МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Университет ИТМО

Отчет по практической работе №2

По дисциплине:

«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Студент:

Группа № R4133c

Байдаченко С.Н.

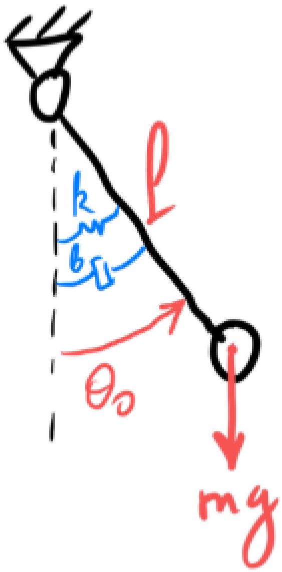
Преподаватель:

Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург 2025

Задание:

1) Составить ОДУ для системы с массой, пружиной и демпфером, используя приведенный ниже вариант:



2) Следует решить составленное ОДУ аналитически и сравнить его с результатами, полученными при решении методами Эйлера (явного/неявного) и Рунге-Кутты 4-го порядка.

Ход работы:

m, kg	k, N/m, Nm/rad	b, N*s/m, Nm*s/rad	l, m	theta_0, rad	x_0, m
0.3	19.6	0.01	0.32	-0.2670436695	0.76

Начнём с выведения Лагранжиана системы:

$L = K - P$, где K – кинетическая энергия объекта, а P – потенциальная, которые в свою очередь равны $K = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$ и $P = mglcos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$.

Стоит иметь ввиду, что масса сосредоточена на конце маятника. Следовательно, $I = ml^2$, а кинетическая энергия будет равна: $K = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.

Подставим всё в наш Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mglcos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$$

Уравнение Лагранжа:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q, где \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta}, \frac{\partial L}{\partial \theta} = mglsin\theta + k\theta, Q = -b\dot{\theta}$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\ddot{\theta} = -\frac{b\dot{\theta}}{ml^2} - \frac{g sin\theta}{l} - \frac{k\theta}{ml^2}$$

Если мы предположим, что колебания происходят при малых углах (θ≪1 радиан), то можно применить приближение sinθ≈θ. Это радикально упрощает уравнение, превращая его в линейное. Зададим удобную форму:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{ml^2}\right)\theta = 0$$

Подставим значения и приведём уравнение к характеристическому виду:

$$\mathrm{x}^2 + 0.3255\mathrm{x} + 668.38 = 0$$

Найдём корни через дискриминант:

D=0.3255*0.3255-4*1*668.38=-2673.414 – отрицательное значение, значит корни будут равны: $x_{1,2} = \frac{-0.3255 \pm \mathrm{i}*51.704}{2} = -0.163 \pm 25.852\mathrm{i}$

Раз у нас несколько корней, то общее решение однородного уравнения примет вид:

$$\theta(t) = C_1 e^{-0.163t} sin(25.852t) + C_2 e^{-0.163t} cos(25.852t)$$

Выберем начальные условия t=0, то:

$$\theta(0) = C_1 e^{-0.163t} sin(25.852 * 0) + C_2 e^{-0.163t} cos(25.852 * 0)$$

$\theta(0) = C_1 * 0 + C_2 * 1)$, но так как θ(0)=–0.267, значит C2=–0.267

Далее производная при $\dot{\theta}(t) = 0$:

$$\dot{\theta}(t) = C_1\left(-0.163e^{-0.163t} sin(25.852t) + 25.852e^{-0.163t} cos(25.852t)\right) + C_2(-0.163e^{-0.163t} cos(25.852t) - 25.852e^{-0.163t} sin(25.852t)$$

Используя, что t=0, уравнение примет вид:

$$\dot{\theta}(t) = C_1(0 + 25.852 * 1) + C_2(-0.163 * 1 - 0)$$

$25.852C_1 - 0.163C_2 = 0$, где C2=-0.267

C1=-0.002

Итоговое решение:

$$\theta(t) = -0.002e^{-0.163t} sin(25.852t) - 0.267e^{-0.163t} cos(25.852t)$$

Теперь промоделируем систему различными численными методами (Рунге-Кутты 4-го порядка, явного/неявного Эйлера).

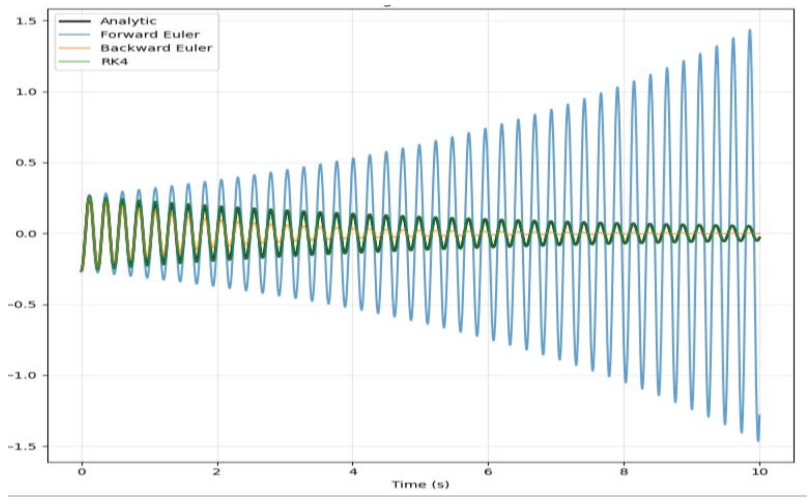


Рис. 1. «График моделирования угла отклонения при начальном условии»

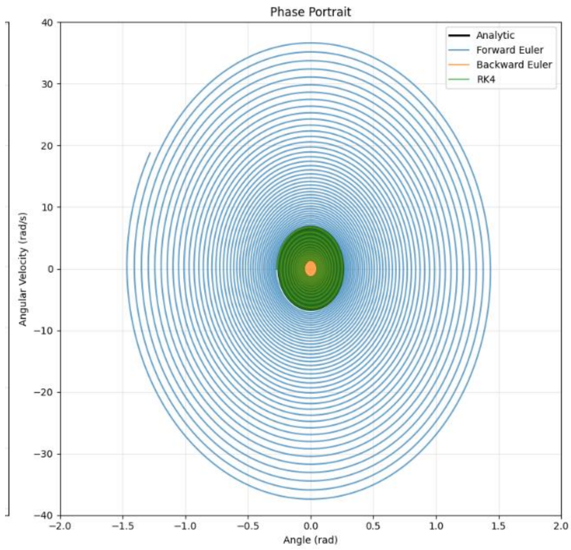


Рис. 2. «Фазовый портрет системы»

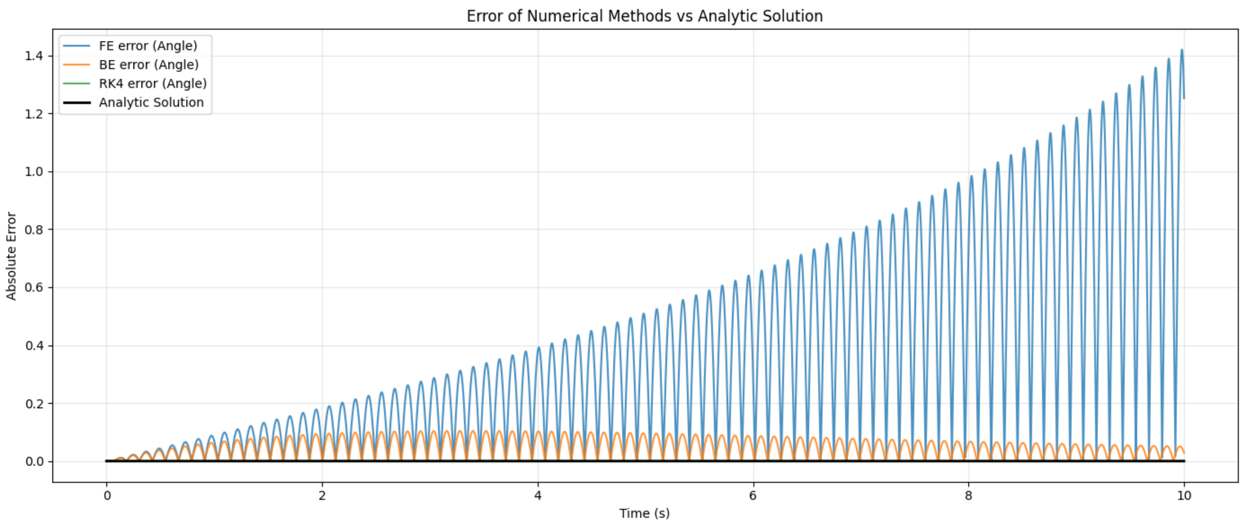


Рис. 3. «График ошибок»

Численно ошибки имеют следующие значения в сравнении угла от времени:

Явный Эйлер 1.419 – максимальная ошибка, 0.368 – средняя;

Неявный Эйлер 0.104 – максимальная, 0.05 – средняя;

Рунге-Кутты 4-го порядка 0.000002 – максимальная.

Выводы:

1) Для нашей системы наиболее подходит метод Рунге-Кутты 4-го порядка, а наименее подходит явный Эйлер. Сама система имеет затухающие колебания.

2) Явный метод Эйлера демонстрирует неустойчивость и значительную ошибку, что делает его непригодным для решения данной задачи при используемом шаге интегрирования

3) При использовании методов Эйлера для подобных задач необходимо значительно уменьшать шаг интегрирования, что увеличивает вычислительную сложность и время решения.