Politechnika Gdańska

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

Optyka soczewek

Wstęp do modelowania zjawisk fizycznych

Grupa projektowa: 1B

Dokumentacja projektu

Wersja 1.4

Autorzy: Jakub Stosik, Karol Pluto Prądzynski

Nr albumu: s204300, s203561

Prowadzący: dr inż. Ewa Erdmann

Gdańsk, 2026

1 Wstęp

Optyka jest działem fizyki zajmującą się światłem - jego prawami, rozchodzeniem się i oddziaływaniem z materią. Ważnym zagadnieniem tego działu jest optyka geometryczna przedstawiająca opis załamywania się promieni światła w różnych ośrodkach. W tym projekcie zajmujemy się załamaniem promieni światła na soczekwach, które z fizycznego punktu widzenia są przezroczytsymi obiektami o dwóch współosiowych powierzchniach załamujących światło.

2 Cel projektu

Celem projektu jest zaprojektowanie modelu fizycznego promienia świetlnego przechodzącego przez soczewkę o zadanych parametrach.

3 Opis modelowanego zjawiska

Soczewki mogą wytwarzać obraz źródła światła zmieniając kierunek promieni świetlnych wychodzących z jego powierzchni. Obraz powstaje gdy po zmianie kierunku przecinają się promienie (tworząc obraz rzeczywisty), lub ich przedłużenia (tworząc obraz pozorny). [2]

3.1 Modelowanie soczewek

W naszym programie zaimplementowane zostaną 4 typy soczewek: dwuwypukłe, dwuwklęsłe, płasko-wypukłe, płasko-wklęsłe. Dla każdego z tych typów równania opisujce soczewki na płaszczyźnie będą się różnić.

Soczewki dwuwypukłe

Dla soczewek dwuwypukłych, które matematycznie opisane są za pomocą dwóch okręgów na płaszczyźnie XZ, równania wyglądają następująco:

$$(x - x_1)^2 + z^2 = R_1^2 \tag{1}$$

gdzie x_1, R_1 są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień pierwszego okręgu.

$$(x - x_2)^2 + z^2 = R_2^2 \tag{2}$$

gdzie x_2, R_2 są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień drugiego okręgu. Warto zauważyć, że środki obu okręgów leżą na tej samej osi (prostej $z = z_1 = z_2 = 0$)

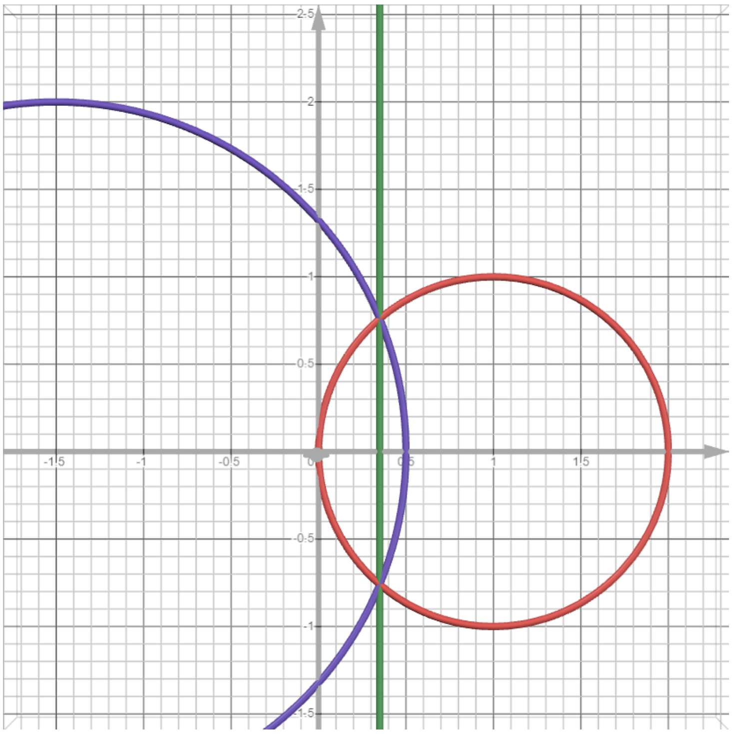
Rozwiązując te równania ze względu na x otrzymujemy prostą, która wyznaczy nam środek soczewki dwuwypukłej:

$$x = \frac{x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2}{2(x_1 - x_2)} \tag{3}$$

Aby modelowanie soczewek za pomocą powyższych równań miało sens, musi zostać spełniony następpujący warunek:

$$|R_1 - R_2| < |x_1 - x_2| < R_1 + R_2 \tag{4}$$

gdzie R_1 , $R_2 > 0$ oraz $x_1 > x_2$



Rysunek 1: Matematyczna wizualizacja cienkiej soczewki dwuwypukłej

Soczewki dwuwklęsłe

Dla soczewek dwuwklęsłych, które matematycznie są opisane za pomocą dwóch okręgów na płaszczyźnie XZ, dwóch prostych ograniczających soczewkę z góry i z dołu (apertura), równania wyglądają następująco:

$$(x - x_1)^2 + z^2 = R_1^2 \tag{5}$$

gdzie x_1 , R_1 są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień pierwszego okręgu.

$$(x - x_2)^2 + z^2 = R_2^2 \tag{6}$$

gdzie x_2 , R_2 są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień drugiego okręgu. Warto zauważyć, że środki obu okręgów leżą na tej samej osi (prostej $z = z_1 = z_2 = 0$)

Rozwiązując te równania ze względu na x - podobnie jak powyżej - otrzymujemy prostą, która wyznaczy nam środek soczewki dwuwklęsłej:

$$x = \frac{x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2}{2(x_1 - x_2)} \tag{7}$$

Proste ograniczające soczewkę z góry:

$$y = \pm a \tag{8}$$

gdzie $\quad a < \min(|R_1|, |R_2|)$

Aby modelowanie soczewek za pomocą powyższych równań miało sens, musi zostać spełniony następujący warunek:

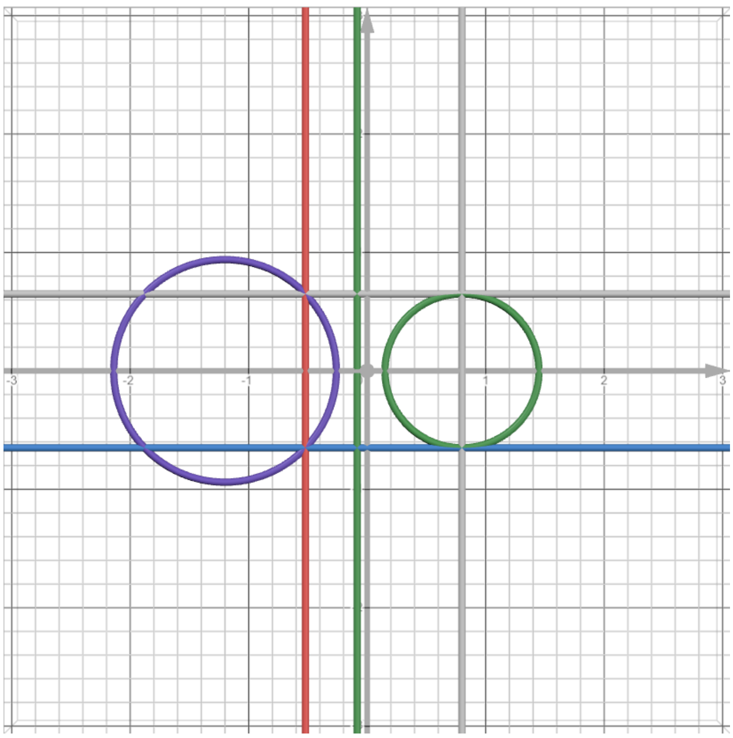
$$|x_1 - x_2| > R_1 + R_2 \tag{9}$$

gdzie $\quad R_1\,,\, R_2\, > 0 \qquad$ oraz $\quad x_1 > x_2$

Dodatkowo w programie podczas rysowania soczewek dwuwklęsłych, będziemy je ograniczala z lewej jak i z prawej strony odpowiednimi równaniami:

$$x = x_2 + \sqrt{R_2^2 - a^2} \tag{10}$$

$$x = x_1 - \sqrt{R_1^2 - a^2} \tag{11}$$



Rysunek 2: Matematyczna wizualizacja cienkiej soczewki dwuwklęsłej

Soczewki płasko-wypukłe

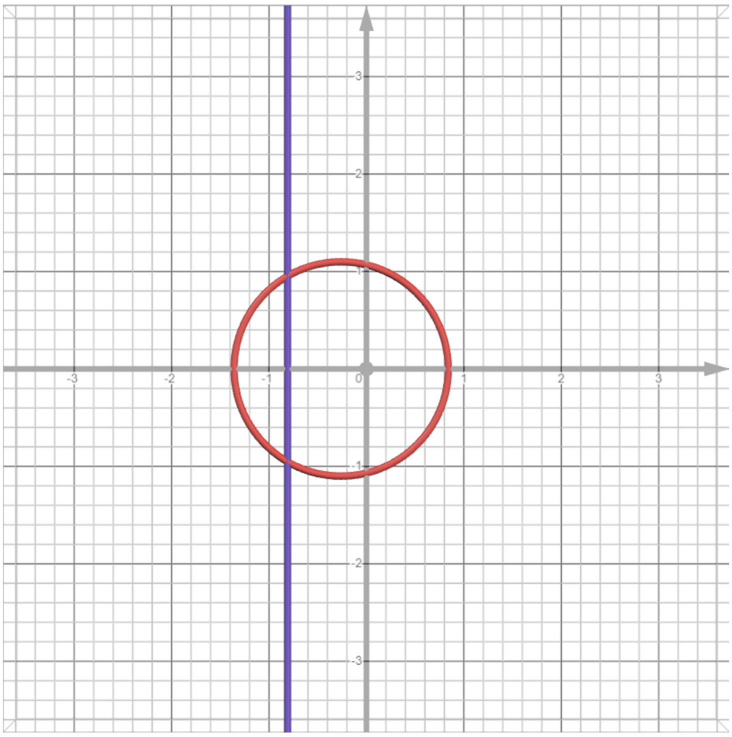
Dla soczewek płasko-wypukłych, które matematycznie są opisane za pomocą jednego okręgu na płaszczyźnie XZ oraz jednej prostej ograniczającej soczewkę (płaska jej część), równania wyglądają następująco:

$$(x - x_1)^2 + z^2 = R_1^2 \tag{12}$$

gdzie $\quad x_1\,, \quad R_1 > 0 \quad$ są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień okręgu.

$$x = a \tag{13}$$

gdzie $\quad x_1 - R_1 < a < x_1 + R_1$



Rysunek 3: Matematyczna wizualizacja cienkiej soczewki płasko-wypukłej

Soczewki płasko-wklęsłe

Dla soczewek płasko-wklęsłych, które matematycznie są opisane za pomocą jednego okręgu na płaszczyźnie XZ, jedenj prostej ograniczającej soczewkę (płaska jej część) oraz dwóch prostych ograniczających soczewkę z góry i z dołu (apertura), równania wyglądają następująco:

$$(x - x_2)^2 + z^2 = R_2^2 \tag{14}$$

gdzie $\quad x_2\,, \quad R_2 \quad$ są to parametry zadane przez użytkownika - środek oraz promień okręgu.

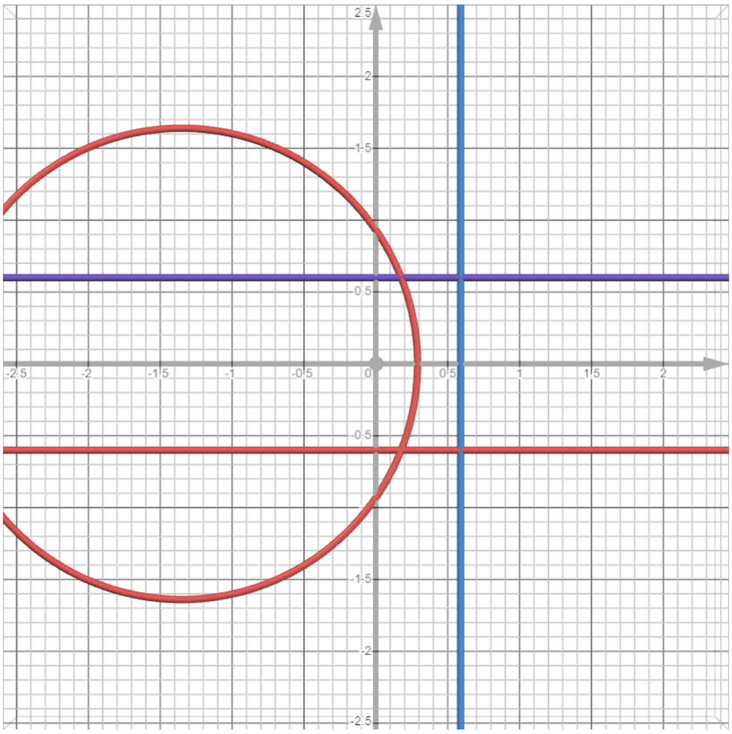
Proste ograniczające soczewkę z góry:

$$y = \pm a \tag{15}$$

gdzie $\quad 0 < a < R_2$

Prosta ograniczająca soczewkę

$$x = x_2 + R_2 + \frac{a}{2} \tag{16}$$



Rysunek 4: Matematyczna wizualizacja cienkiej soczewki płasko-wklęsłej

3.2 Rysowanie promienia świetlnego - ray tracing

Promień będziemy rysować w trzech etapach. Pierwszy etap to przebieg promienia od punktu startowego do punktu, w którym pada na powierzchnię soczewki z lewej strony, bo zakładamy w naszym programie, że start przebiegu promienia będzie po lewej stronie modelowanej soczewki. Zakładamy również pewne uproszczenie, tj. promień na początku ma kierunek zgodny z osią OX, a więc można nadać mu kierunek $\vec{k} = [1, 0]$. Przebieg zaczyna się od punktu startowego (x_0, z_0), pada na soczewkę w punkcie (x_p, z_p). Możemy dokładnie wyznaczyć punkt przecięcia łuku z tą prostą (promieniem świetlnym). Dalej, aby wyznaczyć kąt załamania, musimy skorzystać z wektora normalnego do łuku w naszym punkcie padania promienia na soczewkę. Wektor normalny jest liczony za pomocą następującej zależności:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r_{środek}}}{|\vec{r} - \vec{r_{środek}}|} = \frac{(x_p - x_c,\, z_p)}{R} \tag{17}$$

gdzie R $-$ promień okręgu, na który pada promień w danej chwili
x_c $-$ współżędna x-owa środka tego okręgu.

Dalej używamy odpowiednich funkcji liczących nowy kierunek wektora $\vec{k}$, kiedy promień przechodzi przez soczewkę oraz kiedy z niej wychodzi. Natomiast kąty załamania na kolejnym ośrodku liczymy z prawa Snella:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \tag{18}$$

My natomiast w przebiegu promienia będziemy korzystać z równania parametrycznego z parametrem t (*to nie czas !*), gdzie $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{k} \tag{19}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} k_x \\ k_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t\,k_x \\ z(t) = z_0 + t\,k_z \end{cases}$$

Podstawiając te składowe do równania okręgu otrzymujemy:

$$(x - x_c)^2 + z^2 = R^2 \tag{20}$$

$$(x_0 + tk_x - x_c)^2 + (z_0 + tk_z)^2 = R^2 \tag{21}$$

$$\textit{inaczej:} \quad at^2 + bt + c = 0 \tag{22}$$

$$\textit{gdzie:} \tag{23}$$

$$a = k_x^2 + k_z^2 \tag{24}$$

$$b = 2((x_0 - x_c)k_x + z_0 k_z) \tag{25}$$

$$c = (x_0 - x_c)^2 + z_0^2 - R^2 \tag{26}$$

Z tego wynika, że mamy dwa możliwe przecięcia z okręgiem, ale tylko jedno będzie w jego widzocznej części (na soczewce) - wybieramy najmniejsze dodatnie.

W przypadku promienia padającego na płaską powierzchnię, a nie na fragment okręgu, parametr t można wyrazić dużo prościej:

$$t = \frac{(x_{plaszczyzny} - x_0)}{k_x} \tag{27}$$

gdzie $x_{plaszczyzny}$ to równanie prostej, która zamyka płaską soczewkę.

Funkcje liczące nam promień zwracają nowy punkt przecięcia oraz nowy kierunek.

Podsumowując: tak możemy wymodelować *ray tracing* dla soczewek **grubych**.

4 Opis wykorzystywanych narzędzi

1. Wersja Pythona: 3.14,
2. Wykorzystywane biblioteki: numpy, sympy, matplotlib, scipy,
3. IDE: Visual Studio Code

5 Ogólny opis i możliwe alternatywy

Podczas wyświetlenia wizualizacji użytkownik będzie miał możliwość wyboru jednej z czterech typów soczewek za pomocą przycisków oraz dla użytkownika dostępny jest także slider ustalający punkty startowy (z_0) promienia. Zamodelowane soczewki to: soczewki dwuwypukłe, soczewki dwuwklęsłe, soczewki płasko-wypukłe oraz płasko-wklęsłe. Następnie dla wybranej soczewki program pokaże przebieg promienia światła od początku do załamania promienia z powierzchnią soczewki, przez przebieg promienia przez soczewkę, do ponownego załamania promienia na granicy soczewka-powietrze oraz dalej.

Użytkownik powinien mieć możliwość wyboru soczewki oraz punktu startowego promienia bezpośrednio w interfejsie za pomocą suwaka oraz wcześniej wspomnianych przycisków.

Jak ma wyglądać interfejs? Po lewej stronie ekranu pole z przyciskami wyboru soczewki, w centralnej części model soczewki na wykresie, wyrysowany za pomocą *matplotlib*, a poniżej wykresu - suwak pozwalający ustalić punkty startowy promienia.

Alternatywą jest pozwolenie użytkownikowi na dobranie typów i materiałów soczewek w czasie rzeczywistym, a więc dodatnie funkcji aktualizującej obliczenia w czasie rzeczywistym. Jeszcze inną alternatywą jest dodatkowo dodanie soczewek grubych.

6 Specyficzne wymagania

6.1 Wymagania funkcjonalne

- Interfejs graficzny z obrazowym przedstawieniem soczewek,
- Wprowadzanie danych przez użytkownika,
- Wizualizacja toru promienia,
- Obliczanie załamań promieni świetlnych na soczewce,
- Obsługa błędów.

6.2 Wymagania niefunkcjonalne

- Intuicyjny interfejs graficzny,
- Modyfikowalność.

7 Harmonogram prac z zadaniami do wykonania

Tydzień	Zakres prac
1. 8 XII 2025 - 14 XII 2025	Funkcje modelujące soczewki w *matplotlib*
2. 15 XII 2025 - 4 I 2026	Dodanie funkcji załamania promienia na soczewce
3. 5 I 2026 - 11 I 2026	Interfejs graficzny, wprowadzanie danych i obsługa błędów
4. 12 I 2026 - 18 I 2026	Naprawa błędów i finalizacja

Tabela 1: Harmonogram prac

8 Lista zmian w dokumentacji

Wersja 1.2

1. Zmiana marginesów dokumentu
2. Dodanie matematycznego opisu wymodelowanych soczewek w nowej sekcji *Modelowanie soczewek*
3. Modyfikacja tabeli z harmonogramem prac
4. Nowa bibliografia
5. Strona tytułowa

Wersja 1.3

1. Dodanie opisu przebiegu promienia świetlnego
2. Usunięcie zbędnego opisu matematycznego tworzenia obrazu przez daną soczewkę, ponieważ nie to jest modelowane

Wersja 1.4

1. Ostatnie poprawki dokumentacji
2. Graficzna zmiana dokumentu, marginesy, strona tytułowa, bibliografia zgodna z normą PN-ISO 690:2012.

Literatura

[1] BOBROWSKI, Czesław. *Fizyka. Krótki kurs*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2016.

[2] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Podstawy fizyki. Część 4*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2014.