

20/08/2025

Equações de Maxwell em um meio dielétrico:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, \omega) = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = 0, \quad \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -i\omega \vec{B}(\vec{r}, \omega) \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{J} - i\omega \vec{D}(\vec{r}, \omega).$$

Transformada de Fourier:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Trabalhando as Equações de Maxwell chegamos nas equações de autovalores:

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{z} \times \partial_z \vec{E} = i\omega \mu_0 \mu \vec{H} \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{H} = \hat{z} \times \partial_z \vec{H} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad \text{em que} \quad \frac{\partial}{\partial z} \doteq \partial_z \quad \text{e} \quad \nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y}$$

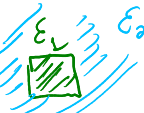
$$\Rightarrow \hat{A}|\psi\rangle = -i\partial_z \hat{B}|\psi\rangle, \quad \text{em que} \quad \hat{A} \doteq A = \begin{pmatrix} \omega \epsilon_0 \vec{E} & -i\nabla_{\perp} \times \\ i\nabla_{\perp} \times & \omega \mu_0 \mu \end{pmatrix}, \quad \hat{B} \doteq B = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{z} \times \\ \hat{z} \times & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$$

Para guias de onda com simetria azimutal, assuma  $|\psi(\vec{r})\rangle = e^{i\beta z} |\psi(r, \theta)\rangle$   
 $\cos(\beta z) + i \sin(\beta z) \Rightarrow \beta$  é constante de propagação (componente oscilatória) *propção*

Para o caso de um guia de EM temos  $\hat{A}|\psi\rangle = (-i\partial_z) \hat{B}|\psi\rangle$ . Para um problema de autovalores generalizado temos  $\hat{A}|\psi\rangle = \beta \hat{B}|\psi\rangle$  com  $\beta_i \neq \beta_j \Rightarrow \langle \psi_i | \hat{B} | \psi_j \rangle = 0$ .

$$\langle \psi_i | \hat{B} | \psi_j \rangle = 4P_i \delta_{ij}$$

$$P_i = \iint_{\text{área transversal do guia}} \hat{z} \cdot (\vec{E}_i^* \times \vec{H}_i) dA$$

Problema conhecido: *rei quem não (já resolveu para os guias individuais)* 

$$\hat{A}_0 |\psi_i\rangle = \beta_i \hat{B}_0 |\psi_i\rangle \quad \text{e} \quad \langle \psi_i | \hat{B} | \psi_j \rangle = 4P_i \delta_{ij}$$

Problema desconhecido:

$$\hat{A}' |\psi\rangle = -i\partial_z \hat{B}' |\psi\rangle \quad (\text{eq. 1})$$

$$\hat{A}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega \epsilon_0 \vec{E} & -i\nabla_{\perp} \times \\ i\nabla_{\perp} \times & \omega \mu_0 \mu \end{pmatrix}}_{\hat{A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \omega \epsilon_0 \Delta \vec{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Delta \hat{A}}, \quad \hat{B}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\hat{z} \times \\ \hat{z} \times & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{B}}$$

*perturbação*

$$\Rightarrow \hat{A}' = \hat{A} + \Delta \hat{A} \quad \text{e} \quad \hat{B}' = \hat{B}$$

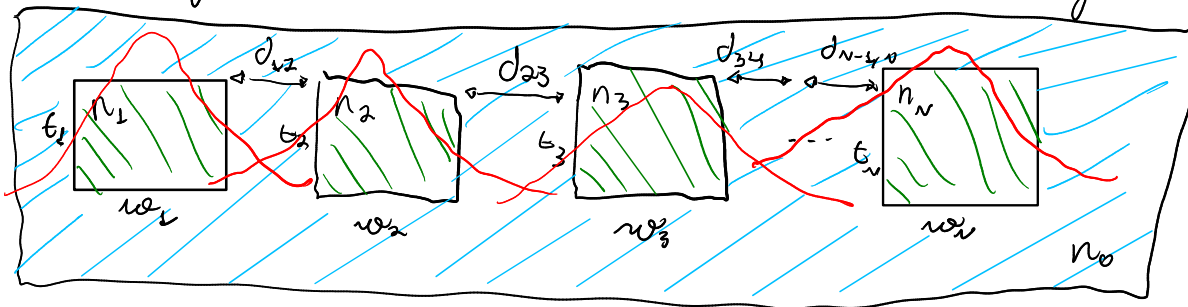
*perturbação*

$\{|\psi_j\rangle\}$  é base completa, logo  $|\psi\rangle = \sum_j a_j(z) e^{i\beta_j z} |\psi_j\rangle$  (eq. 2)

(eq. 2)  $\rightarrow$  (eq. 1):  $\partial_z a_m(z) = i \sum_k a_k(z) k_{mk} e^{i(\beta_k - \beta_m)z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$

$$k_{e,m} = \frac{\langle \psi_m | \Delta \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi_m | \hat{B} | \psi_m \rangle} = \frac{\omega \epsilon_0}{4P_m} \int \vec{E}_m^* \cdot \Delta \vec{E} \cdot \vec{E}_m dA$$

Considere o problema de um acoplador direcional (beam splitter em foto-nico integrado). Este acoplador é constituído de  $N$  guias retangulares, cada um representado por um certo número de modos.



$d_{ab}$ : gap entre guias  $a$  e  $b$ .

Primeiramente, preciso resolver o problema de guiamento para cada um dos  $N$  guias individualmente. Considere que cada guia tenha um certo número de modos possíveis, então tenho que resolver

$$\begin{cases} \hat{A}_j |\varphi_{m_j}^{(j)}\rangle = \beta_{m_j}^{(j)} \hat{B} |\varphi_{m_j}^{(j)}\rangle \Rightarrow \langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \hat{A}_j | \varphi_{m_j}^{(j)} \rangle = \beta_{m_j}^{(j)} \langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \hat{B} | \varphi_{m_j}^{(j)} \rangle = 4 P_{m_j}^{(j)} \delta_{m_j, n_j} \beta_{m_j}^{(j)} \\ \langle \varphi_{j, m_j} | \hat{B} | \varphi_{j, n_j} \rangle = 4 P_{j, m_j} \delta_{m_j, n_j} \Rightarrow \hat{B} \doteq \text{diag}(4 P_{j, m_j}) = 4 \text{diag}(P_{j, m_j}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{A}_j \doteq \text{diag}(4 P_{m_j}^{(j)} \beta_{m_j}^{(j)}) = 4 \text{diag}(P_{m_j}^{(j)} \beta_{m_j}^{(j)})$ . Essas são as formas dos operadores  $\hat{A}_j$  e  $\hat{B}$  escritos na base  $\{|\varphi_{j, m_j}\rangle\}$ . Mas lembre que a forma universal dessas matrizes é dada por

$$\hat{A}_j \doteq \begin{pmatrix} \omega \epsilon_0 \vec{E}_j & -i \nabla_t \times \\ i \nabla_t \times & \omega \mu_0 \vec{H}_j \end{pmatrix} \text{ e } \hat{B} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -\hat{z} \times \\ \hat{z} \times & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora o problema acoplado. Fixe o guia  $j$  e considere os demais guias como uma perturbação. Logo, o problema que precisamos resolver é dado por

$$\hat{A} |\psi\rangle = -i \partial_z \hat{B} |\psi\rangle \text{ e } \hat{A} = \hat{A}_K + \Delta \hat{A}_K \quad \left. \begin{array}{l} \text{perturbação do sistema completo no} \\ K\text{-ésimo guia} \end{array} \right\}$$

$$\text{em que } \Delta \hat{A}_K \doteq \omega \epsilon_0 \begin{pmatrix} \vec{E} - \vec{E}_K & 0 \\ 0 & \vec{H} - \vec{H}_K \end{pmatrix}.$$

Como  $\{|\varphi_{m_j}^{(j)}\rangle\}$  forma uma base completa para o  $j$ -ésimo guia, e precisamos  $N$  guias, a solução para o problema de perturbação é dada por

$$|\psi(z)\rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{m_j}^{M_j} a_{m_j}^{(j)}(z) |\varphi_{m_j}^{(j)}\rangle. \text{ Abaixo, se encontra a forma dos coeficientes:}$$

$$a_{m_j}^{(j \rightarrow k)} = \frac{\langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \Delta \hat{A}_j | \varphi_{m_k}^{(k)} \rangle}{\langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \hat{B} | \varphi_{m_j}^{(j)} \rangle}, \quad \chi_{m_j}^{(j)} = \frac{\langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \Delta \hat{A}_j | \varphi_{m_j}^{(j)} \rangle}{\langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \hat{B} | \varphi_{m_j}^{(j)} \rangle},$$

(Butt coupling coefficient)  
transfêrencia de energias de mesmo modo para outro guia

(phase-shift due other waveguide)

→ ocorre na fase de determinado modo do guia  $j$  devido à perturbação dos outros guias

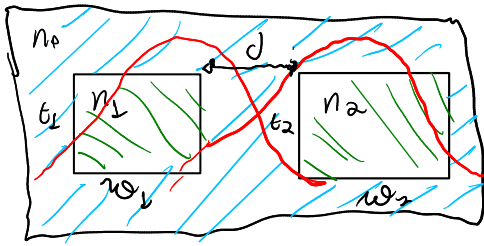
$$K_{m_j, m_k}^{(j \rightarrow k)} = \frac{\langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \Delta \hat{A}_j | \varphi_{m_k}^{(k)} \rangle}{\sqrt{\langle \varphi_{m_j}^{(j)} | \hat{B} | \varphi_{m_j}^{(j)} \rangle \langle \varphi_{m_k}^{(k)} | \hat{B} | \varphi_{m_k}^{(k)} \rangle}} \rightarrow \text{transferência de energia entre modos diferentes para guias diferentes.}$$

Note que  $K_{m_j, m_j}^{(j \rightarrow k)} = C_{m_j}^{(j \rightarrow k)}$ .

Os parâmetros que temos controle sobre o sistema são:

$\{\epsilon_j\}, \{\omega_j\}, n_0, \{n_j\}, d_{j,j+1}, \lambda$ . Ou seja, no total, podemos brincar com  $3N+1+(N-1)+1 = (4N+1)$  parâmetros.

Reduzindo para o problema de apenas 2 guias, temos



Considere que o guia 1 suporte  $M_1$  modos e o guia 2 suporte  $M_2$  modos.

Para resolver

$$\begin{cases} \hat{A}_1 |\varphi_{m_1}^{(1)}\rangle = \beta_{m_1}^{(1)} \hat{B} |\varphi_{m_1}^{(1)}\rangle \\ \langle \varphi_{m_1}^{(1)} | \hat{B} | \varphi_{n_1}^{(1)} \rangle = 4P_{m_1}^{(1)} \delta_{m_1, n_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{A}_2 |\varphi_{m_2}^{(2)}\rangle = \beta_{m_2}^{(2)} \hat{B} |\varphi_{m_2}^{(2)}\rangle \\ \langle \varphi_{m_2}^{(2)} | \hat{B} | \varphi_{n_2}^{(2)} \rangle = 4P_{m_2}^{(2)} \delta_{m_2, n_2} \end{cases}$$

em que na base  $\{|\varphi_{m_1}^{(1)}\rangle\}$ :  $\hat{A}_1 \doteq 4 \text{diag}(P_{m_1}^{(1)} \beta_{m_1}^{(1)})$  e  $\hat{B} \doteq 4 \text{diag}(P_{m_1}^{(1)})$ , e na base  $\{|\varphi_{m_2}^{(2)}\rangle\}$ :  $\hat{A}_2 \doteq 4 \text{diag}(P_{m_2}^{(2)} \beta_{m_2}^{(2)})$  e  $\hat{B} \doteq 4 \text{diag}(P_{m_2}^{(2)})$ .

Na forma universal:

$$\hat{A}_1 \doteq \begin{pmatrix} \omega \epsilon_0 \vec{E}_1 & -i \nabla_t \times \\ i \nabla_t \times & \omega \mu_0 \vec{\mu}_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_2 \doteq \begin{pmatrix} \omega \epsilon_0 \vec{E}_2 & -i \nabla_t \times \\ i \nabla_t \times & \omega \mu_0 \vec{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -\hat{z} \times \\ \hat{z} \times & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvido o problema dos guias individuais, precisamos resolver o problema de acoplamento explicitado acima

$$\hat{A} |\psi\rangle = -i \partial_z \hat{B} |\psi\rangle \text{ e } \hat{A} = \hat{A}_1 + \Delta \hat{A}_1 = \hat{A}_2 + \Delta \hat{A}_2 \text{ em que } \Delta \hat{A}_1 \doteq \omega \epsilon_0 \begin{pmatrix} \vec{E}_1 - \vec{E}_2 & 0 \\ 0 & \vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \Delta \hat{A}_2 \doteq \omega \epsilon_0 \begin{pmatrix} \vec{E}_1 - \vec{E}_2 & 0 \\ 0 & \vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2 \end{pmatrix}.$$

A solução deste sistema é dada por  $|\psi(z)\rangle = \sum_{m_1}^{M_1} a_{m_1}^{(1)}(z) |\varphi_{m_1}^{(1)}\rangle + \sum_{m_2}^{M_2} a_{m_2}^{(2)}(z) |\varphi_{m_2}^{(2)}\rangle$ .

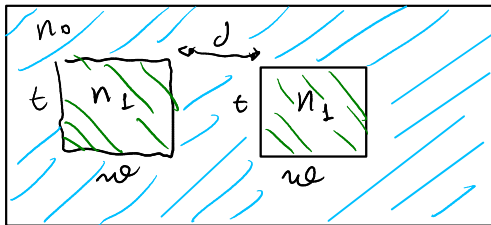
Os coeficientes importantes são dados por

$$C_{m_1}^{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\langle \varphi_{m_1}^{(1)} | \Delta \hat{A}_1 | \varphi_{m_2}^{(2)} \rangle}{\langle \varphi_{m_1}^{(1)} | \hat{B} | \varphi_{m_1}^{(1)} \rangle}, \quad \chi_{m_1}^{(1)} = \frac{\langle \varphi_{m_1}^{(1)} | \Delta \hat{A}_1 | \varphi_{m_1}^{(1)} \rangle}{\langle \varphi_{m_1}^{(1)} | \hat{B} | \varphi_{m_1}^{(1)} \rangle}, \quad K_{m_1, m_2}^{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\langle \varphi_{m_1}^{(1)} | \Delta \hat{A}_1 | \varphi_{m_2}^{(2)} \rangle}{\sqrt{\langle \varphi_{m_1}^{(1)} | \hat{B} | \varphi_{m_1}^{(1)} \rangle \langle \varphi_{m_2}^{(2)} | \hat{B} | \varphi_{m_2}^{(2)} \rangle}}$$

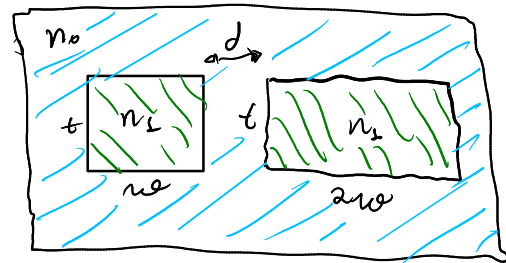
Os parâmetros que temos controle são  $\epsilon_1, \epsilon_2, \omega_1, \omega_2, n_0, n_1, n_2, d, \lambda$ , ou seja, 9 graus de liberdade.

Para este projeto em questão, temos que resolver dois casos de acoplamento direcional.

Caso (i):



Caso (ii):



Em ambos os casos, temos os seguintes parâmetros sintonizáveis:  
 $t, n_0, n_1, n_2, d, \lambda$ , ou seja, apenas 6 graus de liberdade.

Sugestão de estratégias:

- Calcular o modo e os campos para ambos guias individualmente para o caso (i).
- Fazer a modelagem matemática do problema de 2 guias e expandir para múltiplos guias.
- Fixar  $\lambda = 1550 \text{ nm}$  e  $m_j = m_k = \text{TE}_0$  para resolver o problema acoplado.
- Estudar como o gap ( $d$ ) influencia na potência máxima de acoplamento (talvez seja interessante plotar o gráfico  $P_{ac} \times d$ ).
- Encontrar  $L$  e  $L$  (comprimento de interação) em que  $P_{ac} \approx 50\%$ .
- Repetir as etapas acima para  $\text{TE}_1, \text{TM}_0$  e  $\text{TM}_1$  para  $L$  e  $d$  fixos do caso  $\text{TE}_0$ .
- Mudar  $\lambda$  para  $\lambda \in [1500 \text{ nm}, 1600 \text{ nm}]$  (span de 100 nm) e repetir as etapas anteriores para  $L$  e  $d$  fixos do caso  $\text{TE}_0$  e considerar modo  $\text{TE}_0$ .
- Resolver o caso (ii) de maneira análoga.
- Considerar nos casos (i) e (ii) o acoplamento de mais de um modo.