9 の倍数の数字和に関する定理の証明

池澤蓮斗

2022 年 7 月 26 日

1　9 の倍数の数字和に関する定理とその例

ある自然数 N を

$$\sum_{k=1}^{[log_{10}N]+1} 10^{k-1}a_k$$

$$(\forall k \in U : a_k \in \mathbf{Z}, 0 \leqq a_k \leqq 9, a_{[log_{10}N]+1} \neq 0)$$

と表す。(k の集合を U とする) この時 $a_k < a_{k-1}$ である k の集合を K とし、$a_0 = 0$ とする。また $x, y \in K$ である x, y について $(x < y)$、$x + 1 \cdots y - 1 \in U \cap \overline{K}$が満たされているとき、$f : K \to A$ である写像 f と集合 A を $(f(x) = \alpha \to f(y) = \alpha + 1) \land \alpha \in A$ と定める。特に x が K の要素で最小である時 $f(x) = 1$ とする。また $a_{f^{-1}(\alpha)} = a_{f^{-1}(\alpha)+1} = a_{f^{-1}(\alpha)+2} \cdots = a_{f^{-1}(\alpha)+r}$である $r(r \in \mathbf{N} \cap \{0\})$ を写像 g を用いて、$g(\alpha)$ と表す。
自然数 x の数字和を $S(x)$ と表すとき、以下の等式が成り立つ

$$S(9N) = 9([log_{10}N] + 1 - \sum_{\alpha=1}^{n(K)} g(\alpha) - n(K))$$

例えば、$N = 113571$ である時

$$[log_{10}113571] + 1 = 6 \to \sum_{k=1}^{6} 10^{k-1}a_k \quad a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 5, a_4 = 3, a_5 = 1, a_6 = 1$$

$k = 3, 4, 5$ の時 $a_k < a_{k-1}$が成り立ち、$f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 3$ となり $g(1) = 0, g(2) = 0, g(3) = 1$ となる。
故に

$$S(9 \times 113571) = 9(6 - \sum_{\alpha=1}^{3} g(\alpha) - 3) = 9(6 - 4) = 18 \text{ となる}$$

実際 $9 \times 113571 = 1022139$ であり、$S(1022139) = 1 + 2 + 2 + 1 + 3 + 9 = 18$ となり一致する。

2　証明

定理の証明を行う前に九九の 9 の段について考える

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

$9 \times a = b$ とする $(a \in \mathbf{Z}, 1 \leqq a \leqq 9)$
$b = 10b_2 + b_1$である $(b_1, b_2 \in \mathbf{Z}, 1 \leqq b_1, b_2 \leqq 9)$
この表から、$b_1 = 10 - a$ であり b_2へ $a - 1$ 繰り上がることで、$b_2 = a - 1$ となる。
この性質を用いて定理を証明していく。まず $a_k \neq a_{k+1}$ の場合を考える。($[log_{10}N] + 1 = n$ とする)

$$S(9N) = \sum_{k=1}^{n+1} b_k$$

$$(\forall k \in U : b_k \in \mathbf{Z}, 0 \leqq b_k \leqq 9, b_{n+1} \neq 0)$$

と表すと。上の性質より、$b_1 = 10 - a_1, b_2 = 10 - a_2 + a_1 - 1 = 9 - a_2 + a_1$となる。ここで $9 - a_2 + a_1 > 9$ であればさらに b_3に 1 繰り上がり、その繰り上がる数は a_2となる。よって $a_1 > a_2$の時、b_3へ a_2繰り上がり、その繰り上がった分だけ b_2から引いて別の形で b_2を表すことが出来るため $b_2 = 9 - a_2 + a_1 - 10 = a_1 - a_2 - 1$ と表せられる。
一般化をすると

$$a_k < a_{k-1} \rightarrow b_k = a_{k-1} - a_k - 1 \text{ で } b_{k+1} \text{へ } a_k \text{繰り上がる}$$

$$a_k > a_{k-1} \rightarrow b_k = 9 - a_k + a_{k+1} \text{で } b_{k+1} \text{へ } a_k - 1 \text{ 繰り上がる}$$

$k \neq 1, n + 1$ である。なぜならば $k = 1$ の場合、$a_1 > a_0$であり $b_1 = 9 - a_1 + a_0 = 9 - a_1$となるはずだが $b_1 = 10 - a_1$であるため矛盾するからである。$k = n + 1$ の場合は a_kを定義していないため別で考える必要がある。
b_{n+1}は $9 \times (10a_n + a_{n-1})$ の,百の位の数である。よって

$$a_n < a_{n-1} \rightarrow b_{n+1} = a_n \quad a_n > a_{n-1} \rightarrow b_{n+1} = a_n - 1$$

$a_k < a_{k-1} \rightarrow b_{k+1} = 10 - a_{k+1} + a_k$であるため $b_{k+1} = 9 - a_{k+1} + a_k + 1$ と表すことが出来る。この時 $a_k < a_{k-1} \leqq 9$ であるため $a_k < 9$ である。ゆえに少なくとも $9 - a_{k+1} + a_k \neq 9, 19$ である。このことより $9 - a_{k+1} + a_k$に 1 を足してもさらなる繰り上がりは起きない。このことから数字和を計算するとき $a_k < a_{k-1}$の分おこるさらなる繰り上がり $+1$ を後に計算しても良いことがわかる。
$s, t \in U \cap \overline{K}$である s, t について $(s < t)$、$s + 1 \cdots t - 1 \in K$ である時、$h : U \cap \overline{K} \rightarrow B$ である写像 h と集合 B を、$(h(s) = \beta \rightarrow h(t) = \beta + 1) \wedge \beta \in B$　と定める。特に s が $U \cap \overline{K}$の要素で最小である時、$h(s) = 1$ とする。
これらを用いて $S(9N)$ を表すと

$$S(9N) = \sum_{k=1}^{n+1} b_k = b_1 + \sum_{\alpha=1}^{n(A)} b_{f^{-1}(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^{n(B)-1} b_{h^{-1}(\beta)} + b_{n+1}$$

$$b_1 = 10 - a_1, \sum_{\alpha=1}^{n(A)} b_{f^{-1}(\alpha)} = \sum_{\alpha=1}^{n(A)} (a_{f-1(\alpha)-1} - a_{f-1(\alpha)} - 1) + n(A) + I(n)$$

$$\sum_{\beta=1}^{n(B)-1} b_{h^{-1}(\beta)} = \sum_{\beta=1}^{n(B-1)} 9 - a_{h^{-1}(\beta)} + a_{h^{-1}(\beta)-1}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} a_n & (a_n < a_{n-1}) \\ a_n - 1 & (a_n > a_{n-1}) \end{cases} \quad I(n) = \begin{cases} -1 & (a_n < a_{n-1}) \\ 0 & (a_n > a_{n-1}) \end{cases}$$

となる。
A と K、B と $U \cap \overline{K}$はそれぞれ全単射であるため、$n(A) = n(K), n(B) = n(U \cap \overline{K})$ である。$b_{n+1} + I(n) = a_n - 1$ であるため

$$S(9N) = 10 - a_1 + \sum_{\alpha=1}^{n(K)} (a_{f-1(\alpha)-1} - a_{f-1(\alpha)} - 1) + n(K) + \sum_{\beta=1}^{n(U \cap \overline{K}-1)} (9 - a_{h^{-1}(\beta)} + a_{h^{-1}(\beta)-1}) + a_n - 1$$

となりこれを計算すると

$$S(9N) = 9(n - n(K))$$

であり $n = [log_{10}N] + 1$ であるため

$$S(9N) = 9([log_{10}N] + 1 - n(K)) \text{ である}$$

これで $a_k \neq a_{k+1}$の場合を証明できた。
次に $a_{f^{-1}(\alpha)} = a_{f^{-1}(\alpha)+1} \cdots = a_{f^{-1}(\alpha)+g(\alpha)}$の場合を考える。
まず N から $\forall \alpha \in K : a_{f^{-1}(\alpha)} = a_{f^{-1}(\alpha)+1} = a_{f^{-1}(\alpha)+2} \cdots a_{f^{-1}(\alpha)+g(\alpha)}$を桁から除外した数を M とする。

$$M = \sum_{i=1}^{m} 10^{i-1} c_i$$

$$(\forall i \in K : a_k \in \mathbf{Z}, 0 \leqq c_i \leqq 9, c_m \neq 0)$$

とすると、$c_i \neq c_{i+1}$を満たすため

$$S(9M) = 9([log_{10}M)] + 1 - n(K)), [log_{10}M] = [log_{10}N] - \sum_{\alpha=1}^{n(K)} g(\alpha)$$

となる。

$$p \in K, \quad P = \sum_{l=0}^{g(p)} 10^l a_{f^{-1}(p)+l-1}, \quad a_{f^{-1}(p)} = a_{f^{-1}(p)+1} \cdots = a_{f^{-1}(p)+g(p)}, \quad a_{f^{-1}(p)} < a_{f^{-1}(p)-1}$$

とする。

$$S(9P) = \sum_{l=0}^{g(p)+1} q_l$$

$$(\forall l \in \{0, 1, 2 \cdots g(p) + 1\} : q_l \in \mathbf{Z}, 0 \leqq q_l \leqq 9, q_{g(p)+1} \neq 0)$$

この時、$q_1 = 10 - a_{f^{-1}(p)-1}$, $\quad q_2 = a_{f^{-1}(p)-1} - a_{f^{-1}(p)} - 1$ となり q_3へ $a_{f^{-1}(p)}$ くりあがる。よって $q_3 = 10 - a_{f^{-1}(p)} + a_{f^{-1}(p)-1} = 10$ となるがこの 10 は q_4へ繰り上がるため、$q_3 = 0$ となる。q_4も同様に $q_4 = 10 - a_{f^{-1}(p)+1} + a_{f^{-1}(p)+1} = 10 \to 0$ となり同様に計算していくと $q_3 = q_4 = q_5 \cdots = q_{g(p)} = 0, q_{g(p)+1} = a_{f^{-1}(p)}$

となることが分かる。
故に

$$S(9P) = 10 - a_{f^{-1}(p)-1} + a_{f^{-1}(p)-1} - a_{f^{-1}(p)} - 1 + a_{f^{-1}(p)} = 9$$

となり、また $S(9(10a_{f^{-1}(p)} + a_{f^{-1}(p)-1})) = 9$ であるため、このことから

$$S(9(10a_{f^{-1}(p)} + a_{f^{-1}(p)-1})) = S(9P) = S(9(\sum_{l=0}^{g(p)} 10^l a_{f^{-1}(p)+l-1}))$$

であることが分かる。すなわち 9 を掛けた後の数の数字和を計算する時において、$b_{f^{-1}(\alpha)+1} + b_{f^{-1}(\alpha)+2} \cdots + b_{f^{-1}(\alpha)+g(\alpha)} = 0$ である。
よって $S(9M) = S(9N)$ である。
ゆえに

$$S(9N) = 9([log_{10}N] + 1 - \sum_{\alpha=1}^{n(K)} g(\alpha) - n(K))$$

が成り立つ (証明終)