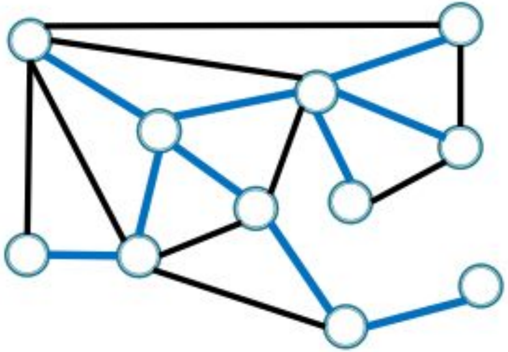
Arbori parțiali

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial (un graf parțial care este arbore).



Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial.

Demonstrație: două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V, E)

Prin adăugare de muchii (bottom-up)	Prin eliminare de muchii (cut-down)

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial.

Demonstrație: două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V, E)

Prin adăugare de muchii (bottom-up)	Prin eliminare de muchii (cut-down)
T ← (V, ∅) cât timp T **nu este conex** execută • alege e ∈ E(G) - E(T) care **unește două componente conexe** din T (nu formează cicluri cu muchiile din T) • E(T) ← E(T) ∪ {e} returnează T	

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial.

Demonstrație: două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex $G=(V, E)$

<table>
<tr><th>Prin adăugare de muchii (bottom-up)</th><th>Prin eliminare de muchii (cut-down)</th></tr>
<tr><td>$T \leftarrow (V, \varnothing)$

cât timp T nu este conex execută

• alege $e \in E(G) - E(T)$ care unește două componente conexe din T (nu formează cicluri cu muchiile din T)
• $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e\}$

returnează T</td><td></td></tr>
<tr><td>În final, T este conex și aciclic, deci arbore</td><td></td></tr>
</table>

Arbori parțiali

Proprietate
Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial.

Demonstrație: două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V, E)

Prin adăugare de muchii (bottom-up)	**Prin eliminare de muchii (cut-down)**
T ← (V, ∅) cât timp T **nu este conex** execută • alege e ∈ E(G) - E(T) care **unește două componente conexe** din T (nu formează cicluri cu muchiile din T) • E(T) ← E(T) ∪ {e} returnează T	T ← (V, E) cât timp T **conține cicluri** execută • alege e ∈ E(T) o **muchie dintr-un ciclu** • E(T) ← E(T) - {e} returnează T
În final, T este conex și aciclic, deci arbore	

Arbori parțiali

Proprietate

Orice graf neorientat conex conține un arbore parțial.

Demonstrație: două tipuri de algoritmi de construcție a unui arbore parțial al unui graf conex G=(V, E)

<table>
<tr><th>Prin adăugare de muchii (bottom-up)</th><th>Prin eliminare de muchii (cut-down)</th></tr>
<tr><td>T ← (V, ∅)

cât timp T nu este conex execută
alege e ∈ E(G) - E(T) care unește două componente conexe din T (nu formează cicluri cu muchiile din T)
E(T) ← E(T) ∪ {e}
returnează T</td><td>T ← (V, E)

cât timp T conține cicluri execută
alege e ∈ E(T) o muchie dintr-un ciclu
E(T) ← E(T) - {e}
returnează T</td></tr>
<tr><td>În final, T este conex și aciclic, deci arbore</td><td>În final, T este aciclic și conex (s-au eliminat doar muchii din ciclu), deci arbore</td></tr>
</table>

Arbori parțiali

Algoritmi de determinare a unui arbore parțial al unui graf conex

Complexitate algoritm?

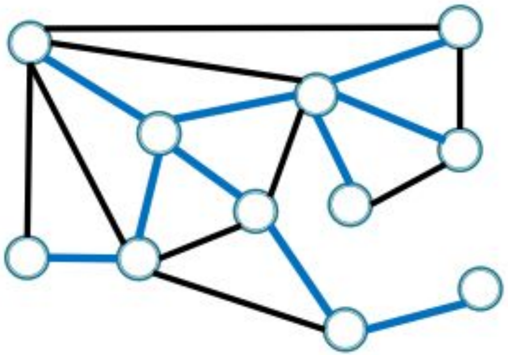
Arbori parțiali

Algoritmi de determinare a unui arbore parțial al unui graf conex

Complexitate algoritm?

arbore asociat unei parcurgeri este arbore parțial ⇒ determinăm un arbore parțial printr-o parcurgere

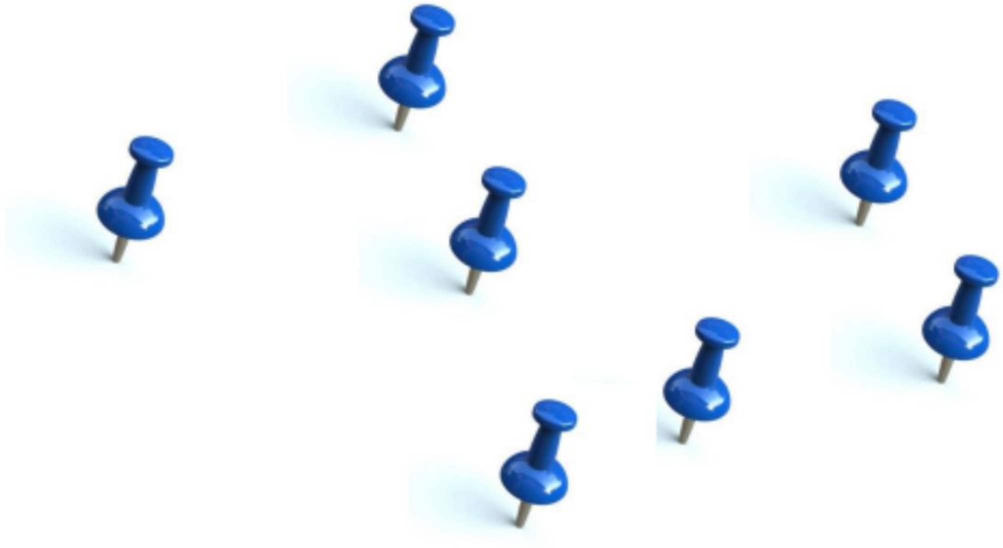
Arbori parțiali



- ”Scheletul” grafului
- Transmiterea de mesaje în rețea astfel încât mesajul să ajungă o singură dată în fiecare vârf
- Conectare fără redundanță + cu cost minim

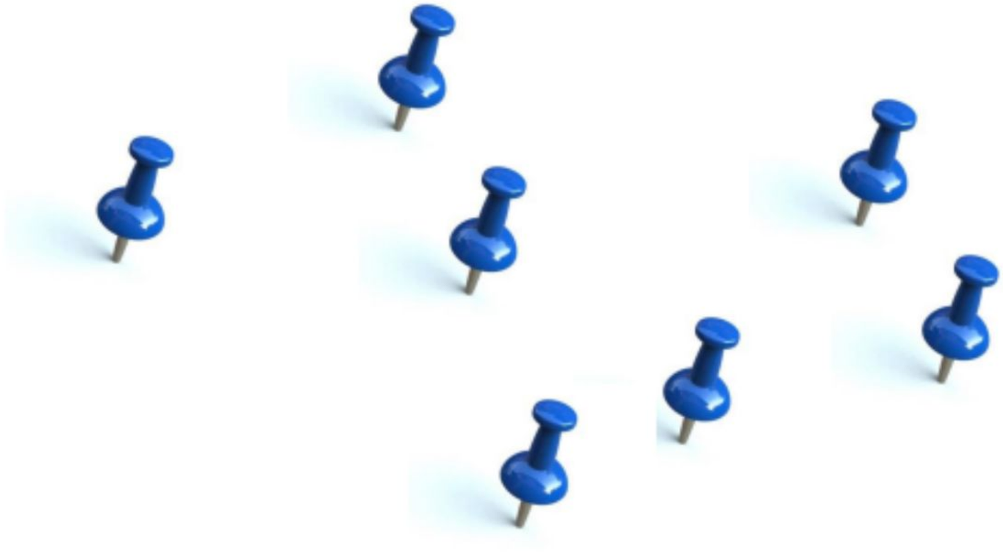
Arbori parțiali de cost minim

Arbori parțiali de cost minim



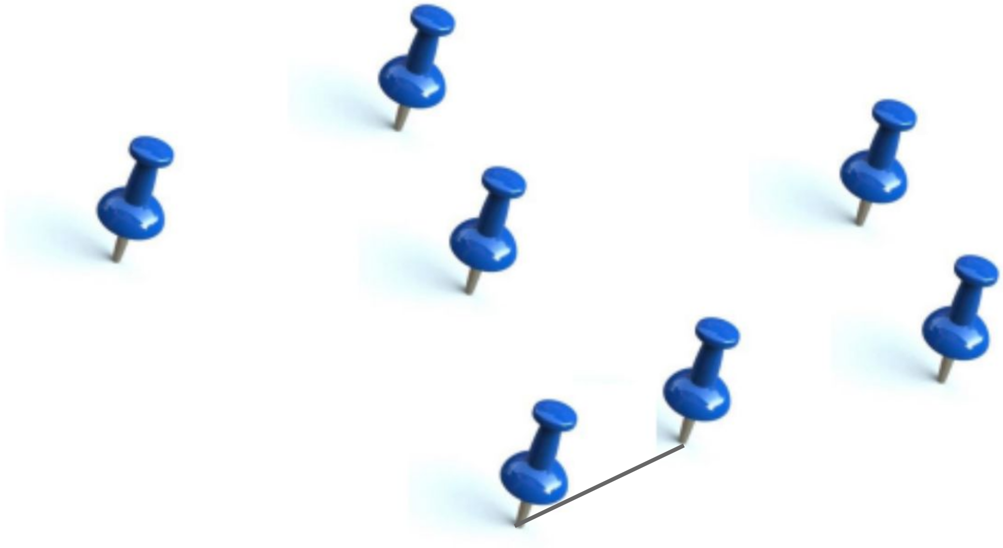
Conectați pinii astfel încât să folosiți cât mai puțin cablu.

Arbori parțiali de cost minim

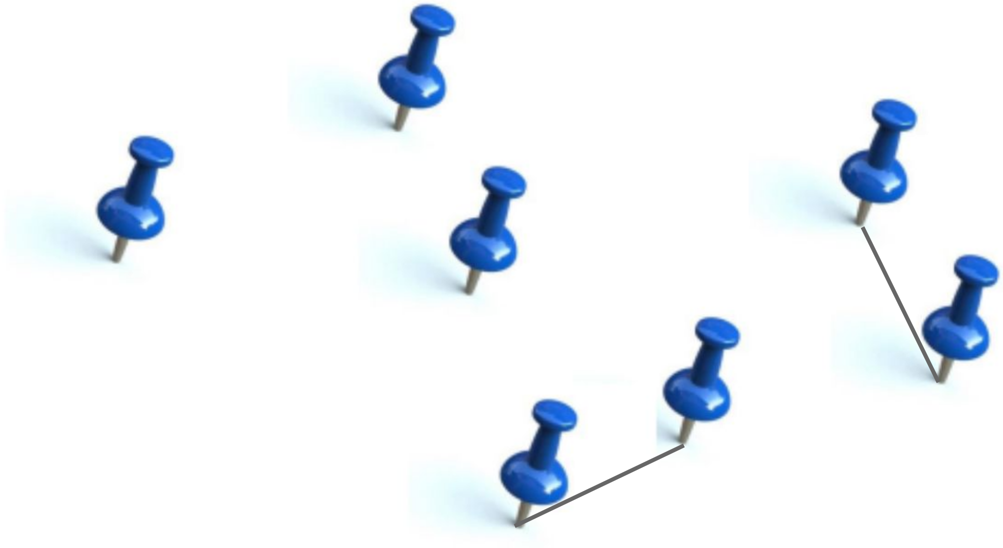


- Legăm pini apropiați
- Nu închidem cicluri

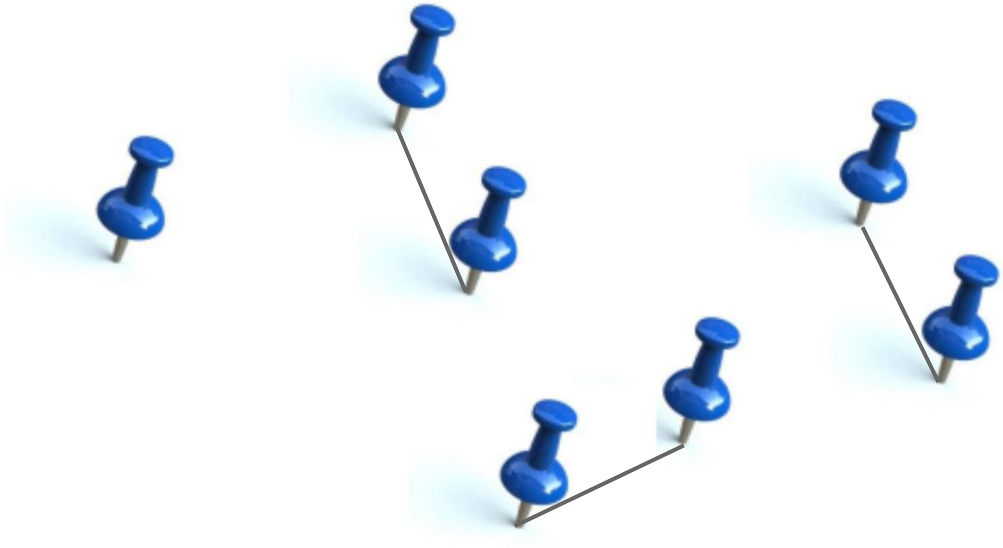
Arbori parțiali de cost minim



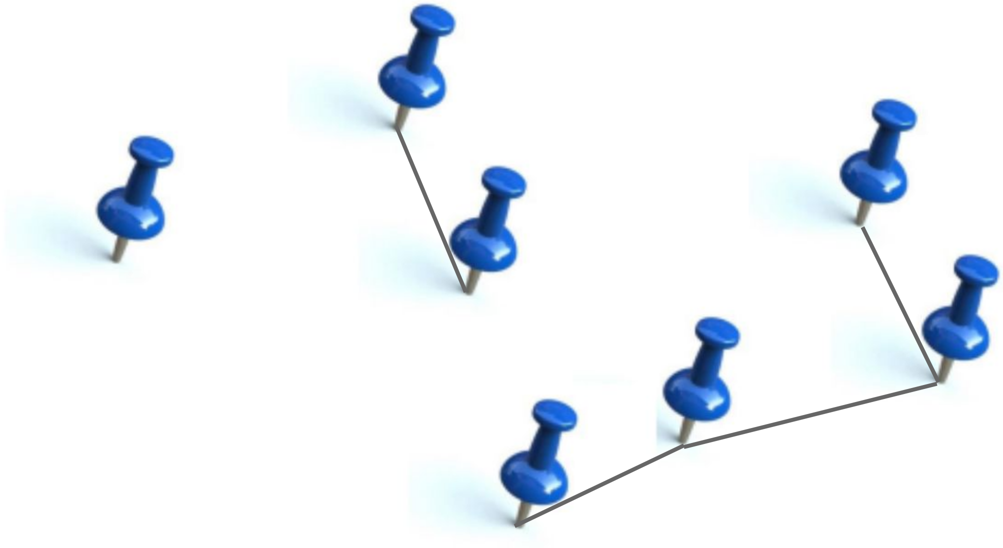
Arbori parțiali de cost minim



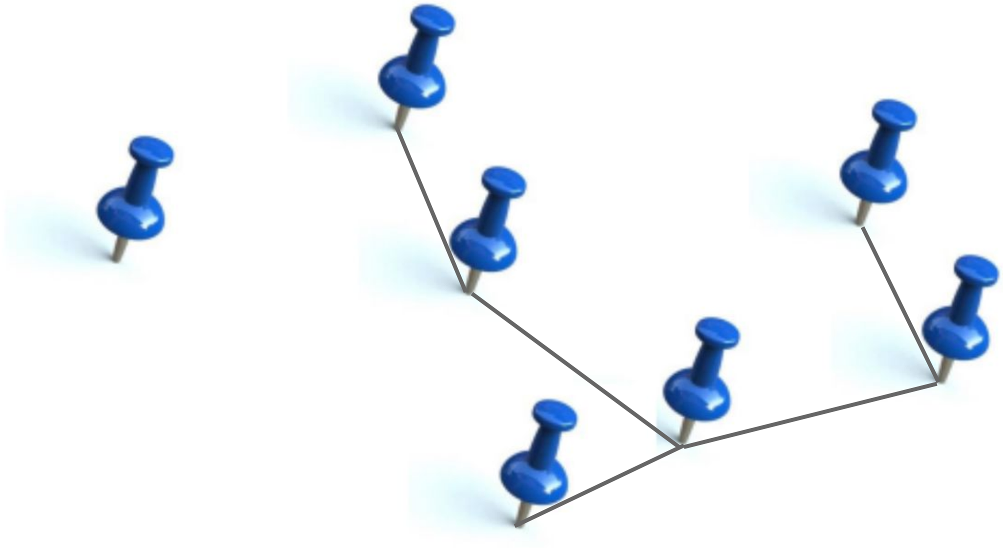
Arbori parțiali de cost minim



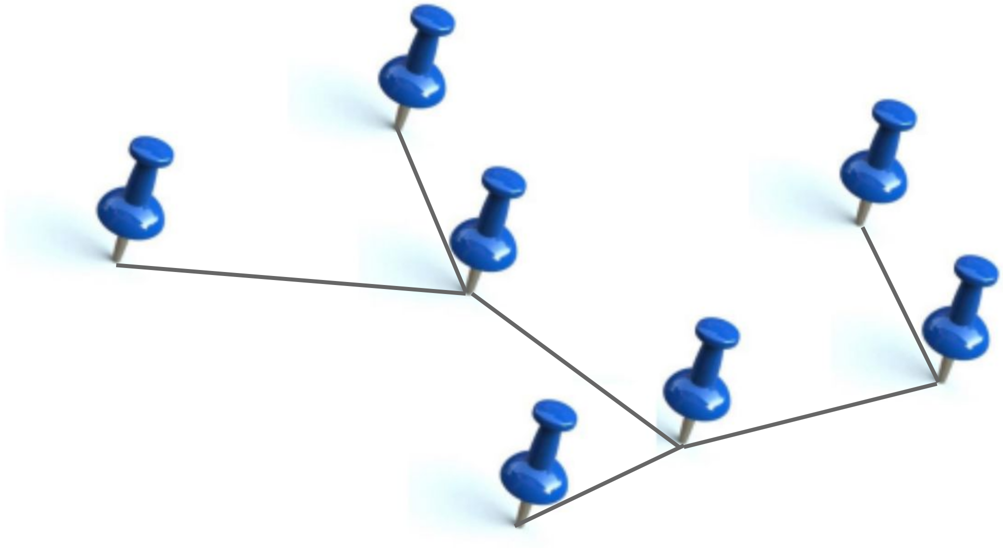
Arbori parțiali de cost minim



Arbori parțiali de cost minim



Arbori parțiali de cost minim



Arbori parțiali de cost minim

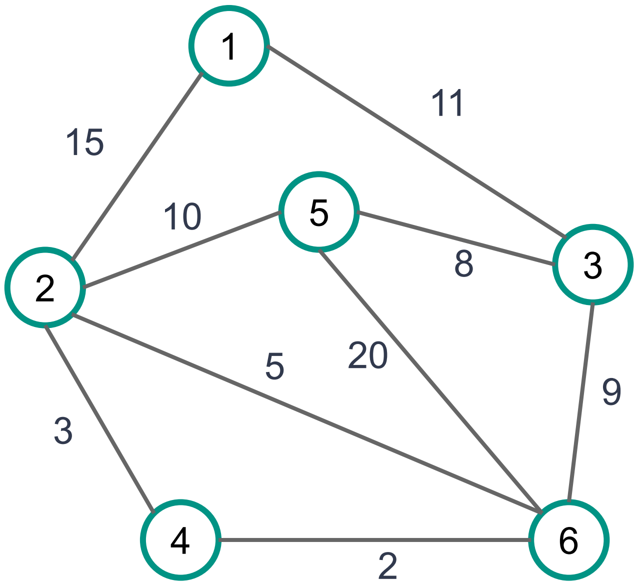
conectare cu cost minim ⇒ evităm ciclurile

Deci, trebuie să construim

graf conex + fără cicluri ⇒ arbore

cu **suma costurilor muchiilor minimă**

Grafuri ponderate



Grafuri ponderate

G = (V, E) ponderat =

- w : E → ℝ funcție **pondere (cost)**

Notăm G = (V, E, w)

Grafuri ponderate

G = (V, E) ponderat =

- w : E → ℝ funcție **pondere (cost)**

Pentru A ⊆ E

$$w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$$

Grafuri ponderate

G = (V, E) ponderat =

- w : E → ℝ funcție **pondere (cost)**

Pentru A ⊆ E

$$w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$$

Pentru T subgraf al lui G

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$$

Grafuri ponderate

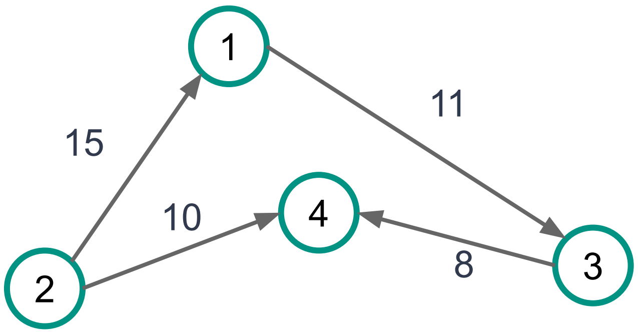
Reprezentarea grafurilor ponderate

Grafuri ponderate

Reprezentarea grafurilor ponderate

- **Matrice de costuri (ponderi)** **$W = (w_{ij})_{i,j = 1,\dots,n}$**

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, \ daca\ i = j \\ w(i,j), \ daca\ ij \in E \\ \infty, \ daca\ ij \notin E \end{cases}$$

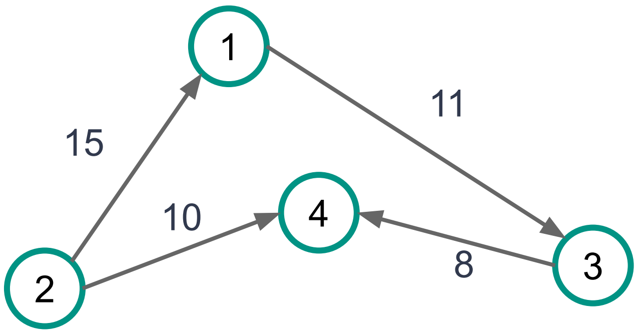


0	∞	11	∞
15	0	∞	10
∞	∞	0	8
∞	∞	∞	0

Grafuri ponderate

Reprezentarea grafurilor ponderate

- **Matrice de costuri (ponderi)**
- **Liste de adiacență**

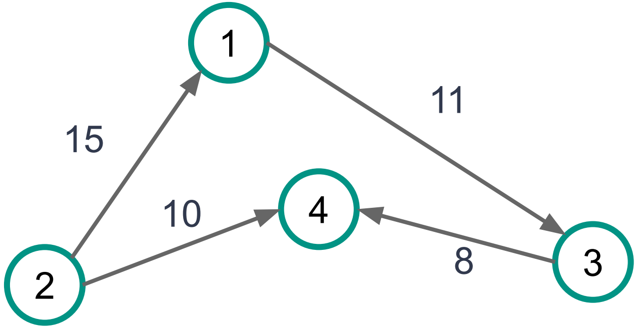


1:	**3 / 11**
2:	**1 / 15, 4 / 10**
3:	**4 / 8**
4:	

Grafuri ponderate

Reprezentarea grafurilor ponderate

- **Matrice de costuri (ponderi)**
- **Liste de adiacență**
- **Liste de muchii / arce**



1	**3**	**11**
2	**1**	**15**
2	**4**	**10**
3	**4**	**8**

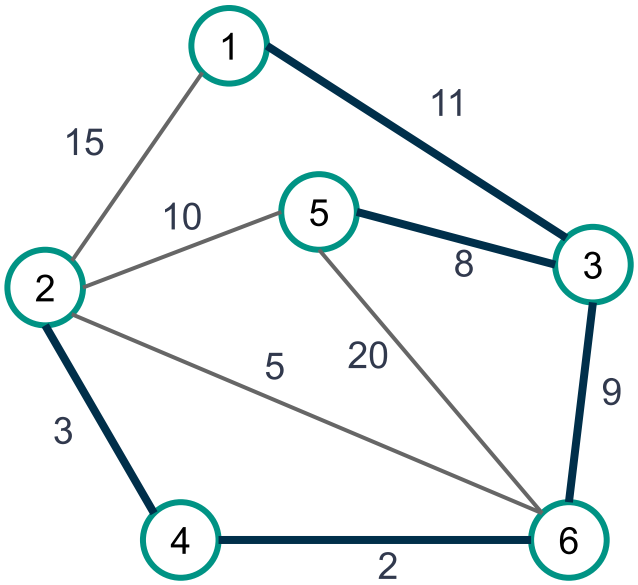
Arbori parțiali de cost minim (APCM)

$G = (V, E, w)$ **conex ponderat**

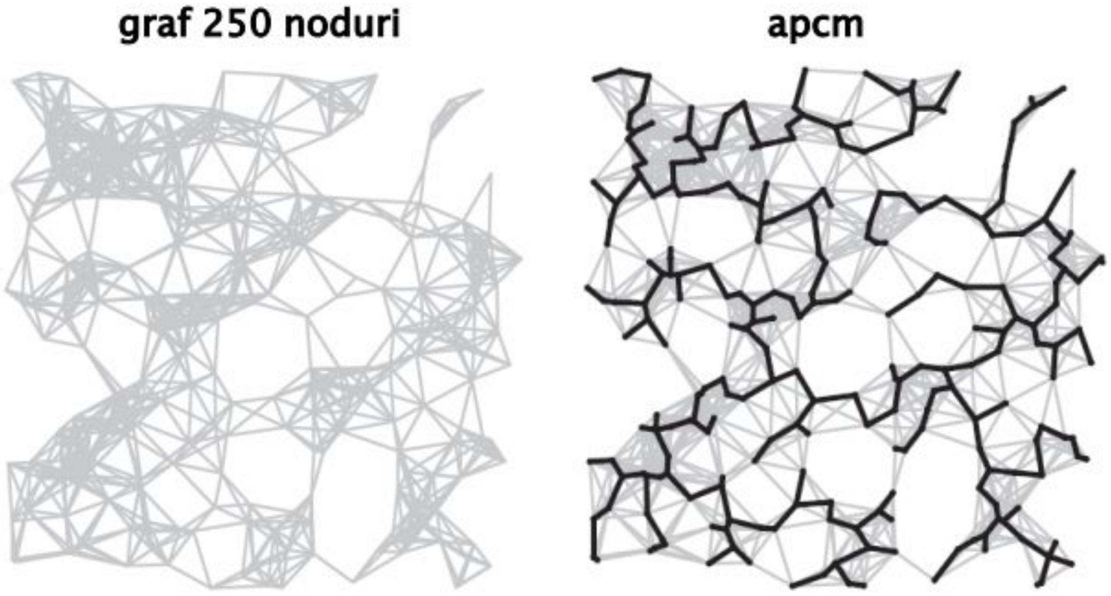
Arbore parțial de cost minim al lui G = un arbore parțial T_{min} al lui G cu

$$w(T_{min}) = \min \{ w(T) \mid T \text{ arbore parțial al lui } G \}$$

Arbori parțiali de cost minim (APCM)



Arbori parțiali de cost minim (APCM)



Imagine din
R. Sedgewick, K. Wayne – **Algorithms, 4th edition**, Pearson Education, 2011

APCM – Aplicații

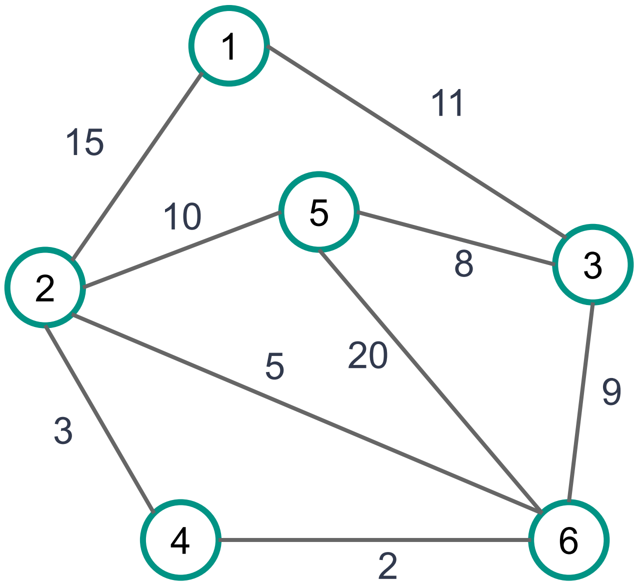
- **Construcția / renovarea unui sistem de căi ferate astfel încât:**
  - oricare două stații să fie conectate (prin căi renovate)
  - sistem economic (costul total minim)
- **Proiectarea de rețele, circuite electronice**
  - conectarea pinilor cu cost minim / fără cicluri
- **Clustering**
- **Subrutină în alți algoritmi (trasee hamiltoniene)**
- **...**

Algoritmi de determinare a unui arbore parțial de cost minim

Arbori parțiali de cost minim

Cum determinăm un arbore parțial de cost minim al unui graf conex ponderat?

Arbori parțiali de cost minim



Arbori parțiali de cost minim

Idee: Prin adăugare succesivă de muchii, astfel încât mulțimea de muchii selectate:

- să aibă costul cât mai mic
- să fie submulțime a mulțimii muchiilor unui arbore parțial de cost minim (apcm)

Arbori parțiali de cost minim

După ce criteriu selectăm muchiile?

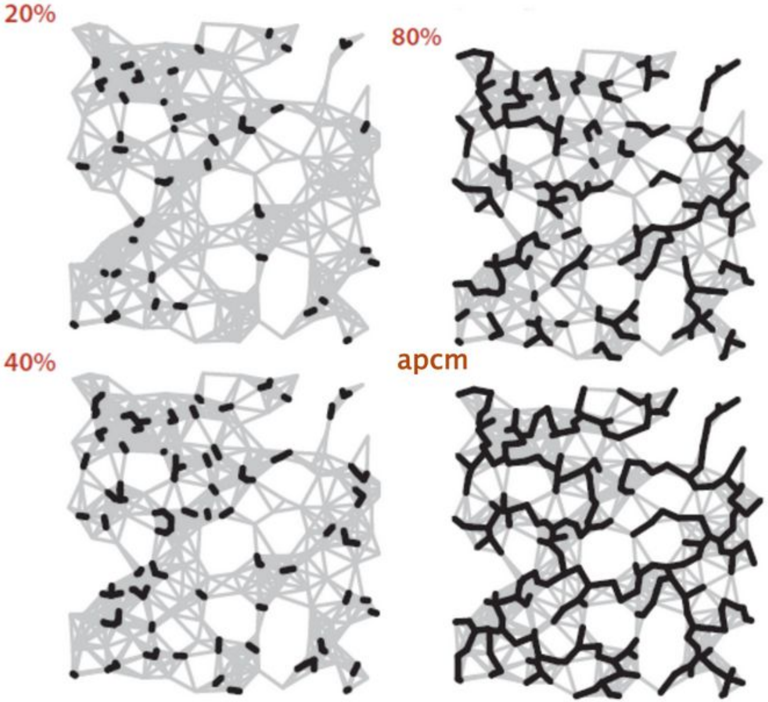
Arbori parțiali de cost minim

După ce criteriu selectăm muchiile?

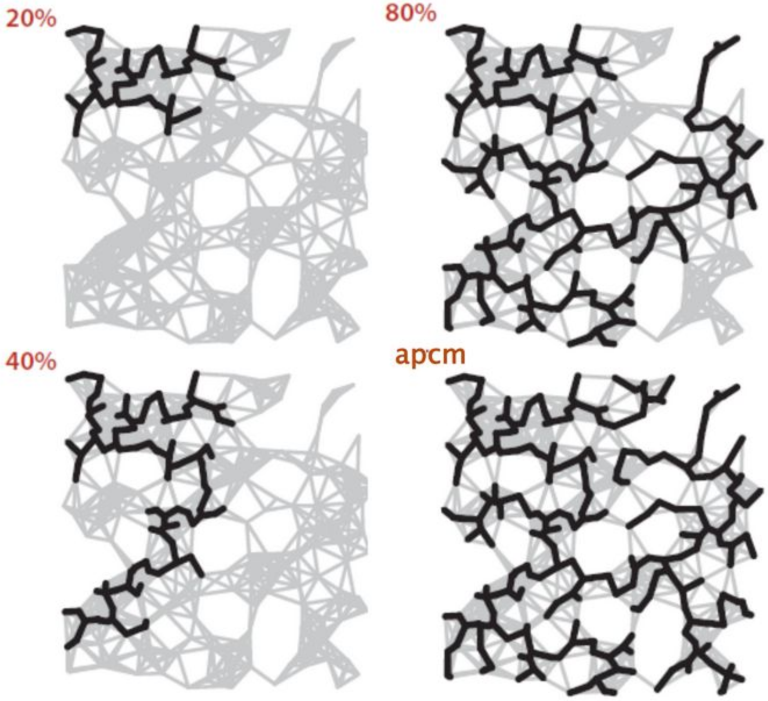
⇒ diverși algoritmi

Arbori parțiali de cost minim

Kruskal



Prim

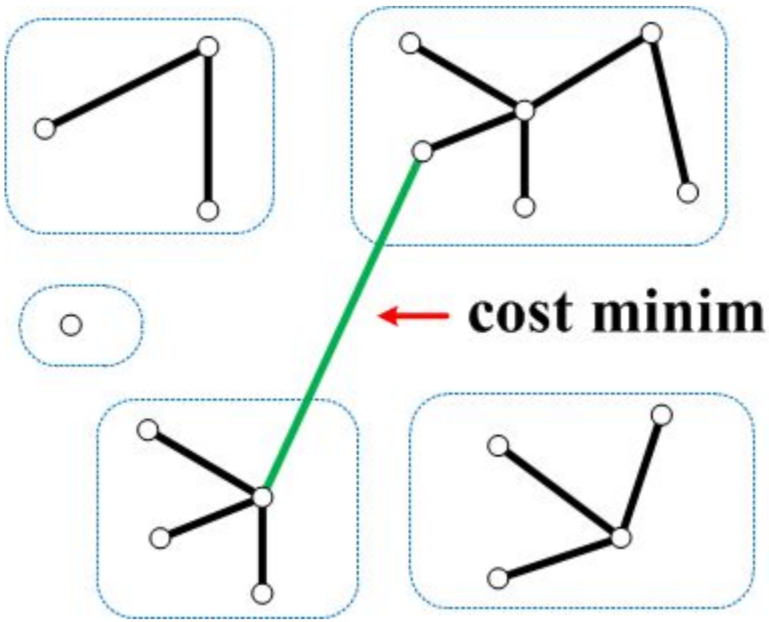


Imagine din
R. Sedgewick, K. Wayne – **Algorithms, 4th edition**, Pearson Education, 2011

Algoritmul lui Kruskal

Algoritmul lui Kruskal

La un pas, este selectată o muchie de cost minim din G, **care nu formează cicluri cu muchiile deja selectate** (care unește două componente conexe din graful deja construit).

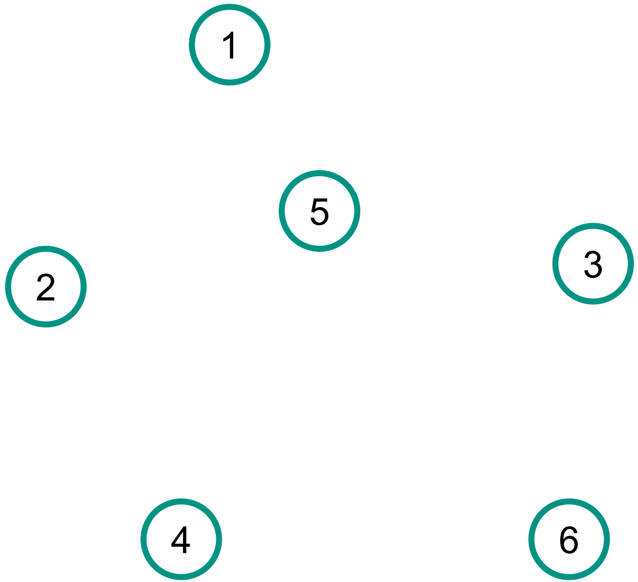


O primă formă a algoritmului

- **Inițial: T = (V, ∅)**
- **pentru** i = 1, n-1
  - alege o muchie uv cu **cost minim din G** a.î. u,v sunt în **componente conexe diferite** (T + uv aciclic)
  - E(T) = E(T) ∪ {uv}

O primă formă a algoritmului

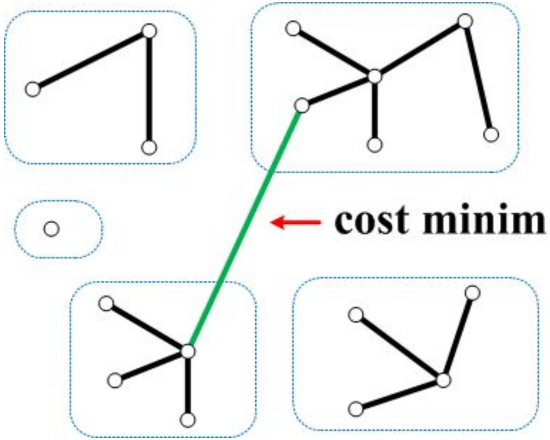
- **Inițial:** cele n vârfuri sunt **izolate**, fiecare formând o componentă conexă



O primă formă a algoritmului

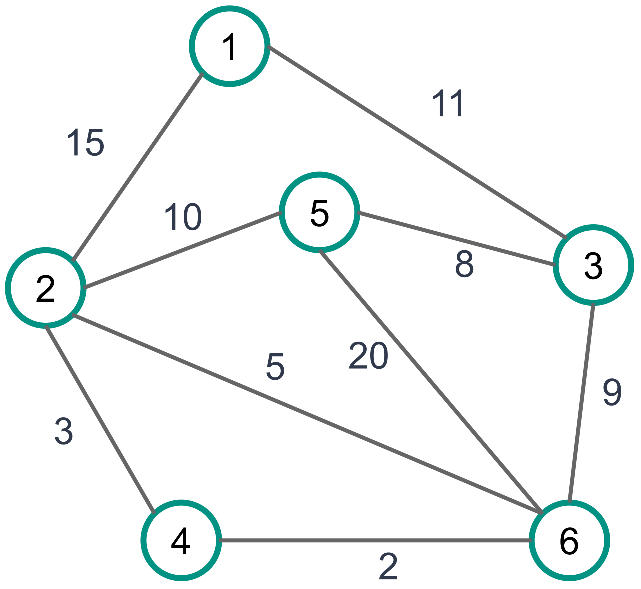
- **<u>La un pas:</u>**

Muchiile selectate formează o **pădure.**

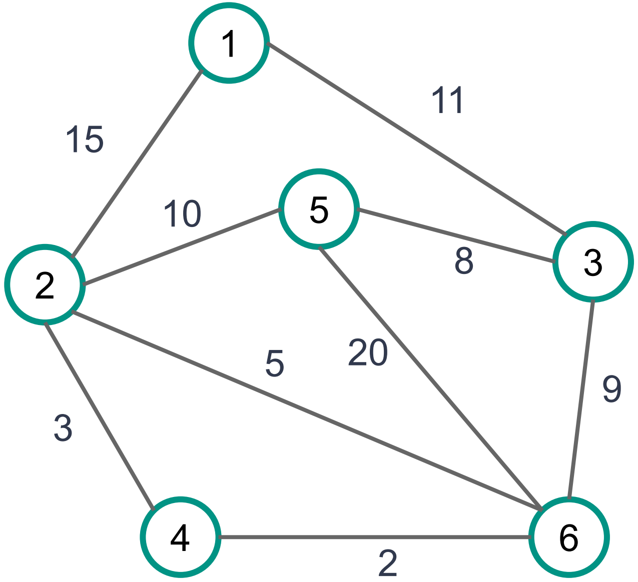


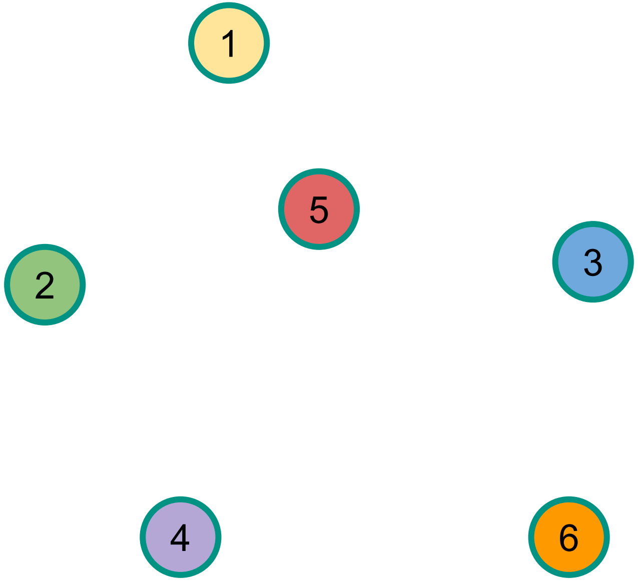
Este selectată o muchie de cost minim, care unește doi arbori din pădurea curentă (două componente conexe).

Exemplu

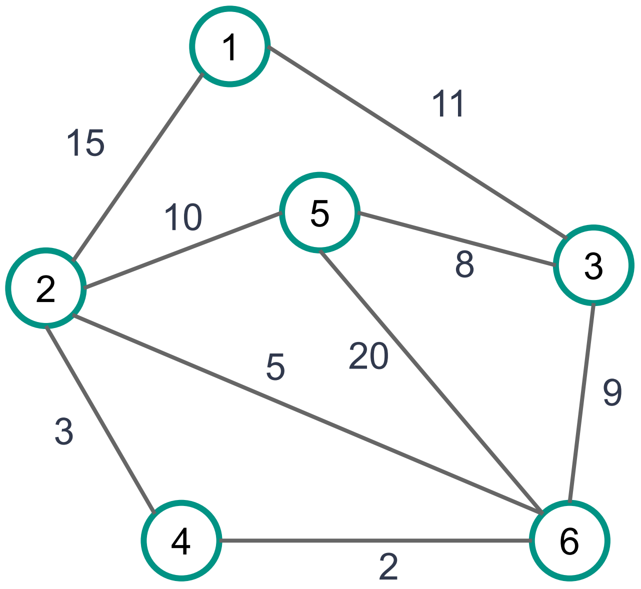


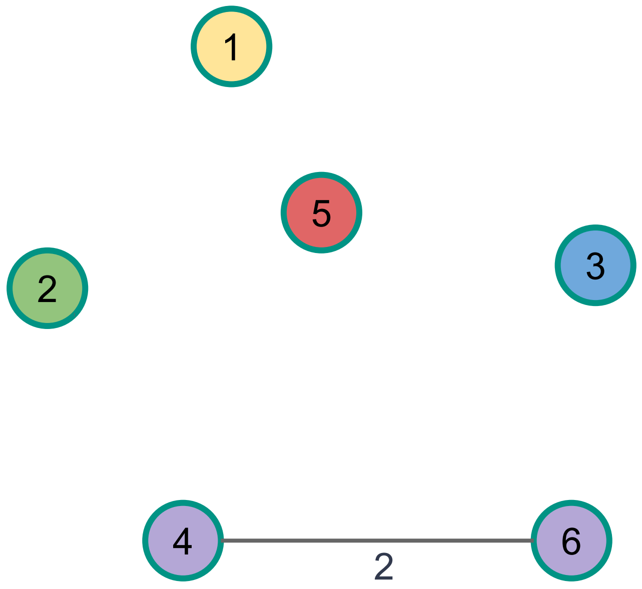
Exemplu



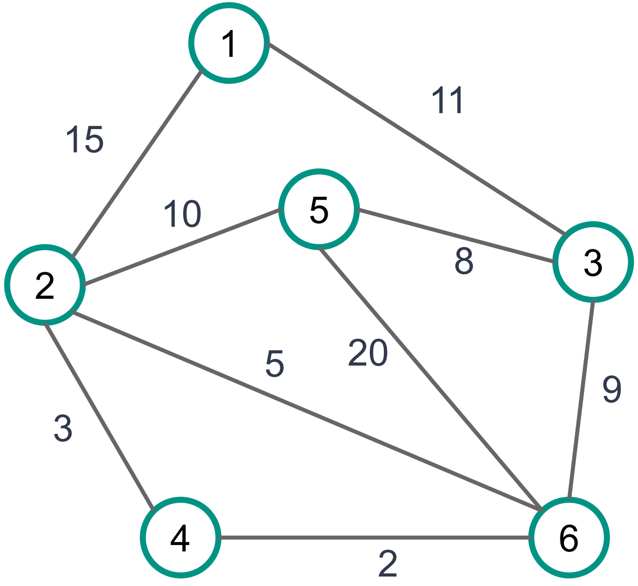


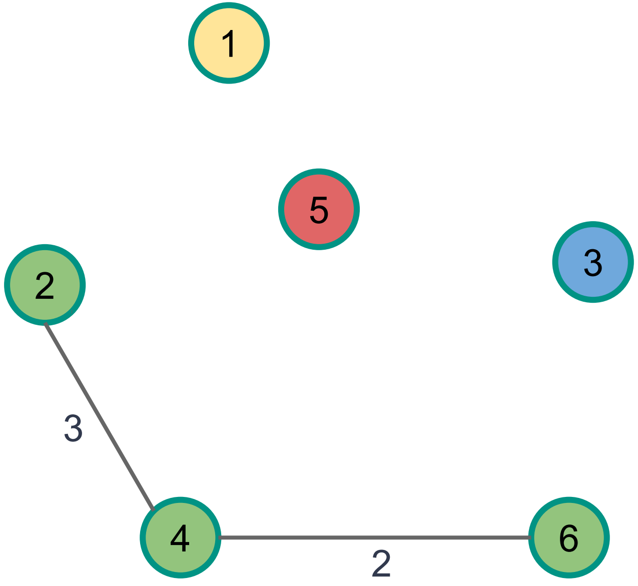
Exemplu



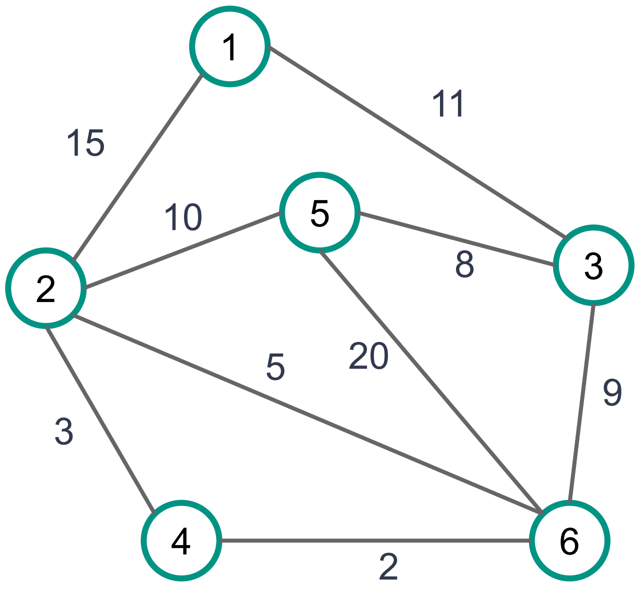


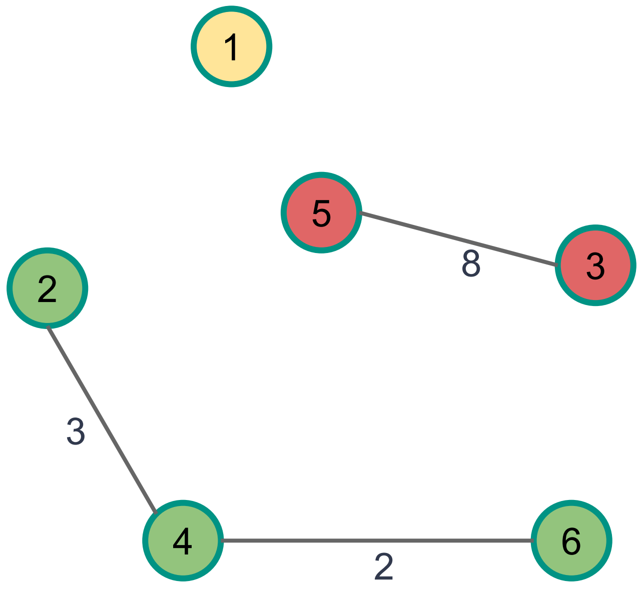
Exemplu



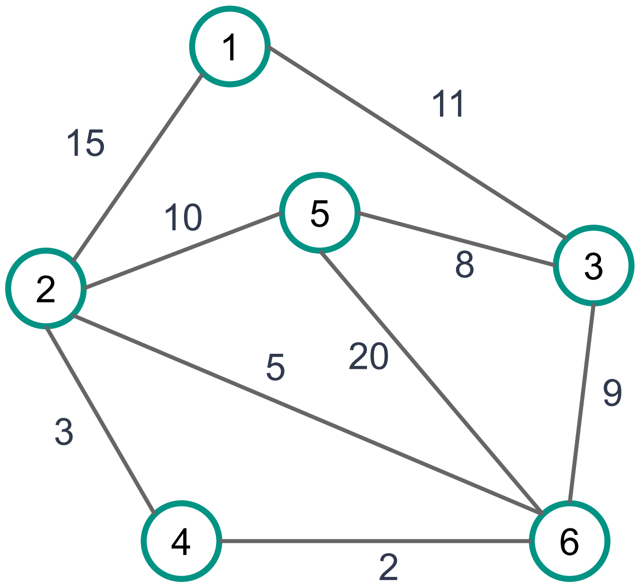


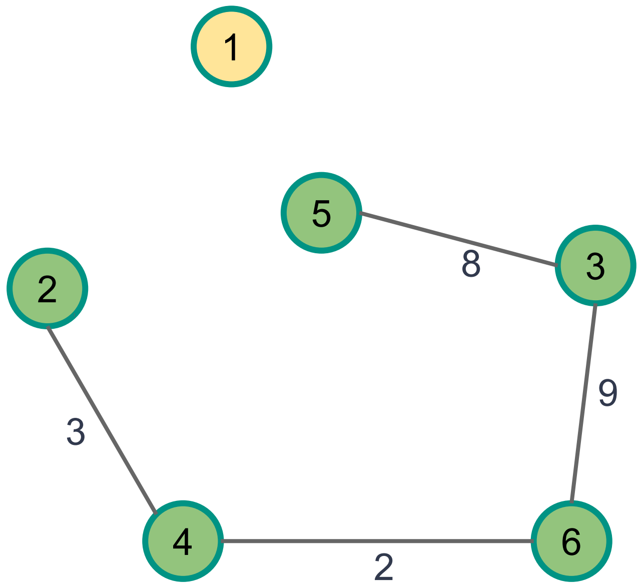
Exemplu



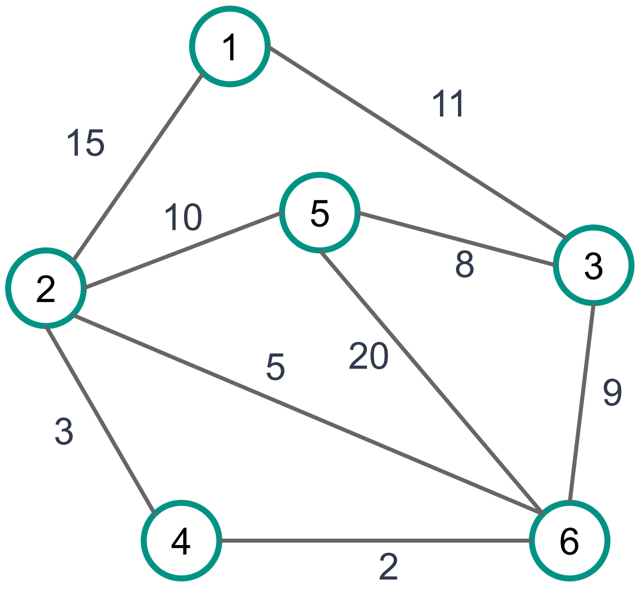


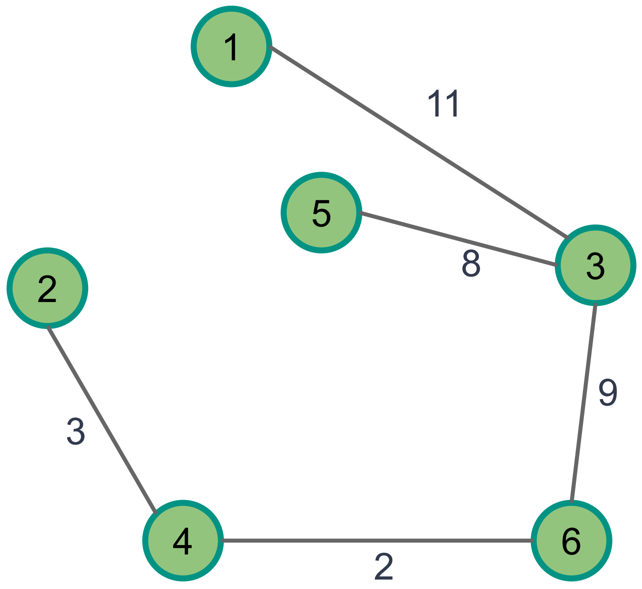
Exemplu





Exemplu





Kruskal – Implementare

- **Cum reprezentăm graful în memorie?**
- **Cum selectăm ușor o muchie:**
  - de cost minim
  - care unește două componente (nu formează cicluri cu muchiile deja selectate)

Kruskal – Implementare

Pentru a selecta ușor o muchie de cost minim cu proprietatea dorită, **ordonăm crescător muchiile după cost și considerăm muchiile în această ordine.**

Kruskal – Implementare

Reprezentarea grafului ponderat

- **Listă de muchii:** memorăm, pentru fiecare muchie, extremitățile și costul

Kruskal – Implementare

- **Cum testăm dacă muchia curentă unește două componente (⇔ nu formează cicluri cu muchiile deja selectate)?**

Kruskal – Implementare

- **Cum testăm dacă muchia curentă unește două componente (⇔ nu formează cicluri cu muchiile deja selectate)?**

verificăm printr-o parcurgere dacă extremitățile muchiei sunt deja unite printr-un lanț

Kruskal – Implementare

- Cum testăm dacă muchia curentă unește două componente (⇔ nu formează cicluri cu muchiile deja selectate)?

verificăm printr-o parcurgere dacă extremitățile muchiei sunt deja unite printr-un lanț

⇒ O(mn) - ineficient

Kruskal – Implementare

Componentele sunt **mulțimi disjuncte din V** (partiție a lui V)

⇒ structuri pentru mulțimi disjuncte

- asociem fiecărei componente un reprezentant (o culoare)

Kruskal – Implementare

Operații necesare:

- **Inițializare(u) -**
- **Reprez(u) -**
- **Reunește(u,v) -**

Kruskal – Implementare

Operații necesare:

- **Inițializare(u) -** creează o componentă cu un singur vârf, u
- **Reprez(u) -**
- **Reunește(u,v) -**

Kruskal – Implementare

Operații necesare:

- **Inițializare(u) -** creează o componentă cu un singur vârf, u
- **Reprez(u) -** returnează reprezentantul (culoarea) componentei care conține pe u
- **Reunește(u,v) -**

Kruskal – Implementare

Operații necesare:

- **Inițializare(u)** - creează o componentă cu un singur vârf, u
- **Reprez(u)** - returnează reprezentantul (culoarea) componentei care conține pe u
- **Reunește(u,v)** - unește componenta care conține u cu cea care conține v

Kruskal – Implementare

O muchie uv unește două componente dacă și numai dacă

Kruskal – Implementare

O muchie uv unește două componente dacă și numai dacă

Reprez(u) ≠ Reprez(v)

Kruskal

```
sorteaza(E)

for (v=1; v <= n; v++)
    Initializare(v);
```

Kruskal

```
sorteaza(E)

for (v=1; v <= n; v++)
    Initializare(v);

nrmsel=0

for (uv ∈ E)
    if (Reprez(u) != Reprez(v)) {





    }
```

Kruskal

```
sorteaza(E)

for (v=1; v <= n; v++)
    Initializare(v);

nrmsel=0

for (uv ∈ E)
    if (Reprez(u) != Reprez(v)) {
        E(T) = E(T) ∪ {uv};



    }
```

Kruskal

```
sorteaza(E)

for (v=1; v <= n; v++)
    Initializare(v);

nrmsel=0

for (uv ∈ E)
    if (Reprez(u) != Reprez(v)) {
        E(T) = E(T) ∪ {uv};
        Reuneste(u,v);
        nrmsel = nrmsel + 1;
        if (nrmsel == n-1)
            STOP;   // break
    }
```

Kruskal

Complexitate

De câte ori se execută fiecare operație?

Kruskal

Complexitate

- **Sortare** → O(m logm) = O(m logn)
- **n * Initializare**
- **2m * Reprez**
- **(n-1) * Reuneste**

Depinde de modalitatea de memorare a componentelor conexe

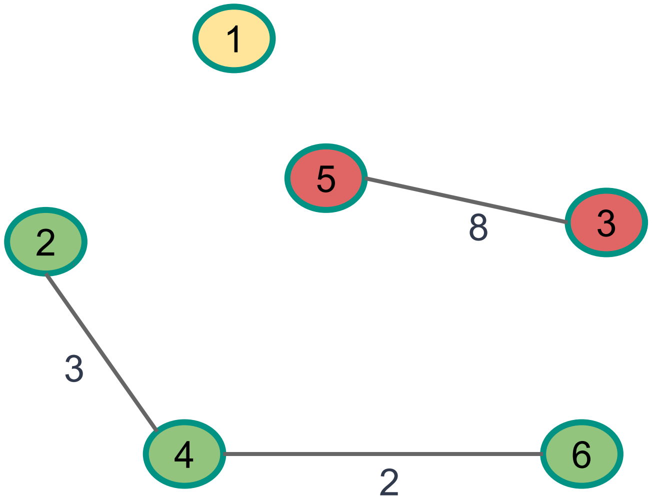
Kruskal

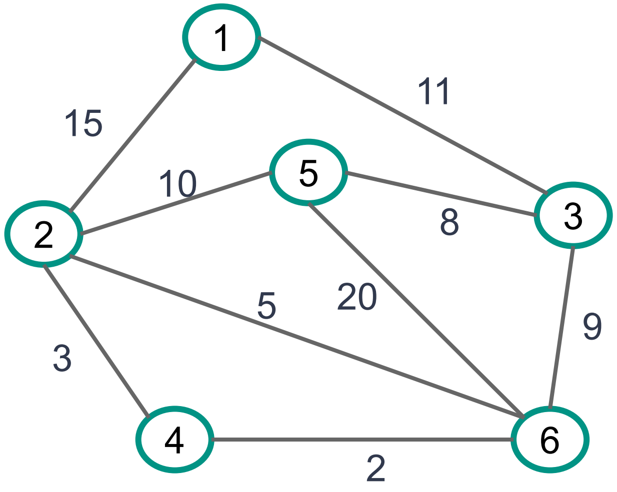
Cum memorăm componentele + reprezentantul / culoarea componentei în care se află un vârf?

Kruskal

Varianta 1 - memorăm într-un vector, pentru fiecare vârf, reprezentantul / culoarea componentei din care face parte

r[u] = culoarea (reprezentantul) componentei care conține vârful u





$r = [1, 2, 3, 2, 3, 2]$

Kruskal

- Initializare

- Reprez

- Reuneste

Kruskal

- **Initializare - O(1)**

```
void Initializare(int u) {
    r[u] = u;
}
```

- **Reprez**

- **Reuneste**

Kruskal

- **Initializare - O(1)**

```
void Initializare(int u) {
    r[u] = u;
}
```

- **Reprez - O(1)**

```
int Reprez(int u) {
    return r[u];
}
```

- **Reuneste**

Kruskal

- **Initializare - O(1)**

```
void Initializare(int u) {
    r[u] = u;
}
```

- **Reprez - O(1)**

```
int Reprez(int u) {
    return r[u];
}
```

- **Reuneste - O(n)**

```
void Reuneste(int u, int v) {
    r1 = Reprez(u);//r1=r[u]
    r2 = Reprez(v);//r2=r[v]
    for(k=1; k<=n; k++)
        if(r[k] == r2)
            r[k] = r1;
}
```

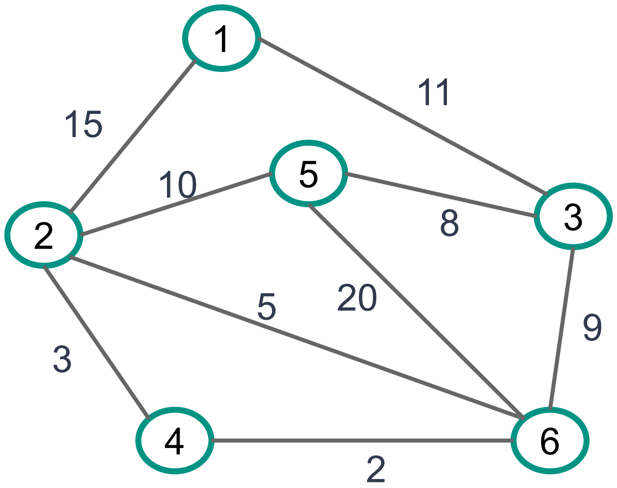
Kruskal

Complexitate

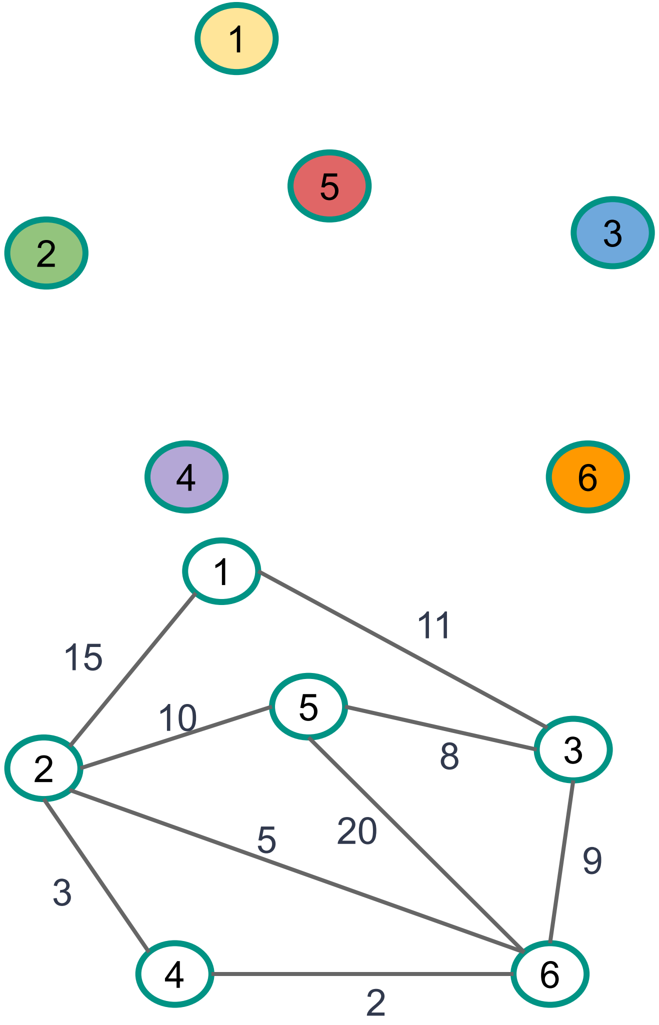
Varianta 1 - dacă folosim vector de reprezentanți

- **Sortare** → $O(m \log m) = O(m \log n)$
- **n * Initializare** → $O(n)$
- **2m * Reprez** → $O(m)$
- **(n-1) * Reuneste** → $O(n^2)$

$$\mathbf{O(m \log n + n^2)}$$

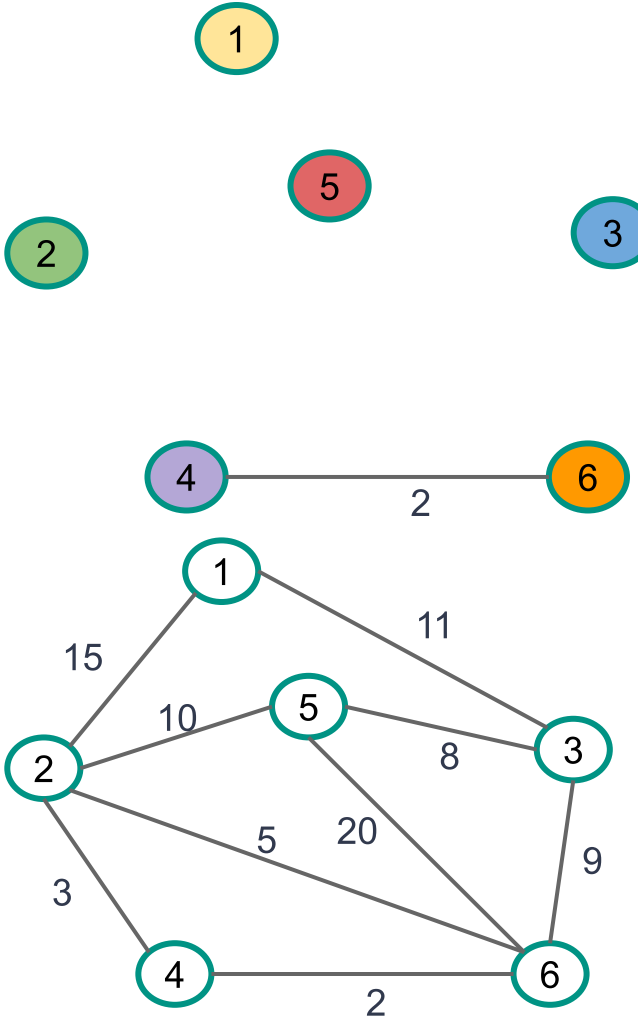


(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)



r = [1,2,3,4,5,6]

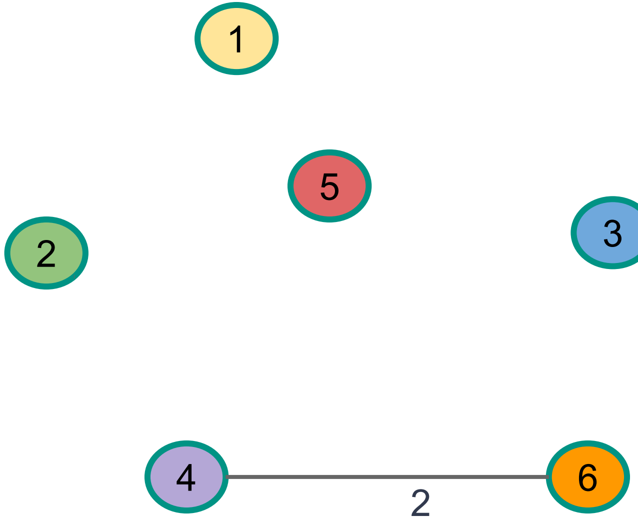
(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)

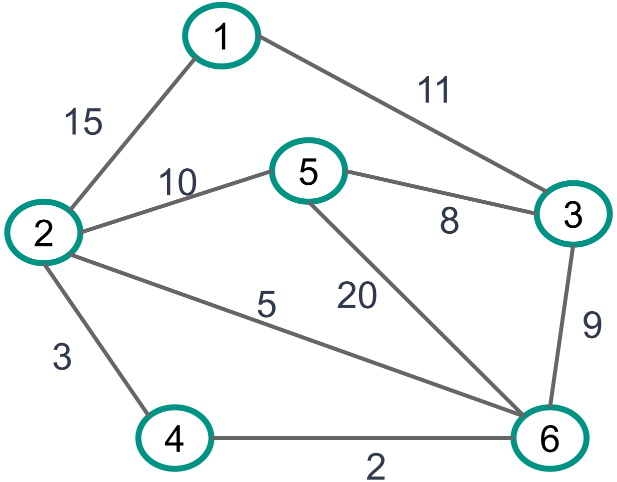


(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)

$r = [1,2,3,\underline{4},5,\underline{6}]$

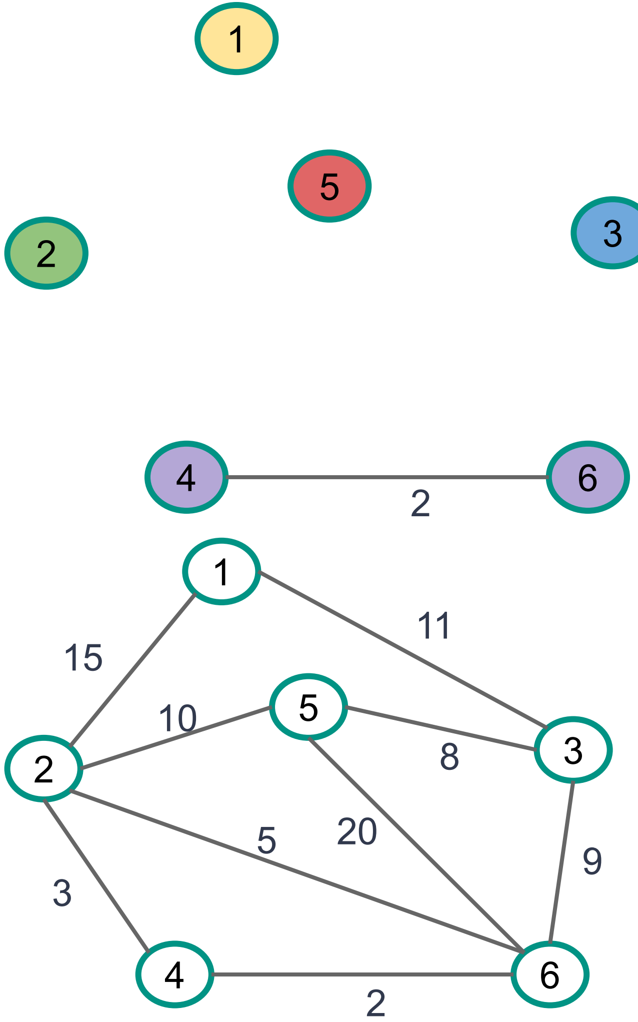
$r(4) \neq r(6)$





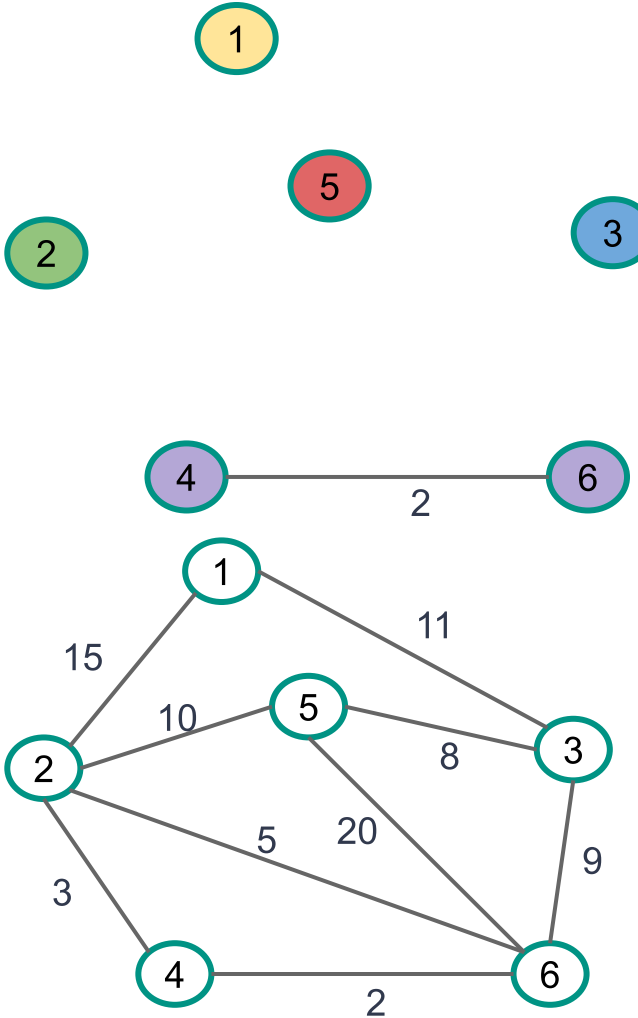
(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)

r = [1,2,3,4,5,6]
Reuneste(4, 6)



(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)

r = [1,2,3,4,5,6]
r = [1,2,3,4,5,4]



(4, 6)

(2, 4)

(2, 6)

(3, 5)

(3, 6)

(2, 5)

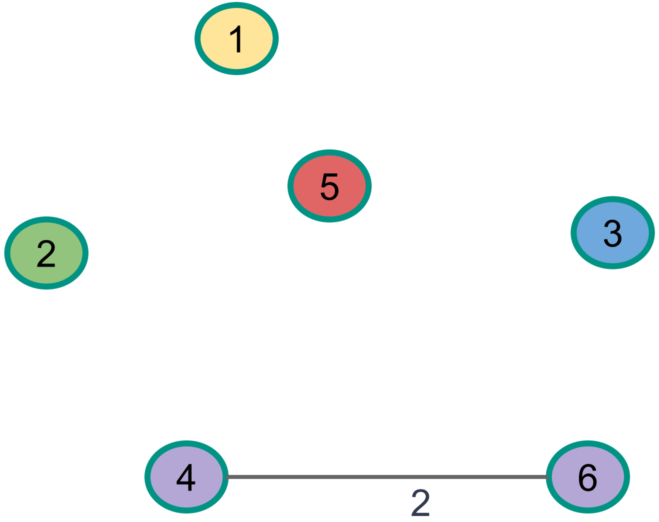
(1, 3)

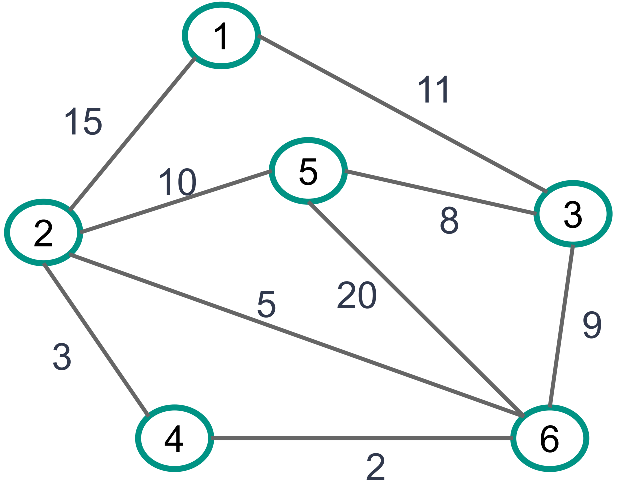
(1, 2)

(5, 6)

r = [1,2,3,4,5,6]

r = [1,2,3,4,5,4]



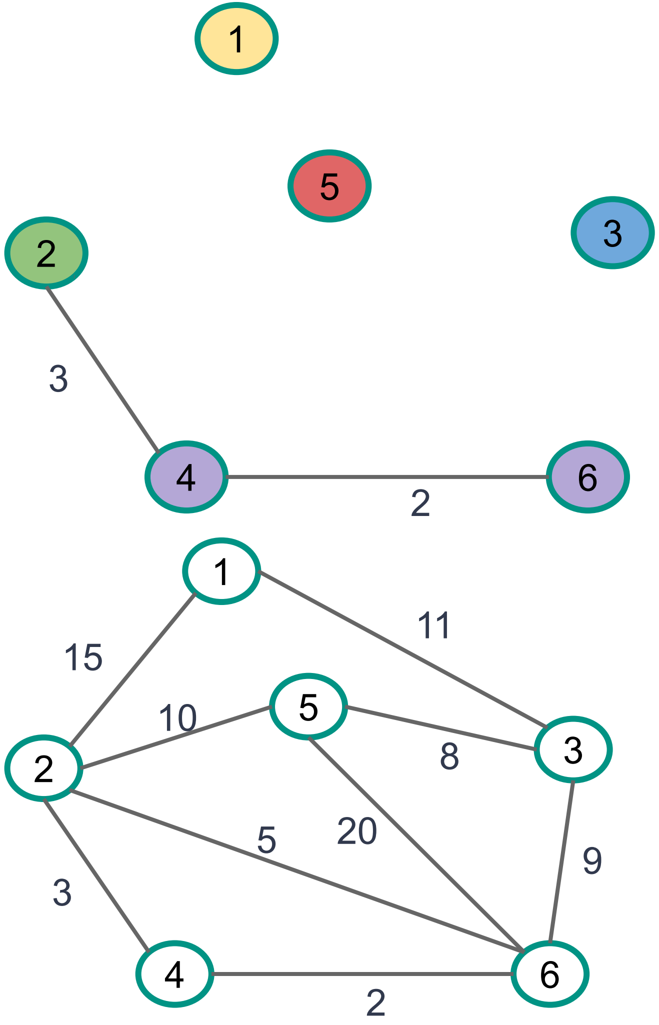


(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)

$r = [1,2,3,4,5,6]$

$r = [1,\underline{2},3,\underline{4},5,4]$

$r(2) \neq r(4)$

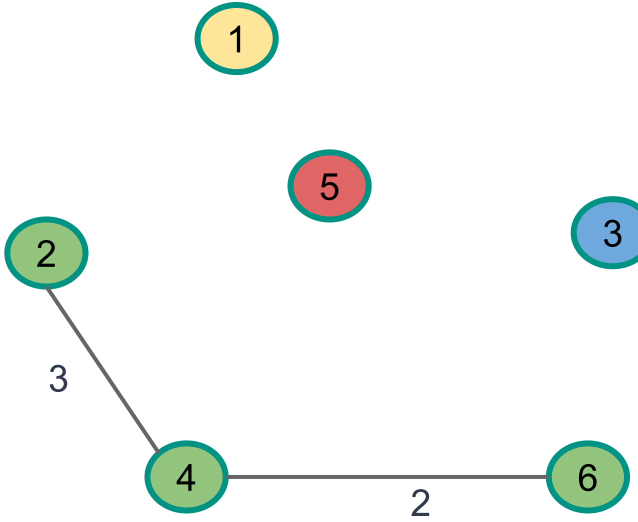


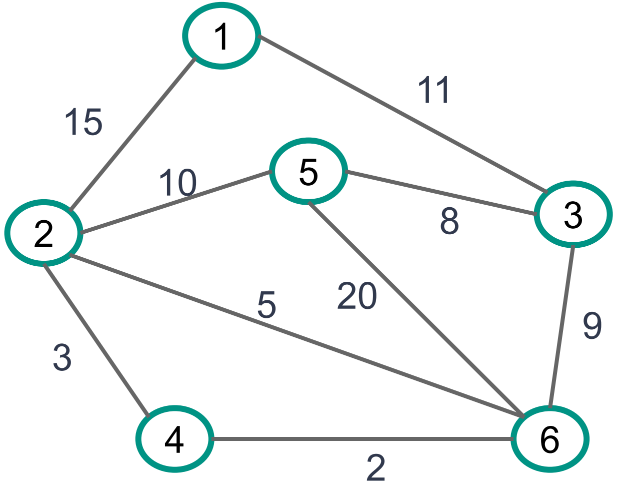
(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)

$r = [1,2,3,4,5,6]$

$r = [1,\underline{2},3,\underline{4},5,4]$

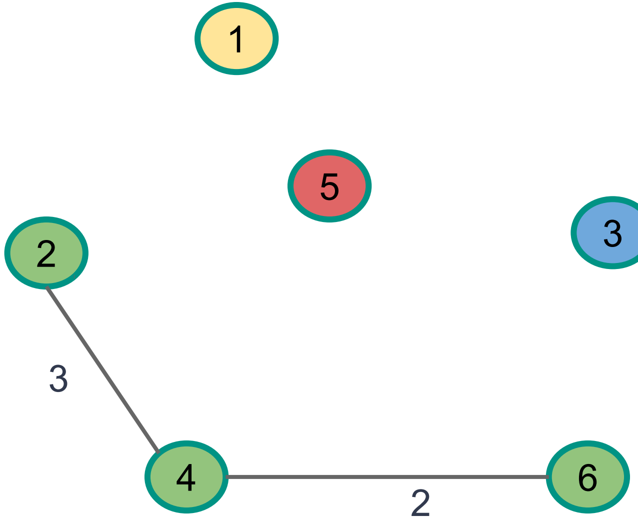
$r(2) \neq r(4)$

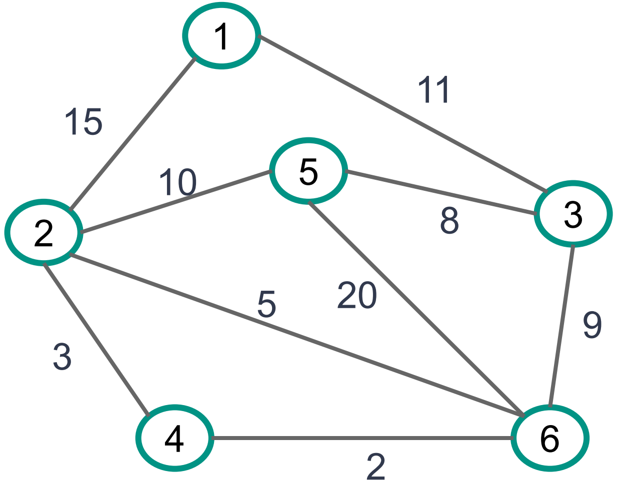




(4, 6)
(2, 4)
(2, 6)
(3, 5)
(3, 6)
(2, 5)
(1, 3)
(1, 2)
(5, 6)

r = [1,2,3,4,5,6]
r = [1,2,3,4,5,4]
r = [1,2,3,2,5,2]





r = [1,2,3,4,5,6]

(4, 6) r = [1,2,3,4,5,4]

(2, 4) r = [1,2,3,2,5,2]

(2, 6)

(3, 5)

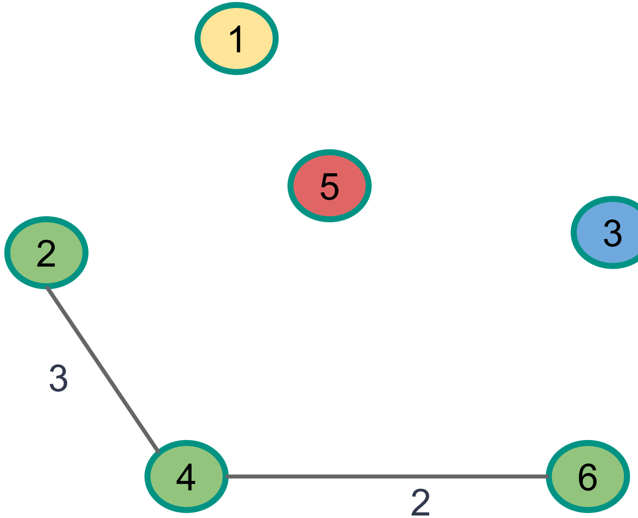
(3, 6)

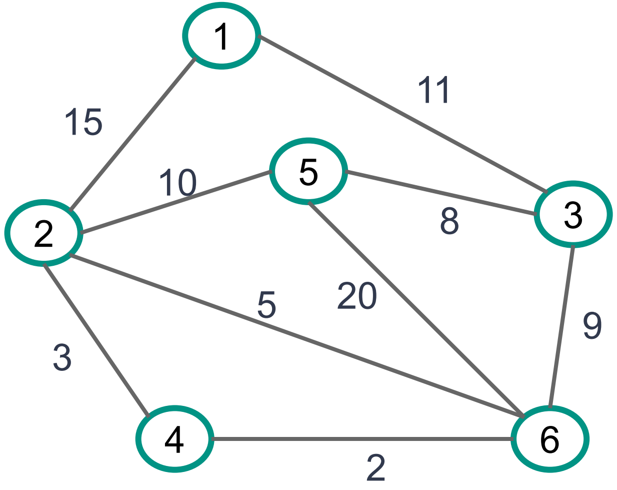
(2, 5)

(1, 3)

(1, 2)

(5, 6)





r = [1,2,3,4,5,6]

(4, 6) r = [1,2,3,4,5,4]

(2, 4) r = [1,$\underline{2}$,3,2,5,$\underline{2}$]

(2, 6) r(2) = r(6) → **NU**

(3, 5)

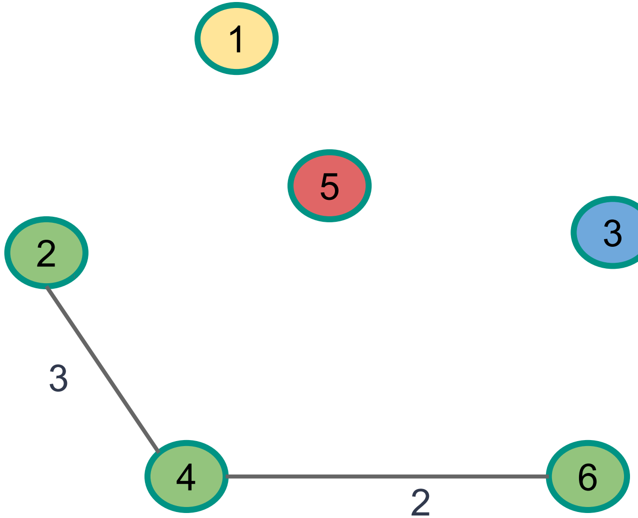
(3, 6)

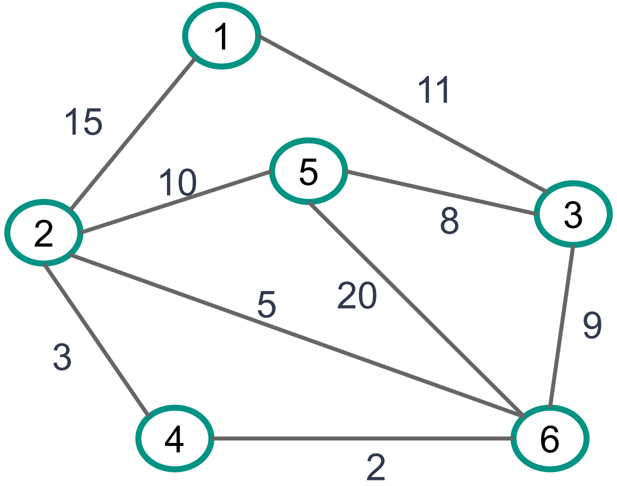
(2, 5)

(1, 3)

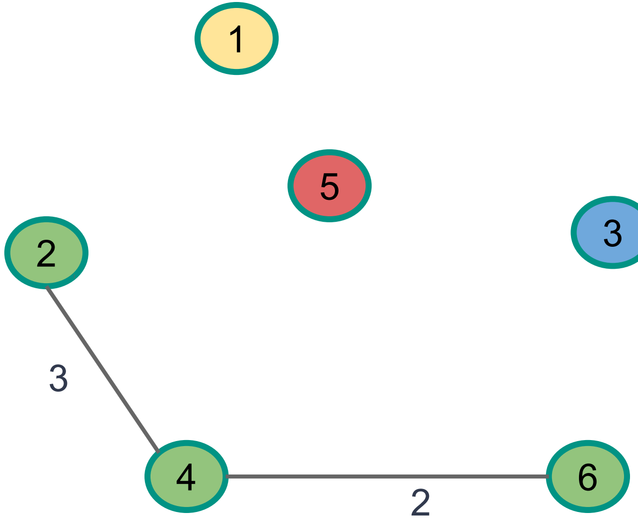
(1, 2)

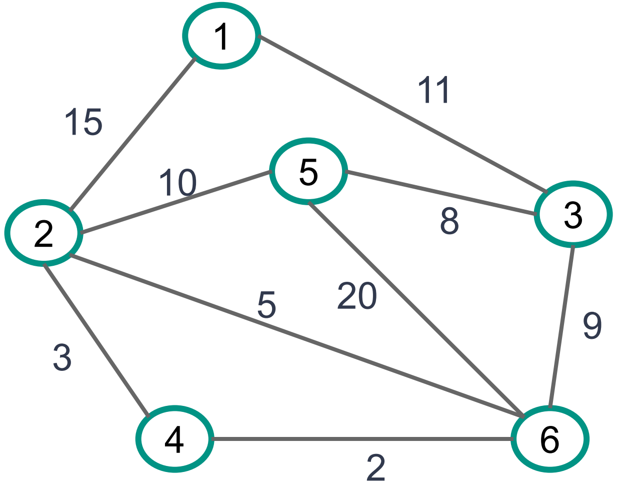
(5, 6)



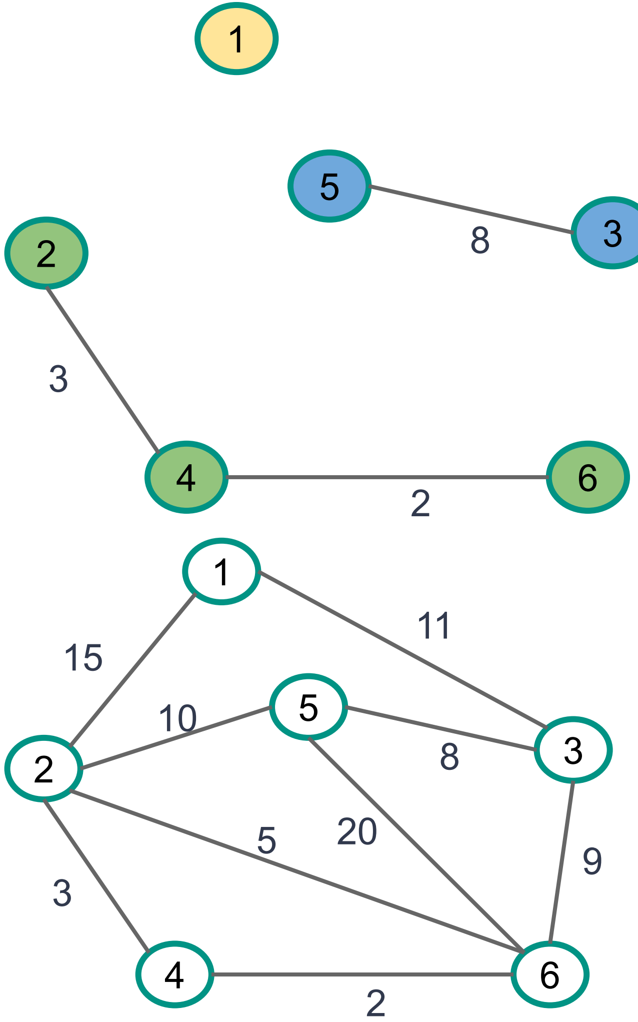


	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	
(3, 6)	
(2, 5)	
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	

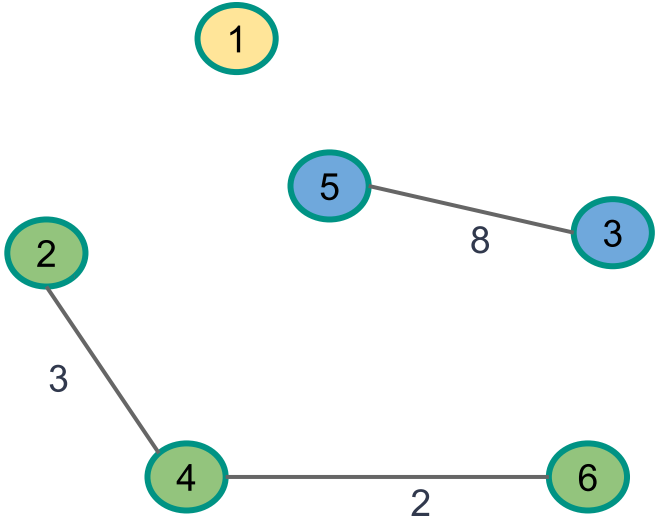


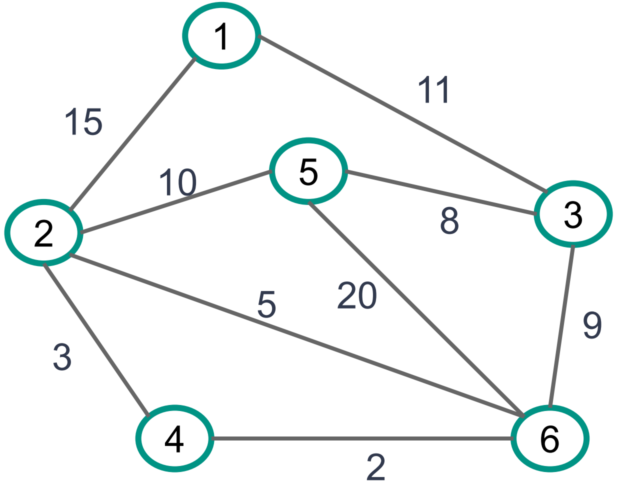


	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,<u>3</u>,2,<u>5</u>,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r(3) ≠ r(5)
(3, 6)	
(2, 5)	
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	

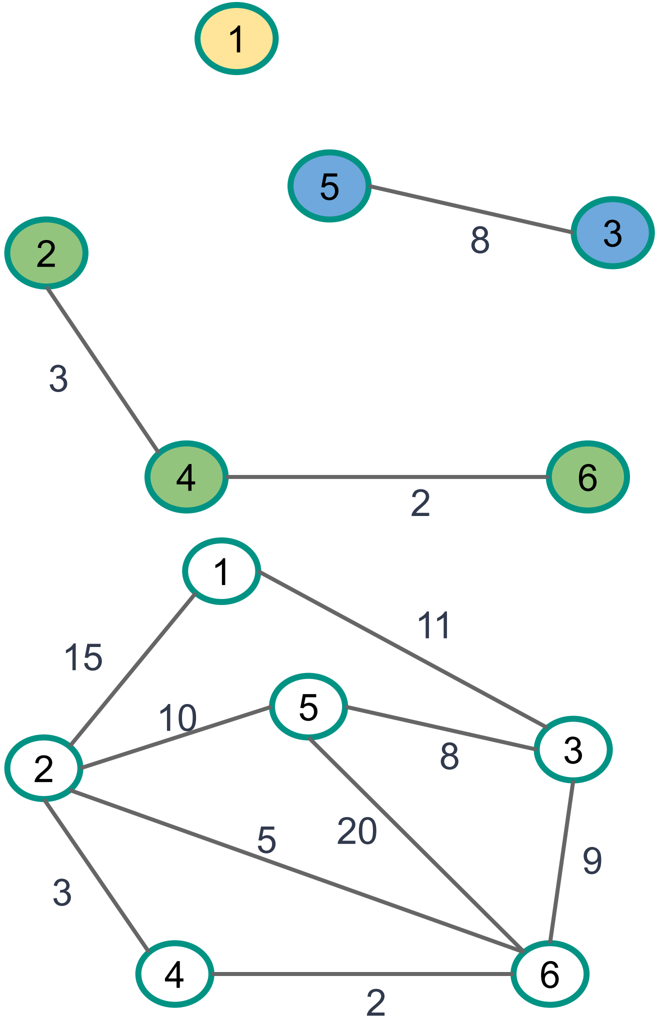


	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	
(2, 5)	
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	

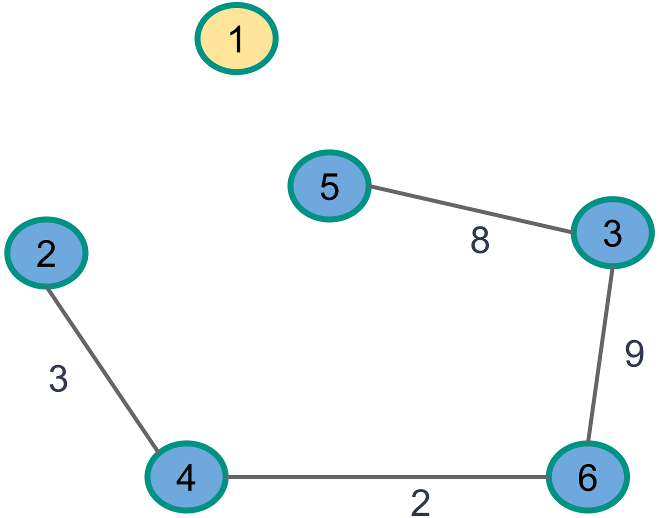


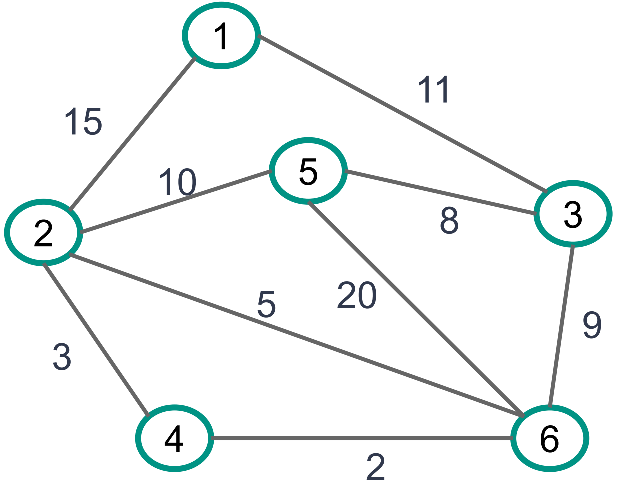


	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	
(2, 5)	
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	

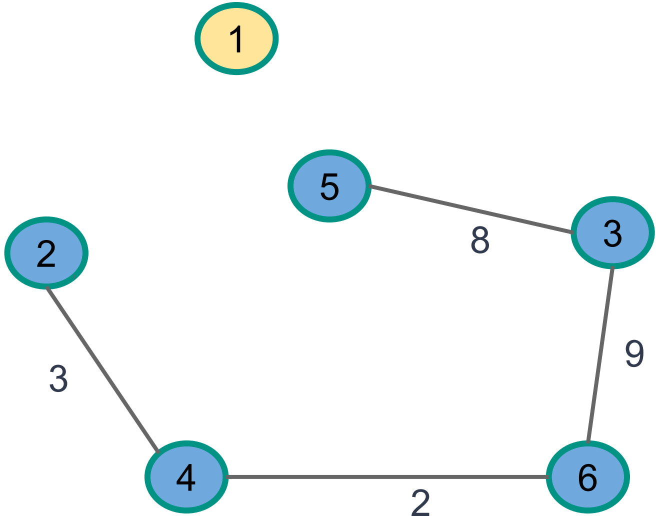


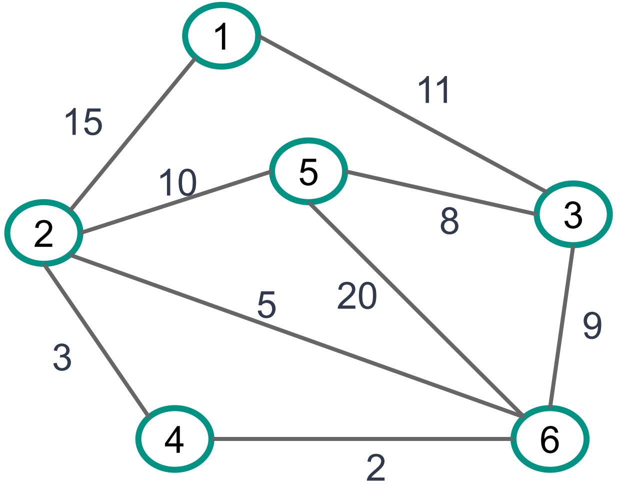
	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	r(3) ≠ r(6)
(2, 5)	
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	



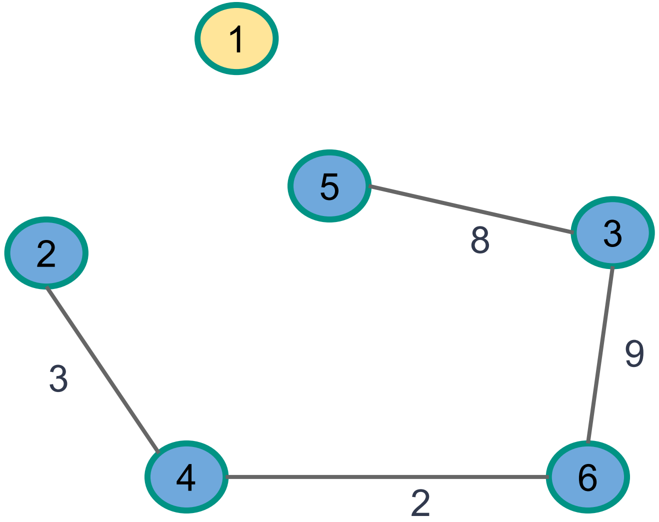


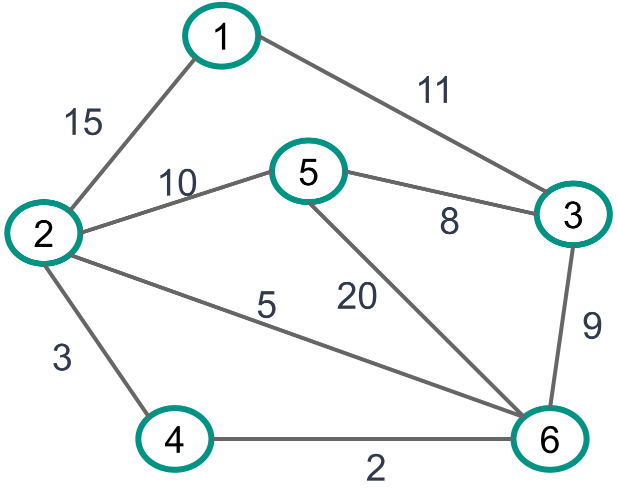
	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	r = [1,3,3,3,3,3]
(2, 5)	
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	



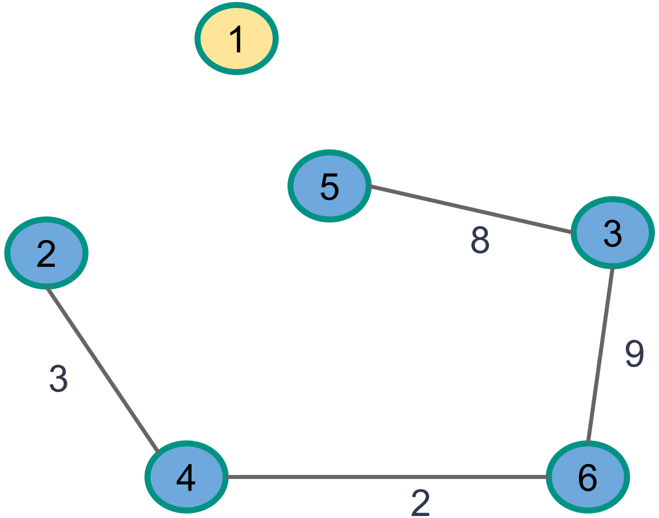


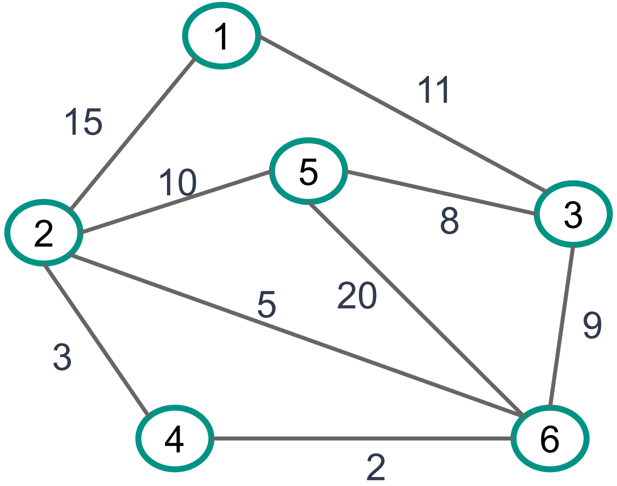
	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	$r(2) = r(6) \rightarrow$ **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	r = [1,3,3,3,3,3]
(2, 5)	
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	



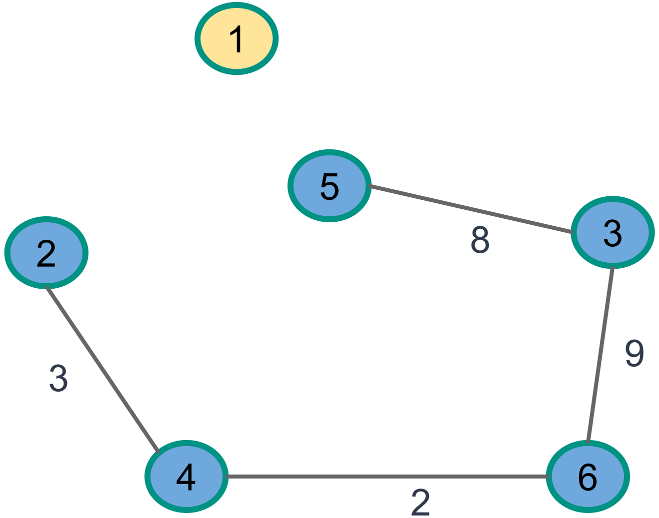


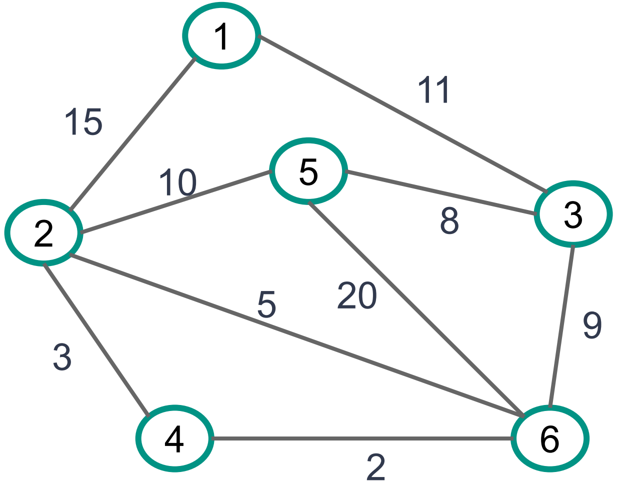
	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	r = [1,$\underline{3}$,3,3,$\underline{3}$,3]
(2, 5)	r(2) = r(5) → **NU**
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	



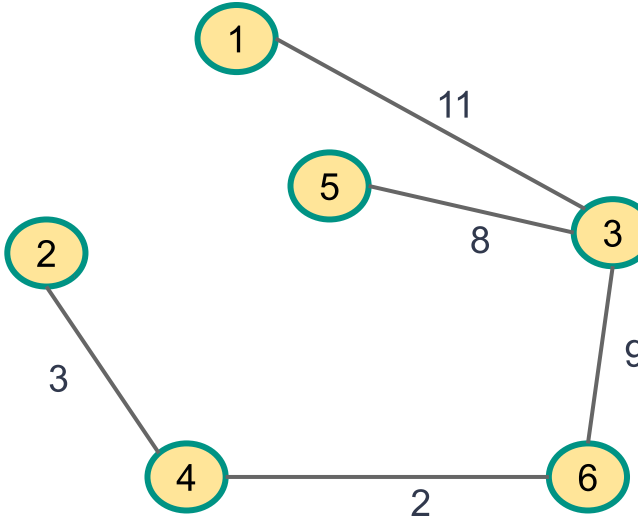


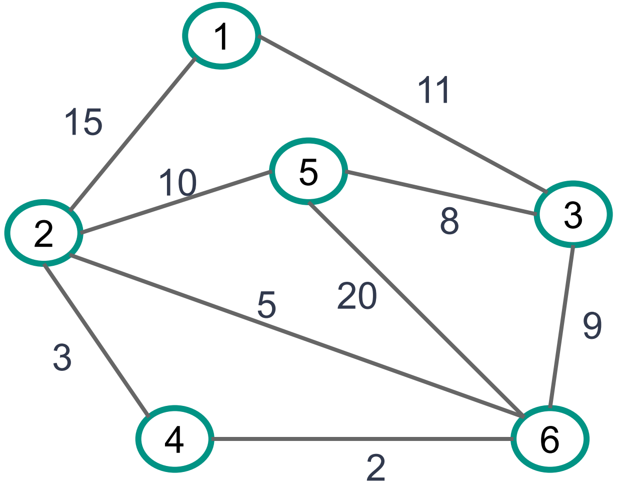
	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	r = [1,3,3,3,3,3]
(2, 5)	r(2) = r(5) → **NU**
(1, 3)	
(1, 2)	
(5, 6)	



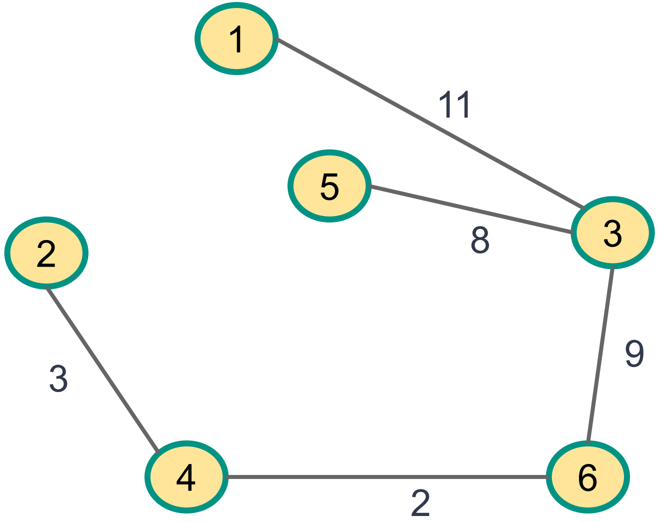


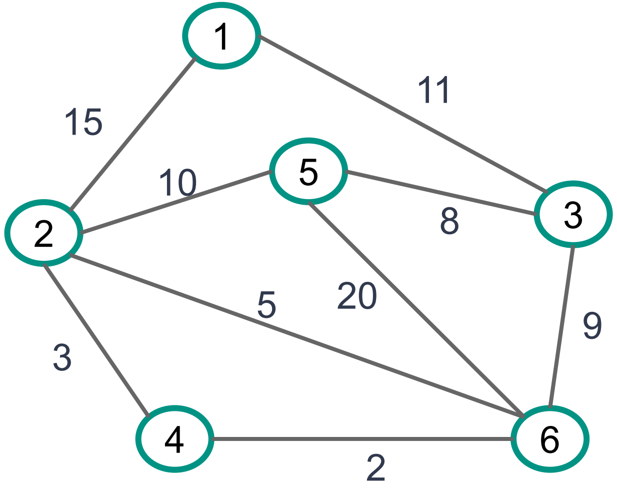
	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	r = [1,3,3,3,3,3]
(2, 5)	r(2) = r(5) → **NU**
(1, 3)	r(1) ≠ r(3)
(1, 2)	
(5, 6)	





	r = [1,2,3,4,5,6]
(4, 6)	r = [1,2,3,4,5,4]
(2, 4)	r = [1,2,3,2,5,2]
(2, 6)	r(2) = r(6) → **NU**
(3, 5)	r = [1,2,3,2,3,2]
(3, 6)	r = [1,3,3,3,3,3]
(2, 5)	r(2) = r(5) → **NU**
(1, 3)	r = [1,1,1,1,1,1]
(1, 2)	
(5, 6)	





r = [1,2,3,4,5,6]

(4, 6) r = [1,2,3,4,5,4]

(2, 4) r = [1,2,3,2,5,2]

(2, 6) r(2) = r(6) → **NU**

(3, 5) r = [1,2,3,2,3,2]

(3, 6) r = [1,3,3,3,3,3]

(2, 5) r(2) = r(5) → **NU**

(1, 3) r = [1,1,1,1,1,1]

STOP

(1, 2)

(5, 6)

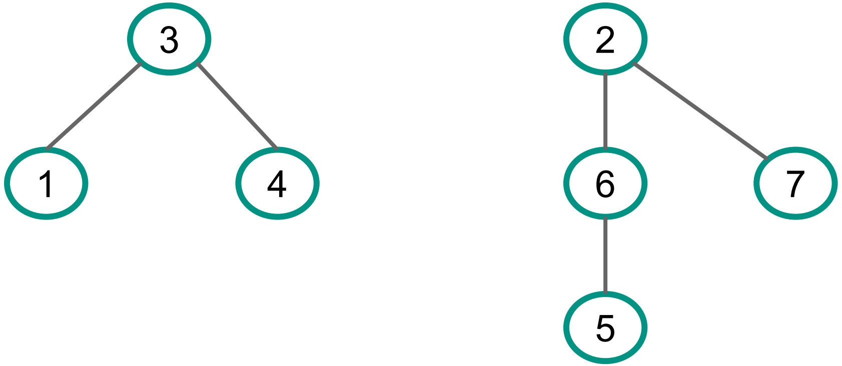
Kruskal

Varianta 2 - Structuri pentru mulțimi disjuncte **Union / Find**

Kruskal

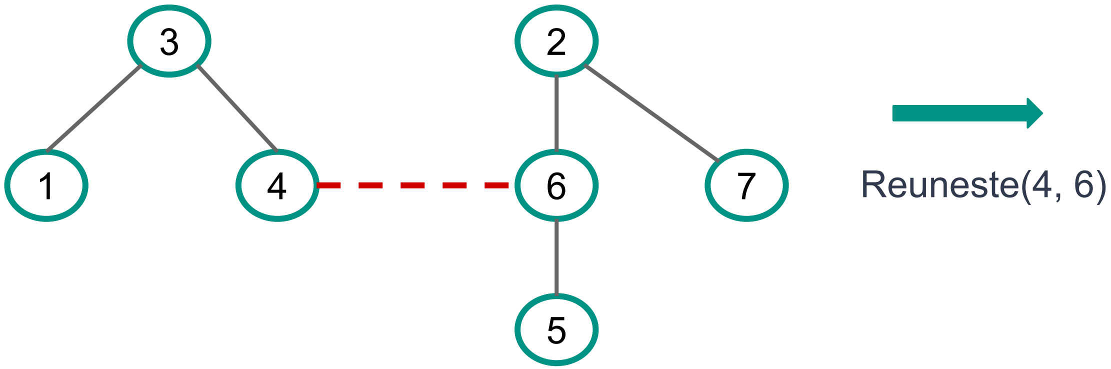
Varianta 2 - Structuri pentru mulțimi disjuncte **Union / Find - arbori**

- memorăm componentele conexe ca arbori, folosind **vectorul tata**
- **reprezentantul componentei va fi rădăcina arborelui**



Kruskal

- **Reuniunea** a doi arbori ⇒ rădăcina unui arbore devine fiu al rădăcinii celuilalt arbore



Kruskal

- **Reuniunea** se va face în funcție de înălțimea arborilor (reuniune ponderată)

- arborele cu înălțimea mai mică devine subarbore al rădăcinii celuilalt arbore

Kruskal

- **Reuniunea** se va face în funcție de înălțimea arborilor (reuniune ponderată)

⇒ **arbori de înălțime logaritmică**

(Inductiv: un arbore de înălțime h are cel puțin 2^h vârfuri)

- arborele cu înălțimea mai mică devine subarbore al rădăcinii celuilalt arbore

Kruskal

Detalii de implementare operații cu structuri Union / Find pentru mulțimi disjuncte

- **Initializare**
- **Reprez(u)** ⇒ determinarea rădăcinii arborelui care conține u
- **Reuneste(u)** ⇒ reuniune ponderată

ASD + laborator AG

Kruskal

```
void Initializare(int u) {

}

int Reprez(int u) {



}
```

Kruskal

```
void Initializare(int u) {
    tata[u] = h[u] = 0;
}

int Reprez(int u) {




}
```

Kruskal

```
void Initializare(int u) {
    tata[u] = h[u] = 0;
}

int Reprez(int u) {
    while (tata[u] != 0)
        u = tata[u];
    return u;
}
```

Kruskal

```
void Initializare(int u) {
    tata[u] = h[u] = 0;
}

int Reprez(int u) {
    while (tata[u] != 0)
        u = tata[u];
    return u;
}
```

```
void Reuneste(int u, int v) {









}
```

Kruskal

```
void Initializare(int u) {
    tata[u] = h[u] = 0;
}

int Reprez(int u) {
    while (tata[u] != 0)
        u = tata[u];
    return u;
}
```

```
void Reuneste(int u, int v) {
    int ru, rv;
    ru = Reprez(u);
    rv = Reprez(v);
    if (h[ru] > h[rv])



}
```

Kruskal

```
void Initializare(int u) {
    tata[u] = h[u] = 0;
}

int Reprez(int u) {
    while (tata[u] != 0)
        u = tata[u];
    return u;
}
```

```
void Reuneste(int u, int v) {
    int ru, rv;
    ru = Reprez(u);
    rv = Reprez(v);
    if (h[ru] > h[rv])
        tata[rv] = ru;
    else {
        tata[ru] = rv;



    }
}
```

Kruskal

```
void Initializare(int u) {
    tata[u] = h[u] = 0;
}

int Reprez(int u) {
    while (tata[u] != 0)
        u = tata[u];
    return u;
}
```

```
void Reuneste(int u, int v) {
    int ru, rv;
    ru = Reprez(u);
    rv = Reprez(v);
    if (h[ru] > h[rv])
        tata[rv] = ru;
    else {
        tata[ru] = rv;
        if (h[ru] == h[rv])
            h[rv] = h[rv] + 1;
    }
}
```

Kruskal

Complexitate

Varianta 2 - dacă folosim arbori Union / Find

- **Sortare** → O(m logm) = O(m logn)
- **n * Initializare** → O(n)
- **2m * Reprez** →
- **(n-1) * Reuneste** →

Kruskal

Complexitate

Varianta 2 - dacă folosim arbori Union / Find

- **Sortare** → O(m logm) = O(m logn)
- **n * Initializare** → O(n)
- **2m * Reprez** → O(m logn)
- **(n-1) * Reuneste** → O(n logn)

Kruskal

Complexitate

Varianta 2 - dacă folosim arbori Union / Find

Sortare	$\rightarrow$ O(m logm) = O(m logn)
n * Initializare	$\rightarrow$ O(n)
2m * Reprez	$\rightarrow$ O(m logn)
(n-1) * Reuneste	$\rightarrow$ O(n logn)

O(m logn)

Kruskal

Concluzii complexitate - O(m logn)

Aplicații - Clustering

Gruparea unor obiecte în k clase cât mai *bine separate* (k dat)

- obiecte din clase diferite *să fie cât mai diferite*

Aplicații – Clustering

Gruparea unor obiecte în k clase cât mai *bine separate* (k dat)

- obiecte din clase diferite *să fie cât mai diferite*

Exemplu: k = 3, mulțime de cuvinte:

`sinonim, ana, apa, care, martian, este, case, partial, arbore, minim`

⇒ 3 clase

`este arbore apa case ana care`

`martian partial`

`sinonim minim`

Aplicații – Clustering

Gruparea unor obiecte în k clase cât mai *bine separate* (k dat)

- obiecte din clase diferite *să fie cât mai diferite*

Exemplu: k = 3, mulțime de cuvinte:

`sinonim, ana, apa, care, martian, este, case, partial, arbore, minim`

⇒ 3 clase

Sunt necesare (se dau):

- Criteriu de ”asemănare” între 2 obiecte ⇒ o distanță
- Măsură a gradului de separare a claselor

Clustering

Cadru formal

Se dau:

- O mulțime de **n obiecte** $S = \{o_1 \ldots, o_n\}$
  - cuvinte, imagini, fișiere, specii de animale etc

- O funcție de **distanță** $d : S \times S \to \mathbb{R}_+$
  - $d(o_i, o_j)$ = gradul de asemănare între o_i și o_j

- k - un număr natural
  - k = numărul de clase

Clustering

Definiții

Un **k-clustering al lui S** = o partiționare a lui S în k submulțimi nevide (numite **clase** sau **clustere**)

$$\mathscr{C} = (C_1, \ldots, C_k)$$

Clustering

Definiții

Un **k-clustering al lui S** = o partiționare a lui S în k submulțimi nevide (numite **clase** sau **clustere**)

$$\mathscr{C} = (C_1, \ldots, C_k)$$

Gradul de separare a lui $\mathscr{C}$

= distanța minimă dintre două obiecte aflate în clase diferite

= distanța minimă dintre două clase ale lui $\mathscr{C}$

sep($\mathscr{C}$) = min { d(o, o') | o,o' ∈ S, o și o' sunt în clase diferite ale lui $\mathscr{C}$ }

= min { $d(C_i, C_j)$ | $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$ }

Clustering

- **obiecte = cuvinte**
- **d = distanța de editare** d(ana, care) = 3: ana → cana → cara → care
- **k = 3**

martian

care

este

apa

sinonim

ana

minim

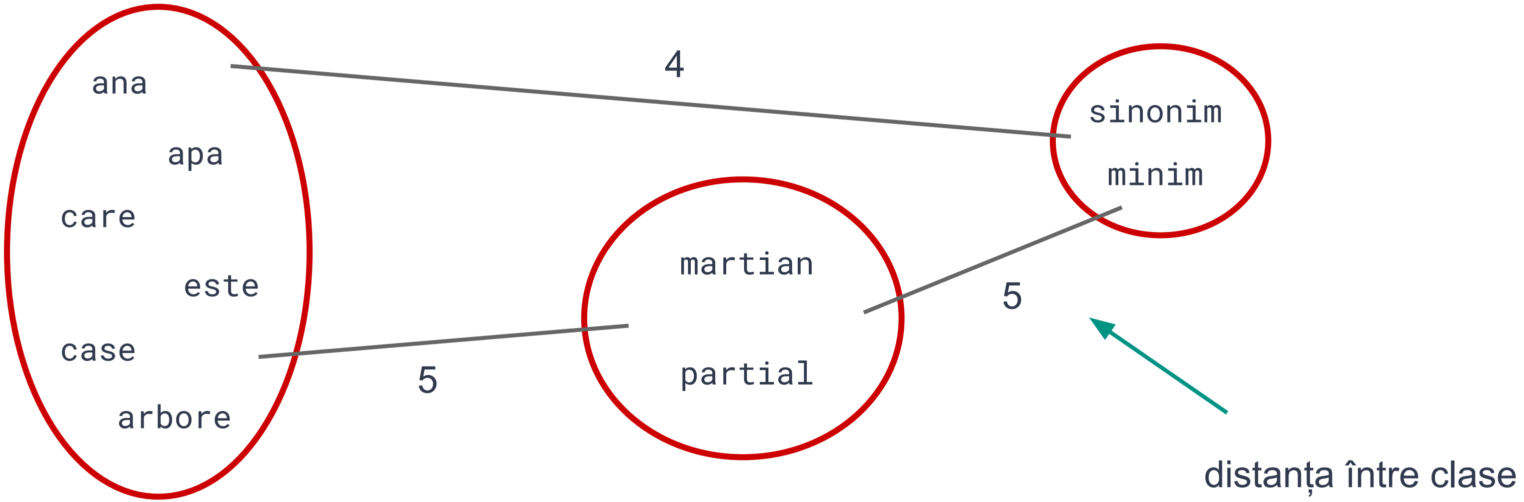
partial

case

arbore

Clustering

- obiecte = cuvinte
- d = distanța de editare
- k = 3



3-clustering cu gradul de separare = 4

Clustering

Problemă de Clustering:

Date S, d și k, să se determine un k-clustering cu **grad de separare maxim.**

Clustering

Idee:

martian
care
este
apa
sinonim
ana
minim
partial
case
arbore

Clustering

Idee:

- Inițial, fiecare obiect (cuvânt) formează o clasă
- La un pas, determinăm **cele mai asemănătoare (apropiate) două obiecte** aflate în clase diferite (cu distanța cea mai mică între ele) și unim clasele lor

Clustering

Idee:

- Inițial, fiecare obiect (cuvânt) formează o clasă
- La un pas, determinăm **cele mai asemănătoare (apropiate) două obiecte** aflate în clase diferite (cu distanța cea mai mică între ele) și unim clasele lor
- Repetăm până obținem k clase ⇒ n - k pași

Clustering

Cuvinte - distanța de editare

martian

care

este

apa

sinonim

ana

partial

minim

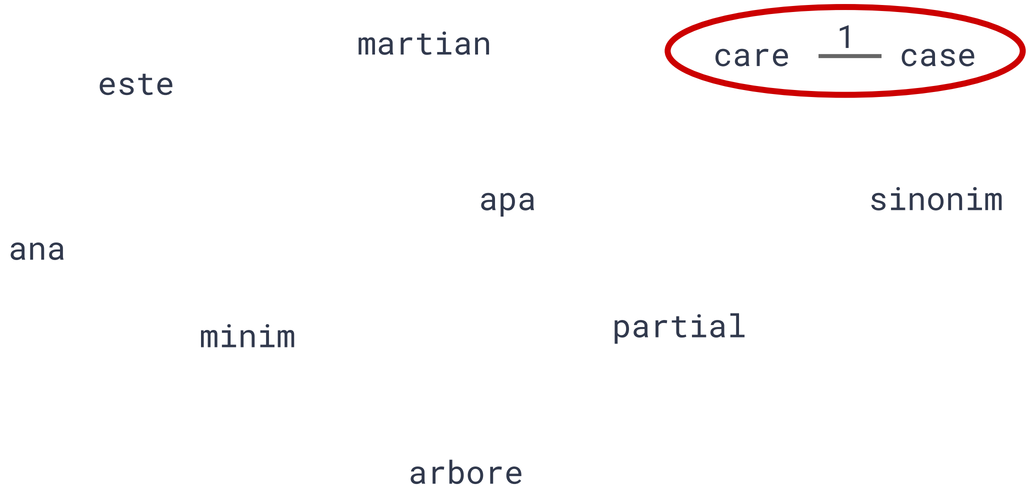
case

arbore

k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare



k = 3 clustere

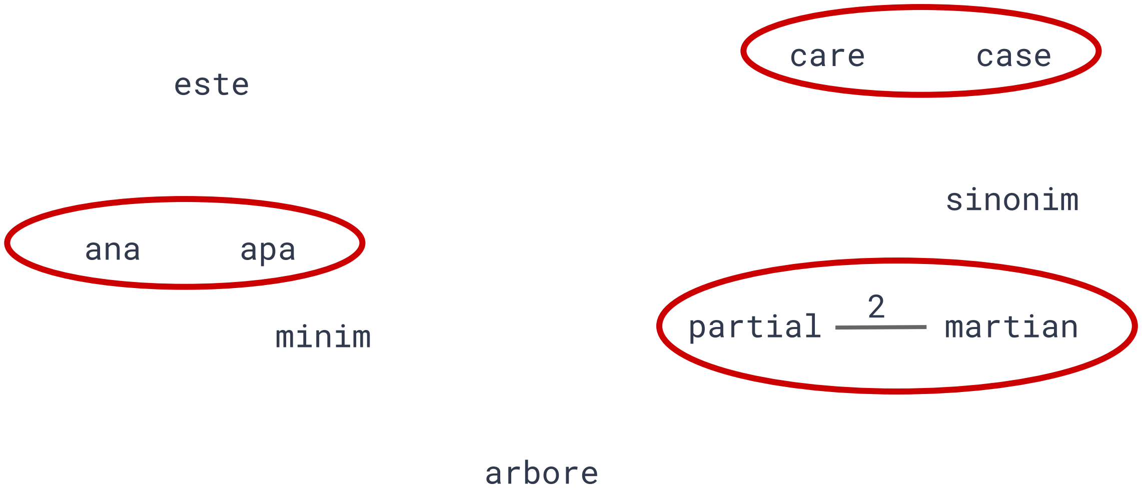
Clustering

Cuvinte - distanța de editare

k = 3 clustere

Clustering

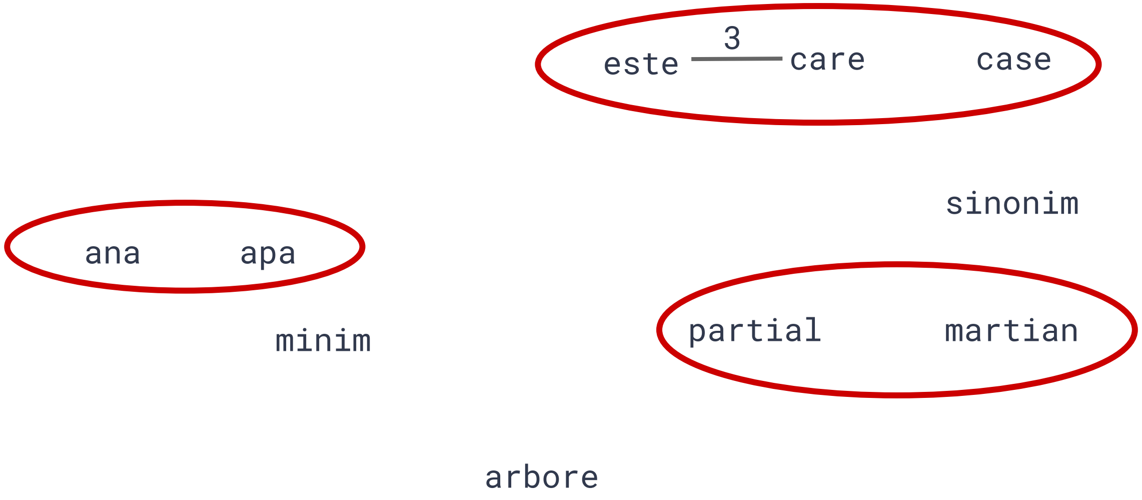
Cuvinte - distanța de editare



k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare



k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare

este care case

sinonim

ana apa

minim

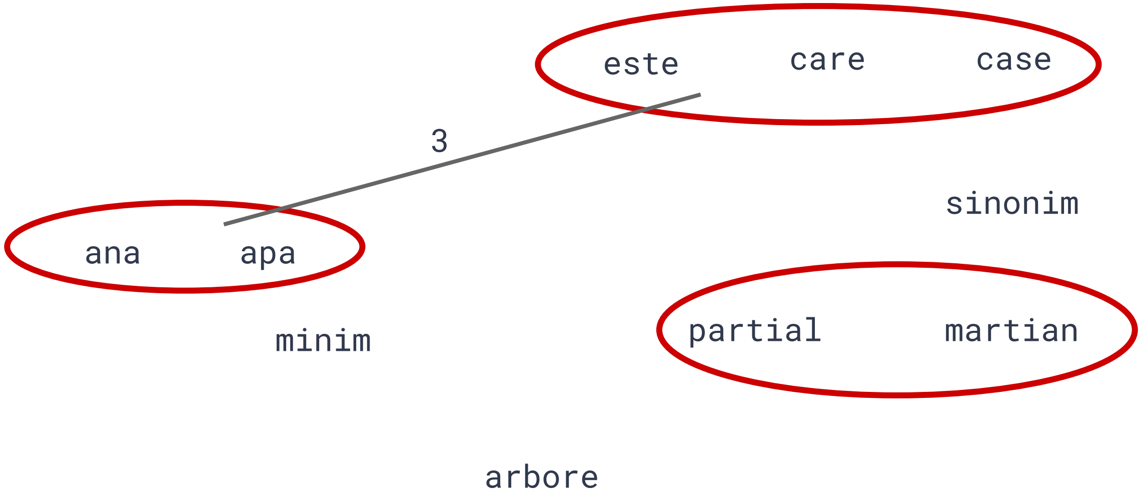
partial martian

arbore

k = 3 clustere

Clustering

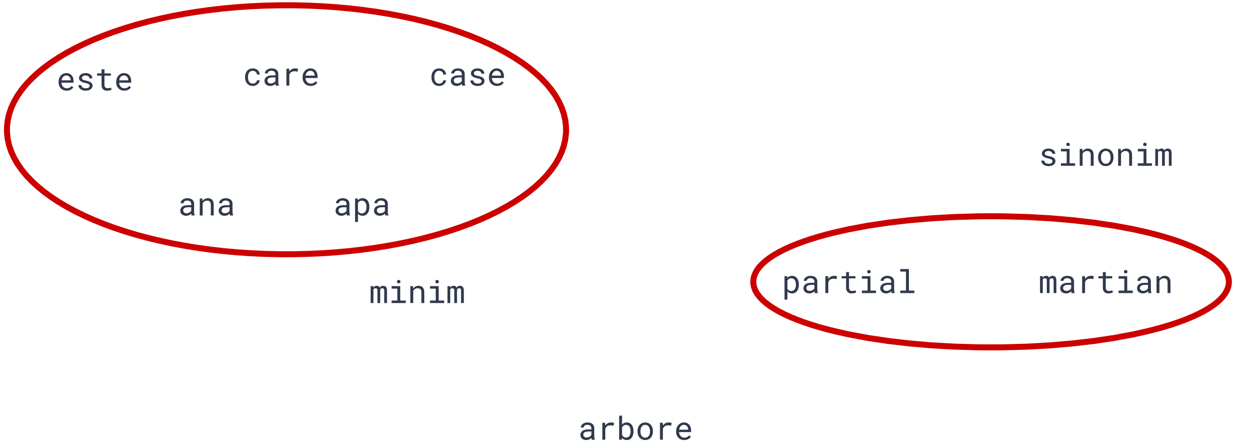
Cuvinte - distanța de editare



k = 3 clustere

Clustering

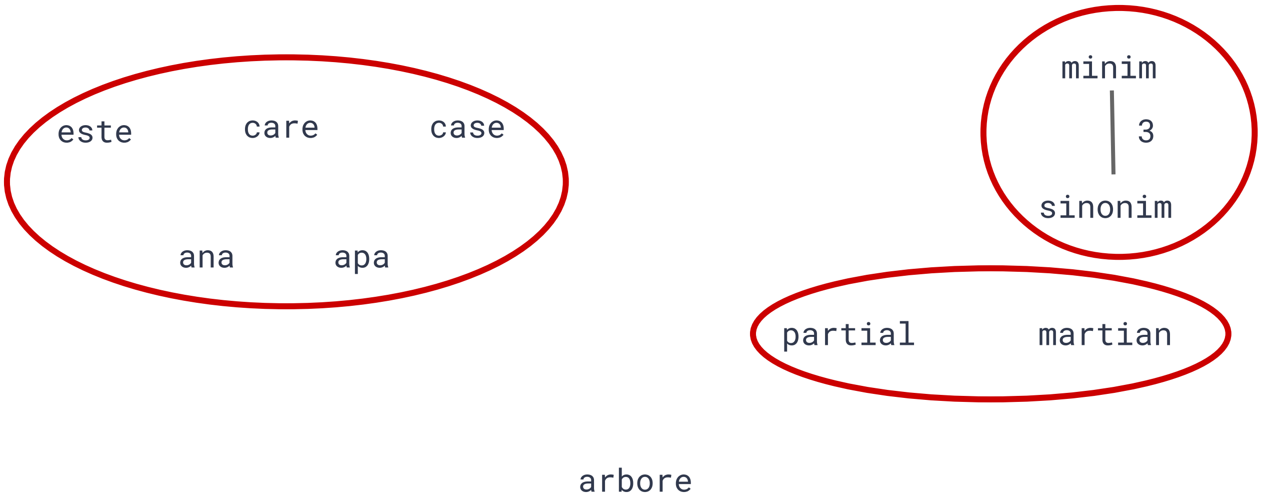
Cuvinte - distanța de editare



k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare



k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare

este care case

ana apa

minim

sinonim

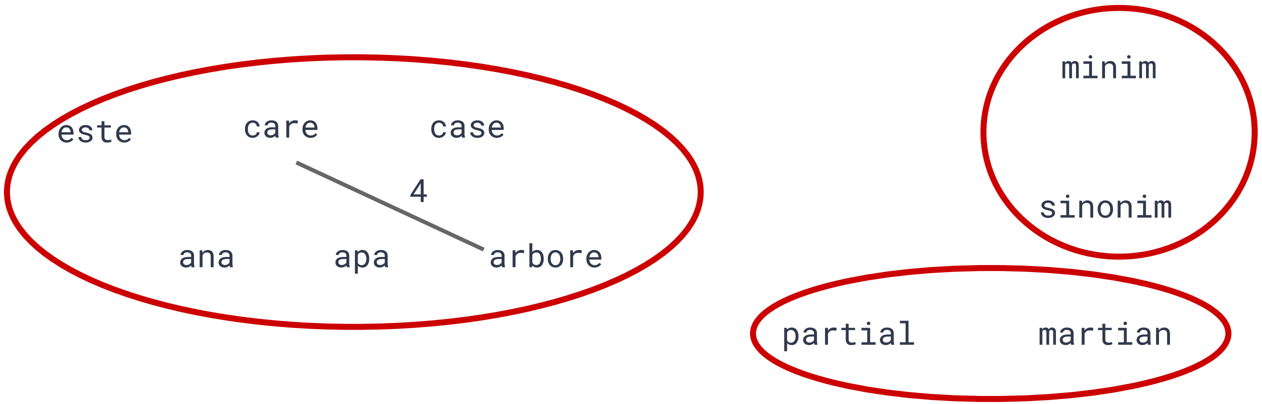
partial martian

arbore

k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare



k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare

este care case

ana apa arbore

minim

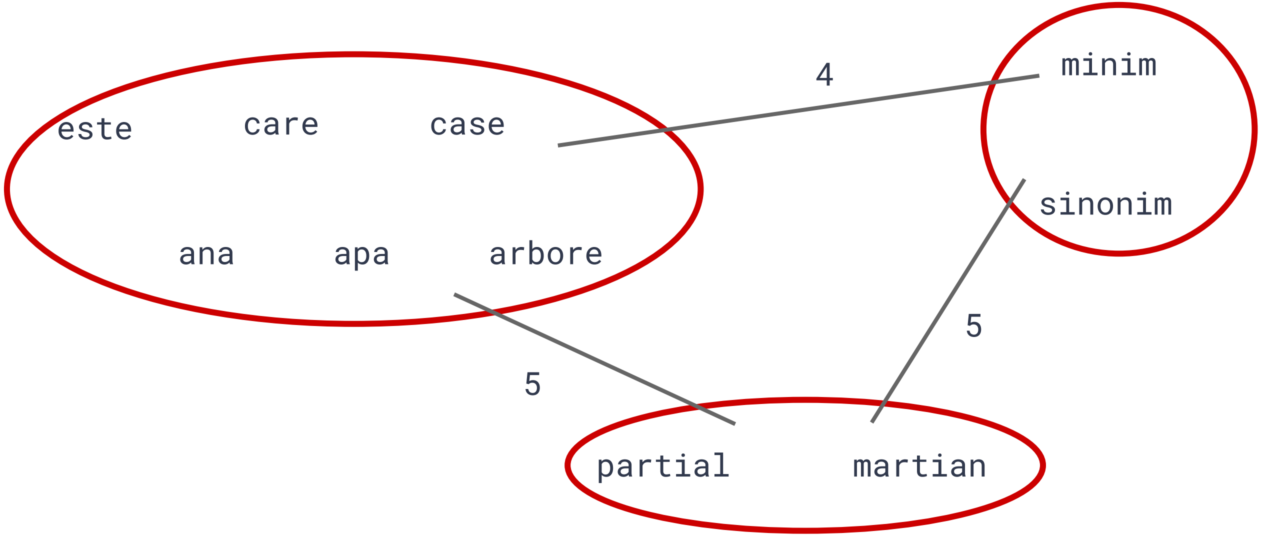
sinonim

partial martian

Soluția cu k = 3 clustere

Clustering

Cuvinte - distanța de editare



Grad de separare = 4

Clustering

Pseudocod

- Inițial, fiecare obiect formează o clasă
- pentru i = 1, n-k
  - alege două obiecte o_r, o_t din clase diferite, cu $d(o_t, o_r)$ minimă
  - reunește (clasa lui o_r, o_t)
- afișează cele k clase obținute

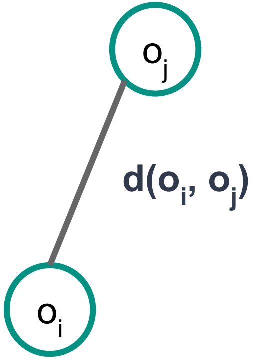
Clustering

Pseudocod

- Inițial, fiecare obiect formează o clasă
- pentru i = 1, n-k
    - alege două obiecte o_r, o_t din clase diferite, cu $d(o_t, o_r)$ minimă
    - reunește (clasa lui o_r, o_t)
- afișează cele k clase obținute

Modelare cu graf ponderat (complet)

⇒ n - k pași din algoritmul lui Kruskal



Clustering

Pseudocod:	**Pseudocod - modelare cu graf complet G:**
Inițial, fiecare obiect (cuvânt) formează o clasă pentru i = 1, n-k ● alege două obiecte o_r, o_t din clase diferite, cu $d(o_r, o_t)$ minimă ● reunește clasa lui o_r și clasa lui o_t returnează cele k clase obținute	$V = \{o_1, \ldots, o_n\}$, $w(o_io_j) = d(o_i, o_j)$

Clustering

Pseudocod: Inițial, fiecare obiect (cuvânt) formează o clasă pentru i = 1, n-k ● alege două obiecte o_r, o_t din clase diferite, cu $d(o_r, o_t)$ minimă ● reunește clasa lui o_r și clasa lui o_t returnează cele k clase obținute	**Pseudocod - modelare cu graf complet G:** $V = \{o_1, \ldots, o_n\}$, $w(o_i o_j) = d(o_i, o_j)$ Inițial, fiecare vârf formează o componentă conexă (clasă): **T' = (V, ∅)**

Clustering

Pseudocod:	**Pseudocod - modelare cu graf complet G:**
	$V = \{o_1, \dots, o_n\}$, $w(o_io_j) = d(o_i, o_j)$
Inițial, fiecare obiect (cuvânt) formează o clasă	Inițial, fiecare vârf formează o componentă conexă (clasă): **T' = (V, ∅)**
pentru i = 1, n-k ● alege două obiecte o_r, o_t din clase diferite, cu $d(o_r, o_t)$ minimă ● reunește clasa lui o_r și clasa lui o_t	pentru i = 1, n-k ● alege o muchie e_i=uv de **cost minim din G astfel încât u și v sunt în componente conexe diferite** ale lui T' ● reunește componenta lui u și componenta lui v: **E(T') = E(T') ∪ {uv}**
returnează cele k clase obținute	

Clustering

Pseudocod:	**Pseudocod - modelare cu graf complet G:**
	$V = \{o_1, \dots, o_n\}$, $w(o_io_j) = d(o_i, o_j)$
Inițial, fiecare obiect (cuvânt) formează o clasă	Inițial, fiecare vârf formează o componentă conexă (clasă): **T' = (V, ∅)**
pentru i = 1, n-k ● alege două obiecte o_r, o_t din clase diferite, cu $d(o_r, o_t)$ minimă ● reunește clasa lui o_r și clasa lui o_t	pentru i = 1, n-k ● alege o muchie e_i=uv de **cost minim din G astfel încât u și v sunt în componente conexe diferite** ale lui T' ● reunește componenta lui u și componenta lui v: **E(T') = E(T') ∪ {uv}**
returneză cele k clase obținute	returnează cele k mulțimi formate cu vârfurile celor k componente conexe ale lui T'

Clustering

Observație: Algoritmul este echivalent cu următorul mai general

- **determinăm un apcm** T al grafului complet G

Clustering

Observație: Algoritmul este echivalent cu următorul mai general

- **determinăm un apcm** T al grafului complet G
- considerăm mulțimea $\{e_{n-k+1}, \ldots, e_{n-1}\}$ formată cu k-1 muchii cu **cele mai mari ponderi în T**
- fie pădurea $\mathbf{T' = T - \{e_{n-k+1}, \ldots, e_{n-1}\}}$

Clustering

Observație: Algoritmul este echivalent cu următorul mai general

- **determinăm un apcm** T al grafului complet G
- considerăm mulțimea $\{e_{n-k+1}, \ldots, e_{n-1}\}$ formată cu k-1 muchii cu **cele mai mari ponderi în T**
- fie pădurea **$T' = T - \{e_{n-k+1}, \ldots, e_{n-1}\}$**
- definește clasele k-clustering-ului $\mathscr{C}$ ca fiind mulțimile vârfurilor celor k componente conexe ale pădurii astfel obținute

Clustering

Corectitudine - v. curs

- k-clustering-ul obținut are grad de separare maxim

Jon Kleinberg, Éva Tardos , Algorithm Design , Addison Wesley 2005, **Secțiunea 4.7**

https://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/pdf/04GreedyAlgorithmsII-2x2.pdf