# Experimentos em Parcelas Subdivididas

Lucas Santana da Cunha
http://www.uel.br/pessoal/lscunha

Universidade Estadual de Londrina

08 de novembro de 2018
Londrina

# Introdução

- Tal como no caso de fatorial, o termo **parcelas subdivididas** não se refere a um tipo de delineamento e sim ao **esquema** do experimento, ou seja, a maneira pela qual os tratamentos são organizados.
- Nos experimentos em parcelas subdivididas, em geral, estuda-se simultaneamente dois tipos de fatores os quais são geralmente denominados de fatores **primários** e fatores **secundários**.

- Na instalação os níveis do fator primário (A) são distribuídos às parcelas segundo um tipo de delineamento experimental: DIC, DBC, DQL.

- Posteriormente os níveis do fator secundário (B) são distribuídos ao acaso às subparcerlas de cada parcela, quando possível.

- Tal disposição permite obter uma estimativa geral de maior precisão para os efeitos dos **níveis do segundo fator**.

- Nos experimentos em parcelas subdivididas tem-se dois resíduos distintos: um correspondente às parcelas e outro às subparcelas dentro das parcelas.

- Em casos mais complexos, as subparcelas podem, também, ser repartidas em subsubparcelas. Tem-se, neste caso, três resíduos distintos:
  - **Resíduo (a)**, referente às **parcelas**;
  - **Resíduo (b)**, à **subparcelas** e
  - **Resíduo (c)**, correspondendo às **subsubparcelas**.

- Eem parcela subdividida com $a$ níveis primários, $b$ níveis secundários e $r$ repetições, temos a seguinte decomposição dos graus de liberdade:

**Tabela 1:** Parcela subdividida no **delineamento inteiramente casualizado**

| CV | GL |
|---|---|
| Tratamento A | $a-1$ |
| **Resíduo(a)** | $a(r-1)$ |
| Parcelas | $ar-1$ |
| Tratamento B | $b-1$ |
| $A \times B$ | $(a-1)(b-1)$ |
| **Resíduo(b)** | $a(b-1)(r-1)$ |
| Total | $abr-1$ |

**Tabela 2:** Parcela subdividida no **delineamento em blocos casualizados**.

| CV | GL |
|---|---|
| Blocos | $r-1$ |
| Tratamento A | $a-1$ |
| **Resíduo(a)** | $(a-1)(r-1)$ |
| Parcelas | $ar-1$ |
| Tratamento B | $b-1$ |
| $A \times B$ | $(a-1)(b-1)$ |
| **Resíduo(b)** | $a(r-1)(b-1)$ |
| Total | $abr-1$ |

**Tabela 3:** Parcela subdividida no **delineamento em quadrado latino**.

| CV | GL |
|---|---|
| Linhas | $a-1$ |
| Colunas | $a-1$ |
| Tratamento A | $a-1$ |
| **Resíduo(a)** | $(a-1)(a-2)$ |
| Parcelas | $a^2-1$ |
| Tratamento B | $b-1$ |
| $A \times B$ | $(a-1)(b-1)$ |
| **Resíduo(b)** | $a(a-1)(b-1)$ |
| Total | $a^2b-1$ |

# Vantagens

1. Em comparação com experimentos fatoriais, experimentos em parcelas subdivididas são mais fáceis de instalar;
2. Quando os tratamentos associados aos níveis de um dos fatores exigem maior quantidade de material na unidade experimental do que os tratamentos do outro fator.
3. O esquema pode ser utilizado quando um fator adicional é incorporado num experimento, para ampliar seu objetivo.
4. Através da prévia informação, sabe-se que maiores diferenças podem ser esperadas entre os níveis de um certo fator do que entre os níveis do outro fator.

# Desvantagens

1. Do ponto de vista estatístico, os fatoriais são, em geral, mais eficientes que os em parcelas subdivididas;
2. Enquanto nos fatoriais temos um só resíduo para todos os $F$ e comparações de médias, no **"split-plot"** há dois resíduos, um para comparações de parcelas e outro para subparcelas;
3. Para parcela, o número de $GL$ geralmente é pequeno, levando à pouca sensibilidade na análise;
4. Sempre que possível, é preferível utilizar experimentos fatoriais em lugar dos experimentos em parcelas subdivididas.

# Modelo estatístico

- O modelo linear para o experimento em parcelas subdivididas no delineamento em blocos ao acaso é dado por:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_k + e_{ik} + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{cases} \tag{1}$$

em que:

$y_{ijk}$ é o valor observado no $i$-ésimo tratamento, $k$-ésimo bloco e $j$-ésima subparcela;

$\mu$ é uma constante;

$\tau_i$ é o efeito do $i$-ésimo fator A;

$\gamma_k$ é o efeito do $k$-ésimo bloco;

$e_{ik}$ é o resíduo (a) da parcela;

$\beta_j$ é o efeito do $j$-ésimo fator B;

$(\tau\beta)_{ij}$ é a interação entre o $i$-ésimo fator A e o $j$-ésimo fator B;

$\epsilon_{ijk}$ é o resíduo (b) da subparcela;

- No experimento em parcelas subdivididas, em geral, deseja-se testar primeiramente a significância da interação entre os fatores. No caso de **dois fatores**, tem-se:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\tau\beta)_{ij} = 0 \qquad \text{para todo } i, j \\ H_1 &: \text{Pelo menos um } (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \end{aligned}$$

- Caso a interação **não** seja significativa, testa-se os efeitos principais:

$$\begin{aligned} H_0 &: \tau_1 = \tau_2 = \ldots \tau_a = 0 \\ H_1 &: \text{Pelo menos um } \tau_i \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_b = 0 \\ H_1 &: \text{Pelo menos um } \beta_j \neq 0 \end{aligned}$$

# Análise de Variância

**Tabela 4:** Quadro da Análise de Variância em um delineamento em blocos.

| C.V. | G.L. | S.Q. | Q.M. | $F_{calc}$ |
|---|---|---|---|---|
| Blocos | $r-1$ | $SQ_{Blocos}$ | $\frac{SQ_{Blocos}}{r-1}$ | $\frac{QM_{Blocos}}{QM_{Res(a)}}$ |
| A | $a-1$ | $SQ_A$ | $\frac{SQ_A}{a-1}$ | $\frac{QM_A}{QM_{Res(a)}}$ |
| Resíduo(a) | $(a-1)(r-1)$ | $SQ_{Res(a)}$ | $\frac{SQ_{Res(a)}}{(a-1)(r-1)}$ | |
| (Parcelas) | $(ar-1)$ | $(SQ_{Parcelas})$ | | |
| B | $b-1$ | $SQ_B$ | $\frac{SQ_B}{b-1}$ | $\frac{QM_B}{QMRes(b)}$ |
| A $\times B$ | $(a-1)(b-1)$ | $SQ_{AxB}$ | $\frac{SQ_{AxB}}{(a-1)(b-1)}$ | $\frac{QM_{AxB}}{QM_{Res(b)}}$ |
| Resíduo(b) | $a(r-1)(b-1)$ | $SQ_{Res(b)}$ | $\frac{SQ_{Res(b)}}{a(r-1)(b-1)}$ | |
| Total | $abr-1$ | $SQ_{Total}$ | | |

- Em que as somas de quadrados são dadas por:

$$SQ_{Total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}^2 - C \qquad C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}\right)^2}{abr}$$

$$SQ_A = \frac{1}{r \times b}\sum_{i=1}^{a} T_{A_i}^2 - C$$

$$SQ_{Blocos} = \frac{1}{a \times b}\sum_{k=1}^{r} T_{Bloco_k}^2 - C$$

$$SQ_{Parcelas} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} T_{Parcela}^2 - C$$

$$SQ_{Res(a)} = SQ_{Parcelas} - SQ_{\mathrm{A}} - SQ_{Blocos}$$

$$
\begin{aligned}
SQ_B &= \frac{1}{a \times r} \sum_{j=1}^{b} T_B^2 - C \\
SQ_{A,B} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} T_{A_i,B_j}^2 - C \\
SQ_{AxB} &= SQ_{A,B} - SQ_A - SQ_B \\
SQ_{Res(b)} &= SQ_{Total} - SQ_{Parcelas} - SQ_A - SQ_{AxB}
\end{aligned}
$$

## Exemplo 1

Suponha o caso de um experimento com três rações ($A, B,$ e $C$), em seis blocos casualizados, cada parcela constituída por dois animais. Em uma determinada fase do ensaio, os bovinos, dentro de cada parcela, passaram a receber, por sorteio, um dos tipos de suplementos minerais ($M$ ou $P$). Os ganhos de pesos individuais, ao final do experimento, são apresentados na tabela abaixo.

**Tabela 5:** Ganhos de pesos, em quilos, ao final do experimento.

| Blocos | Tipos de Ração | | | | | | Totais |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | | B | | C | | |
| | M | P | M | P | M | P | |
| I | 107 | 89 | 116 | 101 | 90 | 96 | 599 |
| II | 117 | 101 | 136 | 110 | 112 | 89 | 665 |
| III | 122 | 98 | 130 | 104 | 99 | 92 | 645 |
| IV | 111 | 101 | 122 | 91 | 105 | 78 | 608 |
| V | 90 | 95 | 117 | 100 | 110 | 90 | 602 |
| VI | 116 | 90 | 114 | 94 | 114 | 93 | 621 |
| Totais | 663 | 574 | 735 | 600 | 630 | 538 | 3.740 |

A um nível de significância de 5%, faça a análise de variância e considerando um experimento em parcela subdividida no delineamento em blocos ao acaso, em que o tipo de suplemento mineral está na subparcela.

**Tabela 6:** Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das parcelas.

| Blocos (2) | Tipos de Ração | | | Totais |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| I | 196 | 217 | 186 | 599 |
| II | 218 | 246 | 201 | 665 |
| III | 220 | 234 | 191 | 645 |
| IV | 212 | 213 | 183 | 608 |
| V | 185 | 217 | 200 | 602 |
| VI | 206 | 208 | 207 | 621 |
| Totais | 1.237 (12) | 1.335 (12) | 1.168 (12) | 3.740 |

$$\textbf{C} = \frac{(107+117+\cdots+90+93)^2}{3\times 2\times 6} = \textbf{388.544,4}$$

$$\textbf{SQTotal} = (107^2+117^2+\cdots+90^2+93^2) - 388.544,4 = \textbf{6.061,556}$$

$$\textbf{SQRac} = \frac{1}{2\times 6}\times(1.237^2+1.335^2+1.168^2) - 388.544,4 = \textbf{1.173,722}$$

$$\textbf{SQBlocos} = \frac{1}{2\times 3}\times(599^2+\cdots+621^2) - 388.544,4 = \textbf{582,2222}$$

$$\textbf{SQParcelas} = \frac{1}{2}\times(196^2+\cdots+200^2+207^2) - 388.544,4 = \textbf{2.377,556}$$

$$\begin{aligned}\textbf{SQRes(a)} &= SQParcelas - SQTrat - SQBlocos\\ &= 2.377,556 - 1.173,722 - 582,2222 = \textbf{621,6111}\end{aligned}$$

**Tabela 7:** Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das **Subparcelas**.

| Suplementos (6) | Tipos de Ração | | | Totais |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| M | 663 | 735 | 630 | 2.028 |
| P | 574 | 600 | 538 | 1.712 |
| Totais | 1.237 (12) | 1.335 (12) | 1.168 (12) | 3.740 |

$$\textbf{SQSup} = \frac{1}{3 \times 6} \times (2.028^2 + 1.712^2) - 388.544,4 = \textbf{2.773,778}$$

$$\begin{aligned}\textbf{SQRac,Sup} &= \frac{1}{3 \times 2}(663^2 + 574^2 + \cdots + 630^2 + 538^2) - 388.544,4 \\ &= \textbf{4.057.889}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{SQInter} &= 4.057,889 - 1.173,722 - 2.773,778 \\ &= \textbf{110,3889}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{SQRes(b)} &= SQTotal - SQParcelas - SQSup - SQInter \\ &= 6.061,556 - 2.377,556 - 2.773,778 - 110,3889 \\ &= \textbf{799,8333}\end{aligned}$$

**Tabela 8:** Quadro da análise de variância do experimento em parcelas subdivididas no delineamento em blocos ao acaso.

| Causa da Variação | S.Q. | g.l. | Q.M. | $F_{calc}$ | $Pr(> F)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Blocos | $582,22$ | $5$ | $116,44$ | | |
| Ração | $1.173,72$ | $2$ | $586,86$ | $9,441$ | $0,004976^{**}$ |
| Resíduo(a) | $621,61$ | $10$ | $62,16$ | | |
| (Parcelas) | $2.377,556$ | $17$ | | | |
| Suplementos | $2.773,78$ | $1$ | $2.773,78$ | $52,0192$ | $3,011 \times 10^{(-6)***}$ |
| Ração $\times$ Suplementos | $110,39$ | $2$ | $55,19$ | $1,0351$ | $0,3792$ |
| Resíduo(b) | $799,83$ | $15$ | $53,32$ | | |
| Total | $6.061,556$ | $35$ | | | |

Os efeitos das Rações e dos Blocos são testados usando o Resíduo(a).

Os efeitos dos Suplementos e da Interação são testados usando o Resíduo(b).

## Efeito da Interação

- Verifica-se da Tabela 8 que a interação entre os tipos de Ração e Suplementos **não foi significativa**, havendo efeito dos fatores principais: Ração e Suplemento.

## Efeito Ração

- No caso de **ração**, verifica-se que o efeito é significativo, e assim, pelo teste de tukey, temos:

$$\begin{aligned}\Delta &= q_{(3,10,5\%)}\sqrt{\frac{QMRes(a)}{br}}\\ &= 3,88 \times \sqrt{\frac{62,16}{12}}\\ \Delta &= \mathbf{8,8} \quad kg\end{aligned}$$

- Construindo-se a tabela das médias ordenadas em ordem decrescente, tem-se:

| Ração | Médias (kg) | |
|---|---|---|
| B | 111,25 | a |
| A | 103,0833 | ab |
| C | 97,3333 | b |

em que letras iguais indicam médias semelhantes.

- Portanto, a ração B difere da ração C, a um nível de significância de 5%, no ganho de peso dos bovinos, em que a B proporcionou um ganho maior, em kg.

## Efeito Suplementos

- No caso dos **suplementos**, basta observar que a média de ganho de peso dos animais que foram alimentados com o **suprimento** $M$ foi de

$$\bar{y}_M = 112,7\ kg$$

e com o **suprimento** $F$ foi de

$$\bar{y}_F = 95,1\ kg$$

- Assim, o suprimento $M$ foi mais eficiente no ganho de peso, em Kg.

# Introdução

- Quando a hipótese $H_0$ para a interação entre os fatores é **rejeitada**, então dizemos que a interação é **significativa**.
- Este resultado implica que os efeitos dos fatores atuam de forma **dependente**, ou seja, o efeito de um fator depende do nível do outro fator.
- Assim, não é recomendado realizar o teste $F$ para cada fator isoladamente tal como foi apresentado para o caso da interação não significativa.

- O procedimento recomendado é realizar o **desdobramento** do efeito da interação.

- Para realizar este desdobramento deve-se fazer uma **nova análise de variância** em que os níveis de um fator são comparados dentro de cada nível do outro fator.

# Desdobramento $A/B$

**Tabela 9:** Análise de variância para o desdobramento do fator A dentro de cada nível de B.

| C.V. | G.L. | S.Q | Q.M. | $F_{cal}$ |
|---|---|---|---|---|
| B | $b-1$ | $SQ_B$ | $QM_B = \frac{SQ_B}{b-1}$ | $F_{calc} = \frac{QM_B}{QM_{Res(b)}}$ |
| $A\|B_1$ | $a-1$ | $SQ_{A\|B_1}$ | $QM_{A\|B_1} = \frac{SQ_{A\|B_1}}{a-1}$ | $F_{cal} = \frac{QM_{A\|B_1}}{QM_{ResComb}}$ |
| $A\|B_2$ | $a-1$ | $SQ_{A\|B_2}$ | $QM_{A\|B_2} = \frac{SQ_{A\|B_2}}{a-1}$ | $F_{cal} = \frac{QM_{A\|B_2}}{QM_{ResComb}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $A\|B_j$ | $a-1$ | $SQ_{A\|B_j}$ | $QM_{A\|B_j} = \frac{SQ_{A\|B_j}}{a-1}$ | $F_{cal} = \frac{QM_{A\|B_j}}{QM_{ResComb}}$ |
| ResComb | $n^*$ | $SQ_{ResComb}$ | $QM_{ResComb} = \frac{SQ_{ResComb}}{n^*}$ | - |
| Total | $SQ_{Total}$ | $abn-1$ | - | - |

- Para comparar os níveis de um fator principal em cada nível do fator secundário, é necessário fazer uma combinação das duas estimativas obtidas para o erro experimental bem como do número de graus de liberdade associado as mesmas.

- Esta combinação é denominada de resíduo combinado ($ResComb$).

- A estimativa do quadrado médio deste resíduo combinado é obtida por

$$QM_{ResComb} = \frac{QM_{Res(a)} + (b-1)QM_{Res(b)}}{b}$$

- O número de graus de liberdade associado a esta estimativa é obtido pela fórmula dos graus de liberdade de Satterhwaitte ($n^*$) dada por

$$n^* = \frac{\left[QM_{Res(a)} + (b-1)QM_{Res(b)}\right]^2}{\frac{\left[QM_{Res(a)}\right]^2}{GL_{Res(a)}} + \frac{\left[(b-1)QM_{Res(b)}\right]^2}{GL_{Res(b)}}}$$

# Desdobramento $B/A$

**Tabela 10:** Análise de variância para o desdobramento do fator B dentro de cada nível de A.

| C.V. | G.L. | S.Q | Q.M. | $F_{cal}$ |
|---|---|---|---|---|
| A | $a-1$ | $SQ_A$ | $QM_A = \frac{SQ_A}{a-1}$ | $F_{calc} = \frac{QM_A}{QM_{Res(a)}}$ |
| $B\|A_1$ | $b-1$ | $SQ_{B\|A_1}$ | $QM_{B\|A_1} = \frac{SQ_{B\|A_1}}{b-1}$ | $F_{cal} = \frac{QM_{B\|A_1}}{QM_{Res(b)}}$ |
| $B\|A_2$ | $b-1$ | $SQ_{B\|A_2}$ | $QM_{B\|A_2} = \frac{SQ_{B\|A_2}}{b-1}$ | $F_{cal} = \frac{QM_{B\|A_2}}{QM_{Res(b)}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $B\|A_j$ | $b-1$ | $SQ_{B\|A_j}$ | $QM_{B\|A_j} = \frac{SQ_{B\|A_j}}{b-1}$ | $F_{cal} = \frac{QM_{B\|A_j}}{QM_{Res(b)}}$ |
| Res(b) | $ab(n-1)$ | $SQ_{Res(b)}$ | $QM_{Res(b)} = \frac{SQ_{Res(b)}}{ab(n-1)}$ | - |
| Total | $SQ_{Total}$ | $abn-1$ | - | - |