



# Optyka soczewek

Grupa projektowa: 1B

Wykonawcy:

*Jakub Stosik s204300*

*Karol Pluto Prądzynski s203561*

Wersja dokumentu: *1.3*

*15 XII 2025 r.*

# 1 Wstęp

Optyka jest działem fizyki zajmującą się światłem - jego prawami, rozchodzeniem się i oddziaływaniem z materią. Ważnym zagadnieniem tego działu jest optyka geometryczna przedstawiająca opis załamывania się promieni światła w różnych ośrodkach. W tym projekcie zajmujemy się załamaniem promieni światła na soczewkach, które z fizycznego punktu widzenia są przezroczystymi obiektami o dwóch współosiowych powierzchniach załamujących światło.

## 2 Cel projektu

Celem projektu jest zaprojektowanie modelu fizycznego promienia świetlnego przechodzącego przez soczewkę o zadanych parametrach.

## 3 Opis modelowanego zjawiska

Soczewki mogą wytwarzać obraz źródła światła zmieniając kierunek promieni świetlnych wychodzących z jego powierzchni. Obraz powstaje gdy po zmianie kierunku przecinają się promienie (tworząc obraz rzeczywisty), lub ich przedłużenia (tworząc obraz pozorny).

### 3.1 Modelowanie soczewek

W naszym programie zaimplementowane zostaną 4 typy soczewek: dwuwypukłe, dwuwklęsłe, płasko-wypukłe, płasko-wklęsłe. Dla każdego z tych typów równania opisujące soczewki na płaszczyźnie będą się różnić.

#### Soczewki dwuwypukłe

Dla soczewek dwuwypukłych, które matematycznie opisane są za pomocą dwóch okręgów na płaszczyźnie  $XZ$ , równania wyglądają następująco:

$$(x - x_1)^2 + z^2 = R_1^2 \quad (1)$$

gdzie  $x_1$ ,  $R_1$  są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień pierwszego okręgu.

$$(x - x_2)^2 + z^2 = R_2^2 \quad (2)$$

gdzie  $x_2$ ,  $R_2$  są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień drugiego okręgu.

Warto zauważyć, że środki obu okręgów leżą na tej samej osi (prostej  $z = z_1 = z_2 = 0$ )

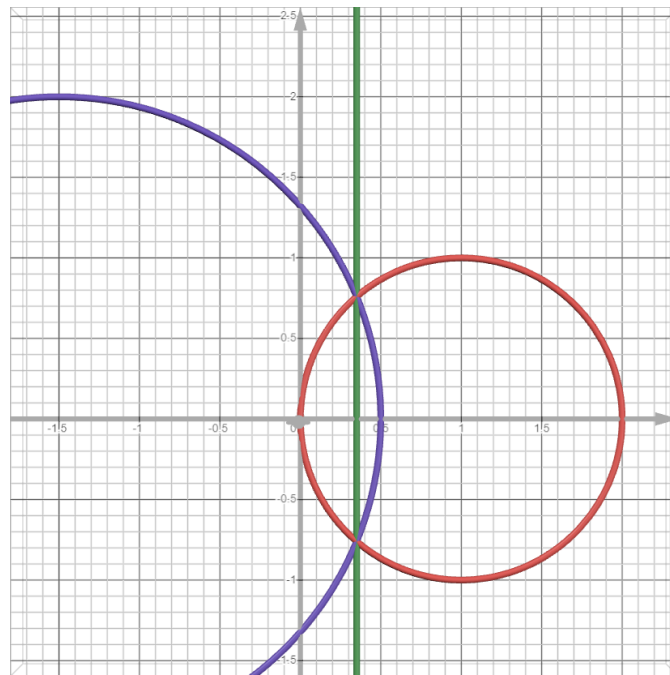
Rozwiązując te równania ze względu na  $x$  otrzymujemy prostą, która wyznaczy nam środek soczewki dwuwypukłej:

$$x = \frac{x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2}{2(x_1 - x_2)} \quad (3)$$

Aby modelowanie soczewek za pomocą powyższych równań miało sens, musi zostać spełniony następujący warunek:

$$|R_1 - R_2| < |x_1 - x_2| < R_1 + R_2 \quad (4)$$

gdzie  $R_1, R_2 > 0$  oraz  $x_1 > x_2$



Rysunek 1: Matematyczna wizualizacja cienie soczewki dwuwypukłej

## Soczewki dwuwklęsłe

Dla soczewek dwuwklęsłych, które matematycznie są opisane za pomocą dwóch okręgów na płaszczyźnie  $XZ$ , dwóch prostych ograniczających soczewkę z góry i

z dołu (apertura), równania wyglądają następująco:

$$(x - x_1)^2 + z^2 = R_1^2 \quad (5)$$

gdzie  $x_1$ ,  $R_1$  są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień pierwszego okręgu.

$$(x - x_2)^2 + z^2 = R_2^2 \quad (6)$$

gdzie  $x_2$ ,  $R_2$  są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień drugiego okręgu.

Warto zauważyć, że środki obu okręgów leżą na tej samej osi (prostej  $z = z_1 = z_2 = 0$ )

Rozwiązując te równania ze względu na  $x$  - podobnie jak powyżej - otrzymujemy prostą, która wyznaczy nam środek soczewki dwuwklęsłej:

$$x = \frac{x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2}{2(x_1 - x_2)} \quad (7)$$

Proste ograniczające soczewkę z góry:

$$y = \pm a \quad (8)$$

gdzie  $a < \min(|R_1|, |R_2|)$

Aby modelowanie soczewek za pomocą powyższych równań miało sens, musi zostać spełniony następujący warunek:

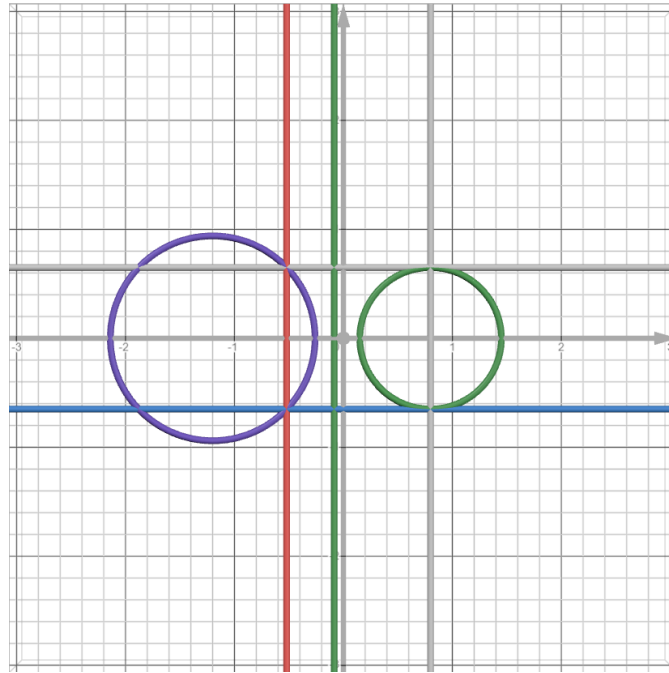
$$|x_1 - x_2| > R_1 + R_2 \quad (9)$$

gdzie  $R_1, R_2 > 0$  oraz  $x_1 > x_2$

Dodatkowo w programie podczas rysowania soczewek dwuwklęsłych, będziemy je ograniczała z lewej jak i z prawej strony odpowiednimi równaniami:

$$x = x_2 + \sqrt{R_2^2 - a^2} \quad (10)$$

$$x = x_1 - \sqrt{R_1^2 - a^2} \quad (11)$$



Rysunek 2: Matematyczna wizualizacja cienkiej soczewki dwuwklęsłej

### Soczewki płasko-wypukłe

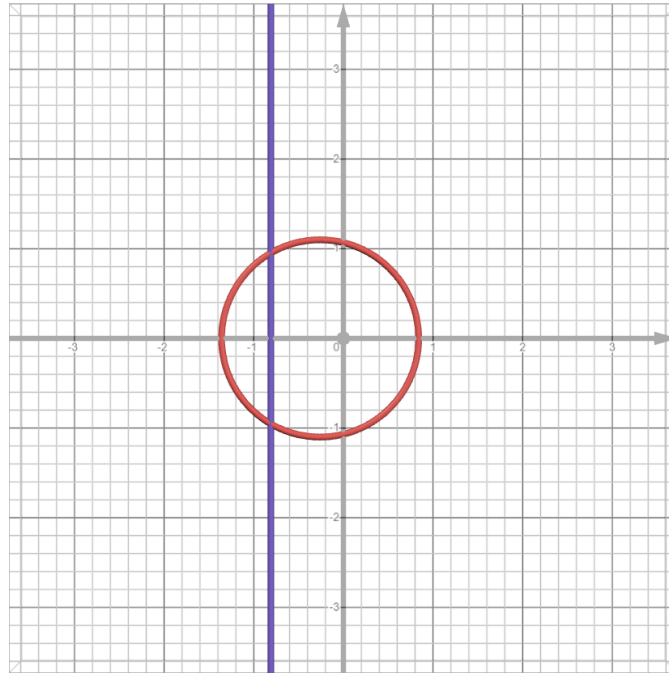
Dla soczewek płasko-wypukłych, które matematycznie są opisane za pomocą jednego okręgu na płaszczyźnie  $XZ$  oraz jednej prostej ograniczającej soczewkę (płaska jej część), równania wyglądają następująco:

$$(x - x_1)^2 + z^2 = R_1^2 \quad (12)$$

gdzie  $x_1$ ,  $R_1 > 0$  są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień okręgu.

$$x = a \quad (13)$$

gdzie  $x_1 - R_1 < a < x_1 + R_1$



Rysunek 3: Matematyczna wizualizacja cienkiej soczewki płasko-wypukłej

### Soczewki płasko-wklęsłe

Dla soczewek płasko-wklęsłych, które matematycznie są opisane za pomocą jednego okręgu na płaszczyźnie  $XZ$ , jednej prostej ograniczającej soczewkę (płaska jej część) oraz dwóch prostych ograniczających soczewkę z góry i z dołu (apertura), równania wyglądają następująco:

$$(x - x_2)^2 + z^2 = R_2^2 \quad (14)$$

gdzie  $x_2$ ,  $R_2$  są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień okręgu.

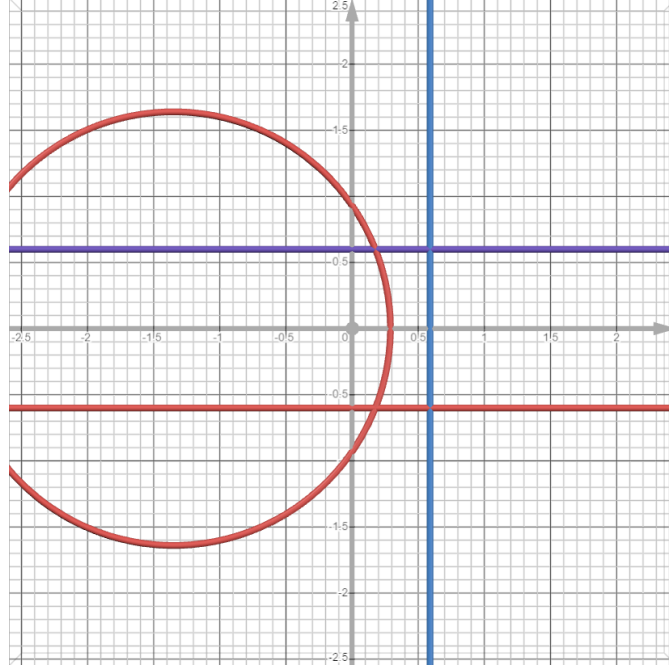
Proste ograniczające soczewkę z góry:

$$y = \pm a \quad (15)$$

gdzie  $0 < a < R_2$

Prosta ograniczająca soczewkę

$$x = x_2 + R_2 + \frac{a}{2} \quad (16)$$



Rysunek 4: Matematyczna wizualizacja cienkiej soczewki płasko-wklęsłej

### 3.2 Rysowanie promienia świetlnego - ray tracing

Promień będziemy rysować w trzech etapach. Pierwszy etap to przebieg promienia od punktu startowego do punktu, w którym pada na powierzchnię soczewki z lewej strony, bo zakładamy w naszym programie, że start przebiegu promienia będzie po lewej stronie modelowanej soczewki. Zakładamy również pewne uproszczenie, tj. promień na początku ma kierunek zgodny z osią  $OX$ , a więc można nadać mu kierunek  $\vec{k} = [1, 0]$ . Przebieg zaczyna się od punktu startowego  $(x_0, z_0)$ , pada na soczewkę w punkcie  $(x_p, z_p)$ . Możemy dokładnie wyznaczyć punkt przecięcia łuku z tą prostą (promieniem świetlnym). Dalej, aby wyznaczyć kąt załamania, musimy skorzystać z wektora normalnego do łuku w naszym punkcie padania promienia na soczewkę. Wektor normalny jest liczony za pomocą następującej zależności:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r} - r_{rodek}}{|\vec{r} - r_{rodek}|} = \frac{(x_p - x_c, z_p)}{R} \quad (17)$$

gdzie  $R$  — promień okręgu, na który pada promień w danej chwili  
 $x_c$  — współrzędna x-owa środka tego okręgu.

Dalej używamy odpowiednich funkcji liczących nowy kierunek wektora  $\vec{k}$ , kiedy promień przechodzi przez soczewkę oraz kiedy z niej wychodzi. Natomiast kąty załamania na kolejnym ośrodku liczymy z prawa Snella:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (18)$$

My natomiast w przebiegu promienia będziemy korzystać z równania parametrycznego z parametrem  $t$  (*to nie czas !*), gdzie  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{k} \quad (19)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k_x \\ k_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t k_x \\ z(t) = z_0 + t k_z \end{cases}$$

Podstawiając te składowe do równania okręgu otrzymujemy:

$$(x - x_c)^2 + z^2 = R^2 \quad (20)$$

$$(x_0 + t k_x - x_c)^2 + (z_0 + t k_z)^2 = R^2 \quad (21)$$

$$\text{inaczej: } at^2 + bt + c = 0 \quad (22)$$

$$\text{gdzie:} \quad (23)$$

$$a = k_x^2 + k_z^2 \quad (24)$$

$$b = 2((x_0 - x_c)k_x + z_0 k_z) \quad (25)$$

$$c = (x_0 - x_c)^2 + z_0^2 - R^2 \quad (26)$$

Z tego wynika, że mamy dwa możliwe przecięcia z okręgiem, ale tylko jedno będzie w jego widzocznej części (na soczewce) - wybieramy najmniejsze dodatnie.

W przypadku promienia padającego na płaską powierzchnię, a nie na fragment okręgu, parametr  $t$  można wyrazić dużo prościej:

$$t = \frac{(x_{\text{płaszczyzny}} - x_0)}{k_x} \quad (27)$$

gdzie  $x_{\text{płaszczyzny}}$  to równanie prostej, która zamyka płaską soczewkę.

Funkcje liczące nam promień zwracają nowy punkt przecięcia oraz nowy kierunek.

Podsumowując: tak możemy wymodelować *ray tracing* dla soczewek **grubych**.



## 4 Opis wykorzystywanych narzędzi

- Wersja Pythona: 3.14,
- Wykorzystywane biblioteki: numpy, sympy, matplotlib, scipy,
- IDE: Visual Studio Code

## 5 Ogólny opis i możliwe alternatywy

Przed wyświetleniem wizualizacji użytkownik będzie miał możliwość wyboru jednej z czterech typów soczewek za pomocą przycisków. Soczewki dwuwypukłe, soczewki dwuwklęsłe, soczewki płasko-wypukłe oraz płasko-wklęsłe. Wtedy też program pozwoli użytkownikowi na dobranie parametru promienia świetlnego - punkt jego 'startu' oraz promienie krzywizn/krzywizny za pomocą suwaku. Następnie dla wybranej soczewki program pokaże przebieg promienia światła od początku do załamania promienia z powierzchnią soczewki, przez przebieg promienia przez soczewkę, do ponownego załamania promienia na granicy soczewka-powietrze oraz dalej w nowym oknie.

Użytkownik powinien mieć możliwość wprowadzenia danych bezpośrednio w interfejsie za pomocą suwaków oraz wcześniej wspomnianych przycisków.

Jak ma wyglądać interfejs? Na początku wybranie soczewki i jej materiału, zadanie promienia krzywizny/krzywizn. Kolejne okno: wykres soczewki wraz z przebiegiem promienia w *matplotlib*

Alternatywą jest przygotowanie soczewek o odgórnie zadanych parametrach, przez którą załamywać się będzie promień. Inną alternatywą jest uruchomienie interfejsu w pojedynczym oknie, pozwolenie użytkownikowi na dobranie typów i materiałów soczewek w czasie rzeczywistym, a więc dodatnie funkcji aktualizującej obliczenia w czasie rzeczywistym. Jeszcze inną alternatywą jest dodatkowo dodanie soczewek grubych.

## 6 Specyficzne wymagania

### 6.1 Wymagania funkcjonalne

- Interfejs graficzny z obrazowym przedstawieniem soczewek,
- Wprowadzanie danych przez użytkownika,
- Wizualizacja toru promienia,

- Obliczanie załamania promieni świetlnych na soczewce,
- Obsługa błędów.

## 6.2 Wymagania niefunkcjonalne

- Intuicyjny interfejs graficzny,
- Modyfikowalność.

## 7 Harmonogram prac z zadaniami do wykonania

Tydzień	Zakres prac
1. 8 XII 2025 - 14 XII 2025	Funkcje modelujące soczewki w <i>matplotlib</i>
2. 15 XII 2025 - 4 I 2026	Dodanie funkcji załamania promienia na soczewce
3. 5 I 2026 - 11 I 2026	Interfejs graficzny, wprowadzanie danych i obsługa błędów
4. 12 I 2026 - 18 I 2026	Naprawa błędów i finalizacja

Tabela 1: Harmonogram prac

## Bibliografia

- [1] *Fizyka. Krótki kurs*, Czesław Bobrowski, Wydawnictwo Naukowe PWN 2016.
- [2] *Podstawy fizyki cz. 4*, D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Wydawnictwo Naukowe PWN 2014.

## 8 Lista zmian w dokumentacji

### Wersja 1.2

1. Zmiana marginesów dokumentu
2. Dodanie matematycznego opisu wymodelowanych soczewek w nowej sekcji *Modelowanie soczewek*
3. Modyfikacja tabeli z harmonogramem prac
4. Nowa bibliografia
5. Strona tytułowa

### Wersja 1.3

1. Dodanie opisu przebiegu promienia świetlnego
2. Usunięcie zbędnego opisu matematycznego tworzenia obrazu przez daną soczewkę, ponieważ nie to jest modelowane