In [1]:
```
from sympy import Function, dsolve, Eq, Derivative, sin, cos, symbols, solve,
ln, exp
from sympy.abc import t,x,y,U, z, K, r
import math
from pprint import pprint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Tarea 1 - Ignacio Palos Reynoso

1. Clasifique las siguientes ecuaciones como ordinarias o parciales, indique su orden, y especifique si son lineales o no lineales. En cada caso, indentifique las variables dependientes e independientes.

2. Realice una pequeña investigación y explique qué fenómenos es posible describir con la solución de cada una de las ecuaciones del ejercicio anterior.

Ecuación de Bessel

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad ; \quad \nu = \text{constante}$$

Solución 1:

Esta es una ecuación **ordinaria**, de **segundo** órden **lineal** y **dependiente**.

Solución 2:

La ecuación de Bessel parece cuando se encuentran soluciones a la ecuación de Laplace y de Helmhotz en coordenadas cilindricas o esféricas, y su solución son las funciones de Bessel.

Esta ecuación funciona muy bien para describir fenómenos con simetría cilíndrica o esférica, cómo en cables, tubos, barras cilíndricas, membranas circulares, etc, tanto en medios mecánicos como en electromagnéticos y hasta en sistemas cuánticos.

Ecuación de Van der Pool

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = a\frac{dx}{dt} - b\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 \quad ; \quad m, k, a, b = \text{constantes}$$

Solución 1:

Esta es una ecuación **ordinaria**, de **segundo** órden **no lineal** y **dependiente**.

Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad ; \quad c = \text{constante}$$

Solución 1:

Esta es una ecuación **parcial**, de **segundo** órden **lineal** e **independiente**.

Solución 2:

Esta versión de la ecuación de onda es para ondas unidimensionales, y sirve para describir el comportamiento oscilatorio de un ente (por ejemplo, una partícula sobre una cuerda ondulante, o el valor del campo eléctrico en un punto durante el tiempo) y su velocidad de propagación.

Ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k\left[T - A(t)\right] \quad ; \quad k = \text{constante}, A(t) = f(t)$$

Solución 1:

Esta es una ecuación **ordinaria**, de **primer** órden **lineal** e **independiente**.

Solución 2:

Esta ecuación principalmente se utiliza para describir durante el tiempo, el enfriamiento de un material en un medio,(usualmente con capacidad calorifica infinita) a cierta temperatura menor al material.

3. En 1988 la sábana santa fue estidiada por tres grupos de investigación independientes de Arizona, Oxford y Zurich. Estos encontraron que las fibras de la sabana tenían alrededor del 92% del 14C contenido en los organismos vivos. Calcule la antigüedad de la sábana si para el 14C la vida media es de 5, 600 años.

Solución:

In [2]:
```
tau=5600
p=0.92
sol = -math.log2(p)*tau
print(f'La antiguedad de la sábana santa es de {sol} años.')
```

```
La antiguedad de la sábana santa es de 673.6477088191859 años.
```

4. Encuentre la solución general de las ecuaciones siguientes y en cada caso encuentre una solución particular que pase por el origen.

Ejercicio 1

In [3]:
```
th = Function('theta')
eq = Eq(Derivative(th(t)), sin(t)+cos(t))
eq
```

Out[3]:
$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \sin(t) + \cos(t)$$

In [4]:
```
f=dsolve(eq)
f
```

Out[4]:
$$\theta(t) = C_1 - \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

In [5]:
```
f.subs(t,0)
```

Out[5]:
$$\theta(0) = C_1 - 1$$

Para que $\theta(0) = 0, C_1 = 1$

Ejercicio 2

In [6]:
```
y = Function('y')
eq = Eq(Derivative(y(x)),1/(x**2-1) )
eq
```

Out[6]:
$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

In [7]:
```
f=dsolve(eq)
f
```

Out[7]:
$$y(x) = C_1 + \frac{\log(x-1)}{2} - \frac{\log(x+1)}{2}$$

In [8]:
```
f.subs(x,0)
```

Out[8]:
$$y(0) = C_1 + \frac{i\pi}{2}$$

Para que $y(0) = 0$, $C_1 = -\frac{i\pi}{2}$

Ejercicio 3

In [9]:
```
U = Function('U')
eq = Eq(Derivative(U(t)), 4*t*ln(t))
eq
```

Out[9]:
$$\frac{d}{dt}U(t) = 4t\log(t)$$

In [10]:
```
f=dsolve(eq)
f
```

Out[10]:
$$U(t) = C_1 + 2t^2\log(t) - t^2$$

Esta función no está definida en t=0, ya que ln(0) es indeterminado

In [11]:
```
z=Function('z')
eq = Eq(Derivative(z(x)),x*exp(-2*x))
eq
```

Out[11]:
$$\frac{d}{dx}z(x) = xe^{-2x}$$

In [12]:
```
f=dsolve(eq)
f
```

Out[12]:

$$z(x) = C_1 + \frac{(-2x - 1)\, e^{-2x}}{4}$$

In [13]:
```
f.subs(x,0)
```

Out[13]:

$$z(0) = C_1 - \frac{1}{4}$$

Para que $z(0) = 0$, $C_1 = \frac{1}{4}$

5. En el modelo logístico estudiado en clase, el tamaño de una poblaciónaI tiempo t, x (t), puede escribirse como

$$x(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - x_0}{x_0} e^{-rt}}$$

donde x_0 es el tamaño de la población al tiempo inicial, K es la capacidad de carga y r es una constante.

Utilice los datos de los dos primeros renglones de la tabla que muestra el crecimiento de la población del Reino Unido para estimar los valores de las constantes r y K.

Año	Población
1801	16.345646
1851	27.533755
1901	41.609091
2001	63.000000

Según el modelo logístico, ¿cuál debería ser el tamaño de la población en los años de 1901 y 2001? Utilice sus valores estimados de las constantes r y K para responder esta pregunta. Discuta cómo se compararían las predicciones del modelo logístico con las correspondientes a un modelo de Malthus para el mismo caso.

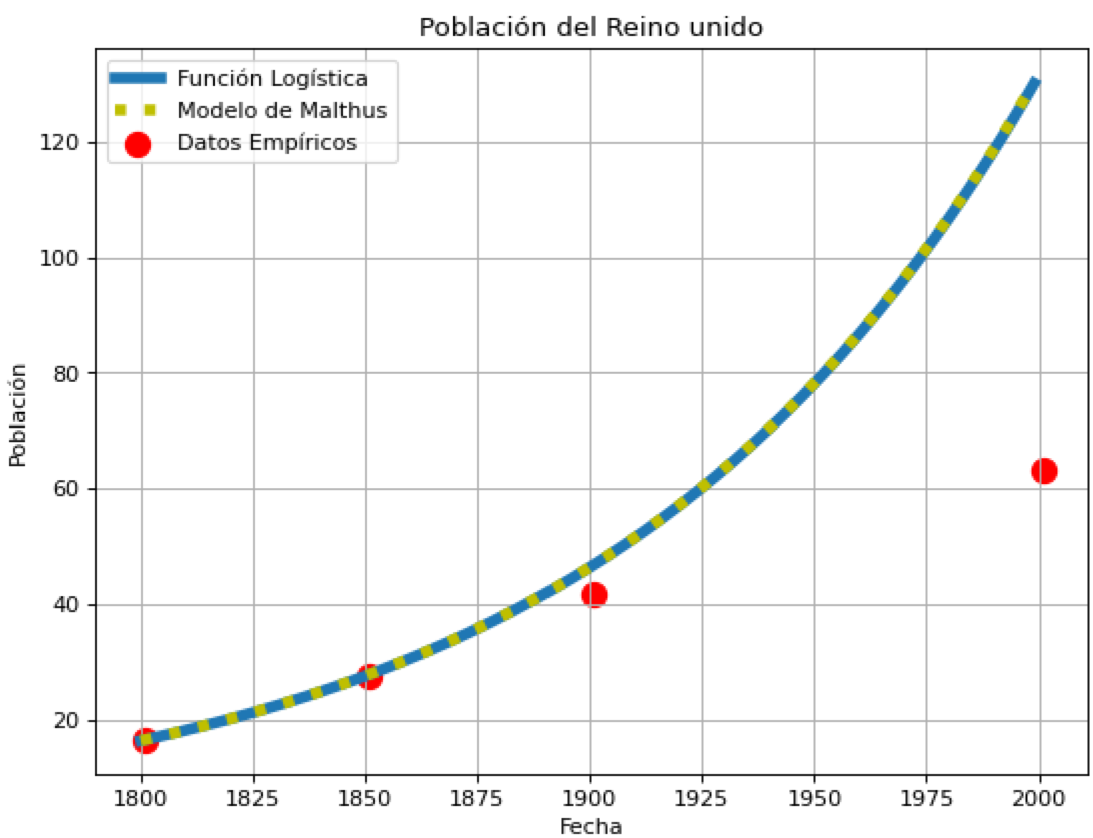
In [14]:
```
x0=16.345646
x50=27.533755
l=[]
l1=[]

#Calcular K y r de manera iterativa
for k in range(50000,90000):
    m=k
    r= (-1/50)*(math.log(x0)-math.log(m-x0)+math.log(m/x50-1))
    l1.append(r)
    e=math.exp(-50*r)
    p=k/(1+(e*(k-x0)/x0))
    l.append(p)

K=50009
R=l1[9]
print ('======================')
print (f'El valor de K es {K}')
print (f'El valor de r es {R}')
print ('======================')
```

```
======================
El valor de K es 50009
El valor de r es 0.010433499288615042
======================
```

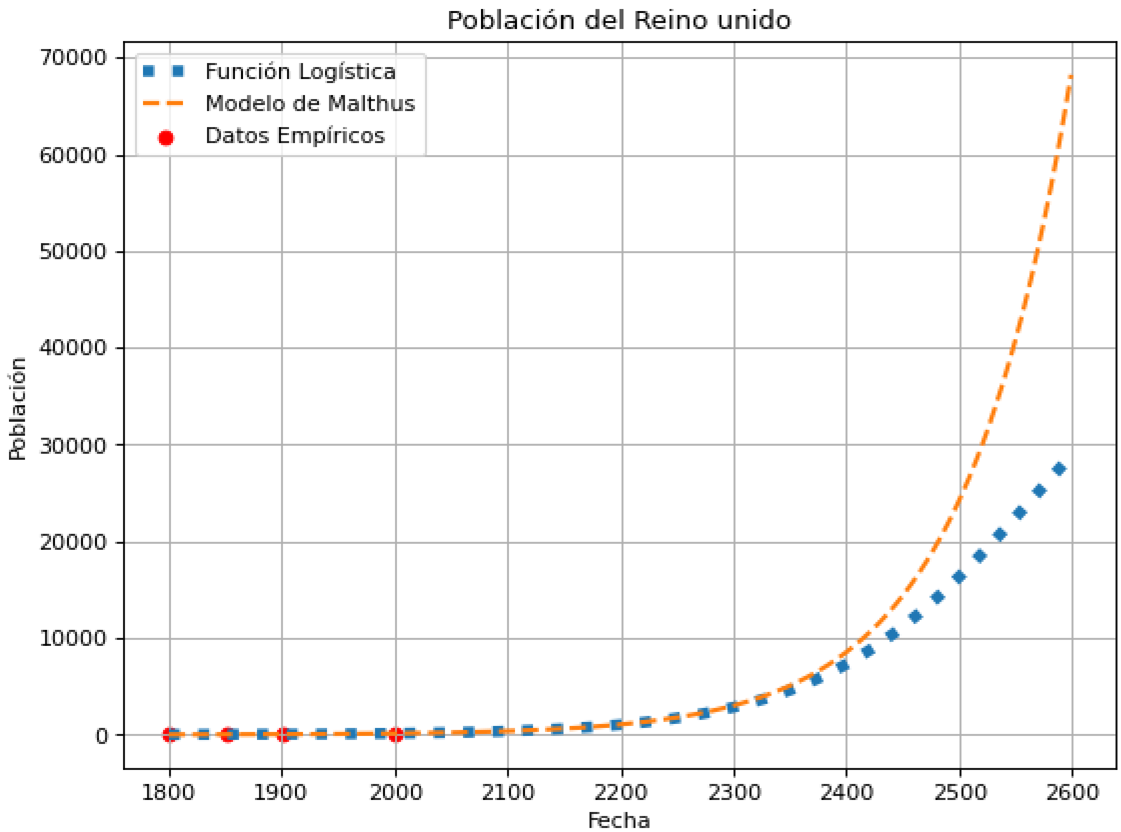
In [15]:
```
poblacion = {}
for i in range(5):
    poblacion[str(1801+(50*i))]=(K/(1+(math.exp(-50*i*R)*((K-x0)/x0))))
pprint(poblacion)
```

```
{'1801': 16.345646,
 '1851': 27.533755,
 '1901': 46.3726887542035,
 '1951': 78.08131608367776,
 '2001': 131.4145788537958}
```

In [16]:
```
t = np.arange(0, 200, 1)
x = K/(1+ ( ( (K-x0)/x0 )*np.exp(-R*t) ) )
P0=x0
m =P0*np.exp(R*t)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6), dpi=80)
ax.plot(t+1800, x ,linewidth=5, linestyle='-' )
ax.plot(t+1800, m ,':y', linewidth=5)
ax.scatter([1801,1851,1901,2001],[16.345646,27.533755,41.609091,63],c='r',s=12
0)

ax.set(xlabel='Fecha', ylabel='Población',
       title='Población del Reino unido')
ax.legend(["Función Logística","Modelo de Malthus","Datos Empíricos"])
ax.grid()

plt.show()
```



In [17]:
```
t = np.arange(0, 800, 1)
x = K/(1+ ( ( (K-x0)/x0 )*np.exp(-R*t) ) )
P0=x0
m =P0*np.exp(R*t)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6), dpi=80)
ax.plot(t+1800, x ,linewidth=5, linestyle=':' )
ax.plot(t+1800, m ,linewidth=2, linestyle='--')
ax.scatter([1801,1851,1901,2001],[16.345646,27.533755,41.609091,63],c='r')

ax.set(xlabel='Fecha', ylabel='Población',
       title='Población del Reino unido')
ax.legend(["Función Logística","Modelo de Malthus","Datos Empíricos"])
ax.grid()

plt.show()
```



Cómo podemos observar en las gráficas anteriores, aunque el modelo de Malthus y el logístico sean distintos para más de 500 años, en el intervalo entre 1800-2000 casi no se nota la diferencia. También podemos observar que hay una difencia significativa entre los datos empíricos y la predicción hecha con cualquiera de los dos modelos. Esto se puede mejorar utilizando más puntos para calcular las constantes K y r, y no sólamente los 2 primeros datos.