Laborator 4

1) Vrem să simulăm aruncarea unei monede (echilibrate) folosind funcția sample(). Această funcție permite extragerea, cu sau fără întoarcere (replace = TRUE sau replace = FALSE - aceasta este valoarea prestabilită), a unui eșantion de volum dat (size) dintr-o mulțime de elemente x.

De exemplu: vrem să simulăm 10 aruncări cu banul:

```
sample(c("H", "T"), 10, replace = TRUE)
```

Pentru a estima probabilitatea de apariție a stemei (H) repetăm aruncarea cu banul de 10000 de ori și calculăm raportul dintre numărul de apariții ale evenimentului A={H} și numărul total de aruncări:

```
# atunci când moneda este echilibrată
a = sample(c("H", "T"), 10 000, replace = TRUE)
p = sum(a == "H") / length(a)
p
# atunci când moneda nu este echilibrată
a = sample(c("H", "T"), 10 000, replace = TRUE, prob = c(0.2, 0.8))
p = sum(a == "H") / length(a)
p
```

Putem vedea cum evoluează această probabilitate în funcție de numărul de repetări:

```
y = rep(0, 100)
for (i in 1:100) {
  a = sample(c("H", "T"), i*100, replace = TRUE)
  y[i] = sum(a == "H") / length(a)
}
plot(1:100, y, type = "o", col = "royalblue", lty = "a",
xlab = " ", ylab = "probabilitate")
abline(h = 0.5, lty = 2, col = "brown3").
```

2) Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate. Calculați probabilitatea evenimentelor: (Presupunem că aruncările sunt independente)

E_n: {În primele n-1 aruncări nu a apărut nici suma 5 (a fețelor celor 2 zaruri) și nici suma 7 iar în a n-a aruncare a apărut suma 5.}

A: {suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară înaintea sumei 7}

R

A_i = {suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare e

B_i = {suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare e

Avem $E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n$

Aplicând independența avem:

$$P(E_n) = P(A_1^c \cap B_1^c) \cdot P(A_2^c \cap B_2^c) \cdot \dots \cdot P(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cdot P(A_n) =$$

$$= P(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1} P(A_n)$$

$\Omega = \{(i,j) / 1 \leq i,j \leq 6\}$

$P(A_n) = \frac{4}{36}$ (cazuri fav: (1,4), (2,3), (4,1), (3,2))

$P(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartițiile variabilelor: $3X+7$, X^2, X^3, $X+X^2$ și să se calculeze probabilitățile $P(X > -\frac{1}{3})$ și $P(X < \frac{1}{4} / X \geq -\frac{1}{2})$.

R

$$3X+7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$X+X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P(X > -\tfrac{1}{3}) = P(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = 0.7$$

$$P(X < \tfrac{1}{4} / X \geq -\tfrac{1}{2}) = \frac{P(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4})}{P(X \geq -\frac{1}{2})} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}.$$

4) Fie X o variabilă aleatoare discretă astfel încât $P(X=k) = \frac{(1-p)^k}{-k\log p}$, $k \geq 1$ și $P(X=0)=0$, $0<p<1$. Să se calculeze $E(X)$, $E(X^2)$ și $Var(X)$.

R

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(1-p)^k}{-k \log p} = -\frac{1}{\log p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k =$$

$$= -\frac{1}{\log p}\left[\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right] = -\frac{1-p}{p \log p}.$$

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(1-p)^k}{-k\log p} = -\frac{1}{\log p}\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k =$$

$$= -\frac{1}{\log p}(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\left((1-p)^k\right)' = -\frac{1}{\log p}\,\frac{1-p}{p^2} = -\frac{1-p}{p^2\log p}$$

$$Var(X) = EX^2-(EX)^2 = -\frac{1-p}{p^2\log p} - \left(\frac{1-p}{p\log p}\right)^2 = \frac{(1-p)(1-p+\log p)}{-p^2\log^2 p}$$

5) $X \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $Y=2X$. Să se afle funcția de repartiție $F_Y(y)$ a lui Y.

R

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5 \\ \frac{1}{3}, & 5 \le x \le 10 \\ 1, & x \ge 10 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y<y) = P(2X<y) = P\left(X<\frac{y}{2}\right) = F_X\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 10 \\ \frac{1}{3}, & 10 < y \le 20 \\ 1, & y \ge 20 \end{cases}$$

6) Fie X v.a. având $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{x^2}{4}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$

Se cere: a) $P(1 \le X < 2)$, $P(X \le X < 2 / 1 \le X < 3)$

b) $f_X(x)$ – funcția de densitate $= F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}$

c) $Var(X)$

a) $P(1 \le X < 2) = F(2) - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$$P(1 \le X < 2 \mid 1 \le X < 3) = \frac{P(1 \le X < 2)}{P(1 \le X < 3)} = \frac{\frac{3}{4}}{F(3) - F(1)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \int_0^1 \frac{x}{4}\,dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{8-1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{7}{6} = \frac{31}{24}.$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) = \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx + \int_1^2 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12} + \frac{15}{8} = \frac{2+45}{24} = \frac{47}{24}.$$

$$Var(X) = \frac{47}{24} - \left(\frac{31}{24}\right)^2.$$

7) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $X \sim \begin{pmatrix} k \\ \frac{a}{3^k} \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$ să fie o v.a. Să se calculeze EX și $Var(X)$.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a}{3^k} = 1 \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

$$EX = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{3^k}.$$

Notăm $f_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{kx}{3^k}$. Trebuie să calculăm $f_1(1)$.

Fie $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{3^k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k x^{k-1}}{3^k} = \frac{3}{3-x} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2} = f_1(1)$

Deci $EX = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.

$EX^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^2 \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^k} = \frac{2}{3}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2}{3^k}.$

Fie $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{3-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\cdot f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k\cdot x^k}{3^k} = \frac{3x}{3-x} \Rightarrow (xf'(x))' = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2 x^{k-1}}{3^k} = \left(\frac{3x}{3-x}\right)' =$

$= \frac{3(1+x)}{3-x} \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2}{3^k} = \frac{3\cdot 2}{2} \Rightarrow EX^2 = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2.$

$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = 2-1 = 1$