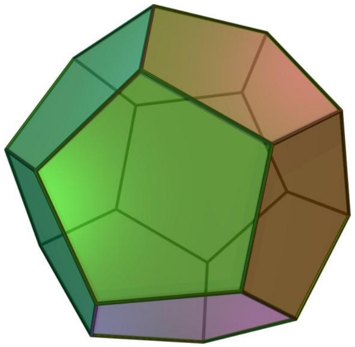
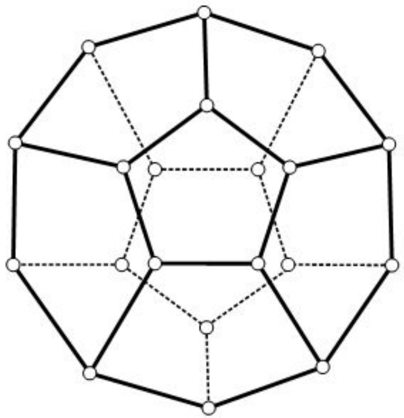
Grafuri planare

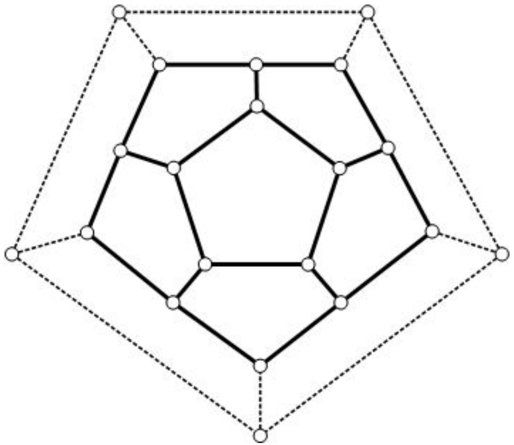
Graf planar

Amintiri din primul curs

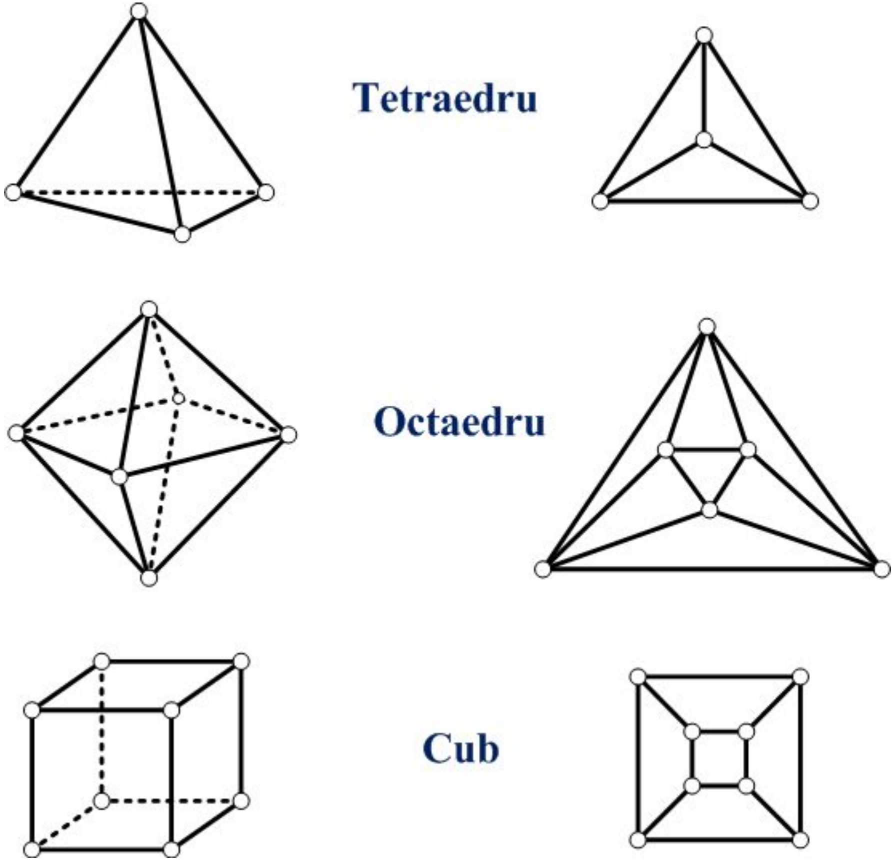
Dodecaedrul



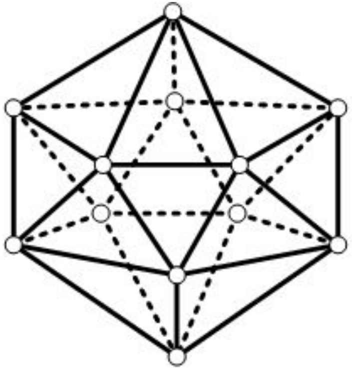




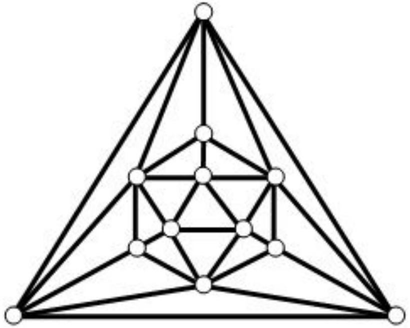
Corpuri platonice – grafuri planare

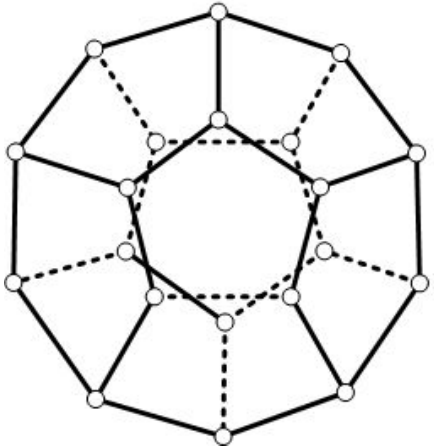


Corpuri platonice – grafuri planare

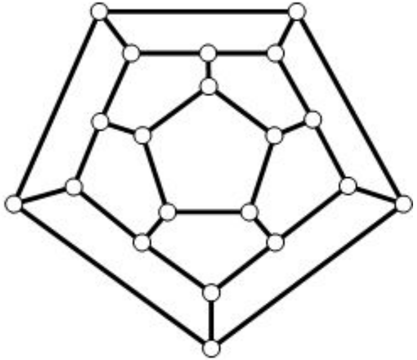


Icosaedru

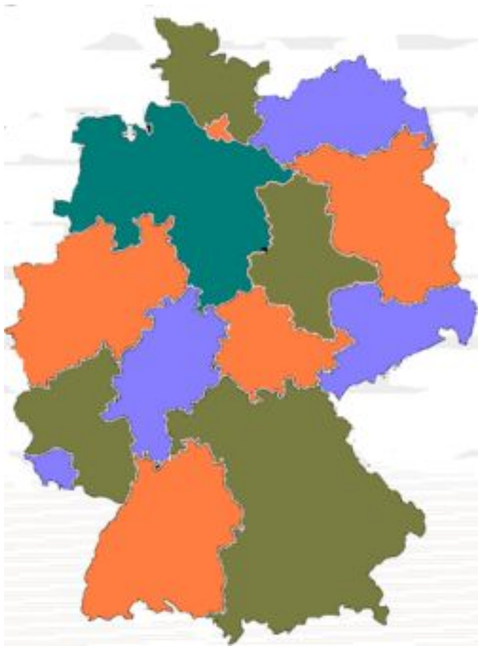


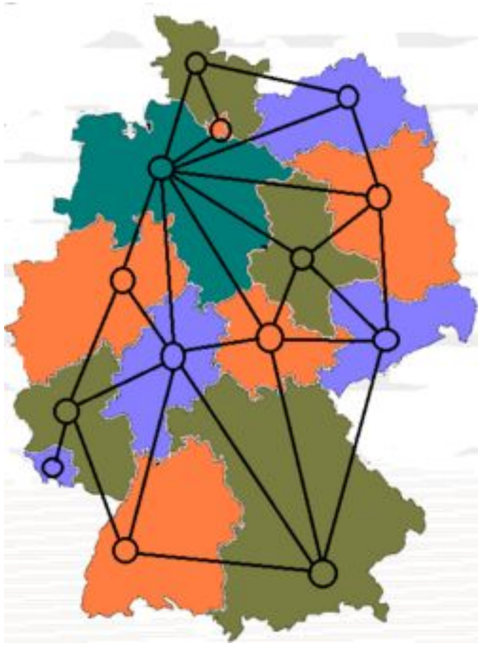


Dodecaedru



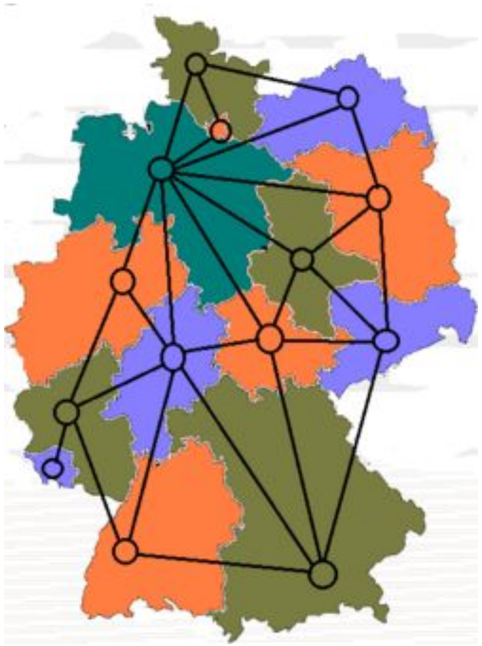
Colorarea hărților

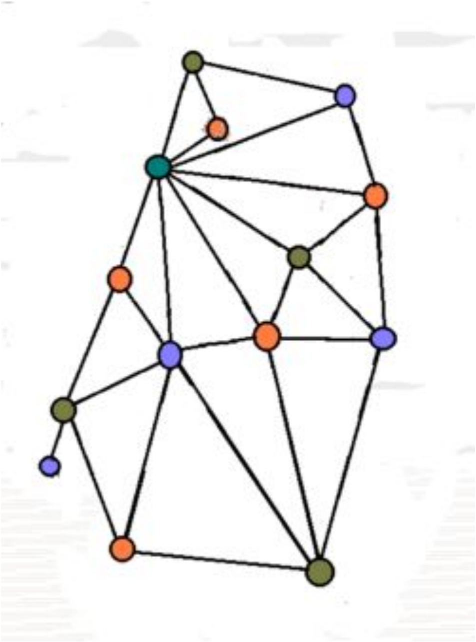




http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

Colorarea hărților



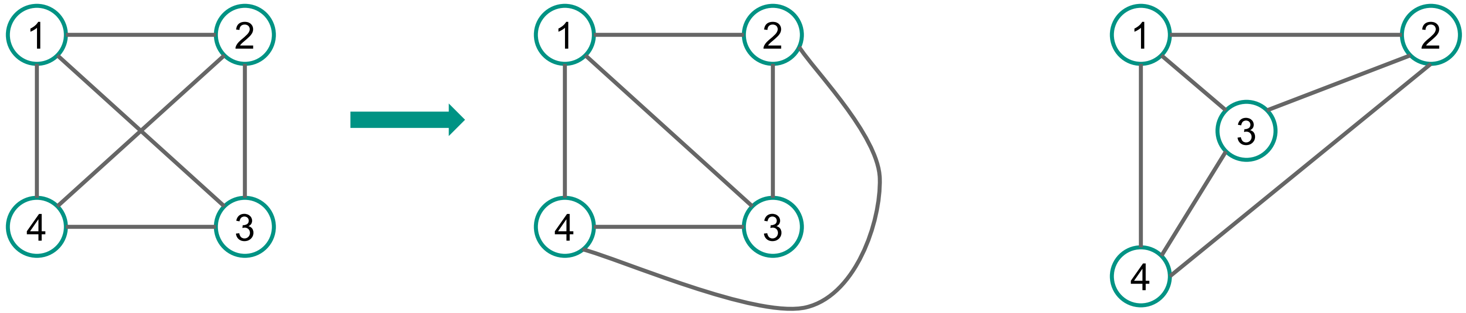


http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

Graf planar

G = (V, E) graf neorientat s.n. **planar** ⇔ admite o reprezentare în plan, a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

O astfel de reprezentare s.n. **hartă** a lui G

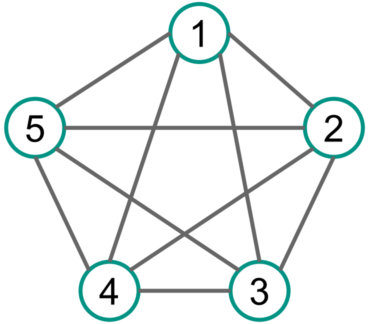


G ~ K_4 **hărți**

Graf planar

G = (V, E) graf neorientat s.n. **planar** ⇔ admite o reprezentare în plan, a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

O astfel de reprezentare s.n. **hartă** a lui G



?

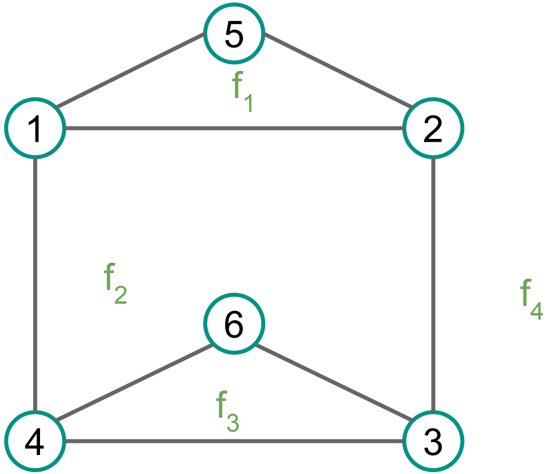
G ~ K_5

Graf planar

Fie G = (V, E) graf planar, M o hartă a sa.

M induce o împărțire a planului într-o mulțime **F** de părți convexe numite **fețe.**

Una dintre acestea este **fața infinită (exterioară)**

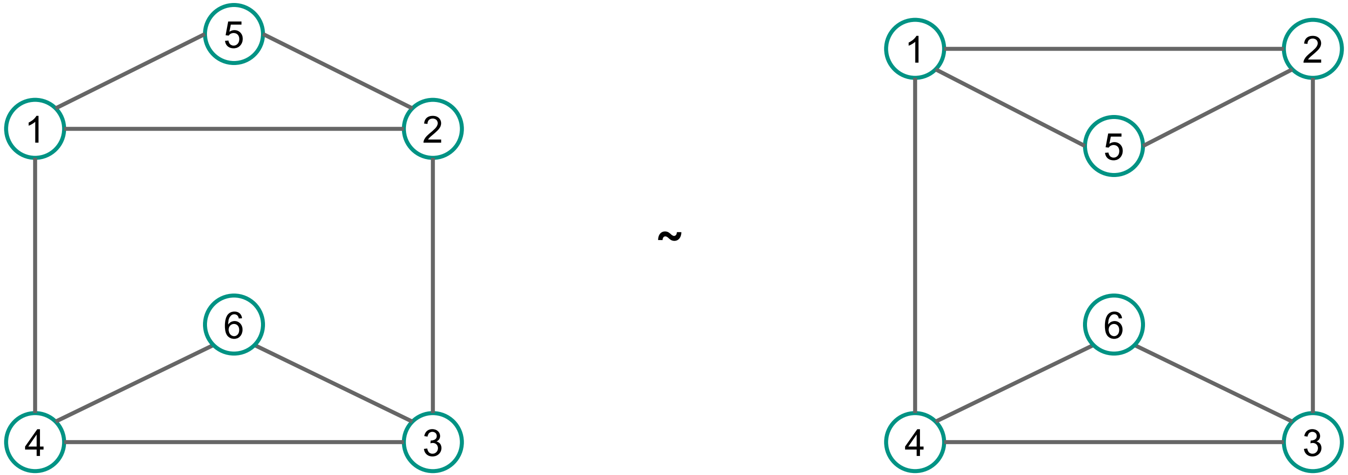


Graf planar

M = (V, E, F) **hartă**

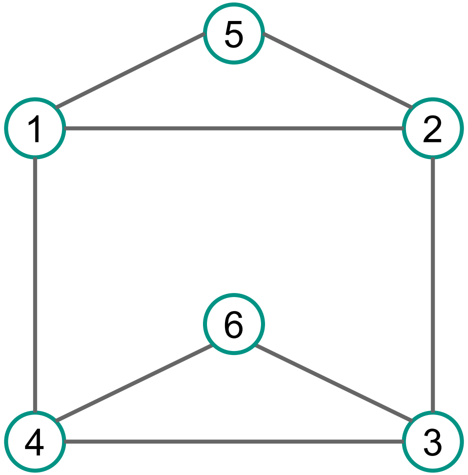
Pentru o față f ∈ F definim

- **d_M(f) = gradul feței =** numărul muchiilor lanțului închis (**frontierei**) care delimitează f (*câte muchii sunt parcurse atunci când traversăm frontiera*)

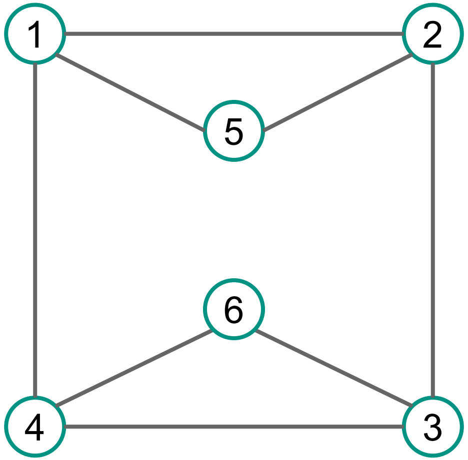


Graf planar

Observație: Hărți diferite ale aceluiași graf pot avea **secvența gradelor diferită**



~



Poate să difere și numărul de fețe (între 2 hărți ale aceluiași graf)?

Graf planar

M = (V, E, F) hartă

Avem:

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

Graf planar

<u>Teorema poliedrală a lui EULER</u>

Fie G = (V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Graf planar

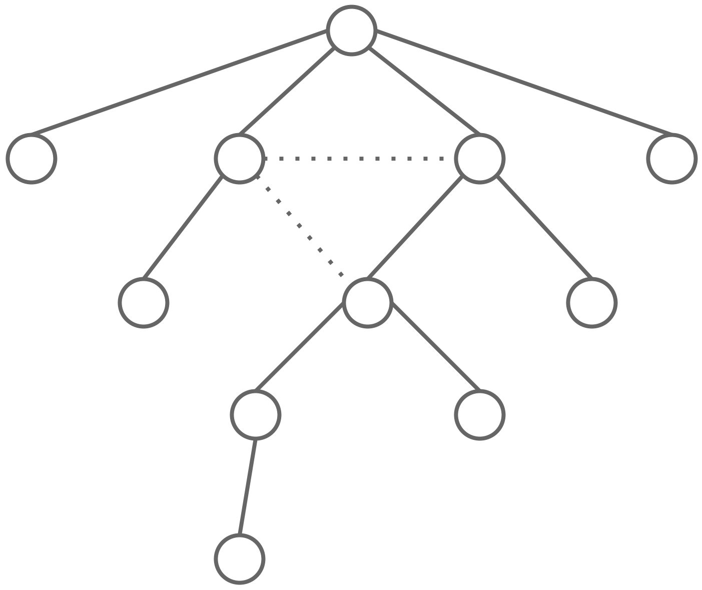
Teorema poliedrală a lui EULER

Fie G = (V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Inducție

- **Arbore parțial + muchii**



Graf planar

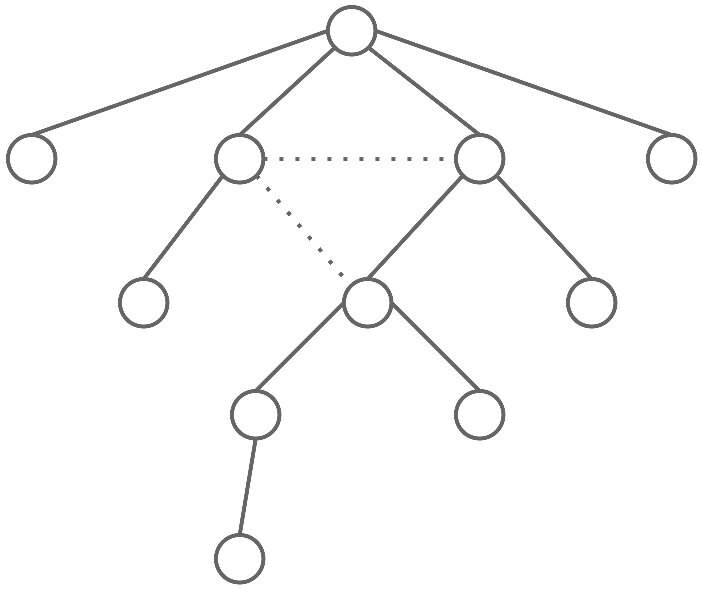
<u>Teorema poliedrală a lui EULER</u>

Fie G = (V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Inducție

- **Arbore parțial + muchii**
- **Într-un arbore**
  - $|E| = |V| - 1$
  - $|F| = 1$
  - $|V| - |E| + F = |V| - (|V| - 1) + (1) = 1 + 1 = 2 \rightarrow$ OK



Graf planar

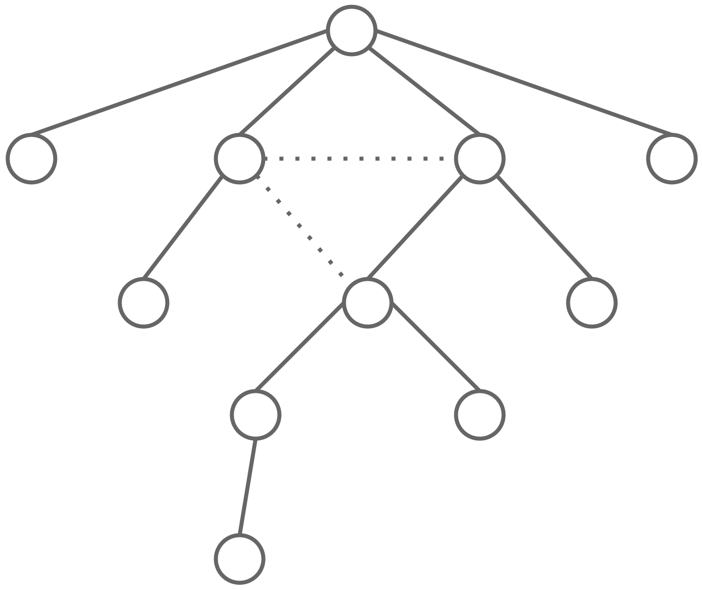
Teorema poliedrală a lui EULER

Fie G = (V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Inducție

- **Pentru arbore e OK**
- **Când adăugăm o muchie …**
  - V rămâne constant
  - E crește cu 1
  - F crește cu 1
  - Relația rămâne validă



Graf planar

Teorema poliedrală a lui EULER

Fie G = (V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Consecință

Orice hartă M a lui G are 2 - |V| + |E| fețe.

Graf planar

Proprietăți

Fie $G = (V, E)$ un graf planar convex, cu $n = |V| > 2$ și $m = |E|$.

Atunci:

a) $m \leq 3n - 6$
b) $\exists\ x \in V$ cu $d(x) \leq 5$

Graf planar

Proprietăți

Fie G = (V, E) un graf planar convex, cu n = |V| > 2 și m = |E|.

Atunci:

a) **$m \leq 3n - 6$**
b) **$\exists\ x \in V$ cu $d(x) \leq 5$**

Demonstrație

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

$$d_M(f) \geq 3$$

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Graf planar

Proprietăți

Fie G = (V, E) un graf planar convex, cu n = |V| > 2 și m = |E|.

Atunci:

a) m ≤ 3n - 6

b) ∃ x ∈ V cu d(x) ≤ 5

Demonstrație

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

$$d_M(f) \geq 3$$

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

$$|V| - |E| + |2E|/3 \leq 2$$

$$3|V| - |E| \leq 6 \Rightarrow a)$$

Graf planar

Proprietăți

Fie G = (V, E) un graf planar convex, cu n = |V| > 2 și m = |E|.

Atunci:

a) **$m \leq 3n - 6$**

b) **$\exists\ x \in V$ cu $d(x) \leq 5$ (exercițiu)**

Consecință

K_5 nu este graf planar (exercițiu)

Graf planar

Proprietăți (temă)

Fie G = (V, E) un graf planar convex **bipartit**, cu $n = |V| > 2$ și $m = |E|$.

Atunci:

a) $\mathbf{m \le 2n - 4}$

b) $\mathbf{\exists\ x \in V}$ **cu** $\mathbf{d(x) \le 3}$

Consecință

$K_{3,\,3}$ nu este graf planar

Graf planar

Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6-colorabil.

Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

Graf planar

<u>Teorema celor 6 culori</u>

Orice graf planar conex este 6-colorabil.

Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
    dacă |V(G)| ≤ 6, atunci colorează vârfurile cu culori distincte din
        {1,...,6}
```

Graf planar

<u>Teorema celor 6 culori</u>

Orice graf planar conex este 6-colorabil.

Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
    dacă |V(G)| ≤ 6, atunci colorează vârfurile cu culori distincte din
        {1,...,6}
    altfel
        alege x cu d(x) ≤ 5
```

Graf planar

Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6-colorabil.

Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
    dacă |V(G)| ≤ 6, atunci colorează vârfurile cu culori distincte din
        {1,...,6}
    altfel
        alege x cu d(x) ≤ 5
        colorare(G-x)
```

Graf planar

Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6-colorabil.

Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
    dacă |V(G)| ≤ 6, atunci colorează vârfurile cu culori distincte din
        {1,...,6}
    altfel
        alege x cu d(x) ≤ 5
        colorare(G-x)
        colorează x cu o culoare din {1,...,6} diferită de culorile vecinilor
```

Graf planar

Teorema celor 6 culori

Orice graf planar conex este 6-colorabil.

Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori

```
colorare(G)
    dacă |V(G)| ≤ 6, atunci colorează vârfurile cu culori distincte din
        {1,...,6}
    altfel
        alege x cu d(x) ≤ 5
        colorare(G-x)
        colorează x cu o culoare din {1,...,6} diferită de culorile vecinilor
```

Sugestie de implementare - determinarea iterativă a ordinii în care sunt colorate vârfurile (similar parcurgere BF, sortare topologică)

Graf planar

<u>**Teorema celor 5 culori**</u>

Orice graf planar conex este 5-colorabil.

Suplimentar - Temă (+ algoritm de 5-colorare)

Graf planar

Teorema celor 4 culori

Orice graf planar conex este 4-colorabil.

Peste nivelul cursului.