Laborator 6

1) Fie X o v.a cu valori în $\mathbb{N}$ a.î. $p_n = P(X=n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Arătați că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmații sunt echivalente:

i) X este o variabilă Poisson de parametru λ.

ii) Pentru toți $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.

b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinați:

i) Valoarea k pentru care $P(X=k)$ este maximă

ii) Valoarea lui λ care maximizează $P(X=k)$, pentru k fixat.

R

a) Dacă i) este adevărată atunci $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{n} \text{ (ii)}$$

Dacă ii) este adevărată avem $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_n = p_0 \frac{\lambda^n}{n!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow p_0 = e^{-\lambda}.$$

b) i) Știm că $P(X=j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ și avem să evaluăm raportul

$$\frac{P(X=j)}{P(X=j-1)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}} = \frac{\lambda}{j}$$

Putem observa că $P(X=j) \geq P(X=j-1)$, dacă $\lambda \geq j$

$P(X=j) < P(X=j-1)$, dacă $\lambda < j$.

ceea ce arată că $j = [\lambda]$ este punctul maxim și $P(X=[\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}e^{-\lambda}$ val maximă.

ii) După cum am văzut la punctul precedent avem:

$\frac{P(X=j)}{P(X=j-1)} = \frac{\lambda}{j}$. Dacă $j > 0$ este fixat atunci putem observa că maximul este atins pentru $\lambda = j$.

2) Fie (X,Y) un cuplu de variabile aleatoare (vector aleator) a cărui repartiție este:

X/Y	2	4	6
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0
3	0.05	0	0.05

a) Calculați EY și $Var(Y)$

b) Determinați repartiția v.a $E[Y/X]$ și $Var(Y/X)$.

c) Verificați formula varianței condiționate $Var(Y)=E[Var(Y/X)]+Var(E[Y/$

R

a) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$

$EY = 2 \cdot 0.35 + 4 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.25 = 0.7 + 1.6 + 1.5 = 3.8$.

$Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = (2^2 \cdot 0.35 + 4^2 \cdot 0.4 + 6^2 \cdot 0.25) - 3.8^2 = (1.4 + 6.4 + 9) - 14.44 =$
$= 16.8 - 14.44 = 2.36$.

b) $E[Y/X=0] = 2 \cdot P(Y=2/X=0) + 4 \cdot P(Y=4/X=0) + 6 \cdot P(Y=6/X=0) =$

$= 2 \cdot \frac{0.1}{0.4} + 4 \cdot \frac{0.2}{0.4} + 6 \cdot \frac{0.1}{0.4} = \frac{0.2 + 0.8 + 0.6}{0.4} = \frac{1.6}{0.4} = 4$.

$E[Y/X=1] = 2 \cdot P(Y=2/X=1) + 4 \cdot P(Y=4/X=1) + 6 \cdot P(Y=6/X=1) =$

$= 2 \cdot \frac{0.1}{0.3} + 4 \cdot \frac{0.1}{0.3} + 6 \cdot \frac{0.1}{0.3} = \frac{0.2 + 0.4 + 0.6}{0.3} = \frac{1.2}{0.3} = 4$.

$E[Y/X=2] = 2 \cdot P(Y=2/X=2) + 4 \cdot P(Y=4/X=2) + 6 \cdot P(Y=6/X=2) =$

$= 2 \cdot \frac{0.1}{0.2} + 4 \cdot \frac{0.1}{0.2} + 6 \cdot \frac{0}{0.2} = \frac{0.2 + 0.4}{0.2} = \frac{0.6}{0.2} = 3$.

$E[Y/X=3] = 2 \cdot P(Y=2/X=3) + 4 \cdot P(Y=4/X=3) + 6 \cdot P(Y=6/X=3) =$

$= 2\cdot\frac{0.05}{0,1} + 4\cdot\frac{0}{0.1} + 6\cdot\frac{0,05}{0.1} = 4.$

Deci $E[Y/X] \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ deoarece $E[Y/X]$ ia valoarea 3 cu probabilitatea $P(X=2)$ și valoarea 4 cu $P(X\neq 2)$.

$Var[Y/X=0] = E[Y^2/X=0] - E[Y/X=0]^2 = \left(2^2\cdot\frac{0.1}{0.4} + 4^2\cdot\frac{0.2}{0.4} + 6^2\cdot\frac{0.1}{0.4}\right) - 16 = 2$

$Var[Y/X=1] = E[Y^2/X=1] - E[Y/X=1]^2 = \left(2^2\cdot\frac{0.1}{0.3} + 4^2\cdot\frac{0.1}{0.3} + 6^2\cdot\frac{0.1}{0.3}\right) - 16 = 2.66$

$Var[Y/X=2] = E[Y^2/X=2] - E[Y/X=2]^2 = \left(2^2\cdot\frac{0.1}{0.2} + 4^2\cdot\frac{0.1}{0.2} + 6^2\cdot\frac{0}{0.2}\right) - 9 = 1$

$Var[Y/X=3] = E[Y^2/X=3] - E[Y/X=3]^2 = \left(2^2\cdot\frac{0.05}{0.1} + 4^2\cdot\frac{0}{0.1} + 6^2\cdot\frac{0.05}{0.1}\right) - 16 = 4$

Deci $Var(Y/X) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.66 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$ deoarece v.a $Var(Y/X)$ ia valoarea 1 cu probabilitatea $P(X=2)$, valoarea 2 cu probabilitatea $P(X=0)$, valoarea 2.66 cu probabilitatea $P(X=1)$ și valoarea 4 cu probabilitatea $P(X=3)$.

c) Cunoscând legile variabilelor aleatoare $E[Y/X]$ și $Var(Y/X)$ observăm că

$E[Var[Y/X]] = 1\cdot 0.2 + 2\cdot 0.4 + 2,66\cdot 0.3 + 4\cdot 0.1 = 0.2 + 0.8 + 0,98 + 0.4 \approx 2,2$

$Var[E[Y/X]] = E[E[Y/X]^2] - E[E[Y/X]]^2 = (3^2\cdot 0.2 + 4^2\cdot 0,8) - E[Y]^2 = 0.16$

$= (9\cdot 0.2 + 16\cdot 0.8) - (3\cdot 0.2 + 4\cdot 0.8)^2 =$

$= 14,6 - (3,8)^2 = 14,6 - 14,44 = 0,16$

$Var(Y) = 2.36$

Deci $Var\, Y = 0,16 + 2,2 \Rightarrow Var\, Y = E(Var(Y/X)) + Var(E(Y/X))$.

Scanned with CamScanner

3) Fie X și Y v.a pentru care $EX=-2$, $EY=4$, $Var(X)=4$, $Var(Y)=9$; iar coeficientul de corelație $\rho(X,Y)=-0.5$. Să se calculeze valoarea medie a variabilei $Z=3X^2-2XY+Y^2-3$

R

$EZ=3E(X^2)-2E(XY)+E(Y^2)-3$.

$Var(X)=EX^2-(EX)^2 \Rightarrow EX^2=Var(X)+(EX)^2=4+(-2)^2=8$.

$EY^2=Var(Y)+(EY)^2=\cancel{4+81=85}\ 9+16=26$.

$cov(X,Y)=EXY-EXEY \Rightarrow EXY=EXEY+cov(X,Y)=EXEY+\rho(X,Y)\sqrt{VarX\,VarY}$
$=(-2)4+(-0.5)\sqrt{4\cdot 9}=-11$.

Deci $EZ=3\cdot 8-2(-11)+26-3=68$

4) Se dau variabilele aleatoare independente:

$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ p+\frac{1}{6} & q+\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & 2p-q & 12p^2\end{pmatrix}$

a) Să se scrie distribuția variabilei $2XY$

b) Pentru ce valori ale lui c avem $P(X+Y=c)>\frac{2}{9}$?

R

Pentru ca X și Y să fie v.a se impun condițiile:

$p+\frac{1}{6}\geq 0$, $q+\frac{1}{3}\geq 0$, $2p-q\geq 0$ și $\begin{cases}p+\frac{1}{6}+q+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1\\ \frac{1}{3}+2p-q+12p^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p+q=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\\ 12p^2+2p-q=\frac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}q=\frac{1}{6}-p\\ 12p^2+2p-\frac{1}{6}+p=\frac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}q=\frac{1}{6}-p\\ 12p^2+3p-\frac{5}{6}=0\end{cases}$

$\Delta=9+4\cdot 12\cdot\frac{5}{6}=49$

$p_1=\frac{-3+7}{2\cdot 12}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$

$p_2=\frac{-3-7}{2\cdot 12}=-\frac{10}{24}=-\frac{5}{12}$ (nu $p+\frac{1}{6}\geq 0$)

Deci $p=\frac{1}{6}$ și $q=0$.

Scanned with CamScanner

Deci $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

a) $2XY \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

b) $X+Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

$P(X+Y=c) > \frac{2}{9}$ corespunde $P(X+Y=0) = \frac{3}{9} > \frac{2}{9}$, deci $c=0$.