Schimbare de reper

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V/_K \to G$ – m. asoc. f.b. g în reperul B

$B' = \{e'_1, \dots, e'_n\} \to G'$ – m. asoc. f.b. g în reperul B'

repere

$$B \xrightarrow[\text{m. de trecere}]{A} B'$$

Avem: $g'_{ij} = g(e'_i, e'_j) = g\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} e_l\right) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} g_{kl}$

$\Rightarrow \boxed{G' = {}^tA\, G\, A}$ $(*)$

$(*) \Rightarrow rg\, G' = rg\, G$

Def: S.n. rangul formei biliniare g, rangul matricei sale asociate într-un reper arbitrar.

Def: $\underbrace{Ker\, g}_{\text{nucleul f.b.s } g} \stackrel{def}{=} \{x \in V \,/\, g(x,y) = 0, (\forall) y \in V\}$

Obs: În cazul unei f.b. arbitrare, se pot defini un nucleu la stânga și unul la dreapta, în general diferite.

Def: O f.b.s. g s.n. nedegenerată dacă $Ker\, g = \{0_V\}$

$\boxed{P}$ O f.b.s. e nedegenerată $\Leftrightarrow$ matricea asociată într-un reper arbitrar e nedegenerată

Forme pătratice

Pp char $K \neq 2$

Def: S.n. forma pătratică pe V o aplicație $Q: V \to K$ cu proprietatea că: $(\exists)\ g: V \times V \to K$ f. b.s. a.î. $Q(x) = g(x,x)$, $(\forall)\ x \in V$

g s.n. forma polară sau forma biliniară simetrică asociată f.p. Q

Avem: $\boxed{g(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right),\ (\forall)\ x,y \in V}$

(identitatea de polarizare)

Obs: Corespondența dintre forme pătratice și forme biliniare simetrice este biunivocă.

Prin definiție, $\operatorname{rang} Q = \operatorname{rang} g$

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ reper vectorial

$Q: V \to K$ formă pătratică

$g: V \times V \to K$ forma biliniară simetrică asociată

Avem: $Q(x) = g(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, x_i x_j$, unde $(x_1, \dots, x_n)$ sunt coord. vect. x în reperul ales.

Matriceal obținem: $Q(x) = {}^t X\, G\, X$

Problemă: Determinarea unui reper în raport cu care matricea f.p. are forma diagonală.

Într-un astfel de reper, expresia f.p. va fi:

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 \text{, unde } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$r = \operatorname{rg} Q$

$\lambda_i \in K, (\forall) i = \overline{1,r}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{forma canonică a lui } Q}$

$\boxed{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$

reper

$\downarrow$

reper canonic

<u>T (Gauss)</u>: Orice formă pătratică Q pe un sp. vect. $V/_K$ poate fi redusă printr-o sch. de reper <u>la o formă canonică.</u>

<u>Dem</u>: Folosim metoda inducției matematice după $m \leq n$, unde m este nr. de coordonate de care depinde expresia lui Q într-un reper dat.

Pp. $m = 1$: $Q(x) = a_{11} x_1^2 \Rightarrow$ în reperul considerat Q are o formă canonică cu $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

Deci teorema este adevărată.

Pp. că $a_{11} \neq 0$ și că forma pătratică Q depinde de m coord., $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Punem în evidență termenii care îl conțin pe x_1:

$$Q(x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 a_{1m} x_1 x_m + Q'(x),$$

unde $Q'(x)$ este o formă pătratică în $x_2, \dots, x_m$.

Formăm un pătrat perfect cu termenii ce conțin pe x_1:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\dots+2a_{1m}x_1x_m=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1m}x_m)^2+Q''(x)$$

unde $Q''(x)$ este o formă pătratică ce depinde numai de $x_2,\dots,x_m$

Efectuăm sch. de coordonate:

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1m}x_m\\ y_2=x_2\\ \vdots\\ y_m=x_m\\ \vdots\\ y_n=x_n \end{cases} \Rightarrow Q(x)=\frac{1}{a_{11}}y_1^2+Q'''(x),$$

unde $Q'''(x)$ este o formă pătratică ce depinde numai de $m-1$ variabile $y_2,\dots,y_m$.

Pp. că putem găsi un reper în care orice f.p. în $m-1$ variabile să aibă o formă canonică rezultă că acest fapt va fi posibil și pt. $Q'''(x)$, i.e. $(\exists)$ o schimbare de coordonate:

$$\begin{cases} z_1=y_1\\ z_i=\sum_{j=k}^{m}\alpha_{ij}y_j, & i=\overline{2,m}\\ z_k=y_k, & k=\overline{m+1,n} \end{cases}$$

în urma căreia Q''', deci și Q se reduce la o formă canonică

Obs: Forma canonică a unei f.p <u>nu</u> este unică

În demonstrație, am presupus $a_{11}\neq 0$. Dacă cel puțin un coef. $a_{ii}\neq 0$ cu $i\neq 1$, putem face ca $a_{11}\neq 0$ făcând o renumerotare a coord (ceea ce implică de fapt o sch. de reper).

Dacă $a_{ii}=0$, $(\forall)\, i$, și $a_{ik}\neq 0$, $i\neq k$, facem sch. de coord:

$y_i=x_i+x_k$, $y_k=x_i-x_k$, $y_j=x_j$ ($j\neq i,k$) care conduce în noile coord. la un coef nenul pt. y_i^2, deci cond. $a_{ii}\neq 0$ poate fi întotdeauna îndeplinită. q.e.d.

Considerăm cazul particular $K = \mathbb{R}$:

$\boxed{T}$: Orice formă pătratică Q pe un spațiu vectorial real $V/\mathbb{R}$ (formă pătratică reală) poate fi redusă printr-o sch. de reper la următoarea formă canonică (numită forma normală):

$$Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2, \text{ unde } r = rg\, Q$$

<u>Dem</u>: Conform teoremei Gauss $\Rightarrow (\exists)$ un reper BCV a.î.

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$

<u>Remarcă</u>: r este un invariant deoarece reprezintă rangul matricii asociate formei biliniare polare a lui Q, rang invariant.

$\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$ p.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$ și $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r < 0$
$(\forall) i = \overline{1,r}$

Efectuăm sch. de coordonate:

$$\begin{cases} y_i = \sqrt{\lambda_i}\, x_i, & (\forall)\, i = \overline{1,p} \\ y_j = \sqrt{-\lambda_j}\, x_j, & (\forall)\, j = \overline{p+1,r} \\ y_k = x_k, & (\forall)\, k = \overline{r+1,n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 \quad \text{q.e.d.}$$

În concluzie, aducerea la o formă canonică a unei f. pătratice se poate realiza prin Metoda Gauss care constă în gruparea convenabilă a termenilor formei pătratice în scopul formării de pătrate și are avantajul major de a fi aplicabilă pentru orice formă pătratică.

$\boxed{T}$ (Legea de inerție a lui Sylvester)

Nr. termenilor pozitivi dintr-o formă canonică a unei f.p. reale <u>nu</u> depinde de reperul canonic ales.

<u>Dem:</u> Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\} \longrightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

$\subset V/_{K}$

$B' = \{e'_1, \dots, e'_n\} \longrightarrow Q(x) = y_1^2 + \dots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \dots - y_r^2$

repere canonice

Pp. $p' < p$. Definim subsp:

$$U = \overline{\{e_1, \dots, e_p, e_{r+1}, \dots, e_n\}}$$

$$U' = \overline{\{e'_{p'+1}, \dots, e'_r\}}$$

Avem: $Q(x) \geq 0, \ (\forall)\ x \in U$

$Q(x) < 0, \ (\forall)\ x \in U' \setminus \{0_V\}$

$$\dim U + \dim U' = (p+n-r) + (r-p') = n + p - p' > n$$

$\underset{\text{T. Grassmann}}{\overset{\text{cf.}}{\Longrightarrow}}$ $(\exists)$ cel puțin un vector $x_0 \neq 0_V$, $x_0 \in U \cap U' \Rightarrow \begin{cases} Q(x_0) \geq 0 \\ Q(x_0) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow p' \not< p$

Pp. $p \underset{\longleftrightarrow}{<} p'$ $\Rightarrow$

Deci: $p = p'$ q.e.d.

<u>Obs:</u> Rezultă cf. th. anterioare că și nr. termenilor negativi dintr-o formă canonică a unei f.p. reale este invariant (numit <u>indexul</u> f.p.)

<u>Def:</u> Diferența dintre nr. termenilor pozitivi și nr. termenilor negativi dintr-o f. canonică a unei f.p. reale s.n. <u>SIGNATURA</u> formei pătratice

! <u>Signatura unei forme pătratice reale este un invariant.</u>

Def: Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică reală

Vom spune că:

1) Q este pozitiv definită dacă: $Q(x) > 0$, $(\forall)\ x \in V \setminus \{0_V\}$

2) Q este negativ definită dacă: $Q(x) < 0$, $(\forall)\ x \in V \setminus \{0_V\}$

3) Q este nedefinită dacă: $(\exists)\ x_1, x_2 \in V$ a.î. $Q(x_1) > 0$ și $Q(x_2) < 0$.

Def: Fie o f.b.s reală $g: V \times V \to \mathbb{R}$.

Vom spune că:

1) g s.n. pozitiv definită dacă forma sa pătratică e poz. def.

2) g s.n. negativ definită dacă forma sa pătratică e neg. def.

3) g s.n. nedef. dacă forma sa pătratică e nedefinită.

În încheiere vom prezenta și o altă metodă de reducere la forma canonică, numită metoda Jacobi.

Not: Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A$$

Δ_i, $i = \overline{1,n}$ s.n. minori diagonali principali

<u>T (Jacobi)</u>: Dacă matricea asociată unei forme pătratice reale date $Q : V \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j, \quad g_{ij} = g_{ji}, \ (\forall)\ i,j = \overline{1,n}$$

are toți minorii diagonali principali nenuli, atunci (∃) un reper canonic a.î. Q să aibă forma canonică următoare:

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2,$$

unde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ sunt minorii diagonali principali.