$\boxed{\text{Apl. 1}}$ Considerăm transf. liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (2x - y + 2z, -x + 2y - z, x + y + z),$$
$$(\forall)\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Scrieți matricea asociată lui f în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) Determinați valorile proprii și subsp. proprii coresp.

c) Verificați dacă f este diagonalizabilă.

d) În caz afirmativ, scrieți matricea (forma) diagonală și baza în care se realizează.

Rez: a) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)$

b) Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Ec. caracteristică: $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \in \mathbb{R}$ valorile proprii $\quad Spec(f) = \{0, 2, 3\}$

și $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$

{multiplicitățile algebrice}

Subspații proprii:

$$S'_\lambda : \begin{cases} (2-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ -x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$S'_{\lambda_1} : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{sistem liniar omogen, cu 3 ec. și 3 nec.}$$

$\{\lambda_1 = 0\}$

$$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x, y \text{ nec principale} \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{nec. secundară} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = -2\alpha \;|\cdot 2 \\ -x + 2y = \alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ \boxed{z = \alpha, \; \alpha \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

Deci: $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \underbrace{(-1, 0, 1)}_{\substack{\text{not} \\ v_1}} \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$

Analog, rezolvând sistemele S'_{λ_2} și S'_{λ_3} vom obține

$$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(1, -2, 1)}_{\substack{\text{not} \\ v_2}} \,/\, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1, -1, 0)}_{\substack{\text{not} \\ v_3}} \,/\, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Deci: $\dim V_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_2} = \dim V_{\lambda_3} = 1$

$\Rightarrow m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$

{multiplicitățile geometrice}

Avem $\begin{cases} 1) \; m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + m_a(\lambda_3) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \\ 2) \; m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i), \; (\forall)\, i = \overline{1,3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este diagonalizabilă, deci $(\exists)\; B \subset \mathbb{R}^3$ {bază formată din vectori proprii coresp. lui $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (care sunt liniar indep. deoarece valorile proprii sunt distincte)}

În raport cu care, matricea asociată lui f are forma diagonală:

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}.$$

$B = \{ v_1 = (-1, 0, 1),\; v_2 = (1, -2, -1),\; v_3 = (1, -1, 0) \}$

Suplimentar:

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r, "C"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_f & \boxed{D = C^{-1} A_f C} \end{tikzcd}$$

$C \to$ m. de trecere de la baza canonică B_0 la baza B,

i.e. $C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \;\; v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$

$\boxed{Apl. 2}$ Aceleași enunț ca în apl. $\boxed{1}$ pentru transf. liniară:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (3x+y-z, 2y, x+y+z)$,
$(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Rez: a) $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)$

b) Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3$$

Ec. caracteristică:

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 2}_{\text{valoare proprie}}, \ m_a(\lambda_1) = 3$

$Spec(f) = \{2\}$

Subspații proprii

$$S_\lambda : \begin{cases} (3-\lambda)x + y - z = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\lambda_1} \ \{\lambda_1 = 2\} : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 1 \Rightarrow$ Luăm x nec. principală

$y = \alpha$, $z = \beta$, nec. secundare

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deci: $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha+\beta, \alpha, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha \underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + \beta \underbrace{(1, 0, 1)}_{v_2} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha v_1 + \beta v_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Rezultă că:

$\Rightarrow B_1 = \{v_1, v_2\} \subset V_{\lambda_1}$

sistem de gen. + sistem lin. indep. (se verifică!) $\rightarrow$ bază $\rightarrow \dim V_{\lambda_1} = 2$

i.e. $m_g(\lambda_1) = \dim V_{\lambda_1} = 2 < 3 = m_a(\lambda_1)$, deci f $\boxed{\text{nu}}$ este diagonalizabilă.

$\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț, ca în apl $\boxed{1}$ pentru următoarele transf. liniare

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-x+3y-z, -3x+5y-z, -3x+3y+z)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (6x-5y-3z, 3x-2y-2z, 2x-2y)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

c) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y-z-t, x-y+z-t, x-y-z+t)$, $(\forall)(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Apl 3}}$ Fie f transf. liniară în $\mathbb{R}^3$ dată de rotația spațiului în jurul axei Oz cu un unghi $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Determinați valorile proprii și subsp. proprii corespunzătoare și interpretați geometric rezultatele obținute.

Rez: $A_f = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\downarrow$

m. asoc. rotației de $\angle \frac{\pi}{3}$, în sens direct trigonometric, în jurul axei Oz {de ec. $x = y = 0$}

$$\Rightarrow \underset{\{\theta = \frac{\pi}{3}\}}{A_f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii: Rezolv. ec. caract. în corpul $\mathbb{R}$.

Ec. caract. $\det(A_f - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$ singura valoare proprie reală $\Rightarrow Spec(f) = \{1\}$

$\{\lambda_2 = \overline{\lambda_3} \rightarrow$ rădăcini pur complexe $\}$

Subsp. proprii

$$S_\lambda : \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)y = 0 \\ (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 = 1} \Rightarrow S_{\lambda_1} : \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \Big|$ x, y nec. princ. ; $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ nec. sec.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(0,0,\alpha) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(0,0,1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

<u>Interpretare geometrică:</u>

Evident: $V_{\lambda_1} = Oz$, i.e. singurul subsp. propriu (invariant) este axa Oz ($\equiv$ axa de rotație)

C) <u>PROBLEME PROPUSE PENTRU TEMA ONLINE</u>

1. Determinaţi valorile şi vectorii (subspatiile) proprii corespunzatoari(e) pentru matricele urmatoare:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Stabiliţi dacă matricele de la exerciţiul precedent sunt diagonalizabile şi, în caz afirmativ, determinaţi forma lor diagonală.

3. Considerăm aplicaţia $T: R^3 \to R^3, T(x,y,z) = (x + 4y, 2y + 3z, y)$.

a) Aratati că T este transformare (aplicatie) liniară.
b) Scrieţi matricea asociata lui T, A_T.
c) Determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzatori(e) lui A_T.
d) Precizaţi subspaţiile proprii corespunzătoare transformării (aplicatiei) T şi stabiliţi dacă aceasta este diagonalizabila.
e) Scrieţi, dacă există, matricea diagonalizatoare C şi matricea diagonală D.
f) Verificati rezultatul obtinut.

① Forme biliniare. Forme pătratice

Def: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ sp. vectorial real, n-dimensional.

Se numește <u>formă biliniară</u> o aplicație $F: V \times V \to \mathbb{R}$, a.î.

$$\begin{cases} 1) \ F(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha F(x_1, y) + \beta F(x_2, y) \\ 2) \ F(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha F(x, y_1) + \beta F(x, y_2) \end{cases} \quad (\forall)\ x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V,\ (\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(i.e. liniară în ambele argumente)

$$\boxed{F(x, y) = x^T A y} \quad (\forall)\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$$

$\to$ <u>forma matriceală</u>

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ <u>bază</u>

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$A = (F(e_i, e_j))_{i,j=\overline{1,n}}$

matricea asociată formei bilin. F, în raport cu baza $B \subset V$.

• Dacă $B \xrightarrow{C} B'$ $\Rightarrow \boxed{A' = {}^tC A C}$

C — matricea de trecere de la baza B la baza B'

{formula de transf. a matricei asoc. unei f. bilin. la sch. de bază}

A, A' — m. asoc. f. bilin. F în raport cu bazele B, resp. B'.

Def. Forma biliniară $F: V \times V \to \mathbb{R}$ s.n. <u>simetrică</u> dacă:

$$F(x, y) = F(y, x),\ (\forall)\ x, y \in V$$

Pentru o formă biliniară simetrică $F: V \times V \to \mathbb{R}$ se definește forma pătratică $\left| \begin{array}{l} Q : V \to \mathbb{R}, \\ Q(x) = F(x,x), (\forall)\, x \in V \end{array} \right.$

Formula de polarizare:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right], (\forall)\, x, y \in V$$

$$Q(x) = F(x,x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$\boxed{Ap1}$ Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3,$$
$$(\forall)\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determinați forma biliniară simetrică asociată lui Q (not. cu F) folosind formula de polarizare.

b) Scrieți matricea asociată formei bilin. simetrice F, în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Rez: (a) V_1 Utilizăm formula de polarizare

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right], (\forall)\, \underset{(x_1,x_2,x_3)}{x}, \underset{(y_1,y_2,y_3)}{y} \in \mathbb{R}^3$$

Avem: $F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - Q(x_1,x_2,x_3) - Q(y_1,y_2,y_3)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1+y_1)^2 + 3(x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2 - 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 4(x_2+y_2)(x_3+y_3) - 3(x_1+y_1)(x_3+y_3)\right.$$
$$\left. - (x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3) - (y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 4y_2y_3 - 3y_1y_3)\right]$$

$$= \ldots = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1$$

V_2 Metoda DEDUBLĂRII:

$x_1^2 \rightsquigarrow x_1y_1 \qquad x_1x_2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$

$x_2^2 \rightsquigarrow x_2y_2 \qquad x_2x_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$

$x_3^2 \rightsquigarrow x_3y_3 \qquad x_1x_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1)$

$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1,$$

$(\forall)\ x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$

b) $$F(x,y) = (x_1\ x_2\ x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

unde
$A \to$ m. asoc. formei bilin. sim. F,
în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Aducerea la o formă canonică a unei forme pătratice