2 - 2L_1 \\ L_3' = L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2' = \frac{L_2}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1' = L_1 + L_2 \\ L_3' = L_3 - 3L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3' = -\frac{L_3}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1/3 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & \boxed{1} & -5/3 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2' = L_2 + 1/3 L_3 \\ L_1' = L_1 - 2/3 L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1/3 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -5/3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \end{array}\right)$$

$$\boxed{rg\, A = rg\, A^e = 3}$$

Nec: x, y, t sunt nec. principale

$z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ nec. secundară

(S_2) comp. nedeterminat (gr. de nedet. $= 1$)

nr. nec. secundare

(4) → 2

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{3}\alpha \\ y = -3 + \frac{5}{3}\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ t = -4 \end{cases} \qquad S_2 = \left\{ \left(4 - \frac{1}{3}\alpha, -3 + \frac{5}{3}\alpha, \alpha, -4\right) / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

TEMA Rezolvați următoarele sist. de ec. liniare, utilizând metoda eliminării Gauss-Jordan.

a) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x - y + z - t = 2 \\ x - 2y - 2t = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$

Ap1 Rezolvați sistemul omogen utilizând met. eliminării complete (Gauss - Jordan)
$$\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x-y+2z+t=0 \\ x+2y-3z-2t=0 \end{cases}$$

° Evident că: un sistem liniar omogen are întotdeauna sol. nulă, deci $(\forall)$ sist. omogen este compatibil.

Aplicăm același alg. de rezolvare ca și în cazul sist. cu coloana termenilor liberi nenulă.

Utilizăm Gauss-Jordan, care ne dă nu numai rg. matricei, dar și o formă simplă, echivalentă, a sist. de unde aflăm cu ușurință soluția.

Revenim la aplicație și observăm că matricea sist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$ este una dintre matricele din ap! anterioară

Forma eșalon determinată pt. matricea A este:

$$E = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$rg\, A = rg\, A^e = 3$$

x, y, t nec. principale

$z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ nec. secundară

Sistemul devine:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{3} z = 0 \\ y - \frac{5}{3} z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}\alpha \\ y = \frac{5}{3}\alpha \\ z = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ t = 0 \end{cases}$$

$$S = \{ (-\tfrac{1}{3}\alpha, \tfrac{5}{3}\alpha, \alpha, 0) / \alpha \in \mathbb{R} \}$$
$$\alpha = 3\beta,\ \beta \in \mathbb{R}$$
$$= \{ (-\beta, 5\beta, 3\beta, 0) / \beta \in \mathbb{R} \} = \{ \beta(-1, 5, 3, 0) / \beta \in \mathbb{R} \}$$

$\boxed{\text{TEMA}}$ Rezolvați următoarele sist. de ec. lin. omogene, utilizând met. eliminării Gauss-Jordan:

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-y+z+t=0 \\ 2x+y+2z-t=0 \end{cases}$

*

$\boxed{Ap1.}$

• Rezolvați următoarele sist. de ec. liniare, utilizând metoda eliminării Gauss–Jordan:

a) $(S_1)\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+2z+5t=6 \end{cases}$

Rez: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

m. sistemului S_1

$A^e=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right)$

m. extinsă a sistemului S_1

Aducem matricea extinsă a sist. A^e la forma eşalon (redusă).

$$A^e \underset{\substack{L_2'=L_2-L_1 \\ L_3'=L_3-L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{L_2'=-\frac{1}{2}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1'=L_1-L_2 \\ L_3'=L_3-4L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2'=L_2-L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

! Deoarece $(\exists)$ un pivot pe ultima coloană (în sist. echivalent avem $0=1$ ✗)

$\Rightarrow$ sistemul S_1 este incompatibil i.e. $\boxed{S_1=\emptyset}$

Obs: • $\text{rang}(A^e)=$ nr. pivoților $=3$

• $\text{rang}(A)=$ nr. pivoților din primele $n(=4)$ coloane $=2$

Așadar, și conform Th. Kronecker–Capelli $rg A=2\neq 3=rg A^e$

$\Rightarrow S_1$ sist. incompatibil.

Scanned with CamScanner

b) $(S_2)\begin{cases}\alpha x+y+z=1\\ x+\alpha y+z=1\\ x+y+\alpha z=1\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (parametru) {DISCUȚIE}

Rez: $A=\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix}$; $A^e=\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha&1&1&1\\1&\alpha&1&1\\1&1&\alpha&1\end{array}\right)$

Aducem matricea extinsă a sist. la forma eșalon (redusă):

$$A^e\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&\alpha&1&1\\\alpha&1&1&1\\1&1&\alpha&1\end{array}\right)\underset{\substack{L_2'=L_2-\alpha L_1\\L_3'=L_3-L_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&\alpha&1&1\\0&1-\alpha^2&1-\alpha&1-\alpha\\0&1-\alpha&\alpha-1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&\alpha&1&1\\0&1-\alpha&\alpha-1&0\\0&1-\alpha^2&1-\alpha&1-\alpha\end{array}\right)$$

• Dacă $\alpha\neq1$ avem: $\underset{L_2'=\frac{1}{1-\alpha}L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&\alpha&1&1\\0&\boxed{1}&-1&0\\0&1-\alpha^2&1-\alpha&1-\alpha\end{array}\right)$

$$\underset{\substack{L_1'=L_1-\alpha L_2\\L_3'=L_3-(1-\alpha^2)L_2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\alpha+1&1\\0&1&-1&0\\0&0&-(\alpha-1)(\alpha+2)&1-\alpha\end{array}\right)$$

și $\alpha\neq-2$ $\underset{L_3'=-\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}L_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\alpha+1&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&\frac{1}{\alpha+2}\end{array}\right)\underset{\substack{L_2'=L_2+L_3\\L_1'=L_1-(\alpha+1)L_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{\alpha+2}\\0&1&0&\frac{1}{\alpha+2}\\0&0&1&\frac{1}{\alpha+2}\end{array}\right)$

• Deci, dacă $\alpha\neq1$ și $\alpha\neq-2$ ($\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$)

$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\alpha+2}\\ y=\frac{1}{\alpha+2}\\ z=\frac{1}{\alpha+2}\end{cases}$ sol. unică (sist. comp. determinat) $\downarrow$ CRAMER

Obs: $\boxed{rg\,A=rg\,A^e=3}$

$S_2=\left\{\left(\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2}\right)\right\}$

• Revenim la forma anterioară, în cazul $\boxed{\alpha=1}\Rightarrow A^e\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\boxed{\text{Obs.}}$ $rg\,A=rg\,A^e=1$

$x\to$ nec. principală

$y=\lambda$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ nec. secundare $\Rightarrow$ sist. devine $x+y+z=1$

$z=\mu$

$\Rightarrow\begin{cases}x=1-\lambda-\mu\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{cases}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

Sist. (S_2) este comp. nedet. (gr. de nedet = nr. nec. secundare = 2)
(dublu)

În acest caz, $S_2 = \{(1-\lambda-\mu, \lambda, \mu) / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

• Revenim la forma anterioară, în cazul $\boxed{\alpha = -2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A^e \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3' = \frac{1}{3}L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1' = L_1 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

În acest caz, avem pivot pe ultima coloană ($\Leftrightarrow 0 = 1$)

$\Rightarrow$ sistemul este incompatibil, i.e. $S_2 = \phi$

Obs: $rg\, A = 2 \neq 3 = rg\, A^e$ (incompatibilitate cf. Th. K–C)

Concluzii:

1) Dacă $\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}}$ $\Rightarrow$ sist. este comp. det (sol. unică)

și $S_2 = \{(\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2})\}$;

2) Dacă $\boxed{\alpha = 1}$ $\Rightarrow$ sist. este comp. dublu nedeterminat

și $S_2 = \{(1-\lambda-\mu, \lambda, \mu) / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;

3) Dacă $\boxed{\alpha = -2}$ $\Rightarrow$ sist. este incompatibil, i.e. $S_2 = \phi$.

• Determinarea inversei unei m. pătratice utilizând metoda Gauss-Jordan.

$\boxed{\text{ALGORITM}}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Construim matricea $(A \mid I_n) \in \mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$

şi determinăm forma sa eşalon redusă $(B \mid C) \in \mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{P}}$ În acest context, avem:

A este m. inversabilă $\Leftrightarrow B = I_n$

$\Updownarrow$ def — În plus, $\boxed{C = A^{-1}}$

$(\exists)\ A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Aşadar, dacă: 1) A este m. inversabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ forma eşalon redusă a matricii $(A \mid I_n) = (I_n \mid \underbrace{C}_{A^{-1}})$

2) A nu este m. inversabilă $\Rightarrow B \neq I_n$,

i.e. pe una din primele "n" coloane **nu** găsim pivot.

$\boxed{\text{Ap 1}}$. Determinaţi (dacă există) inversele următoarelor matrice pătratice, utilizând metoda Gauss-Jordan:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

II 5) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Rez: Construim matricea $(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$ și aplicăm alg. G-J pt. a determina forma de eșalon redusă.

$$\underset{\substack{L_2'=L_2-L_1 \\ L_3'=L_3-2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2'=-\frac{1}{2}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1'=L_1-L_2 \\ L_3'=L_3+L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3'=\frac{1}{3}L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/6 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2'=L_2+L_3}{\sim} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ -1/2 & -1/6 & 1/3 \end{array}}_{B^{-1}} \right)$$

Deci: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Evident, $\det B = -6$

Forma eșalon redusă a matricii B este I_3.

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Determinați inversele următoarelor matrice, utilizând metoda Gauss-Jordan (eliminării complete):

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Metoda Gauss-Jordan este mult mai economică (prin prisma calculelor implicite) decât metoda de aflare a adjunctei matricei (deci a cofactorilor)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \underbrace{A^*}_{\text{m. adjunctă}}$$

Deci, forma eșalon redusă a oricărei matrice inversabile ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) este matricea unitate I_n.

În particular, în aplicația anterioară forma eșalon redusă a matricei A este I_3.