

AVALIAÇÃO DE MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE COMPONENTES DE VARIÂNCIA EM MODELOS EM CLASSIFICAÇÃO SIMPLES COM APLICAÇÃO EM BOVINOS NELORE¹

EVERTON SILVA DE SANTANA²

LUIZ HENRIQUE DE AQUINO³

EDUARDO BEARZOTTI⁴

ANTONIO ILSON GOMES DE OLIVEIRA⁵

RESUMO – Foram avaliados os métodos de análise de variância, *ANOVA*; máxima verossimilhança, *ML*; máxima verossimilhança restrita, *REML*, e de estimação quadrática não tendenciosa de variância mínima, *MIVQUE(0)*, na estimação de componentes de variância em um modelo aleatório de classificação simples, por simulação, na qual foram empregadas situações envolvendo razões de variâncias, σ_a^2/σ_e^2 , níveis de não balanceamento e tamanhos de amostra. Utilizaram-se as estatísticas viés e erro quadrático médio, EQM. Os métodos citados, incluindo o Bayesiano, foram aplicados em dados reais de bovinos Nelore. O estimador *ML*

foi recomendado para $\sigma_a^2/\sigma_e^2=0,05$. O estimador *REML* foi indicado como uma boa opção quando $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$. O *MIVQUE(0)* constituiu o método menos eficaz. A aplicação em bovinos Nelore revelou estimativas de σ_a^2 e σ_e^2 muito próximas nos métodos *ML*, *REML* e Bayesiano, e resultados inconsistentes para o *MIVQUE(0)* e *ANOVA*.

TERMOS PARA INDEXAÇÃO: Métodos de estimação, não-balanceamento, peso à desmama, *priori* não informativa, cadeia independente.

EVALUATION OF VARIANCE COMPONENTS ESTIMATION METHODS IN ONE-WAY CLASSIFICATION MODELS WITH APPLICATION TO NELORE CATTLE

ABSTRACT – Analysis of variance, *ANOVA*; maximum likelihood, *ML*; restricted maximum likelihood, *REML*; and minimum variance quadratic unbiased estimation, *MIVQUE(0)*, were evaluated on variance components estimation, through their bias and mean squared error, MSE, for the one-way classification random model. A simulation study was conducted in situations involving variance ratio σ_a^2/σ_e^2 , levels of unbalancedness and

sample sizes. The methods, including the Bayesian one, were applied to Nelore cattle data. *ML* estimator has been indicated when $\sigma_a^2/\sigma_e^2=0.05$. *REML* estimator may be a good choice when $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0.25$. *MIVQUE(0)* was the worst estimator. Application to Nelore cattle shown very closed estimates of σ_a^2 and σ_e^2 from *ML*, *REML* and Bayesian methods whereas *MIVQUE(0)* and *ANOVA* yielded inconsistent results.

INDEX TERMS: Estimation methods, unbalancedness, weight at weaning, noninformative prior, independence chain.

1. Parte da dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS/UFLA, Caixa Postal 37 – 37200-000 – Lavras, MG, pelo primeiro autor, para obtenção do título de Mestre em Agronomia, Área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária.

2. Estatístico, Mestre em Estatística e Experimentação Agropecuária/UFLA.

3. Engenheiro Agrônomo, Professor Titular, Departamento de Ciências Exatas/UFLA, lhaquino@ufla.br.
4. Engenheiro Agrônomo, Professor Adjunto, Departamento de Ciências Exatas/UFLA.
5. Engenheiro Agrônomo, Professor Titular, Departamento de Zootecnia, UFLA.

INTRODUÇÃO

Componentes de variância são parâmetros correspondentes às variâncias dos efeitos aleatórios de um modelo estatístico; em Ciências Agrárias, são largamente empregados nos Melhoramentos Genéticos Animal e Vegetal. Os estimadores de componentes de variância mais citados na literatura são provenientes dos métodos *ANOVA*, *ML*, *REML*, *MIVQUE(0)* e o Bayesiano. Os estimadores *ANOVA* e seus derivados (Métodos I, II e III de Henderson, Henderson, 1953) foram amplamente usados por causa das propriedades ótimas de seus estimadores, como a não-tendenciosidade e a variância mínima, dentre outras. Por outro lado, há possibilidades de obtenção de estimativas negativas e, com dados não balanceados, somente a não-tendenciosidade dos estimadores é reconhecida.

Herbach (1959), visando à obtenção de estimativas não negativas, aplicou o princípio da máxima verossimilhança, *ML*, em modelos de dados balanceados; entretanto, suas estimativas eram tendenciosas. Thompson Junior (1962) considerou a idéia de restringir a maximização da verossimilhança somente aos efeitos aleatórios do modelo, descrevendo, assim, o estimador *REML*. Harville (1969) projetou o estimador *MIVQUE*, que possui variância mínima sob normalidade.

Alguns trabalhos têm realizado comparações numéricas entre diferentes métodos: Swallow & Searle (1978) constataram, para dados não balanceados, que a variância do estimador *MIVQUE* foi de mínimo local, isto é, foi somente mínima quando os valores utilizados *a priori* estiveram próximos dos valores verdadeiros dos componentes de variância. Swallow & Monahan (1984) compararam os métodos *ANOVA*, *ML*, *REML*, *MIVQUE(A)* e *MIVQUE(0)* usando um modelo aleatório em classificação simples, constatando a adequação do *ANOVA* em dados moderadamente não balanceados e $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \leq 1$, do estimador *ML*, que obteve uma ótima performance com $\sigma_a^2/\sigma_e^2 < 0,5$, e a inadequação do *MIVQUE(0)*, que apresentou um fraco desempenho. Chaloner (1987), utilizando algumas configurações iguais às de Swallow & Monahan (1984), constatou uma superioridade do estimador Bayesiano diante do *ANOVA* e *ML* quanto ao viés e EQM. Wright et al. (2000) verificaram que os métodos *REML* e Bayesiano produziram diferentes resultados na seleção de *Tribolium castaneum*.

Pretende-se, neste trabalho, avaliar a eficiência dos métodos de estimação dos componentes de variância pelos métodos *ANOVA*, *ML*, *REML* e *MIVQUE(0)*, com base em viés e erro quadrático médio (EQM), obtidos por meio de dados simulados, usando um modelo aleatório em classificação simples em diferentes situações de razão de variâncias σ_a^2/σ_e^2 , níveis de não-balanceamento e tamanhos de amostras. Os métodos citados, incluindo o Bayesiano, foram aplicados em dados de peso a desmama de bovinos Nelore.

MATERIAL E MÉTODOS

O modelo aleatório em classificação simples utilizado foi expresso por $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$, em que y_{ij} é a j -ésima observação na qual o i -ésimo efeito do fator α foi aplicado, μ é uma constante, α_i é o efeito do i -ésimo nível do fator α e e_{ij} é o erro inerente à observação j e efeito i que são variáveis aleatórias normais mutuamente independentes e identicamente distribuídas com média zero e variâncias σ_a^2 e σ_e^2 , respectivamente, $i = 1, \dots, a$, com $a \geq 2$; $j = 1, \dots, n_i$, com $n_i \geq 1$ para todo i ; $n_i = n$, quando o modelo é balanceado, e $N = \sum_i n_i$ é o número total de observações.

Simulação dos Dados

Desenvolveram-se programas em SAS®, objetivando-se gerar dados por meio da função *RANNOR*, exposta em Box & Müller (1958), na qual os valores paramétricos requeridos foram $\mu=10$ para a média geral, $\sigma_a^2=0,05; 0,25; 0,50; 1,00$ e $2,50$; e $\sigma_e^2=1$ resultando em 5 valores para razão de variâncias σ_a^2/σ_e^2 , semelhante aos adotados por Swallow & Searle (1978), Swallow & Monahan (1984) e Chaloner (1987), entre outros. Consideraram-se três níveis de não-balanceamento: o caso balanceado, o não-balanceamento “moderado” e o “acentuado”. O não-balanceamento foi processado de modo semelhante à estrutura de “*n-patterns*”, utilizada em Swallow & Searle (1978), Swallow & Monahan (1984) e Chaloner (1987). Consideraram-se ainda três tamanhos de amostra: pequeno ($N=100$), médio ($N=200$) e grande ($N=300$). Foram utilizados os métodos *ANOVA*, *ML*, *REML* e *MIVQUE(0)*, pelos procedimentos GLM e MIXED do SAS®.

Desse modo, os dados foram gerados, considerando-se 5 razões de variâncias, 3 níveis de não-balanceamento e 3 tamanhos de amostras, proporcionando 45 configurações replicadas 15000 vezes. A captação dos componentes de variância de cada experimento foi feita pelo procedimento IML do SAS, que determinou a média do viés e EQM das 15000 replicações.

As estimativas negativas dos componentes de variâncias, obtidas pelo método ANOVA, foram convertidas em zero, conforme recomendado por Searle (1971) e seguido por Swallow & Monahan (1984). Os experimentos cujas estimativas REML e ML não convergiram foram descartados, como procedido por Swallow & Searle (1978) e Swallow & Monahan (1984).

Uma Aplicação em Dados de Bovinos Nelore

Os métodos clássicos e o Bayesiano foram aplicados em 9633 registros de peso à desmama de bovinos Nelore, fornecidos pela Associação Brasileira dos Criadores de Zebu (ABCZ), referentes a animais nascidos entre 1976 e 1994. Foram mantidos para o estudo: fazendas com o mínimo de 20 animais, rebanhos com pelo menos 10 registros num mesmo ano, reprodutores (touro) com mais de 4 progênes e animais criados sob regime de pastagens. Maiores detalhes acerca dos dados e modelos são apresentados por Machado et al. (1999).

No modelo em classificação simples, y_{ij} é o peso à desmama do bezerro j filho do touro i ; μ é o peso médio à desmama; α_i é o efeito do touro i , $\alpha_i \sim N(0, \sigma_a^2)$; e_{ij} é o erro associado ao peso à desmama dos bezerros, $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$.

As estimativas dos componentes de variância, obtidas pelo método Bayesiano, foram baseadas na moda da amostra *a posteriori* de tamanho 10000, gerada pelo algoritmo *independence chain*, disponível na versão 8 do SAS®. Os valores modais foram obtidos pela técnica de *Kernel Density* (Wolfinger & Kass, 2000).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dados Simulados

Os vieses médios de σ_a^2 obtidos em 15000 simulações, relacionadas ao tamanho de amostra pequeno ($N=100$), estão apresentados na Tabela 1. Os valores tabelados que mostram vieses relativos estimados iguais ou superiores a 10% da razão de variâncias estão em negrito e foram chamados de vieses "altos", para fins de destaque, conforme procedimento adotado por Swallow & Monahan (1984).

TABELA 1 – Viés de σ_a^2 segundo diferentes razões de variâncias (σ_a^2/σ_e^2 , $\sigma_e^2 = 1$), níveis de não-balanceamento e métodos de estimação. Amostra de tamanho pequeno.

σ_a^2/σ_e^2	NB (*)	ANOVA	ML	REML	MIVQUE(0)
0,05	BA	0,0134	0,0036	0,0134	0,0134
	MO	0,0203	0,0059	0,0176	0,0172
	AC	0,0348	0,0174	0,0317	0,0307
0,25	BA	0,0017	-0,0206	0,0017	0,0017
	MO	0,0014	-0,0250	0,0014	0,0008
	AC	0,0073	-0,0226	0,0069	0,0070
0,50	BA	0,0018	-0,0333	0,0018	0,0018
	MO	-0,0010	-0,0413	-0,0006	-0,0012
	AC	0,0016	-0,0433	0,0009	0,0020
1,00	BA	0,0032	-0,0569	0,0032	0,0032
	MO	-0,0016	-0,0687	-0,0015	-0,0018
	AC	0,0005	-0,0710	-0,0005	0,0011
2,50	BA	0,0072	-0,1281	0,0072	0,0072

MO	-0,0026	-0,1469	-0,0032	-0,0025
AC	0,0011	-0,1459	0,0004	0,0019

(*) NB : Não-Balanceamento, em que BA : Balanceado, MO : Moderado e AC : Acentuado.

Na maioria dos casos, o valor absoluto do viés do método *ML* aumentou com o crescimento da razão de variâncias e graus de não-balanceamento. Pôde-se constatar que, quando $\sigma_a^2/\sigma_e^2 = 0,05$ com a amostra de tamanho pequeno ($N=100$), ocorreram vieses maiores que 10% em quase todos os métodos e níveis de não-balanceamento e, sob essas condições, verificou-se que o método *ML* produziu menor viés e o *ANOVA* foi mais tendencioso que o *REML* e o *MIVQUE(0)*.

Quando $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$, os vieses foram menores que 10% da razão de variâncias e, portanto, desprezíveis em quase todos os métodos de estimação e graus de não-balanceamento. O método *REML* produziu menores vieses, ao contrário do *ML*, que foi o mais tendencioso de todos os métodos.

Verificaram-se vieses “altos” em amostras de tamanho médio (não mostrado), em sua maioria, na razão $\sigma_a^2/\sigma_e^2 = 0,05$. Nesse caso, os métodos *ANOVA*, seguido do *REML* e *MIVQUE(0)*, foram os mais tendenciosos, ao contrário do *ML*. No entanto, essa situação mudou nas razões $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$, nas quais os estimadores *ML* possuíam os maiores vieses, ao contrário do estimador *REML*, que mostrou-se o menos tendencioso de todos.

Em amostra de tamanho grande (não mostrado), encontraram-se sete vieses acima de 10%, todos localizados na razão $\sigma_a^2/\sigma_e^2 = 0,05$, estando, entretanto, o método *ML* menos tendencioso em todos os níveis de não-balanceamento. Semelhante ao caso com amostra de tamanho médio, quando $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$, o *REML* produziu as estimativas menos tendenciosas. Constatou-se que os vieses “altos” diminuiriam seus valores, à medida que o tamanho da amostra aumentou. Esses resultados con-

cordam com os encontrados por Swallow & Monahan (1984) e Chaloner (1987). O estimador *ML* registrou viés negativo em quase todas as situações estudadas. Swallow & Monahan (1984) e Searle et al. (1992), entre outros, atribuíram o viés negativo do estimador *ML* pelo fato de esse estimador não considerar a perda em graus de liberdade, associado à estimação dos efeitos fixos. Swallow & Monahan (1984) também comentaram que o viés do estimador *ML* de σ_a^2 foi diretamente proporcional ao valor desse componente e inversamente proporcional ao tamanho de amostra, explicando, assim, os baixos vieses decorrentes da razão $\sigma_a^2/\sigma_e^2 = 0,05$, no menor tamanho de amostras, e as ocorrências de vieses “altos” para $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$. Em geral, os estimadores *ANOVA*, *REML* e *MIVQUE(0)* apresentaram vieses pouco expressivos, registrando-se pequenas diferenças entre eles.

Os vieses de σ_e^2 (não mostrados) representaram baixos valores em quase todas as condições estudadas. Em tamanho de amostra pequeno, foram registrados apenas seis casos com valores acima de 10%, todos eles nos métodos *ML* e *REML*, com $\sigma_a^2/\sigma_e^2 = 0,05$. Quando o tamanho da amostra passou para categoria média, ainda nessa razão de variâncias, registraram-se seis casos acima de 10% com os métodos *ML* e *REML*. Em tamanho de amostra grande, nenhum caso foi notado.

As Figuras 1 e 2 ilustram o comportamento dos vieses dos estimadores de σ_a^2 e σ_e^2 , respectivamente, em amostra de tamanho pequeno ($N=100$) e grau de não-balanceamento “acentuado”, à medida que cresce a relação de variâncias.

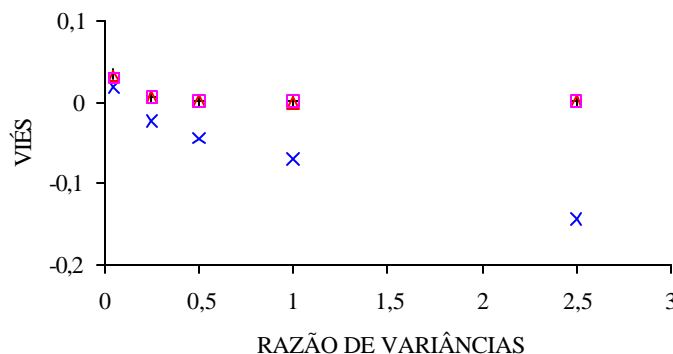


FIGURA 1 – Relação do viés dos estimadores de σ_a^2 com o crescimento da razão de variâncias em tamanho pequeno de amostra (N=100) e não-balanceamento “acentuado”.

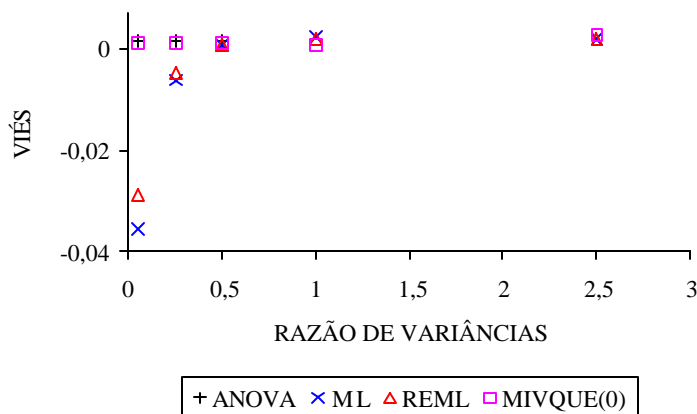


FIGURA 2 – Relação do viés do estimador de σ_e^2 com o crescimento da razão de variâncias em tamanho pequeno de amostra (N=100) e não-balanceamento “acentuado”.

Nota-se que o viés de todos os estimadores cresce com o aumento da razão de variâncias, sendo esse crescimento mais evidente no estimador *ML*. Apesar de não haver grandes diferenças entre os vieses de σ_a^2 , pois todos foram muito baixos, afirma-se que o *REML* mostrou-se menos tendencioso.

O EQM de σ_a^2 , obtido de em 15000 simulações estudadas, está apresentado na Tabela 2, em que se considerou o tamanho de amostra pequeno (N=100).

O estimador *ML* de σ_a^2 teve menor EQM em todas as situações estudadas. Segundo Swallow & Monahan (1984), quando o número de efeitos aleatórios, *a*, é pequeno e σ_a^2/σ_e^2 é grande, os vieses negativos do método *ML* ocasionam baixos valores de EQM, uma vez que o espaço paramétrico de σ_a^2 tem zero como limite inferior, diminuindo, assim, a variabilidade dos valores e, conseqüentemente, o EQM. Considerando esse fato, os altos vieses de σ_a^2 , pelo método *ML*, implicaram de baixos valores da variância e do EQM de seu estimador.

O estimador *MIVQUE(0)* de σ_a^2 teve um desempenho satisfatório, quando a razão de variâncias foi de 0,05, não superando somente o *ML*. Tal resultado é explicado em Swallow (1981) e Swallow & Monahan (1984), pelo qual afirma-se que as estimativas *MIVQUE(0)* só

possuem variância mínima quando seus valores *prioris* estão próximos dos valores verdadeiros. No caso, a razão $\sigma_a^2/\sigma_e^2=0,05$ (um valor paramétrico, imposto na simulação) foi a mais próxima de seus valores *prioris* $\sigma_a^2=0$ e $\sigma_e^2=1$. Quando $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$, o *MIVQUE(0)* mostrou-se o pior estimador de σ_a^2 quanto ao critério do menor EQM, principalmente nas mais altas razões de variâncias, em casos não-balanceados e em todos os tamanhos de amostra. Diante disso, Swallow & Monahan (1984) questionaram o emprego do *MIVQUE(0)* como *default* do procedimento VARCOMP do SAS®.

O EQM de σ_e^2 cresceu com o aumento da razão de variâncias e com os níveis de não-balanceamento e decresceu com o tamanho da amostra, em todos os métodos estudados. No entanto, o componente de variância do erro foi o menos afetado pelas situações empregadas na simulação. Quando $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$, o *MIVQUE(0)* e o *ANOVA* mostraram-se os piores estimadores de σ_e^2 , principalmente nas mais altas razões de variâncias e nos casos não-balanceados, em todos os tamanhos de amostra.

As Figuras 3 e 4 ilustram o comportamento do EQM dos estimadores de σ_a^2 e σ_e^2 , respectivamente, no

tamanho de amostra pequeno ($N=100$) e grau de não-balanceamento “acentuado”.

Percebeu-se que, à medida que crescia a razão de variâncias, ocorreu um aumento da discrepância entre os métodos, quanto ao EQM de $\hat{\sigma}_a^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$, sendo o *MIVQUE(0)* o mais sensível ao aumento desse compo-

nente de variância. O *MIVQUE(0)* produziu estimativas com maior EQM em todos os tamanhos de amostras, nas maiores razões de variâncias e em todos os níveis de não-balanceamento, sendo o método menos adequado quanto a esse critério.

TABELA 2 – EQM de $\hat{\sigma}_a^2$ segundo diferentes razões de variâncias ($\hat{\sigma}_a^2/\hat{\sigma}_e^2$, $\hat{\sigma}_e^2 = 1$), níveis de não balanceamento e métodos de estimação. Tamanho de amostra pequeno.

$\hat{\sigma}_a^2/\hat{\sigma}_e^2$	NB (*)	ANOVA	ML	REML	MIVQUE(0)
0,05	BA	0,0051	0,0042	0,0051	0,0051
	MO	0,0075	0,0054	0,0070	0,0069
	AC	0,0125	0,0091	0,0119	0,0117
0,25	BA	0,0214	0,0197	0,0214	0,0214
	MO	0,0287	0,0261	0,0289	0,0292
	AC	0,0378	0,0343	0,0385	0,0414
0,50	BA	0,0519	0,0480	0,0519	0,0519
	MO	0,0671	0,0628	0,0683	0,0714
	AC	0,0814	0,0767	0,0832	0,0968
1,00	BA	0,1517	0,1402	0,1517	0,1517
	MO	0,1893	0,1736	0,1876	0,2083
	AC	0,2101	0,1931	0,2080	0,2675
2,50	BA	0,7674	0,7090	0,7674	0,7674
	MO	0,9328	0,8015	0,8644	1,0466
	AC	0,9624	0,8270	0,8921	1,2853

(*) NB : Não-Balanceamento, em que BA : Balanceado, MO : Moderado e AC : Acentuado.

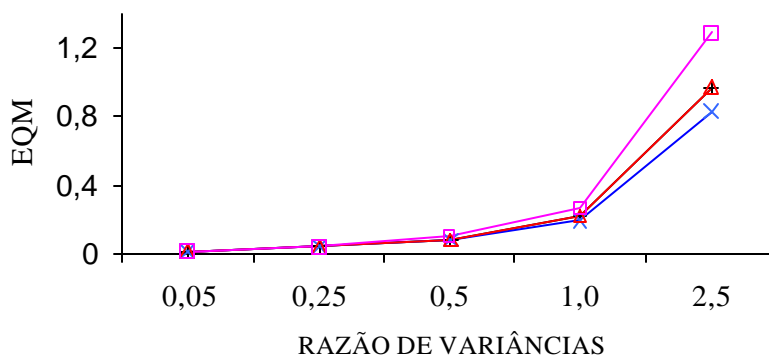


FIGURA 3 – Relação do EQM dos estimadores de $\hat{\sigma}_a^2$ com o crescimento da razão de variâncias em tamanho pequeno de amostra (N=100) e não-balanceamento “acentuado”.

Aplicação em dados reais de Bovinos Nelore

Os componentes de variâncias estimados do modelo aleatório em classificação simples aplicado a dados de peso à desmama de 9633 bovinos Nelore, estão apresentados na Tabela 3.

Observa-se na Tabela 3 que o método *MIVQUE(0)* e o *ANOVA* produziram estimativas de $\hat{\sigma}_a^2$ inconsistentes aos demais métodos. Constata-se uma

semelhança entre os métodos *ML*, *REML* e *Bayesiano*, evidenciando-se que esse último seja um caminho promissor. Observando-se as estimativas de $\hat{\sigma}_e^2$, detecta-se um comportamento discrepante do *MIVQUE(0)*, que produziu um valor bem acima dos obtidos pelos outros métodos. Por esses resultados, deduz-se que a maioria dos métodos são semelhantes quando há um maior número de graus de liberdade para estimativa considerada.

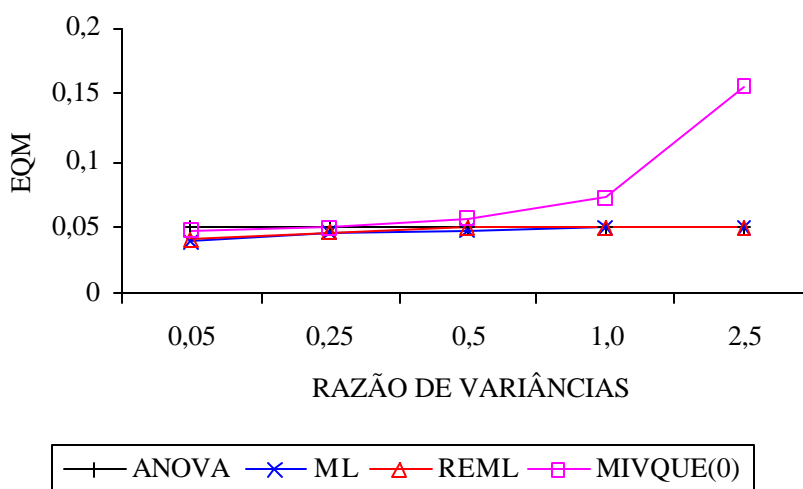


FIGURA 4 – Relação do EQM dos estimadores de $\hat{\sigma}_e^2$ com o crescimento da razão de variâncias em tamanho pequeno de amostra (N=100) e não-balanceamento “acentuado”.

TABELA 3 – Componentes de variância do modelo aleatório de classificação simples estimados por métodos clássicos e Bayesianos.

Métodos	$\hat{\sigma}_a^2$	$\hat{\sigma}_e^2$
ANOVA	222,45	608,78
ML	341,35	609,30

<i>REML</i>	342,69	609,29
<i>MIVQUE(0)</i>	127,95	702,40
<i>Bayesiano</i>	341,54	608,81

CONCLUSÕES

O estimador *ML* de σ_a^2 foi o indicado, quando $\sigma_a^2/\sigma_e^2=0,05$, por ser menos tendencioso e mais eficiente que os demais. O estimador *REML* de σ_a^2 e σ_e^2 foi recomendado para razões $\sigma_a^2/\sigma_e^2 \geq 0,25$, por apresentar menores vieses e erros quadráticos médios. O estimador *MIVQUE(0)* de σ_a^2 e σ_e^2 teve, em geral, o pior desempenho.

Os estimadores mostraram-se mais eficientes com a menor razão de variâncias, o maior tamanho de amostras e dados balanceados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOX, G. E. P.; MULLER, M. E. A note on the generation of random normal deviates. **Annals of Mathematical Statistics**, Baltimore, v. 29, p. 610-611, Dec. 1958.
- CHALONER, K. A bayesian approach to the estimation of variance components for the unbalanced one way random model. **Technometrics**, Washington, v. 29, n. 3, p. 323-337, Aug. 1987.
- HARVILLE, D. A. Quadratic unbiased estimation of variance components for the one-way classification. **Biometrika**, Baltimore, v. 56, n. 1/2, p. 313-326, June 1969.
- HENDERSON, C. R. Estimation of variance and covariance components. **Biometrics**, Raleigh, v. 9, n. 1, p. 226-252, Mar. 1953.
- HERBACH, L. H. Properties of Model II – Type analysis of variance tests, a: optimum nature of the F-test for model II in the balanced case. **Annals of Mathematical Statistics**, Baltimore, v. 30, n. 4, p. 939-959, Dec. 1959.
- MACHADO, P. F. A.; AQUINO, L. H.; GONÇALVES, T. M. Estimativas de parâmetros genéticos e critérios de seleção em características ponderais de bovinos Nelore. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 23, n. 1, p. 147-204, jan./mar. 1999.
- SEARLE, S. R. **Linear models**. New York: J. Wiley, 1971. 532 p.
- SEARLE, S. R.; CASSELLA, G.; MCCULLOCH, C. E. **Variance components**. New York: J. Wiley, 1992. 501 p.
- SWALLOW, W. H. Variances of locally minimum variance quadratic unbiased estimators (“MIVQUE’s”) of variance components. **Technometrics**, Washington, v. 23, n. 3, p. 271-283, Aug. 1981.
- SWALLOW, W. H.; MONAHAN, J. F. Monte Carlo comparison of ANOVA, MIVQUE, MIVQUE(0), and ML estimators of variance components. **Technometrics**, Richmond, v. 26, n. 1, p. 47-57, Feb. 1984.
- SWALLOW, W. H.; SEARLE, S. R. Minimum variance quadratic unbiased estimation (MIVQUE) of variance components. **Technometrics**, Washington, v. 20, n. 3, p. 265-272, Aug. 1978.
- THOMPSON JUNIOR, W. A. The problem of negative estimates of variance components. **Annals of Mathematical Statistics**, Baltimore, v. 33, n. 1, p. 273-289, Mar. 1962.
- WOLFINGER, R. D.; KASS, R. E. Bayesian analysis of variance components model via Rejection Sampling. 1996. Disponível em www.com.techsup/download/stat. Acesso em: 25 out. 2000.
- WRIGHT, D. R.; STERN, H. S.; BERGER, P. J. Comparing traditional and bayesian analyses of selection experiments in animal breeding. **Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics**, Washington, v. 5, n. 2, p. 240-256, June 2000.