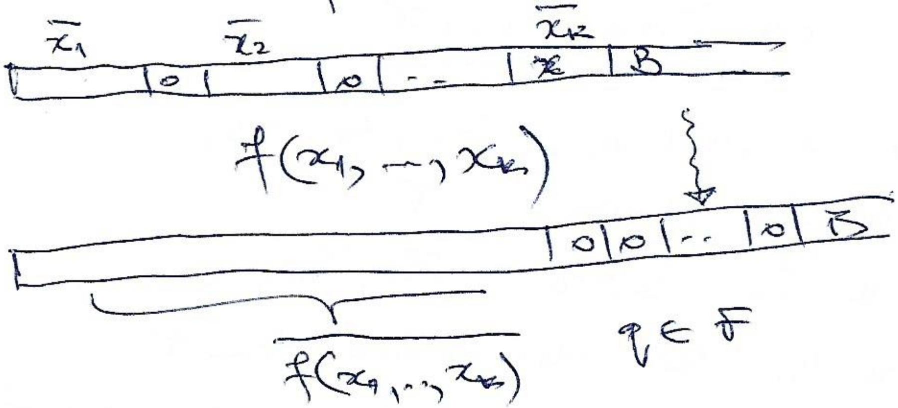
= CURS 4 =

MT ca dispozitiv de calcul al funcțiilor

$$f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$



$\Leftrightarrow$ $f(x_1,\dots,x_k)$ este definită

~~Dacă~~ $f(x_1,\dots,x_k)$ nu este definită $\Leftrightarrow$ M nu se oprește pe intrarea $x_1,\dots,x_k$

Discuție: $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ restrictiv?

(i) $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^t$ $\quad f(x_1,\dots,x_k) = \underbrace{(v_1,\dots,v_t)}$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{2^{v_1}\cdot 3^{v_2}\cdots p_t^{v_t}}_{\in \mathbb{N}}$$

(ii) $f: \mathbb{Z}^k \to \mathbb{N}$

$$\downarrow$$

$\mathbb{N}^{2k}$ $\quad (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{Z}^k$

$$\downarrow$$

$$(1/0, |x_1|, 1/0, |x_2|, \dots, 1/0, |x_k|)$$

(iii) $f: \mathbb{Q}^k \to \mathbb{N}$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^k}_{\mathbb{N}^3}$$

(iv) $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{N}$

Ce funcții putem calcula cu MT?
, sunt Turing calculabile?

Limbaj de programare abstract

Sintaxa: variabile de intrare: $X_1, X_2, X_3, \dots$
variabila de ieșire: Y
variabile de lucru: $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$

Variabilele de lucru și cea de ieșire sunt inițializate cu 0. Orice variabila memorează o valoare naturala

Etichete: $E, A_1, A_2, \dots$

Instrucțiuni (1) $V \leftarrow V$, unde V este o variabilă

Efect: Nul.

(2) $V \leftarrow V+1$ Efect

(3) $V \leftarrow V \dot{-} 1$ Efect: decrementare dacă val lui $V > 0$
Nul, altfel.

Obs Orice instrucțiune poate fi etichetată.

(4) IF $V \neq 0$ GOTO L

Efect: Dacă val lui V este 0 se trece la instrucțiunea următoare Altfel, se face transfer la prima instrucțiune cu eticheta L. Dacă nu există instrucțiune cu eticheta L, programul se oprește.

Program standard: o secvență finită de instrucțiuni.

Oprirea unui program standard:

- se termină instrucțiunile
- transfer la o instrucțiune care ~~este~~ nu există. (Vezi instrucțiunea $IF\ V \neq 0\ GOTO\ L$)
- transfer la eticheta E (Exit)

Cum calculează? $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$$f(x_1, \dots, x_k)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \leftarrow x_1 \\ X_2 \leftarrow x_2 \\ \dots \\ X_k \leftarrow x_k \end{array}\right\} \text{nu apar în program. (sunt inițializate)}$$

$f(x_1, \dots, x_k)$ este definită $\Leftrightarrow$ Programul se oprește și valoarea lui Y este $f(x_1, \dots, x_k)$.

$f(x_1, \dots, x_k)$ nu este definită $\Leftrightarrow$ Programul nu se oprește pe intrarea $X_1, \dots, X_k$.

Ex 1. $f(x) = x$.

A_2: IF $X_1 \neq 0$ GOTO A_1
$Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
IF $Z_1 \neq 0$ GOTO E
A_1: $X_1 \leftarrow X \dot{-} 1$
$Y \leftarrow Y + 1$
IF $X \neq 0$ GOTO A_2.

Obs 1) GOTO L (Macro instrucțiune)
2) $V \leftarrow V'$ (—"—)

A_2: IF $X_1 \neq 0$ GOTO A_1

GOTO ~~A_3~~ E

A_1: $X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1$

$Y \leftarrow Y+1$

$Z_2 \leftarrow Z_2+1$.

IF $X_1 \neq 0$ GOTO A_1

A_3: $X_1 \leftarrow X_1+1$

$Z_2 \leftarrow Z_2 \dot{-} 1$.

IF $Z_2 \neq 0$ GOTO A_3

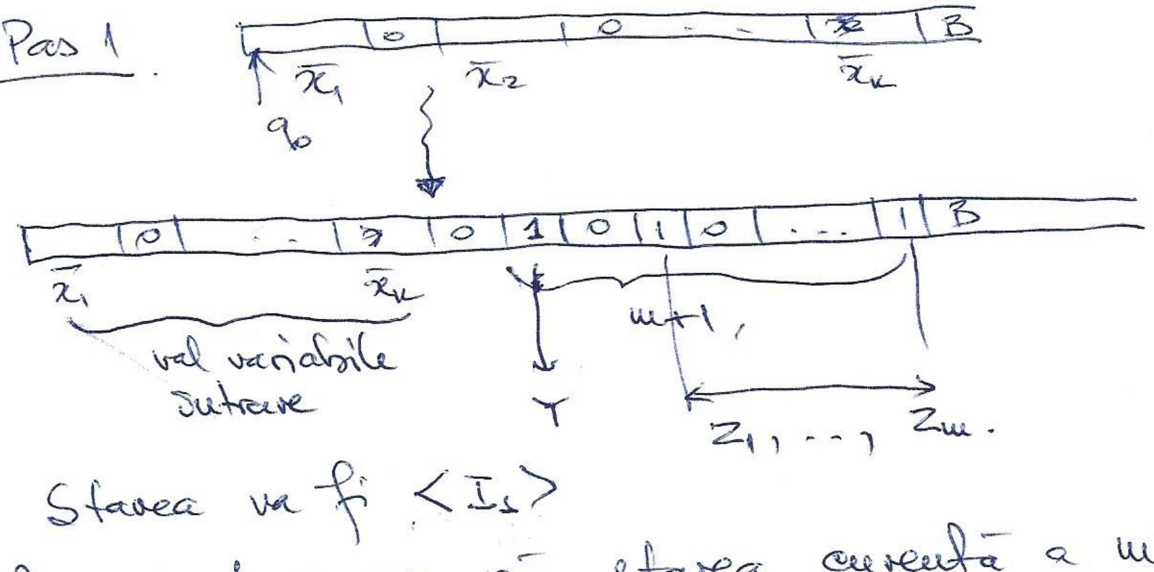
(T) Funcție calculabilă cu PS. ⇒ Funcție Turing calculabilă.

Dem. Fie $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ o funcție calculabilă cu PS.
Fie P programul standard care calculează f.

P < n instrucțiuni: $I_1, I_2, \dots, I_n$.
$Z_1, \dots, Z_m$ variabile de lucru.

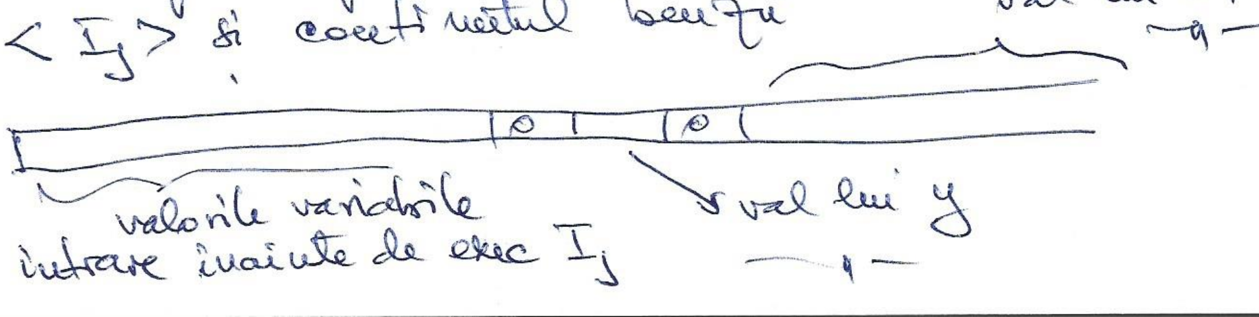
Cum calculează M o MT:

Pas 1.



Starea va fi $\langle I_1 \rangle$

Inductiv pot spune că starea curentă a MT este $\langle I_j \rangle$ și conținutul benzii



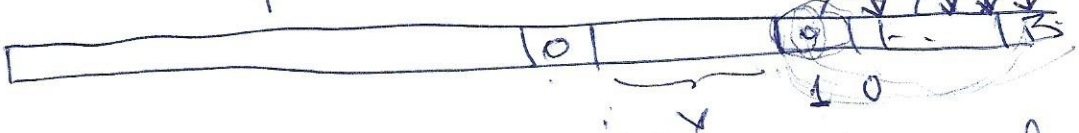
Pas 2. I_j : $X \leftarrow V$.

MT nu efectuează nicio modificare a benzii şi schimbă starea $\langle I_{j+1} \rangle$.

I_j : $V \leftarrow V+1$.

(i) MT identifică porţiunea de bandă corespunzătoare lui V

(ii) Deplasează la dreapta toate porţiunile de la dreapta zonei coresp. lui V.



(iii) ~~Re~~ ~~Ad~~ Măresc porţiunea coresp lui V cu încă un 1.

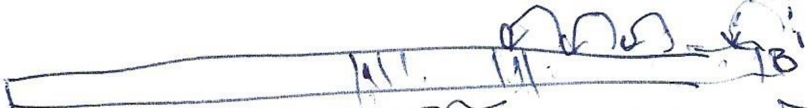
(iv) Schimbă starea în $\langle I_{j+1} \rangle$.

I_j : $V \leftarrow V \dot{-} 1$.

(i) Idem (i) anterior.

(ii) Dacă porţiunea coresp lui V are doar un 1, schimbă starea în $\langle I_{j+1} \rangle$.

(iii) Altfel, şterge un 1 şi compactează porţiunea lui V.



schimbă starea în $\langle I_{j+1} \rangle$.

101 —— 101

1111

I_j : IF $V \neq 0$ GOTO L.

(i) Idem (i) anterior.

(ii) Idem (ii) anterior.

(iii) Altfel. lasă banda neschimbată.

starea curentă —— $\langle I_p \rangle$ unde p este cel mai mic indice cu instrucţiunea I_p având eticheta L.

dacă L este o etichetă,
diferită de E ~~[illegible]~~ și
care există în P.
Dacă L = E sau nu
există starea devine
<I_{u+1}> eticheta L)

Mulțimea stări finale: $\{\langle I_{u+1}\rangle\}$.
intermediare.

<u>Pas final (3)</u>: Sterge tot de pe bandă cu excepția lui y;

Intrebare: Există funcții $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
care nu pot fi calculate cu PS?

$$card(\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}) = \aleph_0^{\aleph_0}$$
$$card(\{\text{toate PS}\}) = \aleph_0$$