Geometrie si algebra liniara

A) EXERCITII ÎN CLASA ONLINE

1. Determinaţi valorile şi vectorii (subspatiile) proprii corespunzatoari(e) pentru matricele urmatoare:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Stabiliţi dacă matricele de la exerciţiul precedent sunt diagonalizabile şi, în caz afirmativ, precizaţi forma lor diagonală.

3. Considerăm aplicaţia $T : R^3 \to R^3, T(x,y,z) = (x + 2y, 2y, -2y + z)$.

a) Arataţi că T este transformare (aplicatie) liniară.
b) Scrieţi matricea asociata lui T, A_T.
c) Determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzatori(e) lui A_T.
d) Scrieţi subspaţiile proprii corespunzătoare transformării (aplicatiei) liniare T şi stabiliţi dacă aceasta este diagonalizabila.
e) Scrieţi, dacă există, matricea diagonalizatoare C şi matricea diagonală D.

B) **REZOLVĂRI ONLINE**

1. a) Construim polinomul caracteristic, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$.

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Deci, $P(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică, $P(\lambda) = 0$, adică $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$ şi obţinem rădăcinile reale

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 7,$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$: căutăm $v \in R^2$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pentru care $Av = \lambda_1 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a + 4b = -2a \\ 5a + 2b = -2b \end{cases} \Rightarrow 5a + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{4}a, a \in R^*$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{5}{4}a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow v = a'\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = a' v_1,\ a' \in R^*$ este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$.

$V(\lambda_1 = -2) = sp < v_1 >$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 7$: căutăm $v \in R^2$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pentru care $Av = \lambda_2 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a \\ 7b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a + 4b = 7a \\ 5a + 2b = 7b \end{cases} \Rightarrow b = a,\ a \in R^*$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a v_2, a \in R^*$ este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 7$.

$V(\lambda_2 = 7) = sp < v_2 >$.

b) Construim polinomul caracteristic, $P(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_2\right)$.

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Deci, $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică, $P(\lambda) = 0$, de unde obţinem rădăcinile cu multipicitatile algebrice aferente:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$
$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -1$: căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

pentru care $Av = \lambda_1 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = -a \\ b = -b \\ a = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}, \ a \in R^*$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a v_0$, $a \in R^*$ este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -1$.

$V(\lambda_1 = -1) = sp < v_0 >$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 1$: căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

pentru care $Av = \lambda_2 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = a \\ b = b \Rightarrow c = a, \quad (a,b) \in R^2 - \{(0,0)\} \\ a = c \end{cases}$$

Atunci, $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $(a,b)\in R^2-\{(0,0)\}$. Deci vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2=1$ sunt o combinaţie liniară de vectorii $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} si v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

$V(\lambda_2=1)=sp<v_1,v_2>$.

2. Studiem dacă matricea $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$ este diagonalizabilă:

valorile proprii pe care le-am obţinut sunt $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=7$, ambele cu ordin de multiplicitate algebrica egal cu 1 în ecuaţia caracteristică, deci $\mu_1=\mu_2=1$.
Vectorii proprii generează următoarele subspaţii proprii:
$V(\lambda=-2)=sp<v_1>\Rightarrow \dim V(\lambda=-2)=1=\mu_1$
$V(\lambda=7)=sp<v_2>\Rightarrow \dim V(\lambda=7)=1=\mu_2$

Deci, A este diagonalizabila şi forma ei diagonală este

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&7\end{pmatrix}$$

Pentru matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, valorile proprii sunt

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,$$

cu ordinele de multiplicitate $\mu_1=\mu(\lambda=-1)=1$ şi $\mu_2=\mu(\lambda=1)=2$. Vectorii proprii generează următoarele subspaţii proprii:

$$V(\lambda=-1)=sp<v_0>\Rightarrow \dim V(\lambda=-1)=1=\mu_1$$

Pentru $V(\lambda=1)=sp<v_1,v_2>$, dimensiunea o vom putea determina abia după ce vom studia liniar independenţa vectorilor v_1,v_2. Fie B matricea construită cu acesti doi vectori, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Un calcul simplu arată ca ea are rangul 2, egal cu numărul de vectori din care a fost construită. Deci, v_1,v_2 sunt liniar independenţi şi deci $\dim V(\lambda=1)=2=\mu_2$.
Prin urmare, şi pentru cazul b) de la exerciţiul 1, matricea A este diagonalizabilă.
Forma ei diagonală este:

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3. a) Arătăm că T este transformare (aplicatie) liniară.

Fie $v_1, v_2 \in R^3$ şi fie $\alpha, \beta \in R$. Arătăm că

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$$

$$v_1, v_2 \in R^3 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ v_2 = (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha v_1, + \beta v_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$T(\alpha v_1, + \beta v_2) = \alpha(x_1 + 2y_1, 2y_1, -2y_1 + z_1) +$$

$$+ \beta(x_2 + 2y_2, 2y_2, -2y_2 + z_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(\beta v_2)$$

Deci, aplicaţia T este aplicaţie liniară.

b) Matricea asociată aplicaţiei T in raport cu baza canonica din R^3 este $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculăm valorile şi vectorii (subspatiile) proprii corespunzatori(e) lui A_T.

Construim polinomul caracteristic, $P(\lambda) = \det(A_T - \lambda I_2)$

$$A_T - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Deci, $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică, $P(\lambda) = 0$, de unde obţinem rădăcinile reale:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A, cu ordinele de multiplicitate algebrica $\mu_1(\lambda = 1) = 2$ şi $\mu_2(\lambda = 2) = 1$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$: căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

pentru care $A_T v = \lambda_1 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b \\ 2b \\ -2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = a \\ 2b = b \\ -2b + c = c \end{cases} \Rightarrow b = 0, (a,c) \in R^2 - \{(0,0)\}$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(a,c) \in R^2 - \{(0,0)\}$

Deci, vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$ sunt o combinaţie liniară de vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$: căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, pentru care $A_T v = \lambda_2 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b \\ 2b \\ -2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ b \in R^* \\ c = -2b \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ -2b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b v_3, b \in R, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$.

d) Subspaţiile proprii sunt: $V(\lambda_1 = 1) = sp < v_1, v_2 >$ şi $V(\lambda_2 = 2) = sp < v_3 >$.

Evident, $\dim V(\lambda_2 = 2) = \dim sp < v_3 > = 1 = \mu(\lambda_2 = 2)$.

Pentru a determina $\dim V(\lambda_1 = 1)$, studiem liniar independenţa vectorilor v_1 şi v_2.

Matricea construită cu ajutorul acestor doi vectori este $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi are rangul doi, egal cu numărul de vectori din care a fost construită.

Atunci, $\dim V(\lambda_1 = 1) = 2 = \mu(\lambda_1 = 1)$.

Prin urmare, matricea A_T şi implicit transformarea (aplicatia) liniara T sunt diagonalizabile.

Matricea diagonală este $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, iar matricea diagonalizatoare este

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Apl. 1}}$ Considerăm transf. liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x - y + 2z, -x + 2y - z, x + y + z),$$
$$(\forall)\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Scrieți matricea asociată lui f în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) Determinați valorile proprii și subsp. proprii coresp.

c) Verificați dacă f este diagonalizabilă.

d) În caz afirmativ, scrieți matricea (forma) diagonală și baza în care se realizează.

<u>Rez</u>: a)
$$A_f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \ \ f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3) \end{array} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

b) Polinomul caracteristic:
$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Ec. caracteristică: $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \underline{\in \mathbb{R}} \quad \underline{\text{valorile proprii}} \quad Spec(f) = \{0, 2, 3\}$$

şi $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$

{multiplicitățile algebrice}

Subspații proprii:

$$S'_\lambda : \begin{cases} (2-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ -x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$\underset{\{\lambda_1 = 0\}}{S'_{\lambda_1}} : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ sistem liniar omogen, cu 3 ec. și 3 nec.

$$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$$ x, y nec principale; $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ nec. secundară

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -2\alpha \mid \cdot 2 \\ -x + 2y = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ \boxed{z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

Deci: $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \underbrace{(-1, 0, 1)}_{\substack{\text{not} \\ v_1}} / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Analog, rezolvând sistemele S'_{λ_2} și S'_{λ_3} vom obține

$$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(1, -2, 1)}_{\substack{\text{not} \\ v_2}} / \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1, -1, 0)}_{\substack{\text{not} \\ v_3}} / \gamma \in \mathbb{R}\}$$