Coupling constants derivations

Ivan Prearo

September 3, 2025

1 Derivações

Das equações de Maxwell aplicadas em guias de onda dielétricos, temos que

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 N^2_{(x,y)} \vec{E} \end{cases} \tag{1}$$

Podemos escrever 1 para dois guias de onda como sendo

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{E}}_p = -j\omega\mu_0 \vec{\tilde{H}}_p \\ \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{H}}_p = j\omega\varepsilon_0 N_p^2 \vec{\tilde{E}}_p \end{cases} \tag{2}$$

Onde $p = 1, 2$ distingue os campos eletromagnéticos de cada guia de onda separado. Também omitimos a dependência de N $(\vec{\tilde{E}}, \vec{\tilde{H}})$ em x, y (x, y, z) por simplificação, mas este fato deve ser mantido em mente para futuras equações, onde esses termos serão integrados no espaço.

Assumindo que os modos guiados pelos dois guias formam uma base completa da solução, podemos escrever

$$\begin{cases} \vec{\tilde{E}} = A_{(z)} \vec{\tilde{E}}_1 + B_{(z)} \vec{\tilde{E}}_2 \\ \vec{\tilde{H}} = A_{(z)} \vec{\tilde{H}}_1 + B_{(z)} \vec{\tilde{H}}_2 \end{cases} \tag{3}$$

Usando as equações 1 e 3 chegamos em

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \left(A\vec{\tilde{E}}_1 + B\vec{\tilde{E}}_2 \right) = -j\omega\mu_0 \vec{\tilde{H}} \\ \vec{\nabla} \times \left(A\vec{\tilde{H}}_1 + B\vec{\tilde{H}}_2 \right) = j\omega\varepsilon_0 N^2 \vec{\tilde{E}} \end{cases} \tag{4}$$

Substituindo a identidade da Eq. 13 no lado esquerdo da Eq. 4 e usando a Eq. 3 em termos que aparecem durante a derivação matemática, podemos chegar em

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dz} \hat{z} \times \vec{\tilde{E}}_1 + \dfrac{dB}{dz} \hat{z} \times \vec{\tilde{E}}_2 = 0 \\ \dfrac{dA}{dz} \hat{z} \times \vec{\tilde{H}}_1 - j\omega\varepsilon_0 \left(N^2 - N_1^2 \right) A\vec{\tilde{E}}_1 + \dfrac{dB}{dz} \hat{z} \times \vec{\tilde{H}}_2 - j\omega\varepsilon_0 \left(N^2 - N_2^2 \right) B\vec{\tilde{E}}_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

E estes resultados podem ser utilizados nas seguintes equações integrais:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\vec{\tilde{E}}_p^{*}\cdot\Big(&\frac{dA}{dz}\hat{z}\times\vec{\tilde{H}}_1 - j\omega\varepsilon_0\left(N^2-N_1^2\right)A\vec{\tilde{E}}_1\\
&+\frac{dB}{dz}\hat{z}\times\vec{\tilde{H}}_2 - j\omega\varepsilon_0\left(N^2-N_2^2\right)B\vec{\tilde{E}}_2\Big)\\
&-\vec{\tilde{H}}_p^{*}\cdot\left(\frac{dA}{dz}\hat{z}\times\vec{\tilde{E}}_1+\frac{dB}{dz}\hat{z}\times\vec{\tilde{E}}_2\right)\Big]\,dxdy=0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Para ambos os guias de onda ($p=1,2$). Definindo I_p como o integrando da equação acima, chegamos que

$$
\begin{aligned}
I_p = &-\frac{dA}{dz}\hat{z}\cdot\left(\vec{\tilde{E}}_p^{*}\times\vec{\tilde{H}}_1+\vec{\tilde{E}}_1\times\vec{\tilde{H}}_p^{*}\right)\\
&-\frac{dB}{dz}\hat{z}\cdot\left(\vec{\tilde{E}}_p^{*}\times\vec{\tilde{H}}_2+\vec{\tilde{E}}_2\times\vec{\tilde{H}}_p^{*}\right)\\
&-j\omega\varepsilon_0 A\left(N^2-N_1^2\right)\vec{\tilde{E}}_p^{*}\cdot\vec{\tilde{E}}_1\\
&-j\omega\varepsilon_0 B\left(N^2-N_2^2\right)\vec{\tilde{E}}_p^{*}\cdot\vec{\tilde{E}}_2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

que pode ser substituído na Eq. 6 enquanto dividimos por $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{\tilde{E}}_p^{*}\times\vec{\tilde{H}}_p+\vec{\tilde{E}}_p\times\vec{\tilde{H}}_p^{*}\right)dxdy$. Encontrando que, para $p=1$

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}&\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left[\vec{\tilde{E}}_2^{*}\times\vec{\tilde{H}}_2+\vec{\tilde{E}}_2\times\vec{\tilde{H}}_2^{*}\right]dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{\tilde{E}}_1^{*}\times\vec{\tilde{H}}_1+\vec{\tilde{E}}_1\times\vec{\tilde{H}}_1^{*}\right)dxdy}\\
+jA&\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_1^2\right)\vec{\tilde{E}}_1^{*}\cdot\vec{\tilde{E}}_1dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{\tilde{E}}_1^{*}\times\vec{\tilde{H}}_1+\vec{\tilde{E}}_1\times\vec{\tilde{H}}_1^{*}\right)dxdy}\\
+jB&\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_2^2\right)\vec{\tilde{E}}_1^{*}\cdot\vec{\tilde{E}}_2dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{\tilde{E}}_1^{*}\times\vec{\tilde{H}}_1+\vec{\tilde{E}}_1\times\vec{\tilde{H}}_1^{*}\right)dxdy}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

E ainda, podemos separar a componente da direção de propagação nos campos eletromagnéticos, tendo

$$
\begin{cases}
\vec{\tilde{E}}_p=\vec{E}_p e^{-i\beta_p z}\\
\vec{\tilde{H}}_p=\vec{H}_p e^{-i\beta_p z}
\end{cases}
$$

E simplificar utilizando a identidade da Eq. 14, resultando nos termos para $p=1$

$$
\begin{cases}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}e^{j\beta_1 z}\times\vec{H}_1e^{-j\beta_1 z}+\vec{E}_1e^{j\beta_1 z}\times\ \vec{H}_1^{*}e^{j\beta_1 z}\right)dxdy= \\
\qquad\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}\times\vec{H}_1+\vec{E}_1\times\vec{H}_1^{*}\right)dxdy \\
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}e^{j\beta_1 z}\times\vec{H}_2e^{-j\beta_1 z}+\vec{E}_2e^{j\beta_1 z}\times\ \vec{H}_1^{*}e^{j\beta_1 z}\right)dxdy= \\
\qquad\qquad e^{-j(\beta_2-\beta_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}\times\vec{H}_2+\vec{E}_2\times\vec{H}_1^{*}\right)dxdy \\
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_1^2\right)e^{j\beta_1 z}\vec{E}_1^{*}\cdot\vec{E}_1e^{-j\beta_1 z}dxdy= \\
\qquad\qquad\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_1^2\right)\vec{E}_1^{*}\cdot\vec{E}_1dxdy \\
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_2^2\right)e^{j\beta_1 z}\vec{E}_1^{*}\cdot\vec{E}_2e^{-j\beta_2 z}dxdy= \\
\qquad\qquad e^{-j(\beta_2-\beta_1)z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_2^2\right)\vec{E}_1^{*}\cdot\vec{E}_2dxdy
\end{cases}
$$

Portanto a Eq. 8 pode ser escrita como

$$
\begin{cases}
\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}e^{-j(\beta_2-\beta_1)z}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}\times\vec{H}_2+\vec{E}_2\times\vec{H}_1^{*}\right)dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}\times\vec{H}_1+\vec{E}_1\times\vec{H}_1^{*}\right)dxdy} \\
\qquad+jA\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_1^2\right)\vec{E}_1^{*}\cdot\vec{E}_1dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}\times\vec{H}_1+\vec{E}_1\times\vec{H}_1^{*}\right)dxdy} \\
\qquad+jBe^{-j(\beta_2-\beta_1)z}\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_2^2\right)\vec{E}_1^{*}\cdot\vec{E}_2dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\vec{E}_1^{*}\times\vec{H}_1+\vec{E}_1\times\vec{H}_1^{*}\right)dxdy}=0
\end{cases}
\tag{9}
$$

Finalmente, definindo os coeficientes de acoplamento

$$
\begin{cases}
c_{pq}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left[\vec{E}_p^{*}\times\vec{H}_q+\vec{E}_q\times\vec{H}_p^{*}\right]dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_p^{*}\times\tilde{\vec{H}}_p+\tilde{\vec{E}}_p\times\tilde{\vec{H}}_p^{*}\right)dxdy} \\
\chi_p=\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_p^2\right)\vec{E}_p^{*}\cdot\vec{E}_pdxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_p^{*}\times\tilde{\vec{H}}_p+\tilde{\vec{E}}_p\times\tilde{\vec{H}}_p^{*}\right)dxdy} \\
\kappa_{pq}=\frac{\omega\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(N^2-N_q^2\right)\vec{E}_p^{*}\cdot\vec{E}_qdxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{z}\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_p^{*}\times\tilde{\vec{H}}_p+\tilde{\vec{E}}_p\times\tilde{\vec{H}}_p^{*}\right)dxdy)dxdy}
\end{cases}
\tag{10}
$$

Temos que a Eq. 9 simplifica para

$$\frac{dA}{dz} + c_{12}\frac{dB}{dz}e^{-j\Delta\beta z} + j\chi_1 A + j\kappa_{12} B e^{-j\Delta\beta z} = 0 \tag{11}$$

onde $\Delta\beta \equiv \beta_2 - \beta_1$. De maneira análoga, a partir da Eq. 6, mas com $p = 2$ obtemos

$$\frac{dB}{dz} + c_{21}\frac{dA}{dz}e^{-j\Delta\beta z} + j\chi_2 B + j\kappa_{21} A e^{-j\Delta\beta z} = 0 \tag{12}$$

2 Identidades

Reescrita do rotacional de uma função escalar dependente apenas em z multiplicada por uma função vetorial:

$$\vec{\nabla} \times \left(a_{(z)}\vec{v}\right) = a_{(z)}\vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla}a_{(z)} \times \vec{v} = a_{(z)}\vec{\nabla} \times \vec{v} + \frac{da_{(z)}}{dz}\hat{z} \times \vec{v} \tag{13}$$

Produtos vetorial e escalar de vetores do tipo $\vec{A}e^{j\phi_1}$ e $\vec{B}e^{-j\phi_2}$

$$\begin{cases} \vec{A}e^{j\phi_1} \times \vec{B}e^{-j\phi_2} = (\vec{A} \times \vec{B})e^{j(\phi_1-\phi_2)} \\ \vec{A}e^{j\phi_1} \cdot \vec{B}e^{-j\phi_2} = (\vec{A} \cdot \vec{B})e^{j(\phi_1-\phi_2)} \end{cases} \tag{14}$$