Introducere în R

Obiectivul acestui laborator este de a prezenta o scurtă introducere în programul R (cu ajutorul interfeței grafice RStudio). O descriere detaliată a acestui program precum și versiunile disponibile pentru descărcat se găsesc pe site-ul www.r-project.org. Pentru mai multe detalii se pot consulta [Davies, 2016] sau [Matloff, 2011].

1 Introducere

Programul R este un program gratuit destinat, cu precădere, analizei statistice și prezintă o serie de avantaje:

- rulează aproape pe toate platformele și sistemele de operare
- permite folosirea metodelor statistice clasice cu ajutorul unor funcții predefinite
- este adoptat ca limbaj de analiză statistică în majoritatea domeniilor aplicate
- prezintă capabilități grafice deosebite
- permite utilizarea tehnicilor statistice de ultimă oră prin intermediul pachetelor dezvoltate de comunitate (în prezent sunt mai mult de 10000 de pachete)
- are o comunitate foarte activă și în continuă creștere

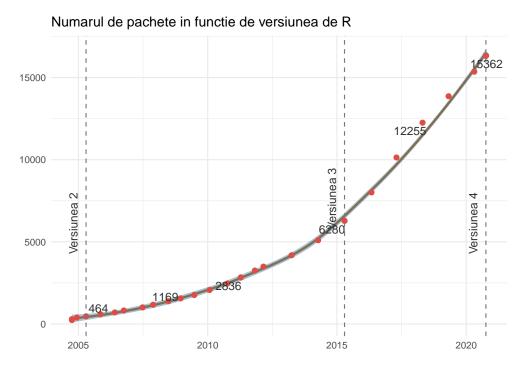


Fig. 1: Numarul de pachete din R

1.1 Interfața RStudio

Interfața RStudio (vezi Figura 1) este compusă din patru ferestre:

- Fereastra de editare (stânga sus): în această fereastră apar fișierele, de tip script, în care utilizatorul dezvoltă propriile funcții ori script-uri.
- Fereastra de comandă sau consola (stânga jos): în această fereastră sunt executate comenzile R
- Fereastra cu spațiul de lucru/istoricul (dreapta sus): conține obiectele definite în memorie și istoricul comenzilor folosite
- Fereastra de explorare (dreapta jos): în această fereastră ne putem deplasa în interiorul repertoriului (tab-ul Files), putem vedea graficele trasate (tab-ul Plots) dar și pachetele instalate (tab-ul Packages). De asemenea, tot în această fereastră putem să și căutăm documentația despre diferite funcții, folosind fereastra de ajutor (tab-ul Help).

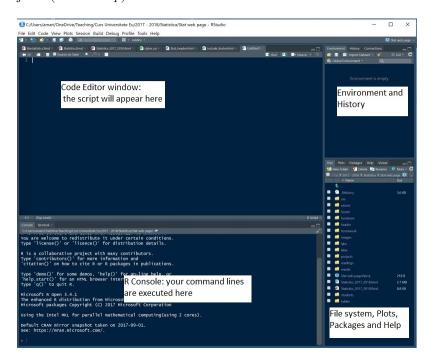


Fig. 2: Interfata RStudio

1.2 Pachetele ajutătoare

Pe lângă diferitele pachete conținute în versiunea de bază a programului R se mai pot instala și pachete suplimentare. Pentru a instala un pachet suplimentar se apelează comanda:

```
install.packages("nume pachet")
```

Odată ce pachetul este instalat, pentru a încărca pachetul, și prin urmare funcțiile disponibile în acesta, se apelează comanda:

```
library("nume pachet")
```

Instalarea unui pachet se face o singură dată dar încărcarea acestuia trebuie făcută de fiecare dată când lansăm o sesiune nouă.

2 Primele comenzi în R

2.1 Calcul elementar

Programul R poate fi folosit și pe post de calculator (mai avansat). De exemplu putem face calcule elementare

```
5 - 1 + 10

[1] 14

7 * 10 / 2

[1] 35

exp(-2.19)

[1] 0.1119167

pi

[1] 3.141593

sin(2 * pi/3)

[1] 0.8660254
```

De asemenea, rezultatele pot fi stocate într-o variabilă

```
a = (1+sqrt(5)/2)/2
```

păstrată în memorie (a apare în fereastra de lucru - Environment) și care poate fi reutilizată ulterior

```
asq = sqrt(a)
asq
[1] 1.029086
```

Operațiile binare în R sunt date în tabelul de mai jos:

Tab. 1: Operatii binare in R

Operatorul	Descriere
+	Adunare
_	Scădere
*	\hat{I} nmulțire
/	Împărțire
^ or **	Exponențiere
%/%	Câtul împărțirii
%%	Restul împărțirii

Pentru a șterge toate variabilele din memorie trebuie să folosim comanda următoare (funcția ls() listează numele obiectelor din memorie iar comanda rm() șterge obiectele; de asemenea se poate folosi și comanda ls.str() pentru a lista obiectele împreună cu o scurtă descriere a lor)

```
ls.str()
rm(list = ls())
```

2.2 Folosirea documentației

Funcția help() și operatorul de ajutor ? ne permite accesul la paginile de documentația pentru funcțiile, seturile de date și alte obiecte din R. Pentru a accesa documentația pentru funcția standard mean() putem să folosim comanda help(mean) sau ?mean în consolă. Pentru a accesa documentația unei funcții dintr-un pachet care nu este în prezent încărcat (dar este instalat) trebuie să adăugăm în plus numele pachetului, de exemplu help(rlm, package = "MASS") iar pentru a accesa documentația întregului pachet putem folosi comanda help(package = "MASS").

O altă funcție de căutare des utilizată, în special în situația în care nu știm cu exactitate numele obiectului pe care îl căutăm, este funcția apropos(). Aceasta permite căutarea obiectelor (inclusiv funcții), disponibile în pachetele încărcate în sesiunea curentă, după un șir de caractere specificat (se pot folosi și expresii regulate). De exemplu dacă apelăm apropos ("mean") vom obține toate funcțiile care conțin sirul de caractere mean.

Următorul tabel prezintă funcțiile de ajutor, cel mai des utilizate:

Tab. 2: Functii folosite pentru ajutor

Funcție	Acțiune
help.start()	Modul de ajutor general
help("nume") sau ?nume	Documentație privind funcția <i>nume</i> (ghilimelele sunt opționale)
help.search(nume) sau ??nume	Caută sistemul de documentație pentru instanțe în care apare șirul de caractere <i>nume</i>
<pre>example("nume")</pre>	Exemple de utilizare ale funcției nume
RSiteSearch("nume")	Caută șirul de caractere <i>nume</i> în manualele online și în arhivă
<pre>apropos("nume", mode = "functions")</pre>	Listează toate funcțiile care conțin șirul $nume$ în numele lor
data()	Listează toate seturile de date disponibile în pachetele încărcate
<pre>vignette()</pre>	Listează toate vinietele disponibile
vignette("nume")	Afișează vinietele corespunzătoare topicului $nume$

Documentații online:

Tab. 3: O serie de link-uri utile

CheatSheet	Link
R de bază	https://cran.r-project.org/doc/contrib/Short-refcard.pdf
Noțiuni de R avansat	https://www.rstudio.com/wp-
	content/uploads/2016/02/advancedR.pdf
Noțiuni de R de bază	http://github.com/rstudio/cheatsheets/raw/master/base-r.pdf
Manipularea șirurilor de caractere	https://github.com/rstudio/cheatsheets/raw/master/strings.pdf
Importarea datelor	https://github.com/rstudio/cheatsheets/raw/master/data-
	import.pdf
Transformarea datelor	https://github.com/rstudio/cheatsheets/raw/master/data-
	import.pdf
RStudio	https://github.com/rstudio/cheatsheets/raw/master/rstudio-
	ide.pdf
Pachetul ggplot2	https://github.com/rstudio/cheatsheets/raw/master/data-
	visualization-2.1.pdf
Pachetul RMarkdown	https://www.rstudio.com/wp-
	content/uploads/2015/03/rmarkdown-reference.pdf

3 Tipuri și structuri de date

R are cinci tipuri de date principale (atomi), după cum urmează:

- character: "a", "swc"numeric: 2, 15.5
- integer: 2L (sufix-ul L îi spune R-ului să stocheze numărul ca pe un întreg)
- logical: TRUE, FALSE
- complex: 1+4i (numere complexe)

R pune la dispoziție mai multe funcții cu ajutorul cărora se pot examina trăsăturile vectorilor sau a altor obiecte, cum ar fi de exemplu

- class() ce tip de obiect este
- typeof() care este tipul de date al obiectului
- length() care este lungimea obiectului
- attributes() care sunt atributele obiectului (metadata)

```
# Exemplu
x <- "curs probabilitati si statistica"
typeof(x)
[1] "character"
attributes(x)
NULL
y <- 1:10
 [1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
typeof(y)
[1] "integer"
length(y)
[1] 10
z <- as.numeric(y)</pre>
 [1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
typeof(z)
[1] "double"
```

În limbajul R regăsim mai multe structuri de date. Printre acestea enumerăm

- vectorii (structuri atomice)
- listele
- matricele
- data frame
- factori

3.1 Scalari și vectori

Cel mai de bază tip de obiect în R este vectorul. Una dintre regulile principale ale vectorilor este că aceștia pot conține numai obiecte de același tip, cu alte cuvinte putem avea doar vectori de tip caracter, numeric, logic, etc.. În cazul în care încercăm să combinăm diferite tipuri de date, acestea vor fi forțate la tipul cel mai flexibil. Tipurile de la cel mai putin la cele mai flexibile sunt: logice, întregi, numerice si caractere.

3.1.1 Metode de construcție a vectorilor

Putem crea vectori fără elemente (empty) cu ajutorul funcției vector(), modul default este logical dar acesta se poate schimba în funcție de necesitate.

```
vector() # vector logic gol
logical(0)
vector("character", length = 5) # vector de caractere cu 5 elemente
[1] "" "" "" "" ""
character(5) # acelasi lucru dar in mod direct
[1] "" "" "" "" ""
numeric(5) # vector numeric cu 5 elemente
[1] 0 0 0 0 0
logical(5) # vector logic cu 5 elemente
[1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

Putem crea vectori specificând în mod direct conținutul acestora. Pentru aceasta folosim funcția c() de concatenare:

```
x <- c(0.5, 0.6)  ## numeric
x <- c(TRUE, FALSE)  ## logical
x <- c(T, F)  ## logical
x <- c("a", "b", "c")  ## character
x <- 9:29  ## integer
x <- c(1+0i, 2+4i)  ## complex</pre>
```

Funcția poate fi folosită de asemenea și pentru (combinarea) adăugarea de elemente la un vector

```
z <- c("Sandra", "Traian", "Ionel")
z <- c(z, "Ana")
z
[1] "Sandra" "Traian" "Ionel" "Ana"
z <- c("George", z)
z
[1] "George" "Sandra" "Traian" "Ionel" "Ana"</pre>
```

O altă funcție des folosită în crearea vectorilor, în special a celor care au repetiții, este funcția rep(). Pentru a vedea documentația acestei funcții apelați help(rep). De exemplu, pentru a crea un vector de lungime 5 cu elemente de 0 este suficient să scriem

```
rep(0, 5)
[1] 0 0 0 0 0
```

Dacă în plus vrem să creăm vectorul 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3 sau 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3 atunci

```
rep(c(1,2,3), 5)
[1] 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3

rep(c(1,2,3), each = 5)
[1] 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3
```

Ce se întâmplă dacă apelăm rep(c(1,2,3), 1:3)?

În cazul în care vrem să creăm un vector care are elementele egal depărtate între ele, de exemplu 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, atunci putem folosi funcția seq():

```
seq(1, 10, 1)
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1:10 # acelasi rezultat
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
seq(1, 10, length.out = 15)
```

```
[1] 1.000000 1.642857 2.285714 2.928571 3.571429 4.214286 4.857143
[8] 5.500000 6.142857 6.785714 7.428571 8.071429 8.714286 9.357143
[15] 10.000000
```

Tab. 4: Functii utile pentru crearea unui vector

Function	Example	Result
c(a, b,) a:b seq(from, to, by, length.out) rep(x, times, each, length.out)	c(1, 5, 9) 1:5 seq(from = 0, to = 6, by = 2) rep(c(7, 8), times = 2, each = 2)	1, 5, 9 1, 2, 3, 4, 5 0, 2, 4, 6 7, 7, 8, 8, 7, 7, 8, 8

3.1.2 Operații cu vectori

Operațiile elementare pe care le puteam face cu scalari (adunarea +, scăderea -, înmulțirea *, împărțirea / și ridicarea la putere ^) putem să le facem și cu vectori (între vectori sau între vectori și scalari).

```
b = c(5,5,6,7)
a+b # adunarea
[1] 6 7 9 11
a+10 # adunarea cu scalari
[1] 11 12 13 14
a-b # scaderea
[1] -4 -3 -3 -3
a-15 # scaderea cu scalari
[1] -14 -13 -12 -11
a*b # inmultirea
[1] 5 10 18 28
a*3 # inmultirea cu scalari
[1] 3 6 9 12
a/b # impartirea
[1] 0.2000000 0.4000000 0.5000000 0.5714286
a/100 # impartirea la scalari
[1] 0.01 0.02 0.03 0.04
a^b # ridicarea la putere
                 729 16384
       1
            32
a^7 # ridicarea la putere cu scalari
    1
          128 2187 16384
```

Observăm că atunci când facem o operație cu scalar, se aplică scalarul la fiecare element al vectorului.

Funcțiile elementare, exp(), log(), sin(), cos(), tan(), asin(), acos(), atan(), etc. sunt funcții vectoriale în R, prin urmare pot fi aplicate unor vectori.

```
x = seq(0, 2*pi, length.out = 20)
exp(x)
```

```
[1]
      1.000000
                            1.937480
                 1.391934
                                        2.696843
                                                  3.753827
                                                             5.225078
 [7]
      7.272963 10.123483
                          14.091217
                                      19.614041 27.301445
                                                            38.001803
[13]
     52.895992 73.627716 102.484902 142.652193 198.562402 276.385707
[19] 384.710592 535.491656
sin(x)
 [1] 0.000000e+00 3.246995e-01 6.142127e-01 8.371665e-01 9.694003e-01
 [6] 9.965845e-01 9.157733e-01 7.357239e-01 4.759474e-01 1.645946e-01
[11] -1.645946e-01 -4.759474e-01 -7.357239e-01 -9.157733e-01 -9.965845e-01
[16] -9.694003e-01 -8.371665e-01 -6.142127e-01 -3.246995e-01 -2.449213e-16
tan(x)
 [1] 0.000000e+00 3.433004e-01 7.783312e-01 1.530614e+00 3.948911e+00
 [6] -1.206821e+01 -2.279770e+00 -1.086290e+00 -5.411729e-01 -1.668705e-01
     1.668705e-01 5.411729e-01 1.086290e+00 2.279770e+00 1.206821e+01
[16] -3.948911e+00 -1.530614e+00 -7.783312e-01 -3.433004e-01 -2.449294e-16
atan(x)
 [1] 0.0000000 0.3193732 0.5843392 0.7814234 0.9234752 1.0268631 1.1039613
 [8] 1.1630183 1.2094043 1.2466533 1.2771443 1.3025194 1.3239406 1.3422495
[15] 1.3580684 1.3718664 1.3840031 1.3947585 1.4043537 1.4129651
```

Alte funcții utile des întâlnite în manipularea vectorilor numerici sunt: min(), max(), sum(), mean(), sd(), length(), round(), ceiling(), floor(), %% (operația modulo), %/% (div), table(), unique(). Pentru mai multe informatii privind modul lor de întrebuintare apelati help(nume functie) sau ?nume functie.

```
length(x)
[1] 20
min(x)
[1] 0
sum(x)
[1] 62.83185
mean(x)
[1] 3.141593
round(x, digits = 4)
[1] 0.0000 0.3307 0.6614 0.9921 1.3228 1.6535 1.9842 2.3149 2.6456 2.9762
[11] 3.3069 3.6376 3.9683 4.2990 4.6297 4.9604 5.2911 5.6218 5.9525 6.2832
y = c("M", "M", "F", "F", "F", "M", "F", "M", "F")
unique(y)
[1] "M" "F"
table(y)
У
F M
5 4
```

3.1.3 Metode de indexare a vectorilor

Sunt multe situațiile în care nu vrem să efectuăm operații pe întreg vectorul ci pe o submulțime de valori ale lui selecționate în funcție de anumite proprietăți. Putem, de exemplu, să ne dorim să accesăm al 2-lea element al vectorului sau toate elementele mai mari decât o anumită valoare. Pentru aceasta vom folosi operatia de *indexare* folosind parantezele pătrate [].

În general, sunt două tehnici principale de indexare: indexarea numerică și indexarea logică.

Atunci când folosim indexarea numerică, inserăm între parantezele pătrate un vector numeric ce corespunde elementelor pe care vrem să le accesăm sub forma x[index] (x este vectorul inițial iar index este vectorul de indici):

```
x = seq(1, 10, length.out = 21) # vectorul initial

x[1] # accesam primul element
[1] 1
x[c(2,5,9)] # accesam elementul de pe pozitia 2, 5 si 9
[1] 1.45 2.80 4.60
x[4:10] # accesam toate elementele deintre pozitiile 4 si 9
[1] 2.35 2.80 3.25 3.70 4.15 4.60 5.05
```

Putem folosi orice vector de indici atât timp cât el conține numere întregi. Putem să accesăm elementele vectorului x si de mai multe ori:

```
x[c(1,1,2,2)]
[1] 1.00 1.00 1.45 1.45
```

De asemenea dacă vrem să afișăm toate elementele mai puțin elementul de pe poziția i atunci putem folosi indexare cu numere negative (această metodă este folositoare și în cazul în care vrem să ștergem un element al vectorului):

```
x[-5] # toate elementele mai putin cel de pe pozitia 5

[1] 1.00 1.45 1.90 2.35 3.25 3.70 4.15 4.60 5.05 5.50 5.95 6.40

[13] 6.85 7.30 7.75 8.20 8.65 9.10 9.55 10.00

x[-(1:3)] # toate elementele mai putin primele 3

[1] 2.35 2.80 3.25 3.70 4.15 4.60 5.05 5.50 5.95 6.40 6.85 7.30

[13] 7.75 8.20 8.65 9.10 9.55 10.00

x = x[-10] # vectorul x fara elementul de pe pozitia a 10-a
```

A doua modilitate de indexare este cu ajutorul vectorilor logici. Atunci când indexăm cu un vector logic acesta trebuie să aibă aceeași lungime ca și vectorul pe care vrem să îl indexăm.

Să presupunem că vrem să extragem din vectorul x doar elementele care verifică o anumită proprietate, spre exemplu sunt mai mari decât 3, atunci:

Pentru a determina care sunt toate elementele din $\mathbf x$ cuprinse între 5 și 19 putem să folosim operații cu operatori logici:

```
x[(x>5)&(x<19)]
[1] 5.50 5.95 6.40 6.85 7.30 7.75 8.20 8.65 9.10 9.55 10.00
```

O listă a operatorilor logici din R se găsește în tabelul următor:

Tab. 5: Operatori logici

Operator	Descriere
==	Egal
! =	Diferit
<	Mai mic
<=	Mai mic sau egal
>	Mai mare
>=	Mai mare sau egal

Operator	Descriere
sau & sau &&	Sau (primul are valori vectoriale al doilea scalare) Și (primul are valori vectoriale al doilea scalare)
!	Negație
%in%	În mulțimea

```
x = seq(1,10,length.out = 8)
x == 3
[1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
x != 3
x \le 8.6
[1] TRUE TRUE TRUE TRUE
                      TRUE
                           TRUE FALSE FALSE
(x<8) & (x>2)
                          TRUE FALSE FALSE
[1] FALSE TRUE
            TRUE
                 TRUE
                      TRUE
(x<8) && (x>2)
[1] FALSE
(x<7) | (x>3)
(x<7) | | (x>3)
[1] TRUE
x \%in\% c(1,9)
[1] TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
```



Să presupunem că am înregistrat în fiecare zi, pe parcursul a 4 săptămâni (de Luni până Duminică), numărul de minute petrecute la telefonul mobil (convorbiri + utilizare) și am obținut următoarele valori: 106, 123, 123, 111, 125, 113, 130, 113, 114, 100, 120, 130, 118, 114, 127, 112, 121, 114, 120, 119, 127, 114, 108, 127, 131, 157, 102, 133. Ne întrebăm: care sunt zilele din săptămână în care am vorbit cel mai mult? dar cel mai puțin? dar zilele în care am vorbit mai mult de 120 de minute?

3.2 Matrice

Matricele sunt structuri de date care extind vectorii și sunt folosite la representarea datelor de același tip în două dimensiuni. Matricele sunt similare tablourilor din Excel și pot fi văzute ca vectori cu două atribute suplimentare: numărul de linii (rows) și numărul de coloane (columns).

Indexarea liniilor și a coloanelor pentru o matrice începe cu 1. De exemplu, elementul din colțul din stânga sus al unei matrice este notat cu x[1,1]. De asemenea este important de menționat că stocarea (internă) a metricelor se face pe coloane în sensul că prima oară este stocată coloana 1, apoi coloana 2, etc..

Există mai multe moduri de creare a unei matrici în R. Funcțiile cele mai uzuale sunt prezentate în tabelul de mai jos. Cum matricele sunt combinații de vectori, fiecare funcție primește ca argument unul sau mai mulți vectori (toți de același tip) și ne întoarce o matrice.

Tab. 6: Functii care permit crearea matricelor

Funcție	Descriere	Exemple
cbind(a, b, c)	Combină vectorii ca și coloane într-o matrice	cbind(1:5, 6:10, 11:15)
rbind(a, b, c)	Combină vectorii ca și linii într-o matrice	rbind(1:5, 6:10, 11:15)

Funcție	Descriere	Exemple
matrix(x, nrow, ncol, byrow)	Crează o matrice dintr-un vector \mathbf{x}	matrix(x = 1:12, nrow = 3, ncol = 4)

Pentru a vedea ce obținem atunci când folosim funcțiile $\mathtt{cbind}()$ și $\mathtt{rbind}()$ să considerăm exemplele următoare:

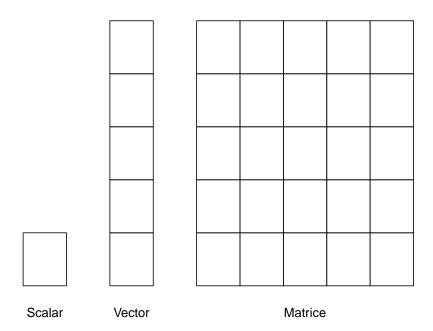


Fig. 3: Scalari, Vectori, Matrice

```
x <- 1:5
y <- 6:10
z <- 11:15
# Cream o matrice cu x, y si z ca si coloane
cbind(x, y, z)
    x y z
[1,] 1 6 11
[2,] 2 7 12
[3,] 3 8 13
[4,] 4 9 14
[5,] 5 10 15
# Cream o matrice in care x, y si z sunt linii
rbind(x, y, z)
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
    1
       2
              3
                 4 5
Х
         7
              8
                   9
У
    6
                      10
   11
        12
            13
                 14
                       15
z
```

Funcția matrix() crează o matrice plecând de la un singur vector. Funcția are patru valori de intrare: data — un vector cu date, nrow — numărul de linii pe care le vrem în matrice, ncol — numărul de coloane pe care să le aibe matricea și byrow — o valoare logică care permite crearea matricei pe linii (nu pe coloane cum este default-ul).

```
[,1] [,2]
[1,]
       1
            6
[2,]
            7
       2
[3,]
       3
          8
[4,]
       4
          9
[<mark>5</mark>,]
       5
           10
# matrice cu 2 linii si 5 coloane
matrix(data = 1:10,
      nrow = 2,
      ncol = 5)
    [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]
     1 3 5 7 9
[2,]
                 6 8 10
       2
            4
 \hbox{\it\# aceeasi matrice cu 2 linii si 5 coloane, umpluta pe linii} 
matrix(data = 1:10,
      nrow = 2,
      ncol = 5,
      byrow = TRUE)
    [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]
    1 2
                 3 4 5
[2,] 6 7
                 8
                      9
                          10
```

Operațiile uzuale cu vectori se aplică și matricelor. Pe lângă acestea avem la dispoziție și operații de algebră liniară clasice, cum ar fi determinarea dimensiunii acestora, transpunerea matricelor sau înmulțirea lor:

```
diag(M) # Diagonala matricei M
dim(M) # Dimensiunile matricei M
nrow(M) # Numarul de linii ale matricei M
ncol(M) # Numarul de coloane ale matricei M
t(M) # Transpusa
colSums(M), rowSums(M) # Suma pe coloane si suma pe linii
```

De exemplu:

```
m = matrix(data = 1:10,
      nrow = 2,
      ncol = 5)
    [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]
     1 3 5
                      7
[2,]
       2
            4
                 6
                        10
dim(m) # dimensiunea matricei
[1] 2 5
nrow(m) # numarul de linii
[1] 2
ncol(m) # numarul de coloane
[1] 5
```

Adunarea și scăderea matricelor se face pe componenete:

```
A = matrix(c(1, 3, 2, 2, 2, 1, 3, 1, 3), ncol = 3)
B = matrix(c(4, 6, 4, 5, 5, 6, 6, 4, 5), ncol = 3)
a = 2
```

```
A + a
     [,1] [,2] [,3]
[1,]
        3 4 5
[2,]
        5
                   3
                   5
[3,]
        4
              3
A + B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]
             7
        5
[2,]
        9
              7
                   5
[3,]
        6
            7
                   8
A - B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]
       -3
             -3
                 -3
       -3
[<mark>2,</mark>]
             -3
                  -3
[3,]
       -2
             -5
                 -2
```

Înmulțirea și împărțirea se face tot pe componenete

```
[,1] [,2] [,3]
[1,]
         2
               4
[<mark>2</mark>,]
         6
                     2
[3,]
               2
A * B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]
              10 18
[<mark>2,</mark>]
        18
              10
                     4
[3,]
         8
               6
                  15
A / B
     [,1]
                 [,2] [,3]
[1,] 0.25 0.4000000 0.50
[2,] 0.50 0.4000000 0.25
[3,] 0.50 0.1666667 0.60
```

Transpusa unei matrice (A^{\dagger}) se obține cu ajutorul funcției t()

```
t(A)
    [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    2
[2,]    2    2    1
[3,]    3    1    3
```

iar inversa (A^{-1}) cu ajutorul funcției solve()

```
solve(A)

[,1] [,2] [,3]

[1,] -0.41666667 0.25 0.3333333

[2,] 0.58333333 0.25 -0.6666667

[3,] 0.08333333 -0.25 0.3333333
```

Înmulțirea (uzuală) a matricelor se face folosind operatorul $\mbox{\ensuremath{\$*\%}}$

```
A %*% B # inmultirea matricelor
[,1] [,2] [,3]
[1,] 28 33 29
[2,] 28 31 31
```

```
[3,] 26 33 31
```

iar funcția crossprod() calculează produsul A^TB (mai repede decât folosind instrucțiunea t(A) %*% B)

```
crossprod(A, B)
        [,1] [,2] [,3]
[1,] 30 32 28
[2,] 24 26 25
[3,] 30 38 37
```

Determinantul și urma unei matrice se obțin folosind funcțiile det() și respectiv sum(diag())

```
det(A) # determinantul
[1] -12
sum(diag(A)) # urma matricei A
[1] 6
```

Metodele de indexare discutate pentru vectori se aplică și în cazul matricelor ([,]) numai că acum în loc să folosim un vector să indexăm putem să folosim doi vectori. Sintaxa are structura generală m[linii, coloane] unde linii și coloane sunt vectori cu valori întregi.

```
m = matrix(1:20, nrow = 4, byrow = TRUE)
# Linia 1
m[1,]
[1] 1 2 3 4 5
# Coloana 5
m[, 5]
[1] 5 10 15 20
# Liniile 2, 3 si coloanele 3, 4
m[2:3, 3:4]
     [,1] [,2]
[1,]
       8
             q
[2,]
       13
# Elementele din coloana 3 care corespund limitlor pentru care elementele
# de pe prima coloana sunt > 3
m[m[,1]>3, 3]
[1] 8 13 18
```

3.3 Liste

Spre deosebire de vectori în care toate elementele trebuie să aibă același tip de dată, structura de dată din R de tip listă (*list*) permite combinarea obiectelor de mai multe tipuri. Cu alte cuvinte, o listă poate avea primul element un scalar, al doilea un vector, al treilea o matrice iar cel de-al patrulea element poate fi o altă listă. Tehnic listele sunt tot vectori, vectorii pe care i-am văzut anterior se numesc *vectori atomici*, deoarece elementele lor nu se pot diviza, pe când listele se numesc *vectori recursivi*.

Ca un prim exemplu să considerăm cazul unei baze de date de angajați. Pentru fiecare angajat, ne dorim să stocăm numele angajatului (șir de caractere), salariul (valoare numerică) și o valoare de tip logic care poate reprezenta apartenența într-o asociație. Pentru crearea listei folosim funcția list():

```
a = list(nume = "Ionel", salariu = 1500, apartenenta = T)
a
$nume
```

```
[1] "Ionel"
$salariu
[1] 1500
$apartenenta
[1] TRUE
str(a) # structura listei
List of 3
              : chr "Ionel"
 $ nume
 $ salariu
              : num 1500
 $ apartenenta: logi TRUE
names(a) # numele listei
[1] "nume"
                  "salariu"
                                 "apartenenta"
```

Numele componentelor listei a (nume, salariu, apartenenta) nu sunt obligatorii dar cu toate acestea pentru claritate sunt indicate:

```
a2 = list("Ionel", 1500, T)
a2
[[1]]
[1] "Ionel"

[[2]]
[1] 1500

[[3]]
[1] TRUE
```

Deoarece listele sunt vectori ele pot fi create și prin intermediul funcției vector():

```
z <- vector(mode="list")
z
list()
z[["a"]] = 3
z
$a
[1] 3</pre>
```

3.3.1 Indexarea listelor

Elementele unei liste pot fi accesate în diferite moduri. Dacă dorim să extragem primul element al listei atunci vom folosi indexarea care folosește o singură pereche de paranteze pătrate []

```
a[1]
$nume
[1] "Ionel"
a[2]
$salariu
[1] 1500

# ce obtinem cand extragem un element al listei a ?
str(a[1])
List of 1
$ nume: chr "Ionel"
```

În cazul în care vrem să accesăm structura de date corespunzătoare elementului i al listei vom folosi două perechi de paranteze pătrate [[]] sau în cazul în care lista are nume operatorul \$\$\$\$ urmat de numele elementului i.

```
a[[1]]
[1] "Ionel"
a[[2]]
[1] 1500

a$nume
[1] "Ionel"
a[["nume"]]
[1] "Ionel"
```

Operațiile de adăugare, respectiv ștergere, a elementelor unei liste sunt des întâlnite.

Putem adăuga elemente după ce o listă a fost creată folosind numele componentei

```
z = list(a = "abc", b = 111, c = c(TRUE, FALSE))
z
$a
[1] "abc"
$b
[1] 111
$c
[1] TRUE FALSE
z$d = "un nou element"
z
$a
[1] "abc"
$b
[1] 111
$c
    TRUE FALSE
[1]
$d
[1] "un nou element"
```

sau indexare vectorială

```
z[[5]] = 200
z[6:7] = c("unu", "doi")
z
$a
[1] "abc"

$b
[1] 111
$c
[1] TRUE FALSE
```

```
$d
[1] "un nou element"

[[5]]
[1] 200

[[6]]
[1] "unu"

[[7]]
[1] "doi"
```

Putem șterge o componentă a listei atribuindu-i valoarea NULL:

```
z[4] = NULL
z
$a
[1] "abc"

$b
[1] 111

$c
[1] TRUE FALSE

[(4]]
[1] 200

[[5]]
[1] "unu"

[[6]]
[1] "doi"
```

Putem de asemenea să concatenăm două liste folosind funcția c() și să determinăm lungimea noii liste cu funcția length().

```
11 = list(1:10, matrix(1:6, ncol = 3), c(T, F))
12 = list(c("Ionel", "Maria"), seq(1,10,2))

13 = c(11, 12)
length(13)
[1] 5
str(13)
List of 5
$ : int [1:10] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
$ : int [1:2, 1:3] 1 2 3 4 5 6
$ : logi [1:2] TRUE FALSE
$ : chr [1:2] "Ionel" "Maria"
$ : num [1:5] 1 3 5 7 9
```

3.4 Data frame-uri

La nivel intuitiv, o structură de date de tip *data frame* este ca o matrice, având o structură bidimensională cu linii și coloane. Cu toate acestea ea diferă de structura de date de tip matrice prin faptul că fiecare coloană

poate avea tipuri de date diferite. Spre exemplu, o coloană poate să conțină valori numerice pe când o alta, valori de tip caracter sau logic. Din punct de vedere tehnic, o structură de tip data frame este o listă a cărei componente sunt vectori (atomici) de lungimi egale.

Pentru a crea un dataframe din vectori putem folosi funcția data.frame(). Această funcție funcționează similar cu funcția list() sau cbind(), diferența față de cbind() este că avem posibilitatea să dăm nume coloanelor atunci când le unim. Dată fiind flexibilitatea acestei structuri de date, majoritatea seturilor de date din R sunt stocate sub formă de dataframe (această structură de date este și cea mai des întâlnită în analiza statistică).

Să creăm un dataframe simplu numit survey folosind funcția data.frame():

```
survey <- data.frame("index" = c(1, 2, 3, 4, 5),
                     "sex" = c("m", "m", "m", "f", "f"),
                     "age" = c(99, 46, 23, 54, 23))
survey
  index sex age
1
     1
         m
            99
2
      2
         m 46
3
      3
       m 23
      4
         f 54
5
     5
         f 23
```

Funcția data.frame() prezintă un argument specific numit stringsAsFactors care permite convertirea coloanelor ce conțin elemente de tip caracter într-un tip de obiect numit factor. Un factor este o variabilă nominală care poate lua un număr bine definit de valori. De exemplu, putem crea o variabilă de tip factor sex care poate lua doar două valori: masculin și feminin. Comportamentul implicit al funcției data.frame() (stringAsFactors = TRUE) transformă automat coloanele de tip caracter în factor, motiv pentru care trebuie să includem argumentul stringsAsFactors = FALSE.

```
# Structura initiala
str(survey)
'data.frame':
              5 obs. of 3 variables:
 $ index: num 1 2 3 4 5
              "m" "m" "m" "f" ...
 $ sex : chr
 $ age : num 99 46 23 54 23
survey <- data.frame("index" = c(1, 2, 3, 4, 5),
                     "sex" = c("m", "m", "m", "f", "f"),
                     "age" = c(99, 46, 23, 54, 23),
                     stringsAsFactors = FALSE)
# Structura de dupa
str(survey)
'data.frame':
              5 obs. of 3 variables:
 $ index: num 1 2 3 4 5
              "m" "m" "m" "f" ...
 $ sex : chr
 $ age : num 99 46 23 54 23
```

R are mai multe funcții care permit vizualizarea structurilor de tip dataframe. Tabelul de mai jos include câteva astfel de funcții:

Tab. 7: Exemple de functii necesare pentru intelegerea structurii dataframe-ului

Funcție	Descriere
head(x), tail(x) View(x) nrow(x), ncol(x), dim(x) rownames(), colnames(), names() str(x)	Printarea primelor linii (sau ultimelor linii). Vizualizarea obiectului într-o fereastră nouă, tabelară. Numărul de linii și de coloane. Numele liniilor sau coloanelor. Structura dataframe-ului

```
data() # vedem ce seturi de date exista
# Alegem setul de date mtcars
?mtcars
str(mtcars) # structura setului de date
'data.frame': 32 obs. of 11 variables:
$ mpg : num 21 21 22.8 21.4 18.7 18.1 14.3 24.4 22.8 19.2 ...
$ cyl : num 6 6 4 6 8 6 8 4 4 6 ...
$ disp: num 160 160 108 258 360 ...
$ hp : num 110 110 93 110 175 105 245 62 95 123 ...
$ drat: num 3.9 3.9 3.85 3.08 3.15 2.76 3.21 3.69 3.92 3.92 ...
$ wt : num 2.62 2.88 2.32 3.21 3.44 ...
$ qsec: num 16.5 17 18.6 19.4 17 ...
$ vs : num 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 ...
 $ am : num 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 ...
 $ gear: num 4 4 4 3 3 3 3 4 4 4 ...
$ carb: num 4 4 1 1 2 1 4 2 2 4 ...
head(mtcars)
                  mpg cyl disp hp drat
                                          wt qsec vs am gear carb
Mazda RX4
                 21.0 6 160 110 3.90 2.620 16.46 0 1
Mazda RX4 Wag
                 21.0 6 160 110 3.90 2.875 17.02 0 1
Datsun 710
                 22.8 4 108 93 3.85 2.320 18.61 1 1
                                                                - 1
Hornet 4 Drive
                 21.4 6 258 110 3.08 3.215 19.44 1 0
                                                                1
                                                           3
                                                                2
Hornet Sportabout 18.7 8 360 175 3.15 3.440 17.02 0 0
Valiant
                 18.1 6 225 105 2.76 3.460 20.22 1 0
tail(mtcars)
               mpg cyl disp hp drat
                                        wt qsec vs am gear carb
Porsche 914-2 26.0 4 120.3 91 4.43 2.140 16.7 0 1
              30.4 4 95.1 113 3.77 1.513 16.9 1 1
                                                             2
Lotus Europa
Ford Pantera L 15.8 8 351.0 264 4.22 3.170 14.5 0 1
                                                        5
                                                             4
Ferrari Dino 19.7 6 145.0 175 3.62 2.770 15.5 0 1
                                                        5
                                                             6
Maserati Bora 15.0 8 301.0 335 3.54 3.570 14.6 0 1
                                                             8
Volvo 142E
              21.4 4 121.0 109 4.11 2.780 18.6 1 1
                                                             2
rownames(mtcars)
[1] "Mazda RX4"
                          "Mazda RX4 Wag"
                                               "Datsun 710"
 [4] "Hornet 4 Drive"
                          "Hornet Sportabout"
                                               "Valiant"
 [7] "Duster 360"
                          "Merc 240D"
                                               "Merc 230"
[10] "Merc 280"
                          "Merc 280C"
                                               "Merc 450SE"
[13] "Merc 450SL"
                          "Merc 450SLC"
                                               "Cadillac Fleetwood"
[16] "Lincoln Continental" "Chrysler Imperial"
                                               "Fiat 128"
[19] "Honda Civic"
                         "Toyota Corolla"
                                               "Toyota Corona"
[22] "Dodge Challenger"
                         "AMC Javelin"
                                               "Camaro Z28"
```

```
[25] "Pontiac Firebird" "Fiat X1-9" "Porsche 914-2"
[28] "Lotus Europa" "Ford Pantera L" "Ferrari Dino"
[31] "Maserati Bora" "Volvo 142E"
names(mtcars)
[1] "mpg" "cyl" "disp" "hp" "drat" "wt" "qsec" "vs" "am" "gear"
[11] "carb"
View(mtcars)
```

3.4.1 Metode de indexare

Indexarea structurilor de tip dataframe se face la fel ca și indexarea listelor.

La fel ca vectorii, dataframe-urile (dar și listele) pot fi indexate logic

O altă metodă de indexare este prin folosirea funcției subset().

Tab. 8: Principalele argumente ale functiei subset()

Argument	Descriere
x	Un dataframe
subset	Un vector logic care indică liniile pe care le vrem
select	Coloanele pe care vrem să le păstrăm

3.4.2 Metode de manipulare

În această secțiune vom prezenta câteva metode mai avansate de manipulare a seturilor de date (a data frame-urilor).

Vom începe prin introducerea comenzii order() care permite sortarea liniilor unui data.frame în funcție de valorile coloanei de interes. De exemplu să considerăm cazul setului de date mtcars. Vrem să afisăm primele 10 mașini în funcție de greutatea lor (crescător și descrescător):

```
cars_increasing = rownames(mtcars[order(mtcars$wt),])
# afisarea celor mai usoare 10 masini
cars_increasing[1:10]
 [1] "Lotus Europa"
                     "Honda Civic"
                                       "Toyota Corolla" "Fiat X1-9"
 [5] "Porsche 914-2"
                     "Fiat 128"
                                       "Datsun 710"
                                                        "Toyota Corona"
 [9] "Mazda RX4"
                      "Ferrari Dino"
cars_decreasing = rownames(mtcars[order(mtcars$wt, decreasing = TRUE),])
# afisarea celor mai grele 10 masini
cars_decreasing[1:10]
 [1] "Lincoln Continental" "Chrysler Imperial"
                                                "Cadillac Fleetwood"
 [4] "Merc 450SE"
                          "Pontiac Firebird"
                                                 "Camaro Z28"
                          "Merc 450SL"
                                                 "Duster 360"
 [7] "Merc 450SLC"
[10] "Maserati Bora"
```

Funcția order() permite ordonarea după mai mult de o coloană, de exemplu dacă vrem să ordonăm mașinile după numărul de cilindrii și după greutate atunci apelăm

```
mtcars[order(mtcars$cyl, mtcars$wt), 1:6]
                    mpg cyl disp hp drat
Lotus Europa
                   30.4
                         4
                            95.1 113 3.77 1.513
Honda Civic
                   30.4
                          4 75.7 52 4.93 1.615
Toyota Corolla
                   33.9
                         4 71.1 65 4.22 1.835
                   27.3 4 79.0
Fiat X1-9
                                  66 4.08 1.935
Porsche 914-2
                   26.0 4 120.3
                                  91 4.43 2.140
Fiat 128
                   32.4 4 78.7
                                  66 4.08 2.200
                   22.8 4 108.0 93 3.85 2.320
Datsun 710
Toyota Corona
                   21.5 4 120.1 97 3.70 2.465
Volvo 142E
                   21.4 4 121.0 109 4.11 2.780
Merc 230
                  22.8 4 140.8 95 3.92 3.150
Merc 240D
                   24.4 4 146.7 62 3.69 3.190
Mazda RX4
                   21.0 6 160.0 110 3.90 2.620
Ferrari Dino
Mazda RX4 Wag
                  19.7 6 145.0 175 3.62 2.770
                   21.0 6 160.0 110 3.90 2.875
Hornet 4 Drive
                   21.4 6 258.0 110 3.08 3.215
Merc 280
                   19.2
                         6 167.6 123 3.92 3.440
Merc 280C
                  17.8
                         6 167.6 123 3.92 3.440
Valiant
                  18.1
                          6 225.0 105 2.76 3.460
Ford Pantera L
                   15.8 8 351.0 264 4.22 3.170
AMC Javelin
                   15.2 8 304.0 150 3.15 3.435
Hornet Sportabout 18.7
                          8 360.0 175 3.15 3.440
Dodge Challenger
                   15.5
                          8 318.0 150 2.76 3.520
Duster 360
                   14.3
                          8 360.0 245 3.21 3.570
Maserati Bora
                   15.0
                         8 301.0 335 3.54 3.570
Merc 450SL
                   17.3 8 275.8 180 3.07 3.730
Merc 450SLC
                   15.2 8 275.8 180 3.07 3.780
Camaro Z28
                   13.3 8 350.0 245 3.73 3.840
```

```
Pontiac Firebird 19.2 8 400.0 175 3.08 3.845

Merc 450SE 16.4 8 275.8 180 3.07 4.070

Cadillac Fleetwood 10.4 8 472.0 205 2.93 5.250

Chrysler Imperial 14.7 8 440.0 230 3.23 5.345

Lincoln Continental 10.4 8 460.0 215 3.00 5.424
```

Sunt multe situațiile în care avem la dispoziție două sau mai multe seturi de date și am vrea să construim un nou set de date care să combine informațiile din acestea. Pentru aceasta vom folosi funcția merge(). Principalele argumente ale acestei funcții se regăsesc în tabelul de mai jos:

Tab. 9: Argumentele functiei merge

Argument	Descriere
x, y	Două data frame-uri ce urmează a fi unite
by	Un vector de caractere ce reprezintă una sau mai multe coloane după care se va
	face lipirea. De exemplu by = "id" va combina coloanele care au valori care se
	potrivesc într-o coloană care se numește "id". by = c("last.name",
	"first.name") va combina coloanele care au valori care se potrivesc în ambele
	coloane "last.name" și "first.name"
all	Un vector logic care indică dacă vrem să includem sau nu liniile care nu se potrivesc conform argumentului by.

Să presupunem că avem la dispoziție un set de date în care apar 5 studenți și notele pe care le-au obținut la examenul de statistică:

și să presupunem că avem notele acestor studenți la examenul de algebră

Scopul nostru este să creăm un singur tabel în care să regăsim notele la ambele materii:

```
combined_courses = merge(x = stat_course,
                         y = alg_course,
                         by = "student")
combined_courses
  student note_stat note_alg
      Ana
                  9
1
                  5
                           9
2
    Gigel
3
    Ionel
                  9
                           7
4
  Maria
                  8
                          10
5 Vasile
```

O a treia funcție care joacă un rol important în manipularea data frame-urilor este funcția aggregate() care, după cum îi spune și numele, permite calcularea de funcții pe grupe de date din setul initial. Argumentele principale ale acestei funcții sunt date în tabelul de mai jos:

Tab. 10: Argumentele functiei aggregate

Argument	Descriere
formula	O formulă de tipul y ~ x1 + x2 + unde y este variabila dependentă iar x1, x2, sunt variabilele independente. De exemplu, salary ~ sex + age va agrega o coloană salary la fiecare combinație unică de sex și age
FUN	O funcție pe care vrem să o aplicăm lui y la fiecare nivel al variabilelor independente. E.g. mean sau max.
data	Data frame-ul care conține variabilele din formula
subset	O submulțime din data pe care vrem să le analizăm. De exemplu, subset(sex == "f" & age > 20) va restrânge analiza la femei mai învârstă de 20 de ani.

Structura generală a funcției aggregate() este

```
aggregate(formula = dv ~ iv, # dv este data, iv este grupul

FUN = fun, # Functia pe care vrem sa o aplicam
data = df) # setul de date care contine coloanele dv si iv
```

Să considerăm setul de date ChickWeight și să ne propunem să calculăm pentru fiecare tip de dietă greutatea medie:

```
# Fara functia aggregate
mean(ChickWeight$weight[ChickWeight$Diet == 2])
[1] 122.6167
mean(ChickWeight$weight[ChickWeight$Diet == 3])
[1] 142.95
mean(ChickWeight$weight[ChickWeight$Diet == 4])
[1] 135.2627
# Cu ajutorul functiei aggregate
aggregate(formula = weight ~ Diet, # DV este weight, IV este Diet
         FUN = mean,
                                   # calculeaza media pentru fiecare grup
         data = ChickWeight) # dataframe este ChickWeight
 Diet weight
    1 102.6455
1
    2 122.6167
3
    3 142.9500
    4 135.2627
```

Funcția aggregate() a întors un data.frame cu o coloană pentru variabila independentă Diet și o coloană pentru greutatea medie.

Dacă vrem să calculăm greutățile medii în funcție de dietă pentru găinile care au mai puțin de 10 săptămâni de viață atunci folosim opțiunea subset:

Putem să includem de asemenea mai multe variabile independente în formula funcției aggregate(). De

exemplu putem să calculăm greutatea medie a găinilor atât pentru fiecare tip de dietă cât și pentru numărul de săptămâni de la naștere:

```
aggregate(formula = weight ~ Diet + Time, # DV este weight, IV sunt Diet și Time
                                      # calculeaza media pentru fiecare grup
          FUN = mean,
          data = ChickWeight)
                                      # dataframe este ChickWeight
   Diet Time
                 weight
              41.40000
1
      1
           0
2
      2
           0
              40.70000
3
      3
           0
              40.80000
4
      4
           0
              41.00000
5
           2
              47.25000
6
      2
           2
              49.40000
7
      3
           2
              50.40000
8
      4
           2 51.80000
9
      1
              56.47368
10
      2
           4 59.80000
      3
              62.20000
11
           4
12
      4
              64.50000
13
      1
           6
              66.78947
      2
           6 75.40000
14
15
      3
           6
              77.90000
16
      4
           6 83.90000
17
           8 79.68421
      1
      2
18
           8 91.70000
19
      3
           8 98.40000
20
      4
           8 105.60000
21
          10 93.05263
      1
22
      2
          10 108.50000
23
      3
          10 117.10000
24
          10 126.00000
25
      1
          12 108.52632
26
      2
          12 131.30000
27
      3
          12 144.40000
28
      4
          12 151.40000
29
          14 123.38889
      1
30
      2
          14 141.90000
31
      3
          14 164.50000
32
          14 161.80000
      4
33
      1
          16 144.64706
34
      2
          16 164.70000
35
      3
          16 197.40000
36
      4
          16 182.00000
37
      1
          18 158.94118
38
      2
          18 187.70000
39
      3
          18 233.10000
40
          18 202.90000
      4
41
      1
          20 170.41176
42
      2
          20 205.60000
43
      3
          20 258.90000
44
      4
          20 233.88889
45
      1
          21 177.75000
46
      2
          21 214.70000
47
          21 270.30000
```

48 4 21 238.55556



Considerați setul de date mtcars. Calculați:

- a) Greutatea medie în funcție de tipul de transmisie
- b) Greutatea medie în funcție de numărul de cilindrii
- c) Consumul mediu în funcție de numărul de cilindrii și tipul de transmisie

Referințe

Tilman Davies. The Book of R. A First Course in Programming and Statistics. No Starch Press, Inc., 1st edition, 2016. ISBN 978-1-59327-651-5. (Citat la pagina 1.)

Norman Matloff. The Art of R Programming. A Tour of Statistical Software Design. No Starch Press, Inc., 1st edition, 2011. ISBN 978-1-59327-384-2. (Citat la pagina 1.)