$\boxed{\text{Ap1.}}$ Fie spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{\text{p.s.c}}{\langle , \rangle})$,

$B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_3$

bază canonică

Stabiliți dacă următoarele aplicații liniare sunt transformări ortogonale.

$\boxed{\text{TEMA}}$

a) $T: E_3 \to E_3$,

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 \\ T(e_2) = \frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \end{cases}$$

b) $T: E_3 \to E_3$,

$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 + e_2 \\ T(e_2) = e_2 + e_3 \\ T(e_3) = e_3 + e_1 \end{cases}$$

c) $T: E_3 \to E_3$,

$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{2}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 - \frac{1}{3} e_3 \\ T(e_2) = \frac{2}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \end{cases}$$

<u>Rez:</u> $\boxed{\text{Th}}$ Un endomorfism $T: E \to E$ este transf. ortogonală $\Leftrightarrow A$ - matricea se asociată într-un reper ortonormat este matrice ortogonală (i.e. ${}^tA \cdot A = I_n$, $\dim_{\mathbb{R}} E = n$)

Rez: a) $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_3$

bază ortonormată ($\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $(\forall) i, j = \overline{1,3}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ $\longrightarrow$ m. asoc. endomorf. T în raport cu baza canonică B_0.

Avem: ${}^tA \cdot A = I_3 \Rightarrow A$ m. ortogonală

Deci: T este transf. ortogonală (mai exact, <u>o rotație de $\measuredangle \frac{\pi}{3}$</u>, în jurul axei Ox)

b) <u>Raționament analog!</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $\longrightarrow$ m. asoc. endm. T în raport cu baza canonică B_0.

Dar: ${}^tA \cdot A \neq I_3 \Rightarrow A$ nu este m. ortogonală.

$\Rightarrow T$ nu este transf. ortogonală (în schimb este o transf. <u>ciclică</u>)

<u>Aducerea unei forme pătratice la o formă canonică</u>

$\mapsto$ <u>Metoda transformărilor ortogonale</u> (sau metoda <u>valorilor proprii</u>)

– constă în determinarea valorilor proprii ale matricei A_B (pentru că aceasta este simetrică $\Rightarrow$ tote valorile proprii vor fi reale)

Atunci, în baza B' formată din vectori proprii <u>ortonormați</u> (prin P.O.G-S) Q are forma canonică următoare:

$$Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2,$$ unde $x = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, coord. în baza B'.

$\boxed{A_{f}1}$ Fie forma pătratică $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$, $(\forall)\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Să se aducă Q la o formă canonică utilizând:

a) metoda Gauss

b) metoda Jacobi

c) $\boxed{\text{metoda transf. ortogonale}}$

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p Q în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$

a) $Q(x) = (x_1 - 2x_2)^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 - 2x_2)^2 - 2(x_2^2 + 2x_2x_3) + 3x_3^2$

$= (x_1 - 2x_2)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2 = \underbrace{(x_1')^2 - 2(x_2')^2 + 5(x_3')^2}$

Sch. de coordonate $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_2 = x_2' - x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p. Q în raport cu baza B'.

$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$, $B' = \{e_1' = (1,0,0), e_2' = (2,1,0), e_3' = (-3,-1,1)\}$

m. de trecere de la baza B_0 la B'

b) $\begin{cases} \Delta_1 = 1 \neq 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \Delta_3 = \det A = -10 \neq 0 \end{cases}$ $\quad \Delta_i \neq 0, (\forall)\ i = \overline{1,3}$

$\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x_3')^2$

$Q(x) = \underbrace{(x_1')^2 - \frac{1}{2}(x_2')^2 + \frac{1}{5}(x_3')^2}$, $(\forall)\ x = \underbrace{(x_1', x_2', x_3')}_{\text{coord. în raport cu noua bază } B'} \in \mathbb{R}^3$

e) Metoda transf. ortogonale

Determinăm valorile proprii coresp. lui A

Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

Ec. caract.: $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$ valorile proprii

Subspațiile proprii:

$V_{\lambda_1} = \{\alpha \underbrace{(2,2,1)}_{v_1} / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha v_1 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(-2,1,2)}_{v_2} / \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta v_2 / \beta \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1,-2,2)}_{v_3} / \gamma \in \mathbb{R}\} = \{\gamma v_3 / \gamma \in \mathbb{R}\}$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

bază ortogonală (i.e. $\langle v_i, v_j \rangle = 0, (\forall)\, 1 \le i \ne j \le 3$)

$\xrightarrow{\text{P.O. G-S}} B' = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right\} = \left\{\frac{1}{3}(2,2,1), \frac{1}{3}(-2,1,2), \frac{1}{3}(1,-2,2)\right\}$

bază ortonormată

Avem: $Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2$

$= \underbrace{-(x_1')^2 + 2(x_2')^2 + 5(x_3')^2}$, unde $x = (x_1', x_2', x_3')$

Coord. lui x în raport cu baza ortonormată B' formată din vectori proprii

$\boxed{\text{Signatura f. pătratice se conservă}}$, indiferent de metoda folosită pt. aducerea la o formă canonică.

$\text{sgn}(Q) = p - q = 2 - 1 = \underline{1}$

p: nr. termeni pozitivi

q: nr. termeni negativi

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Același enunț, ca în apl. precedentă pentru forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$Q(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$, $(\forall)\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Conice

$\boxed{Ap1}$ Fie conica Γ de ecuație:

$$\overbrace{x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 - 1}^{\overset{not}{=} f(x_1,x_2)} = 0$$

Să se aducă la o formă canonică conica Γ prin izometrii

<u>Rez:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$; $\delta = \det A = -\frac{5}{4}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -2 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\Delta = \det A' = \frac{9}{4}$

$\left.\begin{matrix} \delta < 0 \\ \Delta \neq 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \Gamma$ este HIPERBOLĂ (CLASIFICAREA CONICELOR)

Centrul conicei Γ este $P_0(x_1^0, x_2^0)$, unde coord. (x_1^0, x_2^0) se determină ca sol. unică a sist. de ec. liniare:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Deci: $P_0\left(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ - centrul conicei Γ.

Efectuăm translația t:

$$t\begin{cases} x_1' = x_1 - x_1^0 \\ x_2' = x_2 - x_2^0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{2}{5} \\ x_2' = x_2 + \frac{8}{5} \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_1' - \frac{2}{5} \\ x_2 = x_2' - \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$t(\Gamma): (x_1')^2 - 3x_1'x_2' + (x_2')^2 \underbrace{- \frac{9}{5}}_{f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\Delta}{\delta}} = 0$$

Avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale lui A

Rezolv: $\boxed{\det(A - \lambda I_2) = 0}$, în $\mathbb{R}$.

(ec. caracteristică)

$$\iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\iff \left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(-\lambda + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ valorile proprii

Determinăm subsp. proprii corespunzătoare:

$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, Av = \lambda_1 v \}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$Av = \lambda_1 v \iff (A - \lambda_1 I_2)v = 0_{(2,1)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \frac{3}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 = 0 \iff v_1 - v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_1} = \{ \alpha(1,1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1) \rangle$$

$V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, Av = \lambda_2 v \}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$Av = \lambda_2 v \iff (A - \lambda_2 I_2)v = 0_{(2,1)}$$

$$\begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -\frac{3}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 = 0 \iff v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = +\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V_{\lambda_2} = \{ \alpha(-1,+1) \,/\, \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (-1,+1) \rangle$$

Considerăm vectorii proprii:

$\begin{cases} f_1 = (1,1) \\ f_2 = (-1,+1) \end{cases}$ <u>Obs</u>: $\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow f_1 \perp f_2$

Normăm vectorii f_1, f_2 și obținem un <u>reper ortonormat</u>:

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\ e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,+1) \end{cases}$$

Efectuăm rotație r:

$$r \begin{cases} x_1'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \text{m. rotație}$$

$R\,{}^tR = I_2 \rightarrow R$ m. ortogonală

$\rightarrow R^{-1} = {}^tR \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' - x_2'') \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' + x_2'') \end{cases}$

$$(r\circ t)(\Gamma): -\frac{1}{2}(x_1'')^2 + \frac{5}{2}(x_2'')^2 - \frac{9}{5} = 0 \;\Big|: \frac{9}{5}$$

$$-\frac{(x_1'')^2}{\frac{18}{5}} + \frac{(x_2'')^2}{\frac{18}{25}} - 1 = 0$$

i.e. $-\dfrac{(x_1'')^2}{a^2} + \dfrac{(x_2'')^2}{b^2} - 1 = 0$, unde $a = \sqrt{\frac{18}{5}}$, $b = \frac{\sqrt{18}}{5}$

forma canonică a conicii Γ obținută prin izometrii (<u>clasif. metrică</u>)

$\boxed{\text{Temă}}$: Aceleași cerințe ca în aplicația anterioară pentru conica:

$\Gamma: x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 - 17 = 0$