$\boxed{P}$ Dacă $\{L_i\}_{i\in I}$ este o familie de varietăți liniare în $\mathbb{R}^n$, atunci: $\bigcap_{i\in I} L_i$ este o varietate liniară.

Fie W_i spațiul director pentru L_i, $i\in I$.

Dacă $\bigcap_{i\in I} L_i \neq \emptyset$ atunci spațiul director al intersecției $\bigcap_{i\in I} L_i$ este $\bigcap_{i\in I} W_i$. În acest caz, $\dim \bigcap_{i\in I} L_i = \dim \bigcap_{i\in I} W_i$.

Paralelism

<u>Def</u>: Fie L_1 și L_2 varietăți liniare având subsp. directoare W_1, W_2

$L_1 \parallel L_2$ dacă: $W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$.

$\boxed{P}$ Fie $L_1 \parallel L_2$ două varietăți liniare paralele.

Atunci: $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ sau $L_1 \subseteq L_2$ sau $L_2 \subseteq L_1$.

<u>Dem</u>: Luăm: $L_i = p_i + W_i$, $i=\overline{1,2}$

Pp. $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Fie $x \in L_1 \cap L_2$

Din definiția paralelismului varietăților liniare $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$

$\Rightarrow x+W_1 \subseteq x+W_2$ sau $x+W_2 \subseteq x+W_1$, i.e. $L_1 \subseteq L_2$ sau $L_2 \subseteq L_1$.

Exemplu:

Fie $L_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 1, x_2 = 1\} \rightarrow$ dreapta verticală care trece prin $(1,1,0) \in \mathbb{R}^3$

și $L_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 0, x_3 = 0\} \rightarrow$ axa Ox_2 din $\mathbb{R}^3$.

$W_1 \rightarrow$ axa Ox_1

$W_2 = L_2$

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$, dar $L_1 \nparallel L_2$ deoarece nu avem nicio incluziune între W_1 și W_2.

Postulatul V al lui EUCLID:

Printr-un pct. $p \in \mathbb{R}^n$, există o unică varietate liniară care trece prin p, este paralelă cu o varietate liniară dată L și are dimensiunea varietății L.

Poziția relativă a 2 drepte din $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$

Fie $L = p + \langle v \rangle$
$L' = p' + \langle v' \rangle$ 2 drepte din $\mathbb{R}^n$.

Avem: $L \cap L' \neq \emptyset$ dacă $\exists$, $t, t' \in \mathbb{R}$ a.î. $p + tv = p' + t'v'$

$\Leftrightarrow p - p' \in \langle v, v' \rangle$ sau sistemul $tv - t'v' = p' - p$, în t și t' are soluție, adică este compatibil.

Considerăm matricele: $A = \begin{pmatrix} v_1 & -v_1' \\ \vdots & \vdots \\ v_n & -v_n' \end{pmatrix}$ și $\overline{A} = \begin{pmatrix} v_1 & -v_1' & p_1' - p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & -v_n' & p_n' - p_n \end{pmatrix}$

Deci L și L' se intersectează $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \overline{A}$.

$L \parallel L' \Leftrightarrow \langle v \rangle = \langle v' \rangle \Leftrightarrow rg A = 1$

Am obținut:

- dacă $rg A = rg \bar{A} = 1 \Rightarrow$ dreptele L și L' coincid
- dacă $\begin{cases} rg A = 1 \\ rg \bar{A} = 2 \end{cases} \Rightarrow$ dreptele sunt paralele distincte (nu se intersectează)
- dacă $rg A = rg \bar{A} = 2 \Rightarrow$ dreptele se intersectează într-un unic pct.

$\uparrow n = 2$

$\downarrow n \geq 3$ • dacă $rg A = 2$, $rg \bar{A} = 3 \Rightarrow$ dreptele sunt neconcurente și neparalele (necoplanare).

Este cazul dr. din exemplul anterior

Cazul particular a 2 dr. din $\mathbb{R}^3$

Fie $L \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \alpha \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = \beta \end{cases}$

și $L' \begin{cases} a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = \alpha' \\ b_1' x_1 + b_2' x_2 + b_3' x_3 = \beta' \end{cases}$

Obs: Rangul matricii fiecărui sistem este 2.

Considerăm sistemul dat de cele 4 ec. cu necunoscute x_1, x_2, x_3.

Notăm: B — matricea sistemului

$\bar{B}$ — matricea extinsă a sistemului

$L \cap L' \neq \emptyset \Leftrightarrow (S)$ compatibil $\Leftrightarrow rg B = rg \bar{B}$

$L \parallel L' \Leftrightarrow rg B = 2$

Obținem cazurile:

- $rg\, B = rg\, \overline{B} = 2 \Rightarrow$ dreptele coincid
- $\begin{cases} rg\, B = 2 \\ rg\, \overline{B} = 3 \end{cases} \Rightarrow$ dreptele sunt paralele, distincte
- $rg\, B = rg\, \overline{B} = 3 \Rightarrow$ dreptele sunt concurente într-un singur pct.
- $\begin{cases} rg\, B = 3 \\ rg\, \overline{B} = 4 \end{cases} \Rightarrow$ dreptele sunt neconcurente și neparalele (i.e. necoplanare)

<u>Obs:</u> Dacă cele 2 dr. le considerăm în plan, atunci dreptele pot fi 1) confundate, 2) paralele distincte sau 3) concurente într-un singur pct.

<u>Poziția relativă a 2 plane în $\mathbb{R}^3$</u>

Un plan în $\mathbb{R}^3$ este de fapt un hiperplan, și este descris de o singură ecuație.

Fie $\pi_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha\}$ 2 plane în $\mathbb{R}^3$.

$\pi_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 / a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = \alpha'\}$

Considerăm sistemul $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha \\ a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = \alpha' \end{cases}$

$$\underset{\text{m. sistemului}}{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \alpha \\ a_1' & a_2' & a_3' & \alpha' \end{pmatrix}$$

Planele sunt $\parallel$ dacă $rg\, C = 1$

și se intersectează $\Leftrightarrow$ sist. e compatibil $\Leftrightarrow rg\, C = rg\, \overline{C}$

Avem cazurile:

- $rg\, C = rg\, \overline{C} = 1 \longrightarrow$ planele coincid
- $rg\, C = 1$ și $rg\, \overline{C} = 2 \longrightarrow$ planele sunt paralele, distincte
- $rg\, C = rg\, \overline{C} = 2 \longrightarrow$ planele se intersectează.

Dimensiunea intersecției este nr. var. secundare $= 1$, i.e planele se intersectează după o dreaptă.

Poziția relativă dintre o dreaptă și un hiperplan din $\mathbb{R}^n$

Reamintim că: poziția relativă a unei dr. în raport cu un plan în $\mathbb{R}^3$ poate fi:
- dr. conținută în plan
- dr. paralelă cu planul
- dr. $\cap$ planul $= \{1\ pct.\}$

Fie dr. $L = p + \langle v \rangle$, $p \in \mathbb{R}^n$ și $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$$

$(\forall)\, x \in L: x_i = p_i + tv_i,\ i = \overline{1,n}$, $t \in \mathbb{R}$

Considerăm sistemul:
$$\begin{cases} x_1 - tv_1 = p_1 \\ \vdots \\ x_n - tv_n = p_n \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha \end{cases}$$
$\longrightarrow$ sistem cu $n+1$ ec. și $n+1$ variabile $(x_1, \ldots, x_n, t)$

Dacă: $L \cap H = \{z\} \Longrightarrow (\exists)\, t_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $z = p + t_0 v \in H$

Deci, soluția sistemului, dacă există, este un $n+1$-uplu $(z_1, \ldots, z_n, t_0)$

Sistemul este compatibil $\Longleftrightarrow rg\, A = rg\, \overline{A}$

Pentru a compara cele 2 ranguri ajungem să comparăm

$rg(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n)$ cu $rg(a_1v_1+a_2v_2\ldots+a_nv_n, \alpha-a_1p_1-a_2p_2 \ldots -a_np_n)$

Obținem:

- $rg(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n)=rg(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n, \alpha-a_1p_1-a_2p_2-\ldots-a_np_n)=0$
  $\Rightarrow$ sistemul este comp. și $L\subset H$.
- $rg(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n)=0<rg(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n, \alpha-a_1p_1-a_2p_2-\ldots-a_np_n)=1$
  $\Rightarrow$ sistemul este incompatibil și $L\cap H=\emptyset$
- $rg(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n)=rg(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n, \alpha-a_1p_1-\ldots-a_np_n)=1$
  $\Rightarrow$ sistemul este compatibil, are sol. unică. $L\cap H=\{z\}$

Perpendicularitate

Def: Fie L_1, L_2 2 varietăți liniare din $\mathbb{R}^n$ cu subsp. directoare W_1 și respectiv W_2.

L_1 și L_2 s.n. perpendiculare dacă $W_1\perp W_2$

L_1 și L_2 s.n. normale dacă: $W_1^{\perp}=W_2$

Exemplu: 2 dr. în spațiu pot fi perpendiculare dar nu normale. Complementul ortogonal al unei drepte în $\mathbb{R}^3$ este un plan!

Fie $\left.\begin{array}{l} L_1=p_1+\langle v_1\rangle \\ L_2=p_2+\langle v_2\rangle \end{array}\right\}$ 2 dr. din $\mathbb{R}^n$.

$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow v_1\perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1,v_2\rangle=0$

Fie $L = p + \langle v \rangle$ → dr.

$H = \{x \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \alpha\}$ → hiperplan în $\mathbb{R}^n$

$W_L = \langle v \rangle$

$W_H = \{x \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0\}$

$W_H^{\perp} = \{z \in \mathbb{R}^n / \langle z, x \rangle = 0, (\forall)\, x \in W\}$

L și H sunt normale ⟺ $W_H^{\perp} = W_L$ ⟺ v este proporțional cu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

<u>Def.</u> Fie $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$d(p,q) = \| p - q \| = \sqrt{\langle p-q, p-q \rangle}$$

Fie $L = p + \langle v \rangle$ 2 dr. din $\mathbb{R}^n$
$L' = p' + \langle v' \rangle$

$$\cos \sphericalangle (L, L') = \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \|v'\|}$$

<u>Remarcă:</u> Fie $p \in \mathbb{R}^n$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \alpha\}$$

$$n_H = (a_1, \dots, a_n)$$

$$d(p, H) = \min_{q \in H} d(p, q)$$

Distanța minimă se realizează pe normala de la p la H. $n(p)$

$$\{q_0\} = n(p) \cap H$$

Avem: $d(p, H) = d(p, q_0)$

$$\boxed{d(p, H) = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n - \alpha|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}}$$

Scanned with CamScanner

$\mathbb{R}^n$

$B_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \to$ baza canonică

B' – reper arbitrar în $\mathbb{R}^n$

$B_0 \xrightarrow{A} B'$

A – matricea de trecere

Def: Vom spune că reperul B' este pozitiv dacă $\det A > 0$, în caz contrar vom spune că reperul B' este negativ

Exemplu: $B' = \{e_2, e_1, e_3, \dots, e_n\} \to$ reper negativ deoarece am permutat 2 coloane din I_n între ele și astfel

$\det A = -1$

În continuare vom lucra în $\mathbb{R}^3$.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3$ reper ortonormat (de exemplu reperul canonic $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$)

Def: Fie $u, v \in \mathbb{R}^3$. Produsul vectorial (notat $u \times v$) este vectorul din $\mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

- $u \times v \perp \langle u, v \rangle$ (planul generat de u și v)
- reperul $\{u, v, u \times v\}$ este pozitiv orientat
- $\|u \times v\|$ este egală cu aria paralelogramului construit cu vectorii u și v ($\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \cdot \sin(u, v)$).

Obs: Fie n vectorul unitar perpendicular pe planul generat de vectorii $u, v \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\{u, v, n\}$ este un reper pozitiv orientat

Atunci: $u \times v = \|u\| \|v\| \sin(u, v)\, n$

$\boxed{P}$ Pentru $u, u', v, v' \in \mathbb{R}^3$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem:

- $u \times v = 0$ dacă u, v sunt coliniari (paralelogr. e degenerat)
- $v \times u = -u \times v$
- $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este apl. biliniară:

  $(\alpha u + \beta u') \times v = \alpha u \times v + \beta u' \times v$

  $u \times (\alpha v + \beta v') = \alpha u \times v + \beta u \times v'$

$\boxed{T}$ Fie $B = \{i, j, k\}$ o bază ortonormată pozitivă în $\mathbb{R}^3$.

$(\forall)\ u, v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

<u>Def</u>: Fie $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Produsul mixt al vectorilor u, v, w se notează (u, v, w)

și este definit prin: $(u, v, w) = \langle u, v \times w \rangle \in \mathbb{R}$

<u>Obs</u>: Din proprietățile produsului scalar și a celui vectorial

$\Rightarrow$ produsul mixt $(\,,\,,\,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este liniar în fiecare argument.

- $(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

- $(u, v, w) = -(v, u, w)$; semnul nu se schimbă la permutări ciclice

  $(u, v, w) = (v, w, u)$

- dacă u, v, w sunt necoplanari, atunci $|(u, v, w)|$ reprezintă volumul paralelipipedului construit cu vectorii u, v și w

- $(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow u, v, w$ sunt coplanari

Scanned with CamScanner

Obs: Folosind produsul mixt se poate da o formulă pentru distanța dintre 2 drepte necoplanare (vectorii directori sunt liniar independenți).

Fie $L_1 = q_1 + \langle v_1 \rangle$, $L_2 = q_2 + \langle v_2 \rangle$ cele 2 drepte, unde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^3$ și $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ vect. liniar indep.

$$d(L_1, L_2) = \min_{\substack{P_1 \in L_1 \\ P_2 \in L_2}} \{d(P_1, P_2)\}$$

$d(L_1, L_2)$ se atinge pe perpendiculara comună n a dr. L_1, L_2.

Fie $\{A\} = L_1 \cap n$

$\{B\} = L_2 \cap n$

$d(L_1, L_2) = d(A, B)$

AB este înălțimea paralelipipedului format cu muchiile

$q_1 q_2, v_1, v_2$.

$\overset{\shortparallel}{q_2 - q_1}$

Lungimea acestei înălțimi este volumul paralelipipedului împărțit la aria bazei, paralelogr. de laturi v_1, v_2.

$$\Rightarrow d(L_1, L_2) = \frac{(q_1 q_2, v_1, v_2)}{\| v_1 \times v_2 \|} = \frac{(q_2 - q_1, v_1, v_2)}{\| v_1 \times v_2 \|}$$

Izometrii

Def: S.n. izometrie $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că:

$$d(\phi(p), \phi(q)) = d(p, q), \ (\forall)\, p, q \in \mathbb{R}^n$$

- $(\forall)$ izometrie este o apl. injectivă
- $(\forall)$ izometrie $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transf. varietăți liniare în varietăți liniare de aceeași dimensiune.
- Izometriile $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ formează grup cu operația de compunere a aplicațiilor.

$\boxed{T}$ $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ izometrie $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ un reper ortonormat $B \subset \mathbb{R}^n$ a.î. $\phi(x) = Ax + b$, unde $A \in O_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Translația cu $b \in \mathbb{R}^n$, $\phi_b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi_b(x) = x + b$, coresp. matricei I_n în reperul canonic, este izometrie.

Considerăm $A \in O(n)$, atunci $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită prin $\phi(x) = Ax$ este o izometrie. Pt. $A \in SO_n(\mathbb{R})$, avem rotații.

Să considerăm și simetria față de o varietate liniară $L \subset \mathbb{R}^n$

Not: $S_L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $S_L(p) = p'$, unde p' se obține astfel:

Considerăm varietatea normală la L ce trece prin p, $L^{\perp}(p)$ și $\{q\} = L \cap L^{\perp}(p)$.

p' simetricul lui p față de q pe dr. pq, sau q este mijlocul seg. $[p, p']$. Deci: $q = \frac{p+p'}{2} \Leftrightarrow p' = 2q - p$

Dar: $q = pr_L(p)$ {proiecția lui p pe L}

Deci: $S_L(p) = 2pr_L(p) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}(p)$, $(\forall)\, p \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow S_L = 2pr_L - id_{\mathbb{R}^n}$

Pentru $L = \{x \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$ hiperplan, avem:

$(\forall)\ p \in \mathbb{R}^n$, $S_L(p) = p + 2\frac{\alpha - \langle a, p\rangle}{\|a\|^2} a$.

Dacă hiperplanul L trece prin origine (i.e. $\alpha = 0$)

atunci: $S_L(p) = p - 2\frac{\langle a, p\rangle}{\|a\|^2} a$

În acest caz, matricea A într-un reper ortonormat pozitiv, are $\underline{\det(A) = -1}$.