
Le problème des trois corps

420-C13-VM Outils de gestion et de soutien

Remise du projet le **19 décembre 2022**

Directive : Votre projet devra être remis sur le site Léa du cours et sur le dépôt Git.

Objectif du projet

Dans ce projet évalué, vous devez réaliser un document Excel permettant la réalisation d'une simulation du problème des trois corps. Il s'agit d'un cas particulier du problème à N corps que nous retrouvons en mécanique céleste (lien [Wikipédia](#)). Pour y parvenir, vous devez :

- Effectuer une série de calcul basé sur les équations newtonienne
- Produire deux graphiques distincts affichant le résultat de la simulation
- Ajouter une simulation à l'un des graphiques
- Ajouter un élément de votre cru

Introduction

Le problème à N corps est un exemple couramment présenté en physique. Il permet de bien comprendre les lois newtoniennes (mouvement, gravité, etc.) dans un contexte en général simplifié. Lorsque nous appliquons ce problème dans un univers en deux dimensions¹ et nous réduisons le problème à quelques corps, le logiciel Excel permet de réaliser une simulation convaincante. Toutefois, nous devons y apporter quelques modifications afin de rendre le tout plus simple pour notre contexte actuel.

Notes importantes sur ce travail

Cette simulation représente le déplacement d'un corps dynamique subissant les effets des forces appliquées par trois corps statiques. L'approche présentée ici repose sur des approximations faibles et met l'accent davantage sur le résultat graphique que sur une représentation physique exacte. D'un point de vue théorique, cette simulation est très simpliste, mais permet un rendu visuel tout de même intéressant.

Plusieurs simplifications sont faites dans le but d'alléger la simulation. Principalement, on note les points suivants :

- Les déplacements sont calculés par des pas d'intégration discrets (ignorant la nature réelle du mouvement entre ces pas).
- Les équations de mouvement sont basées sur la théorie newtonienne (l'étudiant chevronné pourra se référer aux équations d'Einstein).

¹ Il est possible de « retirer » une ou deux dimensions à l'univers et les règles de la physique continue à s'appliquer. Ce phénomène résulte de l'orthogonalité de l'univers. Chaque dimension (autre que le temps) est indépendante l'une de l'autre.

- Il n'y a aucune détection et gestion des collisions (implique que les corps restent intègres en passant les uns au travers les autres).
- La constante d'Aarseth est intégrée au modèle afin de minimiser les accélérations trop brusques près des points de singularité.
- Le coefficient de friction (présenté dans le second exemple) est une constante fixe ne tenant pas compte de la vitesse ou d'autres facteurs.
- On vous demande de générer 1000 points de trajectoire dans le temps.

Contraintes

Pour ce travail, vous devez respecter les contraintes suivantes :

- Le projet se fait **individuellement**. L'entre-aide constructive est encouragée à condition que chaque étudiant maîtrise complètement ce qu'il présente. À tout moment et sans préavis, l'enseignant se réserve le droit de questionner un étudiant sur son travail. Un étudiant incapable d'expliquer une solution qu'il met de l'avant se verra attribuer une note de 0 pour plagiat.
 - Le partage de document, même en partie, constitue un plagiat.
- Contrairement aux exercices où la mise en forme était imposée, vous devez faire **votre propre mise en forme**. En fait, il est interdit de reprendre la même mise en forme que les exemples donnés par l'enseignant. Chaque étudiant doit présenter son travail de façon soignée et selon sa touche personnelle. Soyez informé que la qualité de la présentation compte de façon substantielle.
- Il est demandé d'**ajouter un élément fonctionnel de votre cru** permettant d'améliorer l'application. L'ajout peut être de n'importe quel ordre, mais les points sont attribués sur la pertinence, le niveau de difficulté et la qualité de sa réalisation. Il est important de **discuter avec la personne enseignante** afin de **valider** votre idée avant de la réaliser. À même le fichier Excel que vous allez remettre, vous devez présenter clairement quel est l'ajout personnel que vous avez fait. Sans cette courte présentation, l'ajout ne sera pas corrigé.
- Vous devez séparer vos calculs en plusieurs cellules. Dans le cas contraire, il ne sera pas possible de déboguer votre projet.
- Une pénalité de 10% par jour de retard sera appliquée.

Énoncé spécifique du travail

À partir du texte donné, faire la mise en page et la mise en forme d'un document de qualité. Il est essentiel que la personne étudiante réalise un document visuellement agréable et original.

Ce travail doit être le fruit de la personne étudiante et réaliser selon ses goûts et sa personnalité. Il est important de garder en tête que ce travail doit être réalisé dans un contexte sérieux et professionnel et que la personne apprenante doit être fier de remettre ce travail où sa touche personnelle est visible.

Objectifs spécifiques

Votre travail devra être réalisé dans deux feuilles. Pour chaque feuille, voici ce qui est demandé :

- Feuille 1 – Conditions initiales et trajectoire
 - Vous devez mettre en place un outil permettant de définir tous les paramètres des conditions initiales. Certains paramètres doivent être définis par l'utilisateur alors que d'autres sont calculés automatiquement :
 - Paramètres généraux :

• base de temps	t	usager
• ratio de la constante d'Aarseth	Λ	usager
 - Les paramètres du corps en mouvement :

• la masse	m	usager
• la position initiale en x et y	p	usager
• la vitesse initiale en x et y	v	usager
• l'accélération initiale en x et y	a	usager
 - Les paramètres pour chacun des trois corps statiques :

• la position en x et y	q	usager
• le rayon de la sphère représentant le corps	r	usager
• la masse volumique moyenne du corps	ρ	usager
• le volume	V	automatiquement
• la masse totale	M	automatiquement
• la constante d'Aarseth	λ	automatiquement
 - Vous devez aussi inclure un graphique affichant ceci :
 - un système d'axe affichant les dimensions;
 - trois cercles indiquant les trois corps statiques;
 - la trajectoire obtenue.
- Feuille 2 – Simulation en mouvement
 - le graphique animé;
 - un bouton permettant d'amorcer l'animation;
 - un petit texte indiquant l'état d'avancement de la trajectoire en pourcentage

Quelques notions et rappels mathématiques

Le problème à N corps consiste à déterminer la position des corps interagissant gravitationnellement les uns avec les autres, connaissant leurs masses, leurs positions, vitesses et accélérations initiales. Il s'agit d'un problème mathématique fondamental pour la physique et un défi significatif pour les domaines de la mathématique symbolique et numérique. Le problème à N corps se pose dans le cadre newtonien et peut devenir rapidement très difficile. Néanmoins, cette étude se pose aussi dans le cadre de la relativité générale et devient largement plus complexe.

Rappel sur la physique newtonienne

Le calcul de la position courante en fonction des valeurs de position, vitesse et accélération précédente :

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \vec{v}_{i-1}\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_{i-1}\Delta t^2$$

Le calcul de la vitesse courante en fonction de la vitesse et de l'accélération précédente :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \vec{a}_{i-1}\Delta t$$

Le calcul de l'accélération courante de n corps gravitant les uns autour des autres :

$$\vec{a}_{ji} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n m_k \frac{\vec{p}_{ki} - \vec{p}_{ji}}{\left(\|\vec{p}_{ki} - \vec{p}_{ji}\|^2 + \lambda_k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le travail demandé consiste à appliquer la force de trois corps statiques sur un seul corps en mouvement. Ainsi et considérant la dernière équation, l'accélération de l'unique corps en mouvement se simplifie et se complète par :

$$\vec{a}_i = \sum_{k=1}^3 m_k \frac{\vec{q}_k - \vec{p}_i}{\left(\|\vec{q}_k - \vec{p}_i\|^2 + \lambda_k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{a}_i = m_1 \frac{\vec{q}_1 - \vec{p}_i}{\left(\|\vec{q}_1 - \vec{p}_i\|^2 + \lambda_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} + m_2 \frac{\vec{q}_2 - \vec{p}_i}{\left(\|\vec{q}_2 - \vec{p}_i\|^2 + \lambda_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} + m_3 \frac{\vec{q}_3 - \vec{p}_i}{\left(\|\vec{q}_3 - \vec{p}_i\|^2 + \lambda_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Vous trouverez des précisions sur les symboles (voir la [TABLE 1](#)) à la page suivante.

Table 1 Précision sur les symboles des équations de la section *Rappel sur la physique newtonienne*

Symbole	Signification
$\dots i$	au temps i
$\dots i - 1$	au temps $i - 1$, c'est-à-dire au temps précédent le temps i
Δt	l'intervalle de temps écoulé entre le temps i et le temps $i + 1$
p_i	la position du corps en mouvement au temps i
v_i	la vitesse du corps en mouvement au temps i
a_i	l'accélération du corps en mouvement au temps i
q_k	la position du k^{e} corps statique
m_k	la masse du k^{e} corps statique
λ_k	la constante d'Aarseth du k^{e} corps statique

Rappels mathématiques

Voici quelques rappels au niveau des calculs nécessaires pour ce projet.

Pour ce projet, nous ne considérons qu'un monde en 2D (la représentation 3D serait difficile avec Excel). Ainsi, la notation mathématique utilisée utilise une syntaxe vectorielle 2D.

N'hésitez pas à poser des questions à votre enseignant si certaines formules vous causent des problèmes.

Table 2 Liste de différents rappels mathématiques

Symbole	Signification
\vec{u}	<p>Cette syntaxe indique que u est un vecteur représentant deux valeurs à la fois : les composantes x et y de l'espace 2D.</p> $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ <p>Les deux valeurs sont calculées indépendamment de l'autre.</p>
$\ \vec{u}\ $	<p>Cette notation s'appelle la norme (ou longueur) du vecteur. Elle est calculée par l'équation de la distance euclidienne.</p> $\ \vec{u}\ = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$\vec{u} - \vec{v}$	<p>Il s'agit d'une soustraction vectorielle. Les composantes des deux vecteurs sont soustraites l'une à l'autre et le résultat est un nouveau vecteur (ex. \vec{w}).</p> $\vec{w} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$
V	<p>Il s'agit du volume d'une sphère. Pour une sphère de rayon r, le volume est donné par l'équation suivante :</p> $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
M	<p>Il s'agit de la masse d'un corps. Pour un corps avec une masse volumique ρ et un volume V, la masse est donnée par l'équation suivante :</p> $M = \rho V$
λ	<p>Il s'agit de la constante d'Aarseth pour un corps propre. L'équation de cette constante est :</p> $\lambda = r\Lambda$ <p>Où r est le rayon d'un corps et Λ est le ratio de la constante d'Aarseth.</p>



Note technique

Excel n'offre aucun outil permettant d'animer directement un graphique. Il est donc nécessaire de programmer un tel outil en tirant avantage de la façon dont il gère les graphiques. Même si nous n'avons pas abordé le sujet en classe, il faut utiliser un peu de *VBA (Visual Basic for Application)* pour y arriver. L'idée est relativement simple et se fait en 5 étapes :

1. créer d'abord toutes les données devant être affichées dans le graphique (on précise qu'il faut créer toutes les données dès le départ pour chaque étape d'animation – ainsi, à chaque étape, on récupère les données précalculées et on les présente au graphique);
2. ensuite, déterminer trois cellules contenant les indexes de l'animation (qui pourront être masquées au besoin) :
 - a. position initiale;
 - b. position finale;
 - c. position courante;
3. utiliser les fonctions de recherche (telles que **INDEX** et **EQUIV**) afin d'extraire les données calculées en 1 de la *i*^e étape d'animation (correspondant à la position courante *i*);
 - a. Les fonctions précédemment mentionnées ressemblent beaucoup à celles vues en classe. Une présentation des deux fonctions sera réalisée en classe lors que la présentation du projet.
4. créer un graphique utilisant la plage de données faite en 3;
5. finalement, écrire un petit script en *VBA* réalisant ces étapes :
 - a. une boucle changeant la valeur de la position courante en partant de la position initiale jusqu'à la position finale;
 - b. recalculer l'étape 3;
 - c. effectuer le rafraichissement du graphique.

Voici le code *VBA* nécessaire (disponible à la page suivante) :



```
' -----  
' VBA - Les commentaires débutent par un apostrophe  
' -----  
' Changer les champs suivants pour vos cellules et plages correspondantes :  
' - A1 = La cellule où se trouve l'index minimum de la simulation (1)  
' - A2 = La cellule où se trouve l'index maximum de la simulation (1000)  
' - A3 = La cellule réceptrice de la valeur courante de l'index  
' - J1:M10 = La plage des cellules à recalculer pour le graphique  
' - GraphToAnimate = Le nom du graphique (voir l'onglet Disposition)  
' -----  
Option Explicit  
Option Base 0  
Sub Startsimulation()  
    Dim i As Integer  
    For i = Range("A1").Value To Range("A2").Value  
        Range("A3").Value = i  
        Application.ActiveSheet.Range("J1", "M10").Calculate  
        ActiveSheet.ChartObjects("GraphiqueAnimation").Application.Calculate  
        DoEvents  
        DoEvents  
        'WaitFor (1)  
    Next i  
End Sub  
Sub WaitFor(sec)  
    Dim rightNow As Date  
    rightNow = Now()  
    Application.Wait TimeSerial(Hour(rightNow), Minute(rightNow), Second(rightNow) + sec)  
End Sub
```

Finalement, voici les étapes pour insérer un bouton sur l'interface et créer le lien entre le bouton et le code VBA qu'il doit exécuter :

1. assurez-vous que l'onglet *Développeur* est affiché sur le ruban (voir : *Fichier – Options – Personnaliser le ruban* – à droite, activer l'onglet);
2. sur l'onglet *Développeur*, dans le groupe *Contrôle*, *Insérer* un *Contrôle ActiveX* de type *Bouton de commande* et dessinez-le directement sur la feuille *Excel* (vous remarquerez que le *Mode Création* vient d'être activé – voir le groupe *Contrôle* de l'onglet *Développeur*);
3. double cliquez sur le bouton et automatiquement apparaît l'interface de travail de *Microsoft Visual Basic pour Application (VBA)*, on remarque qu'on a déjà une fonction de définie qui s'intitule : *Private Sub CommandButton1_Click()*
4. quitter le *Mode Création*.

Finalement, lorsque votre fichier *Excel* comporte une macro ou du code, ce dernier doit être sauvegardé avec un nouveau format de fichier nommé *XLSM* plutôt que *XLSX*.

Fichiers donnés

Trois exemples sont fournis. Le premier, plus simple, correspond à une version minimum à réaliser alors que le second présente une version plus sophistiquée pouvant servir d'inspiration. Finalement, le troisième exemple présente une solution que seuls les étudiants les plus chevronnés pourront tenter où 12 corps gravitent les uns autour des autres.

Vous trouverez des captures d'écrans à la fin du document.

Remise et conseils

La remise doit être faite sur la page Léa du cours et doit faire partie du dépôt GIT fourni à l'enseignant. L'ensemble des documents devront être remis avant le **19 décembre 2022 à 23h59**.

Les travaux sont acceptés jusqu'au **24 décembre 2021 à 15h30**.

Afin d'être équitables envers toutes les personnes apprenant du cours, les travaux remis en retard auront une pénalité de **10 % par jour de retard**.

Ce projet n'est pas très difficile, mais cela peut s'avérer très long. Il est donc recommandé de se mettre au travail aussitôt que possible. Il est conseillé de terminer le travail même s'il n'est pas complètement à votre goût et d'y revenir ensuite afin de faire les retouches nécessaires.

Grille d'évaluation

Ce projet a une pondération de 25% de la note finale. La note du travail sera évaluée à partir des grilles d'appréciation suivante. Le total des points sera de 102 points.

Qualité de la présentation (12 points)			
A (12 points)	B (8 points)	C (4 points)	D (0 point)
Dans l'ensemble du projet, la personne étudiante a pris soin de la présentation des éléments présents (zéro, un ou deux). Elle a choisi avec soin la mise en page et la mise en forme et ce pour les tables de données et les graphiques.	Pour quelque éléments (trois ou quatre), la personne étudiante n'a pas pris soin de la présentation. Elle a choisi avec soin la mise en page et la mise en forme et ce pour les tables de données ou les graphiques.	Pour plusieurs éléments (cinq ou six), la personne étudiante n'a pas pris soin de la présentation. Elle n'a pas appliqué de mise en page et de mise en forme à une ou certaine table ainsi qu'à un ou certain graphique.	Pour de nombreux éléments (plus de six), la personne étudiante n'a pas pris soin de la présentation. Elle n'a pas appliqué de mise en page et de mise en forme à une ou certaine table ainsi qu'à un ou certain graphique ou n'a pas réalisé le travail.

Justesse des équations (45 points)			
A (45 points)	B (30 points)	C (15 points)	D (0 point)
La totalité des équations (zéro, une ou deux) est juste et précise et les objets mathématiques (vecteurs) sont calculés selon les règles applicables.	Il y a quelques équations (trois ou quatre) qui ne sont pas justes et précises et les objets mathématiques (vecteurs) sont calculés selon les règles applicables.	Il y a quelques équations (cinq) qui ne sont pas justes et précises et les objets mathématiques (vecteurs) ne sont pas calculés selon les règles applicables. De plus, au moins un calcul n'a pas été distribués dans plusieurs cellules.	Il y a plusieurs équations (plus de six) qui ne sont pas justes ou précises et les objets mathématiques (vecteurs) ne sont pas calculés selon les règles applicables ou les calculs et équations n'ont pas été réalisés.

Création des graphiques (12 points)			
(12 points)	B (8 points)	C (4 points)	D (0 point)
La personne étudiante a parfaitement généré les deux graphiques.	Il manque un ou deux éléments (corps ou trajectoire) dans l'un des graphiques.	Il manque trois éléments (corps ou trajectoire) dans l'un des graphiques ou un ou deux éléments dans les deux graphiques.	Il manque plus de trois éléments (corps ou trajectoire) dans les graphiques.

Animation des graphiques (12 points)			
(12 points)	B (8 points)	C (4 points)	D (0 point)
Le second graphique est parfaitement animé. La génération des trois corps est présente et l'objet en mouvement se déplace. Le script d'animation a parfaitement été intégré ainsi que les équations pour le calcul de la trajectoire.	Le second graphique est animé. La génération d'au moins deux des trois corps est présente et l'objet en mouvement se déplace. Le script d'animation a été intégré ainsi que les équations pour le calcul de la trajectoire mis à part un élément du calcul.	Le second graphique est animé. La génération d'au moins un des trois corps est présente ou l'objet en mouvement se déplace. Le script d'animation a été intégré ainsi que les équations pour le calcul de la trajectoire mis à part deux éléments du calcul.	Le second graphique n'est pas animé ou la génération des trois corps est présente ou l'objet en mouvement ne se déplace pas. Le script d'animation a été intégré ainsi que les équations pour le calcul de la trajectoire mis à part deux éléments du calcul ou le travail n'a pas été réalisé.

Élément du cru de la personne étudiante (21 points)			
A (21 points)	B (14 points)	C (7 points)	D (0 point)
La personne étudiante a ajouté un élément fonctionnel qui est pertinent dans le projet, qui représente un défi de niveau collégial et qui est de qualité dans son implantation.	L'élément est fonctionnel et respecte deux des trois critères : pertinence, difficulté ou qualité.	L'élément n'est pas fonctionnel ou respecte un des trois critères : pertinence, difficulté ou qualité.	L'élément n'est pas fonctionnel ou ne respecte pas les trois critères : pertinence, difficulté et qualité ou le travail n'a pas été réalisé.

Pénalité en cas de non-respect

L'évaluation est à des pénalités si vous ne respectez pas certains éléments. Dépendant de chaque cas, votre note ne pourra pas dépasser la valeur maximale.

- Non-distribution dans plusieurs cellules des calculs (maximum de **C** pour le critère *Justesse des équations*)
- Non-indication de l'ajout (maximum de **D** pour le critère *Élément du cru de la personne étudiante*)

Capture d'écran

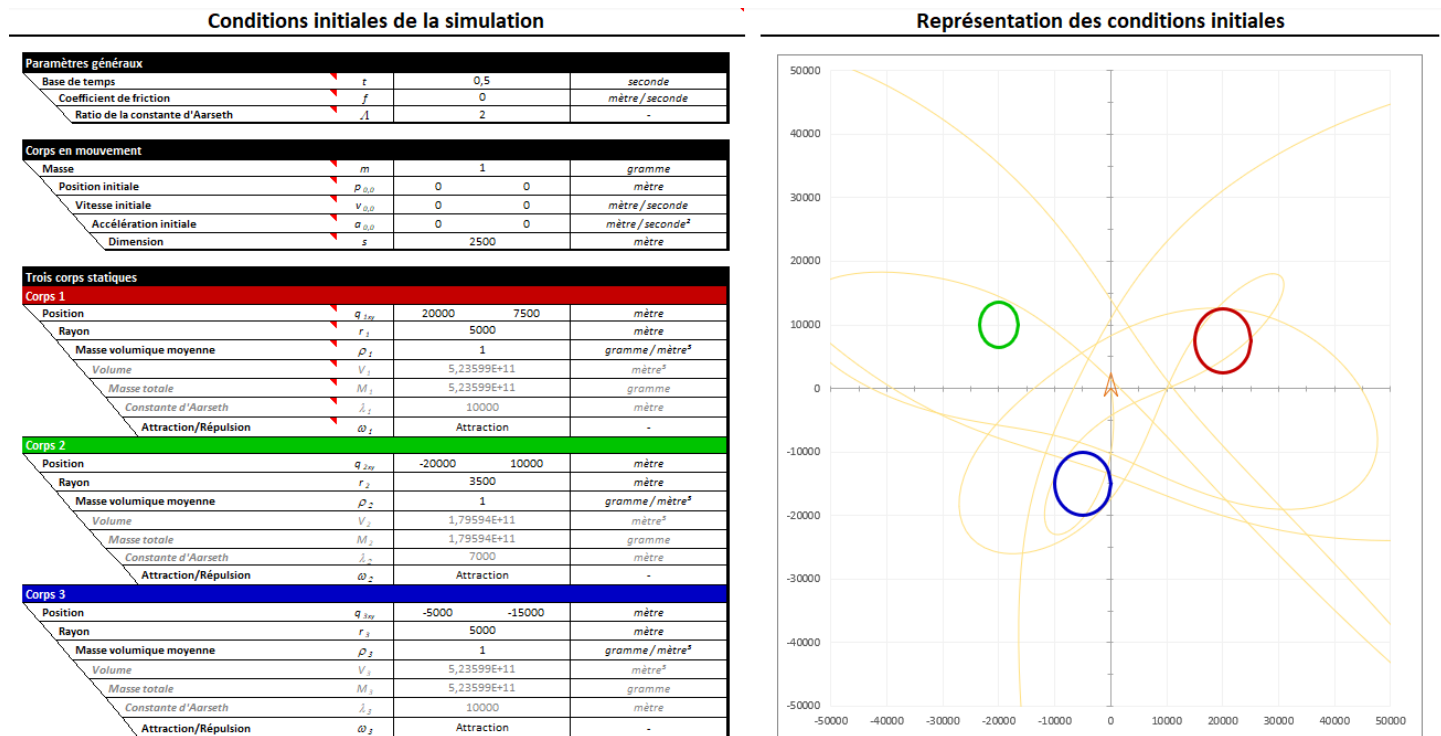


Figure 1 Illustration de la feuille 1, aucune autre information ne doit être présente

Démarrer la simulation

Appuyer sur *Échapper* pour arrêter la simulation... ensuite appuyez su...

9,6%

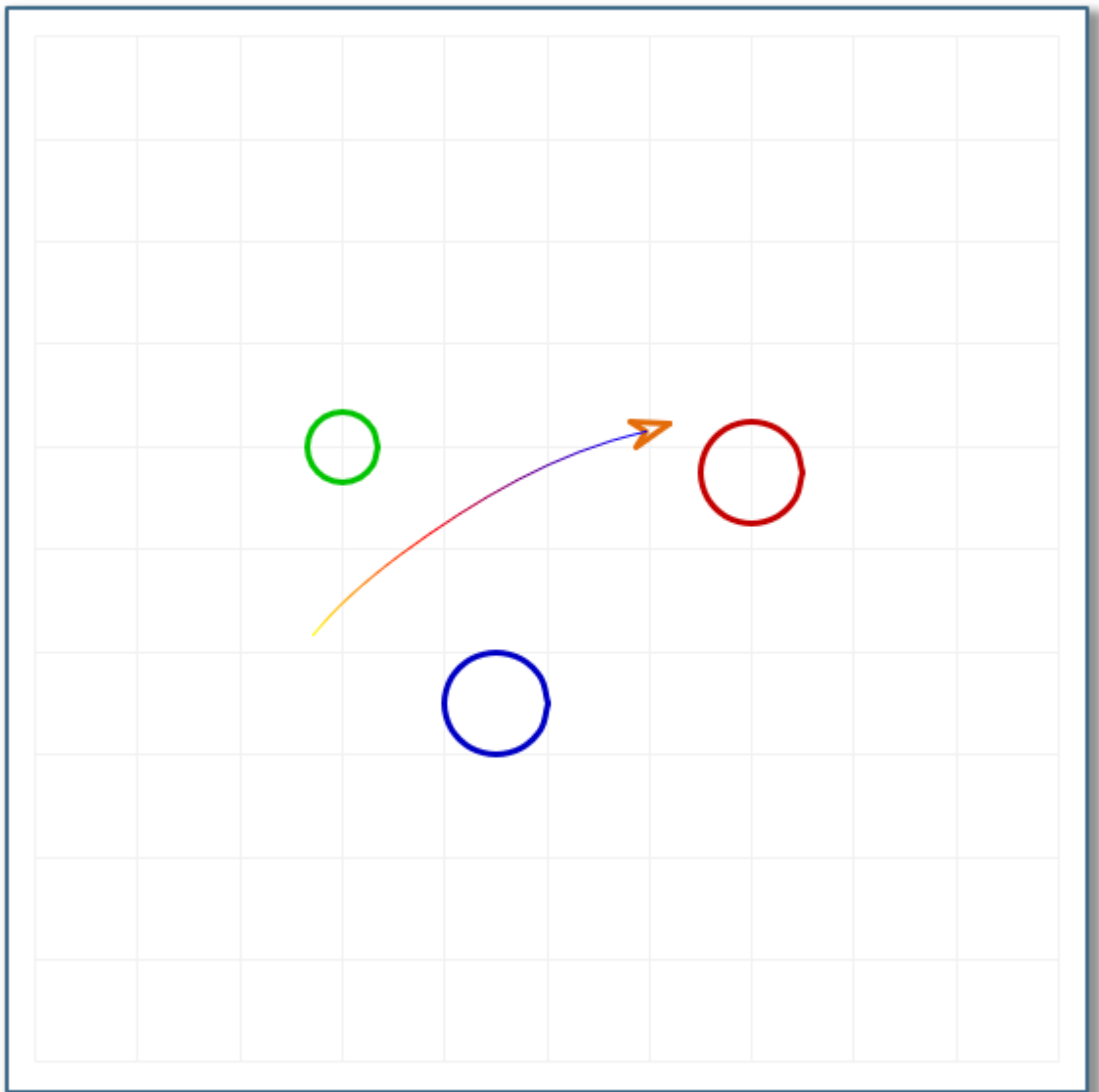


Figure 2 Illustration de la seconde feuille avec l'animation