# O Básico sobre Matrizes e Modelos Lineares

Prof. Rafael Tassinari Resende (PPGGMP/UFG) | 2024.

# Capítulo 1. Matrizes

## Multiplicação de Matrizes

A multiplicação de matrizes é uma operação fundamental na álgebra linear, com aplicações em várias áreas, incluindo estatística, engenharia, computação, entre outras. Não abordarei soma e subtração de matrizes, pois são conceitos bastante intuitivos. Sobre a multiplicação, vamos entender alguns conceitos e ver exemplos.

**Regras Básicas para Multiplicação de Matrizes**

1. Dimensões Compatíveis: Para que duas matrizes $A$ e $B$ possam ser multiplicadas, o número de colunas de $A$ deve ser igual ao número de linhas de $B$. Se $A$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ ($m$ linhas e n colunas) e $B$ é uma matriz de dimensão $n \times p$ ($n$ linhas e p colunas), então o produto $AB$ será uma matriz de dimensão $m \times p$. Se o produto entre dois matrizes existes, estas matrizes são chamadas de **conformáveis**, caso contrário, são chamadas de **não-conformáveis**;
2. Em matrizes, a ordem dos fatores pode alterar o produto! Isto é, nem sempre $AB = BA$, pois a multiplicação de matrizes não é comutativa em geral. No entanto, essa igualdade pode ocorrer em casos especiais, como quando as matrizes são diagonais, escalares, incluem a matriz identidade, ou em casos específicos de matrizes simétricas que comutam;
3. Cálculo dos Elementos da Matriz Resultante: O elemento na posição $(i, j)$ da matriz resultante $C = AB$ é obtido pela soma do produto dos elementos da $i$-ésima linha de $A$ pelos elementos correspondentes da $j$-ésima coluna de $B$:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \times B_{kj}$$

**Exemplo 1**: Multiplicação de Duas Matrizes 2×2

Considere as matrizes A e B: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, para encontrar o produto $AB$:

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, calculemos os elementos de AB:

$C_{11} = 1 \times 5 + 2 \times 7 = 5 + 14 = 19,$

$C_{12} = 1 \times 6 + 2 \times 8 = 6 + 16 = 22,$

$C_{21} = 3 \times 5 + 4 \times 7 = 15 + 28 = 43,$

$C_{22} = 3 \times 6 + 4 \times 8 = 18 + 32 = 50.$

Portanto,

$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$.

**Exemplo 2**: Multiplicação de uma Matriz $2 \times 3$ por uma Matriz $3 \times 2$.

Considere as matrizes $A$ e $B$:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, para encontrar o produto $AB$:

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, calculemos os elementos de $AB$:

$C_{11} = 1 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times 0 = 2 + 4 + 0 = 6,$

$C_{12} = 1 \times 3 + 4 \times 4 + 2 \times 6 = 3 + 16 + 12 = 31,$

$C_{21} = 3 \times 2 + 0 \times 1 + 5 \times 0 = 6 + 0 + 0 = 6,$

$C_{22} = 3 \times 3 + 0 \times 4 + 5 \times 6 = 9 + 0 + 30 = 39.$

Portanto,

$AB = \begin{bmatrix} 6 & 31 \\ 6 & 39 \end{bmatrix}$.

## Matrizes Transpostas

A matriz transposta é uma operação que transforma uma matriz trocando suas linhas por colunas. Se temos uma matriz $A$ de dimensão $m \times n$, sua transposta, denotada por $A^T$ ou simplesmente $A'$, será uma matriz de dimensão $n \times m$. Isso significa que o elemento na posição $(i, j)$ da matriz original $A$ se torna o elemento na posição $(j, i)$ na matriz transposta $A'$.

**Exemplo:**

Considere a matriz $A$ de dimensão $3 \times 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

A transposta de $A$, denotada por $A'$, será:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Aqui, a primeira linha da matriz original $A$ se torna a primeira coluna de $A'$, a segunda linha de $A$ se torna a segunda coluna de $A'$, e assim por diante. Se uma matriz $B$ é igual a sua inversa $B'$, ela é chamada **simétrica**. Matrizes simétricas são sempre quadradas. Matrizes de covariâncias ou de correlações sempre serão simétricas.

**Propriedades da Matriz Transposta**

- $(A')' = A$: A transposta da transposta de uma matriz é a própria matriz original.
- $(A + B)' = A' + B'$: A transposta da soma de duas matrizes é igual à soma das transpostas das matrizes.
- $(AB)' = B'A'$: A transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas, com a ordem dos fatores invertida.

## Matrizes Quadradas

Uma matriz quadrada é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, ou seja, sua dimensão é $n \times n$, onde $n$ é um número inteiro positivo. Essa característica permite operações matemáticas específicas, como determinantes, inversas e decomposições matriciais, essenciais na álgebra linear para representar transformações lineares invertíveis e resolver sistemas de equações. Conceitos importantes como matriz identidade, diagonal e simétrica são sempre quadradas. Por exemplo, uma matriz quadrada $A_{3\times3}$ seria representada como mostrado abaixo, onde cada $a_{ij}$ representa um elemento da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

## Matriz Identidade ($I$)

Uma matriz identidade é uma matriz quadrada que possui 1's na diagonal principal (que vai do canto superior esquerdo ao canto inferior direito) e 0's em todas as outras posições. A matriz identidade de ordem $n$ é denotada por $I_n$ e tem a propriedade especial de que qualquer matriz $A$ multiplicada pela identidade $I$ resulta na própria matriz $A$ (ou seja, $AI = IA = A$). Essa propriedade faz da matriz identidade o elemento neutro da multiplicação de matrizes, desempenhando um papel similar ao número 1 na multiplicação de números reais. **Exemplo**:

$$I_3 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Matriz Diagonal ($D$)

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada na qual todos os elementos fora da diagonal principal são zero. A diagonal principal consiste nos elementos que vão do canto superior esquerdo ao canto inferior direito. Matematicamente, uma matriz diagonal $D$ pode ser representada como $D_{ij} = 0 \ \forall \ \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$. Os elementos na diagonal principal podem ser diferentes de zero e são os únicos elementos não nulos na matriz. As matrizes diagonais são importantes porque são simples de manipular e suas propriedades facilitam muitos cálculos matemáticos, como a multiplicação de matrizes e a determinação de inversas, já que a inversa de uma matriz diagonal (se todos os elementos da diagonal principal são diferentes de zero) é simplesmente outra matriz diagonal com os recíprocos dos elementos da diagonal original. Por **exemplo**, a matriz $D$ abaixo é uma matriz diagonal, onde os elementos 3, 5 e 7 estão na diagonal principal e todos os outros elementos são zero.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

## Matrizes Bloco-Diagonal

São matrizes que possuem blocos ao longo da diagonal principal, enquanto todos os elementos que estão fora desses blocos são zero. Esses blocos não precisam ser necessariamente quadrados; podem ter diferentes dimensões, desde que a estrutura geral da matriz mantenha blocos ao longo da diagonal principal. Essas matrizes são úteis em várias áreas, especialmente em problemas de decomposição e simplificação de sistemas lineares, pois permitem que grandes matrizes sejam divididas em blocos menores e mais gerenciáveis. Matrizes bloco diagonal podem ser:

**Exemplo 1**:

$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, onde: $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

**Exemplo 2.1**:

$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde: $Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, e $Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**Exemplo 2.2**:

$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde: $Z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Z_2 = [1]$, e $Z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

## Inversa de Matrizes

A inversa de uma matriz $A$ é uma matriz $A^{-1}$ que, quando multiplicada pela matriz original, resulta na matriz identidade ($AA^{-1} = A^{-1}A = I$). Para que uma matriz tenha uma inversa, ela deve ser quadrada (mesmo número de linhas e colunas) e ter um determinante diferente de zero. O **determinante** de uma matriz é um valor escalar, único, que fornece informações sobre as propriedades da matriz, e é calculado a partir dos elementos da matriz seguindo regras específicas. Quando uma matriz não possui inversa, ela é chamada de matriz **singular**. A matriz inversa é útil em diversas aplicações, como na resolução de sistemas de equações lineares.

Além das inversas tradicionais, existem as inversas generalizadas, como a pseudoinversa de *Moore-Penrose*, denotada como $A^G$. A pseudoinversa é especialmente útil para matrizes que não são quadradas ou que têm determinantes iguais a zero, permitindo a solução de sistemas de equações lineares que são sobredeterminados ou subdeterminados. Calcular a inversa manualmente pode ser um processo tedioso e propenso a erros, especialmente para matrizes grandes. Felizmente, existem funções computacionais em várias linguagens de programação, como Python, R e Julia, que calculam tanto a inversa tradicional quanto a pseudoinversa de forma rápida e precisa, tornando desnecessário fazer esses cálculos manualmente.

## Produto de Kronecker

É uma operação que toma duas matrizes $A$ e $B$ e produz uma matriz bloco maior, onde cada elemento $a_{ij}$ de $A$ é multiplicado pela matriz inteira $B$. Se $A$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ e $B$ é uma matriz de dimensão $p \times q$, então o produto de Kronecker $A \otimes B$ resulta em uma matriz de dimensão $(mp) \times (nq)$. Esta operação é amplamente utilizada em álgebra linear, processamento de sinais e teoria da informação, pois preserva a estrutura de blocos e expande as matrizes de forma sistemática. Por exemplo, para as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, e $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, o produto de Kronecker $A \otimes B$ é

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \cdot B & 2 \cdot B \\ 3 \cdot B & 4 \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}.$$

**Exercícios**.

**1.1.** Qual será a dimensão do produto das matrizes com as seguintes dimensões?

**a)** $A_{3\cdot2} \times B_{2\cdot4} = AB$__.__ **b)** $A_{5\cdot3} \times B_{3\cdot6} = AB$__.__ **c)** $A_{4\cdot4} \times B_{4\cdot4} = AB$__.__

**d)** $A_{3\cdot3} \times B_{2\cdot4} = AB$__.__ **e)** $A_{5\cdot3} \times B_{6\cdot6} = AB$__.__ **f)** $A_{4\cdot5} \times B_{4\cdot5} = AB$__.__

**g)** $A_{2\cdot3} \times B_{3\cdot2} = AB$__.__ **h)** $A_{6\cdot2} \times B_{2\cdot5} = AB$__.__ **i)** $A_{6\cdot2} \times B_{2\cdot5} \times C_{5\cdot4} = ABC$__.__

**1.2.** Calcule o produto das seguintes matrizes:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = ?$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $AA' = ?$

**c)** $A = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $AB = ?$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$, $ABC = ?$

**e)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A \otimes B = ?$

**1.3**. No software R, a função que realiza inversa de matrizes é a solve(). Já no Python a função é a inv(), dentro da biblioteca {numPy}. Utilize uma dessas duas funções para inverter as seguintes matrizes:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

**1.4**. O que é uma matriz singular? Alguma das matrizes da questão 1.3 é singular?

# 2. Modelos Lineares

## Conceitos Básicos

Os modelos lineares são ferramentas estatísticas usadas para explicar a relação entre uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes. Aplicados em várias áreas devido à sua simplicidade, esses modelos podem ser simples, quadráticos ou múltiplos. O modelo linear simples envolve uma única variável independente, enquanto os modelos quadrático e múltiplo incorporam duas ou mais variáveis. A escolha do modelo depende da natureza das variáveis e da complexidade da relação entre elas. Vamos explorar os principais conceitos e a estimação desses modelos, destacando suas aplicações práticas e a interpretação dos resultados.

**Forma Geral do Modelo Linear**

A expressão geral de um modelo linear é dada por: $y = X\beta + \varepsilon$, onde: $y$ é o vetor das observações da variável dependente; $X$ é a matriz de design, que contém as observações das variáveis independentes; $\beta$ é o vetor dos coeficientes desconhecidos (parâmetros do modelo) a serem estimados; $\varepsilon$ é o vetor de erros aleatórios, que se assume ter média zero e variância constante $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

## Estimação dos Parâmetros

Na forma mais clássica, a estimação dos parâmetros $\beta$ pode ser feita utilizando o método dos mínimos quadrados ordinários (MQO), que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos (diferença entre os valores observados e os valores ajustados pelo modelo). A expressão para os valores estimados dos parâmetros ($\hat{\beta}$) é:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

**Modelo Estimado**

Após a estimação dos parâmetros, podemos escrever o modelo ajustado (ou estimado) como: $\hat{y} = X\hat{\beta}$, onde: $\hat{y}$ é o vetor dos valores ajustados (ou preditos) da variável dependente; $X$ é a matriz de design (ou matriz de dados) que contém as observações das variáveis independentes (preditores); e $\hat{\beta}$ são os coeficientes estimados. Lembre-se das operações de matrizes mostradas no capítulo anterior!

**Matriz $X$ (matriz de delineamento)**

A matriz $X$ é chamada de matriz de design e contém as observações das variáveis independentes (preditores) organizadas em colunas. No caso de um *modelo linear simples* com um intercepto, a matriz $X$ pode ser representada como:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

Para um *modelo linear quadrático*, a matriz $X$ incluiria um termo adicional para o quadrado da variável independente:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}$$

E para um *modelo linear multivariado*, por exemplo, com três variáveis independentes ($x_1$, $x_2$ e $x_3$). Cada coluna da matriz $X$ representa uma variável independente, e cada linha representa uma observação. Além disso, a primeira coluna é frequentemente composta por 1's, para incluir o intercepto no modelo.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \end{bmatrix}$$

Um modelo linear multivariado pode ter tantas variáveis independentes ($x$) quanto necessário ($x_1$, $x_2$,..., $x_m$), limitado pelo número de observações, que é o número de dados em $y$ ou o número de linhas em $X$ ($n$), e pela necessidade de evitar colinearidade. A colinearidade pode dificultar a estimativa precisa dos coeficientes, exigindo técnicas como análise de componentes principais (PCA) ou seleção de variáveis.

Colinearidade é uma condição em que duas ou mais variáveis independentes em um modelo de regressão são altamente correlacionadas, dificultando a estimativa precisa dos coeficientes.

## Exemplos de Modelos Lineares

1. **Modelo Linear Simples**: Relaciona uma única variável dependente y a uma única variável independente x: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$. Aqui, $\beta_0$ é o intercepto e $\beta_1$ é o coeficiente de inclinação.

2. **Modelo Linear Quadrático**: Inclui termos quadráticos para capturar curvaturas na relação: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$

3. **Modelo Linear Múltiplo**: Relaciona uma variável dependente a múltiplas variáveis independentes: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon$

## O Erros e Resíduos de um Modelo

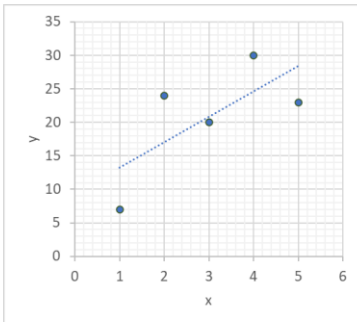
Os resíduos de um modelo linear, são as diferenças entre os valores observados e os valores preditos pelo modelo. Matematicamente, o resíduo $\varepsilon_i$ para a $i$-ésima observação é dado por $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$, onde $y_i$ é o valor observado e $\hat{y}_i$ é o valor predito pelo modelo. Os resíduos são fundamentais na análise de regressão, pois indicam a precisão e a eficácia do modelo. Analisá-los pode revelar heterocedasticidade, autocorrelação ou outliers, apontando problemas a serem corrigidos. Tecnicamente, "resíduo" é a diferença entre o valor observado e o predito pelo modelo ajustado, enquanto "erro" é a diferença entre o valor observado e o verdadeiro desconhecido, embora esses termos sejam frequentemente confundidos na literatura científica.

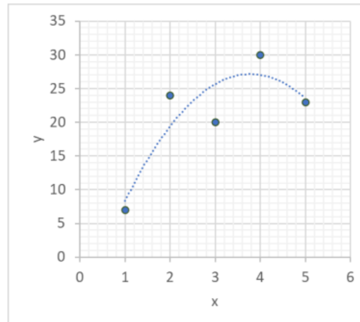
## Exercícios:

**2.1.** Calcule $\hat{y}_i$ para os dois modelos de regressão linear abaixo.

Dados:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 7 |
| 2 | 24 |
| 3 | 20 |
| 4 | 30 |
| 5 | 23 |




**a)** Modelo de regressão linear simples:

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$

$y = 9{,}4 + 3{,}8\, x + \varepsilon$

$\hat{y}_i = 9{,}4 + 3{,}8\, x_i$

**b)** Modelo de regressão linear quadrática

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$

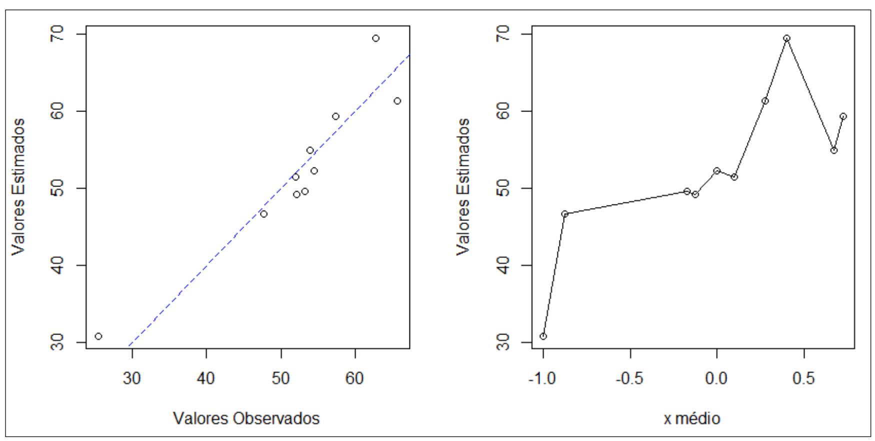
$y = -7{,}6 + 18{,}37\, x - 2{,}43\, x^2 + \varepsilon$

$\hat{y}_i = -7{,}6 + 18{,}37\, x_i - 2{,}43\, x_i^2$

**2.2**. Para o enunciado acima (questão 2.1), obtenha $\hat{y}$, por meio de multiplicação matricial, fazendo-se $\hat{y} = X\hat{\beta}$. Além disse, calcule os resíduos dos modelos. Faça tanto para o item 'a' quanto para o 'b'.

**2.3**. Os parâmetros ajustados da regressão multivariada $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + e$, são: $\hat{\beta}_0 = 52{,}37$; $\hat{\beta}_1 = 9{,}38$; $\hat{\beta}_2 = 11{,}32$; $\hat{\beta}_3 = -4{,}37$; e $\hat{\beta}_4 = 6{,}11$, respectivamente. Mostre a matriz de delineamento $X$ para esse caso, e calcule $\hat{y}_i$ com os dados abaixo.

| $y$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 54.5 | 0.9 | -1.0 | -0.2 | 0.3 |
| 53.3 | -0.5 | 0.4 | -0.1 | -0.5 |
| 53.9 | 1.0 | -0.7 | 1.3 | 1.1 |
| 52.0 | 1.2 | -1.0 | 0.2 | 0.0 |
| 47.7 | -0.7 | -1.0 | -2.2 | 0.4 |
| 57.4 | -1.2 | 0.9 | 1.1 | 2.1 |
| 65.7 | -0.7 | 1.7 | 0.4 | -0.3 |
| 62.8 | 1.0 | 1.2 | 0.2 | -0.8 |
| 25.4 | -1.4 | -0.6 | -1.0 | -1.0 |
| 52.2 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | -1.2 |




Os dois gráficos mostrados contêm as respostas em "Valores Estimados". Use-os para conferir seus resultados. O gráfico da esquerda mostra a relação entre $y$ observado e $\hat{y}$ obtido por $X\hat{b}$. E, o gráfico da direita mostra os valores de $\hat{y} = Xb$ em função da média de todos os $x$'s.

**2.4**. Calcule e interprete os resíduos para o modelo da questão 2.3.