Conice pe ecuația generală

Def: Locul geometric al pct. din planul eucl. $\mathbb{R}^2$ ale căror coord. (x, y) într-un reper ortonormat satisfac o ec. de forma:

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

unde $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 \neq 0$, $a \overset{not}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$^t b = (a_{13} \ a_{23}), \quad c = (a_{33})$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ ^t b & c \end{pmatrix}$$

s.n. conică.

$\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0\}$

sau:

$\gamma: f(x,y) = 0$

Matriceal, scriem: $f(X) = {}^tX a X + 2\,{}^tb X + c = 0$

a - s.n. matricea conicei iar A matricea sa extinsă.

$r \overset{not}{=} rg\, a$, $r' \overset{not}{=} rg A$

$\delta = \det a$ $\quad \Delta \overset{not}{=} \det A$

Obs: $r' \in \{r, r+1, r+2\}$

Def: Conicele pt. care $\Delta \neq 0$ s.n. nedegenerate iar cele pt. care $\Delta = 0$ s.n. degenerate.

Centre:

Def: S.n. centru al conicei γ un pct. $P_0 \in \mathbb{R}^2$ cu propr. că:

$(\forall)\ P \in \gamma : S_{P_0}(P) \in \gamma$.

Fie $P_0(x_0, y_0)$ centru al conicei γ

Efectuăm translația t:

$$t \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad P_0 \to t(P_0) = O \implies \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

$$t(\gamma): a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x' +$$
$$+ 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y' + f(x_0, y_0) = 0 \quad (*)$$

$(\forall)\ P \in \gamma : S_{P_0} P \in \gamma$

$(x', y') \to (-x', -y') \in \gamma$

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' - 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x' -$$
$$- 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y' + f(x_0, y_0) = 0 \quad (**)$$

$$\implies (S) \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Matriceal: $aX + b = 0 \quad (S)$

Obs Def: $f_1 \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial y}$ $\quad f_i = 0, (\forall) i = \overline{1,2}$

Avem 2 cazuri:

I) $\delta \neq 0 \implies (S)$ are sol unică. În acest caz, conica are centru unic

II) $\delta = 0 \implies (S)$ este incompatibil sau are o ∞ de sol, deci conica nu are centru unic

I) Ne situăm în cazul $\delta \neq 0$

Pp. că am efectuat translația t, cu (x_0, y_0) sol a sist. (S)

$$\implies t(\gamma): a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + f(x_0, y_0) = 0$$

Obs: $f(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}$

$$t(\gamma): a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + 2a_{12}x'y' + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

Axe

Def: Fie γ o conică cu centru unic.

S.n. <u>axă</u> orice dreaptă care trece prin centru și a cărei direcție este dată de un vector propriu al matricei $\underline{a}$.

<u>Obs:</u> O conică cu centru unic are întotdeauna 2 axe distincte, pt. că matricea a fiind simetrică, admite o bază formată din 2 vectori proprii.

! Alegerea axelor poate să nu fie unică.

<u>Obs:</u> În cazul unei conice cu centru unic axele sunt chiar axele de simetrie ale acesteia. (i.e simetria ortog. <u>față</u> de o axă invariază conica).

Alegem 2 axe ortogonale ale conicei.

Direcțiile lor sunt date de 2 vectori proprii ortog. ai lui a.

Det. valorile proprii ale lui a, rezolvând ec. caract:

$$P(s)=0 \iff \det(a-sI_2)=0 \iff \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-s \end{vmatrix}=0$$

$$s^2-\underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{I}s+\underbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}_{\delta}=0$$

$$\iff s^2-Is+\delta=0$$

↳ ec. seculară

<u>Obs:</u> $\Delta_s \geq 0$ $\left[\Delta_s=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geq 0\right.$

Fie s_1, s_2 cele 2 răd. reale ale ec. noastre $\Rightarrow \begin{cases} s_1+s_2=I \;(=a_{11}+a_{22}) \\ s_1s_2=\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \end{cases}$

Fie $f_i=(l_i,m_i),\ i=\overline{1,2}$ → 2 vectori proprii <u>unitari</u> ortogonali coresp. val. proprii s_1,s_2

Efectuăm transf. ortog. r (rotație) $\begin{cases} x''=l_1x'+m_1y' \\ y''=l_2x'+m_2y' \end{cases} \to \begin{cases} x'=l_1x''+l_2y'' \\ y'=m_1x''+m_2y'' \end{cases}$

r (1) sau sim. ortog. s (−1)

$R=\begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix}$, ${}^tR\cdot R=I_2 \Rightarrow R^{-1}={}^tR$

$(r\circ t)(\gamma)$: $s_1x''^2+s_2y''^2+\dfrac{\Delta}{\delta}=0$

$(l_1,m_1)\to(1,0)$
$(l_2,m_2)\to(0,1)$
{Axele conicei sunt aplicate peste axele reperului}

C10

Avem cazurile:

a) $\Delta = 0$ $\boxed{\delta = s_1 s_2}$

$s_1 x''^2 + s_2 y''^2 = 0$

$a_1)$ $s_1, s_2 > 0 \Rightarrow \delta > 0 \rightarrow \gamma$ se reduce la un pct.
$(s_1, s_2 < 0)$

$a_2)$ $s_1 > 0, s_2 < 0 \Rightarrow \delta < 0 \rightarrow \gamma$ reprezintă 2 dr. concurente
$(s_1 < 0, s_2 > 0)$

b) $\Delta \neq 0$

$b_1)$ $s_1, s_2 > 0 \Rightarrow \delta > 0 \rightarrow \gamma$ este o ELIPSĂ
$(s_1, s_2 < 0)$

$b_2)$ $s_1 > 0, s_2 < 0 \Rightarrow \delta < 0 \rightarrow \gamma$ este o HIPERBOLĂ
$(s_1 < 0, s_2 > 0)$

Recapitulare:

a) $\Delta = 0$ $\begin{cases} \delta > 0 \rightarrow \gamma \text{ pct} \\ \delta < 0 \rightarrow \gamma \text{ 2 dr. concurente} \end{cases}$

b) $\Delta \neq 0$ $\begin{cases} \delta > 0 \rightarrow \gamma \text{ elipsă} \begin{cases} \text{reală}: I\Delta < 0 \\ \text{imaginară } I\Delta > 0 \end{cases} \\ \delta < 0 \rightarrow \gamma \text{ hiperbolă} \end{cases}$

Obs: r, r', δ, Δ, I - invarianți metrici ai conicei (i.e nu depind de reperul ales, conservându-se la efectuarea de izometrii)

II $\delta = 0$ (conica nu are centru unic) $\rightarrow$ tip parabolă

$\left.\begin{array}{l} rg\, a \geq 1 \\ \det a = \delta = 0 = s_1 s_2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} s_1 \neq 0 \\ s_2 = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 \neq 0 \end{cases}$

Pp. $s_1 \neq 0$ și $s_2 = 0$.
În acest caz, aplicăm întâi izometria r (rotația) și obținem:

$r(\gamma): s_1 x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$

Obs: $\Delta = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & a'_{13} \\ 0 & 0 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -s_1 a'^2_{23}$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a'_{23} = 0$

Efectuăm translație t $\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{a'_{13}}{S_1} \\ y'' = y' \end{cases}$

$$(t\circ r)(\gamma):\ S_1 x''^2 + 2a'_{23}y'' + \underbrace{a_{33} - \frac{a'^2_{13}}{S_1}}_{c} = 0$$

$$S_1 x''^2 + 2a'_{23}y'' + c = 0$$

a) $\Delta = 0 \Leftrightarrow a'_{23} = 0$

$(t\circ r)(\gamma):\ S_1 x''^2 + c = 0 \to \gamma$ e ϕ sau o pereche de dr. ‖.

b) $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a'_{23} \neq 0$

$$S_1 x''^2 + 2a'_{23}\left(y'' + \frac{c}{2a'_{23}}\right) = 0$$

$$\tau \begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = y'' + \dfrac{c}{2a'_{23}} \end{cases}$$

$(\tau\circ t\circ r)(\gamma):\ S_1 x'''^2 + 2a'_{23}y''' = 0,\ a'_{23} \neq 0$

$$x'''^2 = -2\frac{a'_{23}}{S_1}y''' \qquad \text{Avem } \begin{cases} I = S_1 \\ \Delta = -S_1 a'^2_{23} \end{cases}$$

$$p = -\frac{a'_{23}}{S_1} \qquad \Rightarrow (a'_{23})^2 = \frac{-\Delta}{I}$$

$$\Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}}$$

$x'''^2 = 2py''' \to \gamma$ parabolă

Deci: $\delta = 0 \begin{cases} \Delta = 0 \to \phi \text{ sau } 2 \text{ dr. } \parallel \\ \Delta \neq 0 \to \text{parabolă} \end{cases}$

Concluzie:

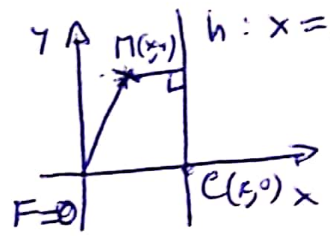
Th: Orice conică din planul geometric poate fi adusă la o formă canonică prin sch. izometrice de reper.

Def. unitară a conicelor nedegenerate

Th. Locul geometric al pct. din planul euclidian pt. care raportul dist. la un pct. fix (F-focar) și la o dr. fixă (h-directoare) $F \notin h$ este o constantă $e \in (0, \infty)$ (excentricitate) este o conică nedeg.

Dacă: $\begin{cases} 1)\ e \in (0,1) \rightarrow \text{ELIPSĂ} \\ 2)\ e = 1 \rightarrow \text{PARABOLĂ} \\ 3)\ e \in (1, +\infty) \rightarrow \text{HIPERBOLĂ} \end{cases}$

Dem: Alegem un reper a.î. F este originea și axa absciselor este $\perp$ h din F.



$h : x = \underbrace{c}_{\text{const. dată}} \ (c \neq 0)$

$$\frac{d(M,F)}{d(M,h)} = e \Rightarrow d(M,F) = e\, d(M,h)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = e|x-c|$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = e^2(x-c)^2 \Rightarrow \underbrace{(1-e^2)x^2+y^2+2e^2cx-e^2c^2}_{f(x,y)} = 0$$

γ $\boxed{\text{conică}}$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-e^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 & e^2c \\ 0 & 1 & 0 \\ e^2c & 0 & -e^2c^2 \end{vmatrix} = (e^2-1)e^2c^2 - e^4c^2 = -e^2c^2 \neq 0$$

$\Rightarrow \gamma$ − conică nedegenerată.

1) $\delta > 0 \Leftrightarrow 1-e^2 > 0 \Leftrightarrow e \in (0,1) \rightarrow \gamma$ elipsă

2) $\delta = 0 \Leftrightarrow 1-e^2 = 0 \Rightarrow e = 1 \rightarrow \gamma$ parabolă

3) $\delta < 0 \Leftrightarrow 1-e^2 < 0 \Rightarrow e \in (1,\infty) \rightarrow \gamma$ hiperbolă. q.e.d.

Obs: $\boxed{e = \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ (E) $c^2 = a^2-b^2$ $(0<c<a)$

$\boxed{e = \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ (H) $c^2 = a^2+b^2$ $\left(0<a<c,\ b^2=c^2-a^2\right)$

Obs! Cel de-al doilea focar al parabolei este la ∞.

Scanned with CamScanner

$n=2$ Clasificarea izometrică a conicelor:

rg A	rg a	Ec. canonică	Denumirea conicei
3	2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\rightarrow$ elipsă
		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\rightarrow$ hiperbolă
		$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\rightarrow$ elipsă imaginară (ϕ)
3	1	$x^2=2py$	$\rightarrow$ parabolă
2	2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$\rightarrow$ pct. dublu
		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$\rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$ 2 dr. concurente
2	1	$\frac{x^2}{a^2}-1=0$	$\rightarrow x=\pm a$ 2 dr. paralele
		$-\frac{x^2}{a^2}-1=0$	$\longrightarrow$ 2 dr. vide (ϕ)
1	1	$\frac{x^2}{a^2}=0$	$\longrightarrow x=0$ dr. dublă

Conice
(pe ecuaţia redusă)

Voi începe prin a enumera conicele şi în primul rând cele ce pot fi descrise ca locuri geometrice.

Elipsa se defineşte ca fiind locul geometric al punctelor din plan ce au suma distanţelor la două puncte fixate (numite focare, notate în figura de mai jos cu F_1 şi F_2) constantă. Notăm constanta cu $2a$. Ecuaţia elipsei ce rezultă din această definiţie este $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Trecem radicalul ce conţine $(x-c)^2$ în membrul drept, ridicăm la pătrat, reducem termenii asemenea şi obţinem $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Ridicăm din nou la pătrat, reducem termenii asemenea şi ajungem la ecuaţia $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Avem $a>c>0$ şi facem notaţia $b^2=a^2-c^2>0$. Cu această notaţie ecuaţia devine $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Împărţind cu a^2b^2 obţinem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia redusă* a elipsei. În figura de mai jos avem o elipsă orizontală cu $a>b$. Semiaxa majoră, mai lungă, de lungime a, este pe Ox. Semiaxa minoră, mai scurtă, este de lungime b şi este pe axa Oy. În afară de elipsă, punctat, am figurat şi dreptunghiul de laturi $2a$ şi $2b$, centrat în $O(0,0)$, dreptunghi în care înscriem elipsa. Cantitatea $0<e=\frac{c}{a}<1$ se numeşte *excentricitatea elipsei*. Elipsa este o conică cu centru.

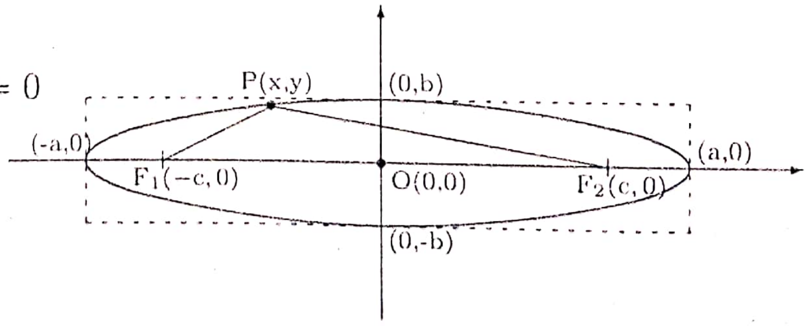
Elipsa

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

centru: O(0,0)

lungime semiaxe: a, b

$b^2=a^2-c^2, a>c>0$



Cercul este elipsa pentru care focarele F_1 şi F_2 coincid. În acest caz, cele două focare se confundă cu centrul cercului. Deci pentru $c=0$ semiaxele sunt egale şi ecuaţia cercului de centru $O(0,0)$ este $x^2+y^2=r^2$, unde r este raza cercului. Cercul este deci locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fixat, numit centrul cercului.

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferenţa distanţelor la două puncte fixate este constantă. Notăm constanta cu $2a$. Folosind definiţia scriem ecuaţia $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Făcând calcule similare ca şi în cazul elipsei ajungem la relaţia $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$. $c > a > 0$ şi notăm $b^2 = c^2 - a^2$. Împărţind la a^2b^2 obţinem *ecuaţia redusă* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hiperbola are două asimptote, anume dreptele de ecuaţii $y = \pm\frac{b}{a}x$. În figură, în afară de hiperbolă am reprezentat punctat dreptunghiul centrat în $O(0,0)$ de laturi $2a$ şi $2b$, dreptunghi ale cărui diagonale sunt cele două asimptote. Hiperbola este conică cu centru. *Excentricitatea hiperbolei* este $e = \frac{c}{a} > 1$.

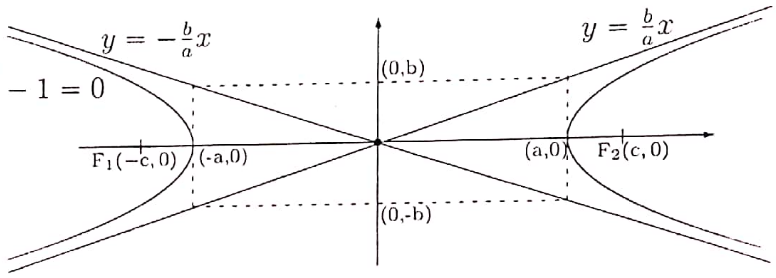
Hiperbola

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

centru: O(0,0)

asimptote: $y = \pm\frac{b}{a}x$

$b^2 = c^2 - a^2, c > a > 0$



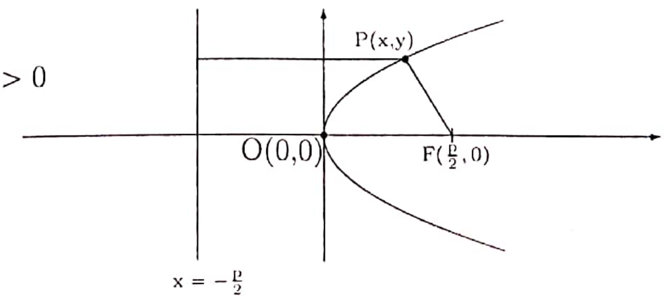
Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fixat numit *focar* şi de o dreaptă fixată, numită *directoare*. Scriind ecuaţia ce reiese din definiţie şi făcând calculele algebrice ca şi în cazurile anterioare obţinem *ecuaţia redusă* $2px = y^2$, sau $2py = x^2$. În primul caz dreapta directoare este verticală, iar în al doilea caz este orizontală. Parabola nu are centru. *Excentricitatea parabolei = 1.*

Parabola

ecuaţie redusă: $2px = y^2, p > 0$

fără centru

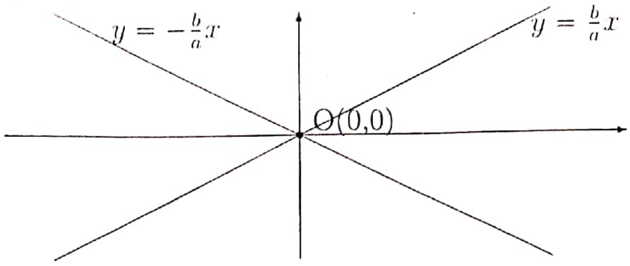
axă de simetrie: $y = 0$



Reuniune de drepte concurente

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)

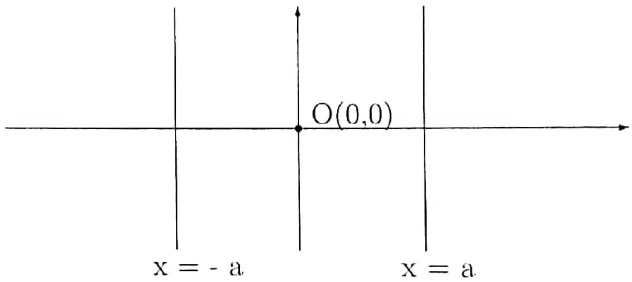


Cele două drepte concurente au ca centru punctul lor de intersecţie, în acest caz, punctul $O(0,0)$.

Reuniune de drepte paralele

ecuaţie redusă: $x^2 - a^2 = 0$

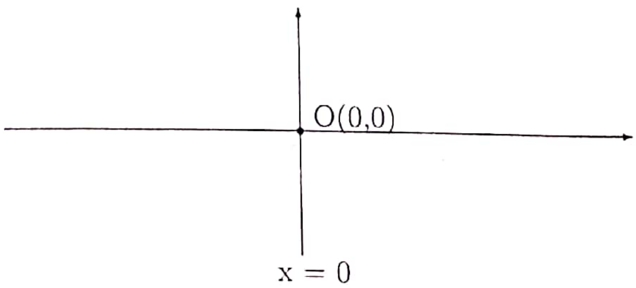
infinitate de centre



Două drepte confundate

ecuaţie redusă: $x^2 = 0$

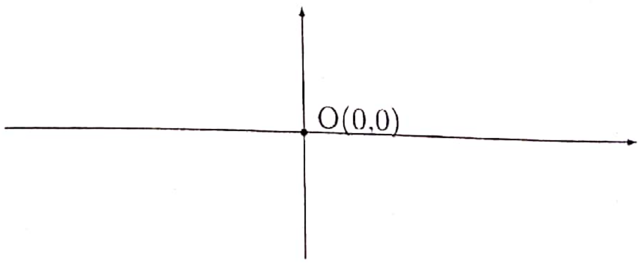
infinitate de centre



Un punct

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)



Mulţimea vidă

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$