Apl. Fie cuadrica:

$$\Gamma: 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

Aduceți cuadrica Γ la o formă canonică prin izometrii (i.e. realizați clasificarea izometrică a cuadricei Γ).

Rez: Avem $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

$\delta = \det A_3 = 0$ (deci, nu există centru unic)

$\Delta = \det A = 16 \neq 0$ (cuadrica Γ este nedegenerată)

• Determinăm valorile proprii și subspațiile proprii corespunzătoare matricei A_3.

– Ec. caracteristică:

$\det(A_3 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = 0$

Valorile proprii: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$

La fel ca în apl. anterioară determinăm subsp. proprii:

$V_{\lambda_1} = \{\alpha(1,2,-3) / \alpha \in \mathbb{R}\} = <\underbrace{(1,2,-3)}_{f_1}>$

$V_{\lambda_2} = \{\beta(4,1,2) / \beta \in \mathbb{R}\} = <\underbrace{(4,1,2)}_{f_2}>$

$V_{\lambda_3} = \{\gamma(+1,-2,-1) / \gamma \in \mathbb{R}\} = <\underbrace{(+1,-2,-1)}_{f_3}>$

Obs: $\left| \begin{array}{l} f_1 \perp f_2 \\ f_2 \perp f_3 \\ f_1 \perp f_3 \end{array} \right.$ i.e. $\{f_1, f_2, f_3\}$ bază ortogonală.

Considerăm: $\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3) \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(4,1,2) \\ e_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1) \end{cases}$

Efectuăm rotația: $r \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(x+2y-3z) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(4x+y+2z) \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-2y-z) \end{cases}$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$\det R = 1$

$R\,{}^tR = I_3$

$\Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{14}}x' + \frac{4}{\sqrt{21}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{2}{\sqrt{14}}x' + \frac{1}{\sqrt{21}}y' - \frac{2}{\sqrt{6}}z' \\ z = -\frac{3}{\sqrt{14}}x' + \frac{2}{\sqrt{21}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

$$r(\Gamma):\ 7y'^2 - 2z'^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}x' + \frac{24}{\sqrt{21}}y' + \frac{12}{\sqrt{6}}z' - 8 = 0$$

care se poate pune sub forma:

$$7\left(y' + \frac{12}{7\sqrt{21}}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}\left(x' + \frac{293\sqrt{14}}{392}\right) = 0$$

Efectuăm translația:

$$t\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{293\sqrt{14}}{392} \\ y'' = y' + \dfrac{12}{7\sqrt{21}} \\ z'' = z' - \dfrac{3}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (t\circ r)(\Gamma): \underline{7y''^2 - 2z''^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}x'' = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{y''^2}{\frac{1}{7}} - \frac{z''^2}{\frac{1}{2}} - \frac{8}{\sqrt{14}}x'' = 0}$$

$\Rightarrow \Gamma$ reprezintă un <u>PARABOLOID HIPERBOLIC</u>.

$\boxed{\text{Apl}}$ Fie cuadrica:

$$\Gamma: x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$$

Aduceți cuadrica Γ la o formă redusă.

<u>Rez:</u> $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Evident: $\delta = \det A_3 = 0 \Rightarrow \Gamma$ <u>nu</u> are centru unic

$\Delta = \det A = 0 \Rightarrow \Gamma$ cuadrică degenerată.

La fel ca în apl. precedentă, determinăm valorile proprii și subsp. proprii coresp. matricei A_3.

- Ec. caracteristică:

$\det(A_3 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda - 6) = 0$

<u>Valorile proprii</u>

$\lambda_1 = 0,\ m_1 = 2$

$\lambda_2 = 6,\ m_2 = 1$

Obținem:

$V_{\lambda_1} = \{(\alpha, \beta, -\frac{1}{2}(\alpha+\beta)) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_2} = \{\gamma(1,1,2) / \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,1,2)}_{f_3} \rangle$

Din V_{λ_1} extragem 2 vectori proprii liniar indep. (i.e. o bază)

- $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases} \to f_1 = (2, 0, -1)$

- $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \to f_2 = (1, -1, 0)$

Utilizăm procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt pentru a obține o bază ortonormată (în V_{λ_1}) pornind de la baza $\{f_1, f_2\}$

Avem: $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)$

$$e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$$

$$= (1, -1, 0) - \frac{2}{5}(2, 0, -1) = \frac{1}{5}(1, -5, 2)$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{\cancel{5}}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}(1, -5, 2) = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -5, 2)$$

și $e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată

Efectuăm rotația: $r \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + z) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{30}}(x - 5y + 2z) \\ z' = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y + 2z) \end{cases}$ $R = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\det R = 1$

$R \cdot {}^tR = I_3$

$\Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

Obținem:

$r(\Gamma)$: $z'^2 - \sqrt{6}x' + \sqrt{6}y' + 2\sqrt{6}z' + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z' + \sqrt{6})^2 - \sqrt{6}x' + \sqrt{6}y' - 5 = 0$

Efectuăm izometria:

$$i\begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ z'' = z'+\sqrt{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow (i\circ r)(\Gamma):\ z''^2 - 2\sqrt{3}\,x'' - 5 = 0 \iff z''^2 - 2\sqrt{3}\left(x'' + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) = 0$

Efectuăm translația:

$$t\begin{cases} x''' = x'' + \frac{5}{2\sqrt{3}} \\ y''' = y'' \\ z''' = z'' \end{cases}$$

Obținem:

$(t\circ i\circ r)(\Gamma):\ \boxed{z'''^2 - 2\sqrt{3}\,x''' = 0}$

$\Rightarrow \Gamma$ reprezintă un <u>CILINDRU PARABOLIC</u>.

$\boxed{Ap1.}$ Fie paraboloidul hiperbolic P de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,\ a,b>0$$

a) Arătați că: $(\exists)$ 2 familii de dr. generatoare ale paraboloidului hiperbolic P, a.î. prin fiecare pct. al lui P trece o unică generatoare din fiecare familie. {P este o suprafață dublu riglată} În plus, $(\forall)$ 2 generatoare din aceeași familie sunt dr. necoplanare.

b) $(\forall)$ pct. al paraboloidului hiperbolic P este regulat și planul tangent în fiecare pct. conține cele 2 dr. generatoare care trec prin acel punct.

Sol: a) Fie familiile de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$, $\{d'_\mu\}_\mu$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ de ec:

$$d_\lambda:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\lambda\\ \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z\end{cases}\qquad d'_\mu:\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\mu\end{cases}$$

Vom demonstra că orice dr. din familia de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$ este generatoare a paraboloidului hiperbolic.

Făcând produsul membru cu membru al celor 2 ec ale unei dr. d_λ și simplificând cu λ $(\lambda\neq 0)$ $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

Interpretarea geometrică: $(\forall)$ pct. al unei dr d_λ, $\lambda\neq0$ este pct. al paraboloidului hiperbolic P.

Dacă $\lambda=0 \Rightarrow d_0:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\\ z=0\end{cases}$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z$$

Deci $(\forall)$ pct. al dr. d_0 este pe P. În consecință, toate dreptele din familia de dr. $\{d_\lambda\}_\lambda$ sunt generatoare ale paraboloidului hiperb. P.

Analog, se demonstrează că avem același rezultat pt. fam. de dr. $\{d'_\mu\}_\mu$.

Arătăm că $(\forall) M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$, $(\exists)!\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $M_0 \in d_{\lambda_0}$

$$(S) \begin{cases} 2\lambda = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \\ \lambda\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = z_0 \end{cases}$$

(S) sistem compatibil determinat (are sol. unică).

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) \\ \lambda = \dfrac{z_0}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \end{array}\right| \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = \frac{z_0}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 2z_0 \Longleftrightarrow M_0 \in P$$

Cond. de compatibilitate a sist. este echivalent cu $M_0 \in P$.

În plus, sistemul are o singură necunoscută și are rang 1, deci are sol. unică.

În concluzie, prin M_0 trece o unică generatoare a paraboloidului hiperbolic P, din familia $\{d_\lambda\}_\lambda$.

Analog, pentru $\{d'_\mu\}_\mu$.

Două dr. generatoare din aceeași familie de generatoare a paraboloidului hiperbolic P nu pot fi concurente deoarece ar rezulta că prin pct. lor de concurență $M_0 \in P$ ar trece 2 generatoare din aceeași familie ✗.

Vom demonstra că: 2 dr. generatoare din aceeași familie nu sunt nici paralele.

Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$, presupunem $d_{\lambda_1} \parallel d_{\lambda_2}$

$$d_\lambda : \begin{cases} \frac{1}{a}x - \frac{1}{b}y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\lambda}{a}x + \frac{\lambda}{b}y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{dir } d_\lambda = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ \frac{\lambda}{a} & \frac{\lambda}{b} & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{b}, +\frac{1}{a}, \frac{2\lambda}{ab}\right)$$

$$d_{\lambda_1} \parallel d_{\lambda_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{2\lambda_1}{ab}}{\frac{2\lambda_2}{ab}} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \text{ abs.}$$

b) $f(x,y,z) \stackrel{not}{=} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{x}{a^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \rightarrow$ sistem incompatibil

Deci, toate pct. paraboloidului hiperbolic P sunt regulate.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

Planul tg. în M_0 la P se scrie:

$$\pi : \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - z - z_0 = 0$$

$$d_{\lambda_0} \parallel \pi \Leftrightarrow \left\langle \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{2\lambda_0}{ab}\right), \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2}, -1\right) \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2} \cdot \frac{1}{b} - \frac{y_0}{b^2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{2}{ab}\lambda_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y_0}{b} = 2\lambda_0$ ✓ Deci: $d_{\lambda_0} \parallel \pi$

Dar: $M_0 \in d_{\lambda_0} \cap \pi$ $\Rightarrow$ $d_{\lambda_0} \subset \pi$.

Analog, se procedează și cu dr. d_{μ_0} din a 2-a familie de gen., care trece prin M_0 și obținem și $d_{\mu_0} \subset T_1$.

! Proprietăți similare sunt valabile și pentru hiperboloidul cu o pânză.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$d_\lambda \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases} \qquad d'_\mu \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{z}{b} \end{cases}$$

Hiperboloidul cu o pânză este o suprafață dublu riglată.

{Familiile de dr. generatoare sunt $\{d_\lambda\}_\lambda, \{d'_\mu\}_\mu$ }