

Universidade Estadual de Londrina
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Estatística Experimental
com o uso do *software R*

Prof. Silvano Cesar da Costa

L O N D R I N A
Estado do Paraná - Brasil

Sumário

1	Testes de Hipóteses	1
1.1	Tipos de Decisão	2
1.1.1	Teste para a média de uma população com variância desconhecida	4
1.2	Teste para a Diferença entre duas Médias	7
1.2.1	Teste Para Duas Amostras Independentes	7
1.2.2	Teste para duas amostras dependentes (pareados)	10
1.3	Teste de Shapiro-Wilk	13
2	Análise de Variância	22
2.1	Introdução	22
2.2	Princípios básicos da experimentação	23
2.3	Condução do experimento	23
2.4	Planejamento do experimento	24
2.5	Classificação dos experimentos	29
3	Delineamento Inteiramente Casualizado	30
3.1	Introdução	30
3.1.1	Modelos de efeitos fixos e aleatórios	34
3.2	Análise do modelo de efeitos fixos	34
3.2.1	Decomposição das Somas de Quadrados	36
3.3	Testes de Comparações Múltiplas	38
3.3.1	Contrastes	39
3.3.2	Contrastes ortogonais	40
3.3.3	Teste t	41
3.3.4	Teste F	44
3.3.5	Teste de Student-Newman-Keuls	46
3.3.6	Teste de Tukey	47
3.3.7	Teste de Scheffé	49

3.3.8	Teste de Duncan	51
3.3.9	Teste de Bonferroni	53
3.3.10	Teste de Dunnett	54
4	Delineamento em Blocos Casualizados	60
4.1	Introdução	60
4.2	Modelo estatístico	60
5	Delineamento em Quadrado Latino	71
5.1	Introdução	71
5.1.1	Repetindo o Quadrado Latino	78
6	Experimentos Fatoriais	85
6.1	Introdução	85
6.2	Análise e interpretação de um experimento fatorial, com 2 fatores	87
6.2.1	Desdobramento da interação $R \times E$ para estudar o comportamento das espécies dentro de cada recipiente	94
6.2.2	Desdobramento da interação $R \times E$ para estudar o comportamento dos recipientes dentro de cada espécie	95
6.2.2.1	Recipientes dentro de E_1	96
6.2.2.2	Recipientes dentro de E_2	97
7	Experimentos em parcelas subdivididas	99
7.1	Introdução	99
7.1.1	Experimentos em parcelas subdivididas no tempo	107
8	Transformação de dados	112
8.1	Introdução	112
8.1.1	Seleção empírica de α	113
8.1.2	Método analítico para selecionar uma transformação em Y	113
9	Polinômios Ortogonais	117
9.1	Introdução	117
9.2	Teste de aditividade de Tukey	123
9.2.1	Desenvolvimento do teste estatístico	123
9.3	Tabela de Hartley	126

Lista de Tabelas

1.1	Níveis de hemoglobina no sangue antes e após a aplicação de niacina em suínos.	11
1.2	Valores dos coeficientes a_{n-i+1} das estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho n de uma distribuição Normal.	16
1.4	Valores críticos da estatística W de Shapiro-Wilk.	18
2.1	Valores de produção de leite (kg), obtidos no experimento.	26
2.2	Estatísticas calculadas para cada tratamento.	27
3.1	Quadro da Análise de Variância.	37
3.2	Análise de variância para os dados do Exemplo 2.	38
3.3	Análise de variância para os dados do Exemplo 2.	45
3.4	Peso (kg) das parcelas (10 aves) ao final do experimento.	57
4.1	Quadro da análise de variância para delineamento em blocos casualizados.	64
4.2	Valores de produção de leite (kg).	65
4.3	Análise de variância no delineamento em blocos casualizados.	67
4.4	Número médio de ovos por ave nos respectivos tratamentos e blocos.	70
5.1	Ganhos de pesos, em quilos, ao final do experimento (252 dias), nos respectivos tratamentos	72
5.2	Quadro da Análise de Variância.	74
5.3	Quadro da Análise de Variância para um Quadrado Latino repetido - Caso 1.	78
5.4	Quadro da Análise de Variância para um Quadrado Latino repetido - Caso 2.	79
5.5	Quadro da Análise de Variância para um Quadrado Latino repetido - Caso 3.	79
5.6	Ganhos de pesos, em quilos, ao final do 2º experimento (252 dias), nos respectivos tratamentos	80
5.7	Análise de variância do segundo experimento.	80
5.8	Análise de variância conjunta.	81
5.9	Respostas observadas no experimento com gatos.	84

6.1	Experimento fatorial 2×2	85
6.2	Alturas médias das mudas, em centímetros, aos 80 dias de idade.	87
6.3	Arranjo geral para um experimento fatorial.	88
6.4	Análise de variância para um experimento fatorial com 2 fatores.	91
6.5	Alturas médias das mudas, em centímetros, aos 80 dias de idade.	92
6.6	Análise de variância de acordo com o esquema fatorial 3×2 . Quero ver como ele fazx com linhas compridas.	93
6.7	Estudo das Espécies dentro de cada Recipiente.	95
6.8	Estudo dos Recipientes dentro de cada Espécie.	96
6.9	Índices de conversão alimentar (<i>kg</i> de ração / <i>kg</i> de ganho de peso).	98
7.1	Quadro da análise de variância de um experimento em parcela subdividida com <i>a</i> tratamentos primários, <i>b</i> tratamentos secundários e <i>c</i> repetições, nos delineamentos inteiramente casualizado, blocos casualizados e quadrado latino.	100
7.2	Ganhos de pesos, em quilos, ao final do experimento.	101
7.3	Quadro da Análise de Variância.	103
7.4	Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das parcelas.	104
7.5	Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das Subparcelas	105
7.6	Quadro da análise de variância do experimento em parcelas subdivididas no delineamento em blocos ao acaso.	106
7.7	Produção de adubos verdes e milho (<i>kg</i> de matéria seca verde por parcela).	107
7.8	Quadro da análise de variância do experimento em parcelas subdivididas no delineamento em blocos ao acaso.	107
7.9	Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das parcelas.	108
7.10	Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das Subparcelas	108
7.11	Efeito dos anos em cada tratamento separadamente.	109
7.12	Efeito dos tratamentos em cada ano separadamente.	109
8.1	Transformações estabilizadoras da variância.	113
8.2	Contagem do número de pulgões encontrados.	114
8.3	Logaritmos das médias e variâncias dos tratamentos.	115
9.1	Índices de conversão (<i>kg</i> de ração / <i>kg</i> de ganho de peso	118
9.2	Análise de variância para índices de conversão.	118
9.3	Decomposição dos graus de liberdade de tratamentos.	120
9.4	Tabela para o F_{max}	126

Lista de Figuras

2.1	Produção de leite (<i>kg</i>) levando-se em conta o complemento alimentar.	27
3.1	Diferenças nas médias dos tratamentos	49
4.1	Produção de leite (<i>kg</i>) levando-se em conta o complemento alimentar.	65
4.2	Comparação das diferenças entre tratamentos pelo Teste de Tukey.	68
5.1	Tratamentos	75
5.2	Linhas	75
5.3	Colunas	75
5.4	Médias	75
5.5	QQPlot para verificar se os dados têm distribuição normal.	76
5.6	Médias dos tratamentos considerando o experimento conjunto.	81
5.7	Comparação das médias dos tratamentos considerando o experimento conjunto.	83
6.1	Experimento fatorial sem interação.	86
6.2	Experimento fatorial com interação.	86
6.3	Interação $Rec \times Esp$	93
6.4	Interação $Esp \times Rec$	93
7.1	Tipos de Rações.	101
7.2	Tipos de Suplementos.	101
8.1	Número de pulgões encontrados considerando-se os tratamentos.	115
8.2	Relação linear dos dados da Tabela 8.3.	116
9.1	Modelo de regressão linear ajustado aos dados.	121

Prefácio

Este material foi preparado com a intenção de cobrir o programa do curso de mestrado em Ciência Animal, da Universidade Estadual de Londrina. Parte dele também é adotado no curso de graduação em Medicina Veterinária da Universidade Estadual de Londrina, especificamente no segundo semestre quando é ministrado o conteúdo de estatística experimental.

Muito embora o emprego de *softwares* para a realização de análises estatísticas seja bastante comum, por questões didáticas e em sala de aula, se o conjunto de dados for relativamente pequeno os cálculos poderão ser feitos manualmente, com o uso de uma calculadora científica, tornando-se impraticável se o volume de dados for muito grande. Neste caso, faz-se necessário o uso de um computador e um *software* para análises estatísticas.

Existem muitos *softwares*, gratuitos ou não, no mercado. Optei pela utilização do *software* R por ser gratuito, de código fonte aberto e adotado por pesquisadores do mundo todo. Você pode obtê-lo no seguinte endereço: <http://www.r-project.org>. Vários manuais também estão disponíveis.

Assim, tentei aliar o conteúdo teórico com o uso prático dos computadores para um melhor entendimento das análises. Em alguns momentos coloco apenas os comandos para realizar determinada tarefa, deixando ao leitor a tarefa de executá-los e interpretar os resultados. E, em outras situações, apresento os comandos e a saída.

O material não está livre de erros e/ou imperfeições e toda e qualquer contribuição será bem-vinda.

Capítulo 1

Testes de Hipóteses

Anterior a definição de um teste de hipótese é necessário o entendimento de que uma hipótese estatística é uma suposição ou afirmação, relativa a uma ou mais populações, sobre um ou mais parâmetros populacionais, podendo esta suposição ser verdadeira ou não. Logo, o teste de hipótese é um procedimento formal, baseado no cálculo de probabilidades, para tomada de decisão quanto a hipótese estatística.

Claro que se poderia pensar em inspecionar todos os elementos da população e comparar com o valor da hipótese feita, mas na prática, isto é praticamente impossível. Sendo assim, examina-se uma amostra aleatória da população. Caso os dados amostrais não sejam consistentes com a hipótese estatística, a mesma será rejeitada. Há dois tipos de hipóteses estatísticas:

Hipótese Nula: denotada por H_0 , é usualmente a hipótese que as observações amostrais resultam puramente do acaso;

Hipótese Alternativa: denotada por H_1 ou H_a , é a hipótese que as observações amostrais são influenciadas por causas não-aleatórias.

Sendo assim, a ideia básica é que a partir de uma amostra da população seja estabelecida uma **regra de decisão**, segundo a qual a hipótese proposta será rejeitada ou não-rejeitada. Esta regra de decisão é chamada de teste estatístico.

Exemplo: Suponha que um pesquisador esteja desconfiado que o peso médio (kg) aos 21 dias de idade, de leitões da raça *Large White*, seja diferente dos $5\,kg$ esperados para a raça. As hipóteses estatísticas para estudar o problema poderão ser expressas por:

$$H_0 : \mu = 5,0\,kg \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 5,0\,kg \quad (1.1)$$

Observe que a hipótese nula define o peso histórico de animais aos 21 dias de idade para a raça. Já a hipótese alternativa é o que o pesquisador efetivamente quer verificar.

Entenda que dependendo do que o pesquisador estiver observando, sua hipótese de pesquisa poderá ser outra. Se ele percebe que os animais estão muito magros ou muito gordos, as hipóteses poderiam ser:

$$\text{Animais magros} \begin{cases} H_0 : \mu = 5,0 \text{ kg} \\ H_1 : \mu < 5,0 \text{ kg} \end{cases} \quad \text{Animais gordos} \begin{cases} H_0 : \mu = 5,0 \text{ kg} \\ H_1 : \mu > 5,0 \text{ kg} \end{cases}$$

Observe que, neste caso, a hipótese do pesquisador é estabelecida apenas para uma população, raça *Large White*, sobre a qual ele quer estudar o peso médio aos 21 dias de idade.

Já, se o interesse for comparar os pesos médios de duas raças diferentes, *Large White (LW)* e *Duroc (D)*, aos 21 dias de idade, as possíveis hipóteses de pesquisa poderiam ser:

Diferença entre as médias de pesos: $H_0 : \mu_{LW} = \mu_D$ $H_1 : \mu_{LW} \neq \mu_D$	ou	Peso médio de LW maior que D: $H_0 : \mu_{LW} = \mu_D$ $H_1 : \mu_{LW} > \mu_D$	ou	Peso médio de LW menor que D: $H_0 : \mu_{LW} = \mu_D$ $H_1 : \mu_{LW} < \mu_D$
---	----	--	----	--

Assim, o objetivo de um teste estatístico é fornecer ferramentas que permitam rejeitar ou não rejeitar uma hipótese estatística através dos resultados obtidos de uma amostra. Alguns exemplos de hipóteses estatísticas são:

- a) o peso médio de aves tratadas com ração comercial e acesso a pasto composto por: grama batatais, estrela e seda **é maior** que aquelas sem acesso ao pasto;
- b) o tempo médio de reação de determinado reagente químico **é de 60 segundos**;
- c) a proporção de animais com a doença A **é de 40%**;
- d) a ração A **é melhor** que a ração B na engorda de suínos;

É muito provável que o peso médio de aves com acesso ao pasto não seja igual ao peso médio de aves sem acesso ao pasto. Portanto, o que se busca, na verdade, é verificar se a diferença de peso médio existente entre os dois grupos é significativa.

Em estatística, a palavra significância implica a ideia de que é muito provável que um resultado, similar ao que foi obtido na amostra, teria sido obtido se toda a população tivesse sido estudada.

1.1 Tipos de Decisão

Ao se tomar uma decisão, a favor ou contra uma hipótese, existem dois tipos de erros que se pode cometer. Pode-se rejeitar uma hipótese nula quando de fato ela é verdadeira (erro Tipo I) ou pode-se não-rejeitar H_0 quando, de fato, ela é falsa (erro Tipo II). Frequentemente, denotam-se as probabilidades destes dois tipos de erros como α e β , respectivamente.

Existe um balanço entre esses dois tipos de erros, no sentido de que ao se tentar minimizar α , aumenta-se β . Isto é, não é possível minimizar estas duas probabilidades simultaneamente e, na prática, é costume fixar um valor (pequeno) para α .

Pode-se resumir os tipos de decisão e erros associados a testes de hipóteses da seguinte maneira:

Situação real	Decisão	
	Aceitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 verdadeira	Decisão correta ($1 - \alpha$)	Erro tipo I (probab. α)
H_0 falsa	Erro tipo II (probab. β)	Decisão correta ($1 - \beta$)

- Os erros Tipo I e Tipo II são correlacionados: o aumento da probabilidade de ocorrência de um reduz a probabilidade de ocorrência do outro;
- A probabilidade de cometer um erro Tipo I é chamado nível de significância e é denotado por α ;
- A probabilidade de cometer um erro Tipo II é chamado erro beta e é denotado por β . A probabilidade de não cometer o erro Tipo II é chamado “poder do teste”, denotado por $1 - \beta$. O valor de β não é fixo, diferentemente do erro Tipo I, e dependerá de três fatores: o próprio valor de α , o valor testado na hipótese alternativa (H_a) e o tamanho da amostra (n);
- A única forma de causar uma redução de α e β simultaneamente é aumentar o tamanho da amostra;
- Se H_0 for falsa, β será maior quanto mais próximo o valor do parâmetro estiver do valor sob a hipótese H_0 .

Normalmente não se calcula o valor de α . Ele é, em geral, definido como sendo 5% ou 1%. Mas é possível calcular o seu valor diretamente com as informações obtidas dos dados. Assim, suponha que se decida não-rejeitar a hipótese nula da equação (1.1) se a média amostral estiver entre 4 e 6 kg. Caso isto não ocorra, a decisão será rejeitar H_0 . Sendo 50 o

número de amostras coletadas e o desvio-padrão igual a $\sigma = 1$, o valor de α será:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeiro}) \\
 &= P(\bar{y} < 4 \mid \mu = 5) + P(\bar{y} > 6 \mid \mu = 5) \\
 &= P\left(\frac{\bar{y} - 4}{1/\sqrt{50}} < \frac{4 - 5}{1/\sqrt{50}}\right) + P\left(\frac{\bar{y} - 6}{1/\sqrt{50}} > \frac{6 - 5}{1/\sqrt{50}}\right) \\
 &= P(z_1 < -7,0711) + P(z_2 > 7,0711) \\
 \alpha &= 1,5375 \times 10^{-12}
 \end{aligned}$$

Portanto, dadas as condições apresentadas, a probabilidade de se rejeitar H_0 é praticamente nula. O cálculo pode ser feito diretamente no R, com os seguintes comandos:

```
mu=5 ; sigma=1 ; n=50 ;
z1=(4-mu)/(sigma/sqrt(n)) ; z2=(6-mu)/(sigma/sqrt(n))
(alpha = pnorm(z1) + pnorm(z2, lower.tail=F))
```

Existem discussões entre a interpretação do resultado do teste de hipóteses. A distinção é entre “aceitar” e “não-rejeitar” a hipótese nula. “Aceitar” implica que a hipótese nula é verdadeira; “Não rejeitar” implica que os dados não são suficientemente persuasivos para se preferir a hipótese alternativa ao invés da hipótese nula.

Neste livro adotaremos as expressões “rejeitar” ou “não-rejeitar” a hipótese nula.

1.1.1 Teste para a média de uma população com variância desconhecida

Este tipo de teste para a média é muito comum, uma vez que, na prática, dificilmente se conhece a variância populacional. Todas as etapas realizadas anteriormente são empregadas nesta situação, sendo que a mudança ocorre na variável teste utilizada. Como a variância populacional é desconhecida, aplica-se a equação:

$$T = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

em que T segue uma distribuição t de Student¹, ou seja, $T \sim t_{n-1;\alpha/2}$.

Ainda,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \right].$$

¹pseudônimo de William Sealy Gosset, químico e matemático inglês.

Exemplo: Foi retirada uma amostra de 10 bezerros da raça Nelore, aos 210 dias de idade, com o objetivo de verificar se o peso médio desses animais atinge 186 *kg* nesta idade. Os valores obtidos, em *kg*, foram os seguintes:

178 199 182 186 188 191 189 185 174 158

Calcule:

- a) a média;
- b) a variância;
- c) o desvio padrão;
- d) o erro padrão da média;
- e) o coeficiente de variação;
- f) teste as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 186 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 186$$

ao nível de 5% de significância.

Solução:

Antes de realizar o teste, é sempre interessante explorar o conjunto de dados com medidas descritivas e gráficas. Usando o R, bastam os seguintes comandos:

```
pesos = c(178, 199, 182, 186, 188, 191, 189, 185, 174, 158)
(media = mean(pesos))
(variancia = var(pesos))
(desvio = sd(pesos) )
(erro.padrão = desvio / sqrt(length(pesos)))
(cv = desvio/media*100)

par(mai=c(1,1,.3,.2))
boxplot(pesos, ylab='Pesos (kg)', las=1, col='LightYellow')
      points(media, pch='+', cex=2, col='red')

hist(pesos)
plot(pesos)
plot(density(pesos))
qqnorm(pesos, las=1); qqline(pesos)
qqnorm(scale(pesos)); qqline(scale(pesos))

hist(scale(pesos), las=1, ylim=c(0,.6), freq=FALSE)
curve(dnorm(x), add=TRUE, col='blue', lwd=2);
lines(density(scale(pesos)), col='red')

hist(scale(pesos), las=1, ylim=c(0,.6), freq=FALSE, xaxt='n')
axis(1, -3:3, pos=0) ; abline(h=0)
curve(dnorm(x), add=TRUE, col='blue', lwd=2);
lines(density(scale(pesos)), col='red')

shapiro.test(pesos)
t.test(pesos, mu=186)
```

Observe que antes da aplicação do teste de hipótese, foi realizada uma análise exploratória dos dados e verificado a suposição de normalidade, usando-se o teste de Shapiro-Wilk, (Shapiro and Wilk, 1965). Os procedimentos para realização do teste de Shapiro-Wilk são apresentados no final deste capítulo, pág. 13.

1.2 Teste para a Diferença entre duas Médias

1.2.1 Teste Para Duas Amostras Independentes

Um dos testes mais frequentes em estatística consiste na avaliação da diferença entre duas **amostras independentes**, ou seja, naqueles casos em que os dados de uma das amostras não estão relacionados com os valores da outra. Na condução de experimentos dessa ordem, procura-se verificar se a diferença observada é de tal magnitude que permita concluir que as amostras foram retiradas de populações distintas. As seguintes pressuposições devem ser observadas para a realização deste teste:

- a) as amostras de cada população investigada devem ser aleatórias e independentes;
- b) admitir que as variâncias das duas populações (σ_1^2 e σ_2^2), embora desconhecidas, sejam iguais. Sendo assim, estima-se a variância conjunta, S_p^2 , dada por

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

- c) as variáveis das populações de onde as amostras foram selecionadas devem apresentar distribuição aproximadamente normal.

A hipótese nula e as possíveis hipóteses alternativas são:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \begin{cases} \mu_1 < \mu_2 \\ \mu_1 \neq \mu_2 \\ \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

Como são utilizadas estimativas das variâncias populacionais, a padronização da diferença das médias é dada por:

$$T = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - (\mu_{10} - \mu_{20})}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

Assume-se que $T \sim t_{n_1+n_2-2; \alpha}$.

A forma geral para cálculo de variância conjunta é dada por:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^n (n_i - 1)}$$

Para aplicação deste teste é necessário que as variâncias populacionais, embora desconhecidas, possam ser consideradas homogêneas. Portanto, antes da realização do teste

é necessário verificar se as variâncias são homogêneas. Nesta situação as hipóteses testadas são:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \begin{cases} \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

sendo que é mais comum testar $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. A variável teste para a homogeneidade de variâncias de duas populações independentes é dada por:

$$F = \frac{\text{maior valor de } (s_1^2, s_2^2)}{\text{menor valor de } (s_1^2, s_2^2)} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Exemplo: Um pesquisador quer verificar se os pesos ao nascer de animais machos das raças Gir e Guzerá diferem. Foram pesados 10 animais de cada raça. Testar, ao nível de 5% de significância, se os pesos diferem. Os pesos (*kg*) observados são:

Guzerá	30	26	25	23	25	29	34	30	30	31
Gir	23	21	20	20	23	26	22	27	26	27

Solução:

Guzerá:

$$n = 10$$

$$\bar{y}_1 = 28,3 \text{ kg}$$

$$s = 3,40098 \text{ kg}$$

Gir:

$$n = 10$$

$$\bar{y}_2 = 23,5 \text{ kg}$$

$$s = 2,798809 \text{ kg}$$

Para resolver o exemplo dado no R, bastam os seguintes comandos:

```
Guzerá = c(30, 26, 25, 23, 25, 29, 34, 30, 30, 31)
Gir     = c(23, 21, 20, 20, 23, 26, 22, 27, 26, 27)

mean(Guzerá) ; mean(Gir)
var(Guzerá) ; var(Gir)
sd(Guzerá) ; sd(Gir)
sd(Guzerá)/mean(Guzerá) * 100 ; sd(Gir)/mean(Gir) * 100

boxplot(Guzerá, Gir, names=c('Guzerá', 'Gir'), las=1, xlab='Raças',
        ylab='Pesos ao Nascer (kg)')
points(c(mean(Guzerá), mean(Gir)), pch='+', col='red', cex=2)

par(mfrow=c(1,2))
qqnorm(Guzerá); qqline(Guzerá)
qqnorm(Gir); qqline(Gir)

qqnorm(scale(Guzerá), asp=1); qqline(scale(Guzerá))
qqnorm(scale(Gir), asp=1); qqline(scale(Gir))

hist(scale(Guzerá), freq=FALSE)
curve(dnorm(x), add=TRUE, col=2); lines(density(scale(Guzerá)), col=3)

hist(scale(Gir), freq=FALSE)
curve(dnorm(x), add=TRUE, col=2); lines(density(scale(Gir)), col=3)
layout(1)

shapiro.test(Guzerá) ; shapiro.test(Gir)
var.test(Guzerá, Gir) # ou var.test(Guzerá, Gir, alt='greater')
t.test(Guzerá, Gir, var.equal=T)
```

Caso as variâncias **não sejam homogêneas** é aplicada a aproximação de Satterthwaite (ou Welch) para os graus de liberdade usados e a estatística de teste fica:

$$T = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

em que os graus de liberdade são calculados por:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}.$$

Assume-se que $T \sim t_{\nu;\alpha}$

No R, basta alterar a opção de variâncias iguais para `var.equal=F` ou simplesmente não colocar nada a respeito das variâncias, uma vez que o *default* é para variâncias não homogêneas.

```
t.test(Guzerá, Gir)
```

1.2.2 Teste para duas amostras dependentes (pareados)

É utilizado quando o mesmo grupo de elementos é submetido a algum tipo de tratamento em duas situações distintas (ou dois tempos distintos). O objetivo seria saber se um determinado tratamento realizado faz com que o resultado final se altere. As hipóteses testadas são:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 < 0 \\ \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \\ \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

A estatística de teste é dada por:

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}},$$

em que:

↪ \bar{d} é a média das diferenças entre os dois grupos, dada por:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{i1} - y_{i2}), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{d} &= \bar{y}_1 - \bar{y}_2. \end{aligned}$$

↪ s_d é o desvio padrão das diferenças entre os dois grupos, dado por:

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2}{n} \right]$$

Portanto, observa-se que a diferença para o teste para igualdade de duas médias independentes está no cálculo da variância, que é feito considerando-se todas as diferenças entre as observações dependentes.

Exemplo: Andrade and Ogliari (2007) apresentam um experimento conduzido para estudar o conteúdo de hemoglobina no sangue de suínos com deficiência de niacina². Aplicaram-se 20 mg de niacina em oito suínos. Os níveis de hemoglobina no sangue foram mensurados antes e depois da aplicação da niacina. Os resultados obtidos no experimento foram:

Tabela 1.1: Níveis de hemoglobina no sangue antes e após a aplicação de niacina em suínos.

Animal	1	2	3	4	5	6	7	8
Antes	12,4	13,6	13,6	14,7	12,3	12,2	13,0	11,4
Depois	10,4	11,4	12,5	14,6	13,0	11,7	10,3	9,8
Diferenças								

Pode-se afirmar que a aplicação de niacina alterou a hemoglobina no sangue dos suínos?

Solução:

²Também conhecida como vitamina B_3 , vitamina PP ou ácido nicotínico, é uma vitamina hidrossolúvel cujos derivados (NAD^+ , $NADH$, $NADP^+$ e $NADPH$) desempenham importante papel no metabolismo energético celular e na reparação do DNA.

Para resolver o exemplo dado no R, bastam os seguintes comandos:

```
rm(list=ls())

Fases = factor(rep(LETTERS[c(1,4)], each=8))
Resp = c(12.4, 13.6, 13.6, 14.7, 12.3, 12.2, 13.0, 11.4,
         10.4, 11.4, 12.5, 14.6, 13.0, 11.7, 10.3, 9.8)
(niacina = data.frame(Fases, Resp))
attach(niacina)

(medias = tapply(Resp, Fases, mean))
(variâncias = tapply(Resp, Fases, var))

par(mai=c(1,1,.2,.2))
plot(Resp ~ Fases, xlab='Situação', ylab='Hemoglobina no Sangue',
     names=c('Antes', 'Depois'), col='LightYellow', las=1)
points(medias, pch='+', col='red', cex=2)

shapiro.test(Resp[Fases=='A'])
shapiro.test(Resp[Fases=='D'])

t.test(Resp[Fases=='A'], Resp[Fases=='D'], paired=T)
```

1.3 Teste de Shapiro-Wilk

O teste de Shapiro-Wilk testa a hipótese nula que uma amostra y_1, y_2, \dots, y_n , retirada de uma população, tem distribuição normal. Para calcular o valor da estatística W , dada a amostra aleatória, de tamanho n , deve-se proceder da seguinte maneira:

1) Obter uma amostra ordenada: $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$;

2) Calcular

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}$$

3) Uma vez que se tem o número de amostras (n) coletadas, tem-se que:

a) **se n é par**, $n = 2k$, calcule:

$$b = \sum_{i=1}^k a_{n-i+1} (y_{n-i+1} - y_i)$$

em que os valores de a_i são obtidos da Tabela 1.2;

b) **se n é ímpar**, $n = 2k + 1$, o cálculo é exatamente como no item 3a, uma vez que $a_{k+1} = 0$ quando $n = 2k + 1$. Assim, determina-se:

$$b = a_n (y_n - y_1) + \dots + a_{k+2} (y_{k+2} - y_k)$$

em que o valor de y_{k+1} , que é a mediana, não entra no cálculo de b .

4) Calcule

$$W = \frac{b^2}{S^2}.$$

5) Para tomada de decisão a respeito da normalidade dos dados, compara-se o valor calculado de W com o valor tabelado $W_{n;\alpha}$, obtido da Tabela 1.4. Se o valor calculado W for menor que o tabelado, rejeita-se a hipótese de normalidade ao nível α de significância.

Exemplo: Considere os pesos (kg), já ordenados, de 11 homens adultos:

$y_{(1)}$	$y_{(2)}$	$y_{(3)}$	$y_{(4)}$	$y_{(5)}$	$y_{(6)}$	$y_{(7)}$	$y_{(8)}$	$y_{(9)}$	$y_{(10)}$	$y_{(11)}$
67,1	69,9	71,7	72,6	73,0	73,5	75,3	77,1	82,6	88,5	107,0

Verifique se estes dados provêm de uma população com distribuição normal.

Solução:

1) As hipóteses testadas são:

H_0 : Os dados são normalmente distribuídos, e

H_1 : Os dados não são normalmente distribuídos

2) Como a amostra já está ordenada, basta calcular S^2 :

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n} \\ &= 68.235,67 - \frac{(858,1968)^2}{11} \\ S^2 &= 1.278,569. \end{aligned}$$

3) Como n é ímpar, os valores de a_{n-i+1} , obtidos da Tabela 1.2, são:

a_{11}	a_{10}	a_9	a_8	a_7	a_6
0,5601	0,3315	0,2260	0,1429	0,0695	0,0000

Assim,

$$\begin{aligned} b &= a_n (y_n - y_1) + \cdots + a_{k+2} (y_{k+2} - y_k) \\ b &= 0,5601 \times (107 - 67,1) + 0,3315 \times (88,5 - 69,9) + 0,2260 \times (82,6 - 71,7) + \\ &\quad 0,1429 \times (77,1 - 72,6) + 0,0695 \times (75,3 - 73,0) \\ b &= 31,78019. \end{aligned}$$

4) O valor de W é dado por:

$$\begin{aligned} W &= \frac{b^2}{S^2} \\ &= \frac{(31,78019)^2}{1.280,975} \\ W &= 0,7899. \end{aligned}$$

5) Observa-se na tabela 1.4, que o valor calculado $W = 0,7899$ é menor que o valor tabelado

$W_{tab_{11;0,01}} = 0,792$. Neste caso, rejeita-se H_0 , os dados não são normalmente distribuídos.

Para obter esses resultados utilizando-se do R, basta digitar o comando:

```
dados = c(67.1, 69.8, 71.7, 72.6, 73.0, 73.5, 75.3, 77.1, 82.6, 88.4, 107)
shapiro.test(dados)
```

Além do teste de Shapiro-Wilk para verificação da normalidade, podem ser citados ainda os seguintes testes:

- a) Anderson-Darling;
- b) Cramer-von-Mises;
- c) Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov);
- d) Shapiro-Francia;

Todos estes testes estão implementados no pacote *nortest*.

[illegible][illegible][illegible]

$i \setminus n$	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.4015	0.3989	0.3964	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2774	0.2755	0.2737	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2391	0.2380	0.2368	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2110	0.2104	0.2098	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1881	0.1880	0.1878	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1865	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1686	0.1689	0.1691	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1513	0.1520	0.1526	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1356	0.1366	0.1376	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1211	0.1225	0.1237	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.1286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1075	0.1092	0.1108	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.0947	0.0967	0.0986	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0824	0.0848	0.0870	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0706	0.0733	0.0759	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0892	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0592	0.0622	0.0651	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0481	0.0515	0.0546	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.0731	0.0748	0.0764
16	0.0372	0.0409	0.0444	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0264	0.0305	0.0343	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18	0.0158	0.0203	0.0244	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19	0.0053	0.0101	0.0146	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20		0.0000	0.0049	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21				0.0000	0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22						0.0000	0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23								0.0000	0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24										0.0000	0.0037	0.0071	0.0104
25												0.0000	0.0350

<http://www.portalação.com.br/content/64-teste-de-shapiro-wilk>, em 08/03/2014.

Tabela 1.4 – Valores críticos da estatística W de Shapiro-Wilk.

N	Nível de significância								
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,98	0,99
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959	0,998	0,999	1,000	1,000
4	0,687	0,707	0,748	0,792	0,935	0,987	0,992	0,996	0,997
5	0,686	0,715	0,762	0,806	0,927	0,979	0,986	0,991	0,993
6	0,713	0,743	0,788	0,826	0,927	0,974	0,981	0,986	0,989
7	0,730	0,760	0,803	0,838	0,928	0,972	0,979	0,985	0,988
8	0,749	0,778	0,818	0,851	0,932	0,972	0,978	0,984	0,987
9	0,764	0,791	0,829	0,859	0,935	0,972	0,978	0,984	0,986
10	0,781	0,806	0,842	0,869	0,938	0,972	0,978	0,983	0,986
11	0,792	0,817	0,850	0,876	0,940	0,973	0,979	0,984	0,986
12	0,805	0,828	0,859	0,883	0,943	0,973	0,979	0,984	0,986
13	0,814	0,837	0,866	0,889	0,945	0,974	0,979	0,984	0,986
14	0,825	0,846	0,874	0,895	0,947	0,975	0,980	0,984	0,986
15	0,835	0,855	0,881	0,901	0,950	0,975	0,980	0,984	0,987
16	0,844	0,863	0,887	0,906	0,952	0,976	0,981	0,985	0,987
17	0,851	0,869	0,892	0,910	0,954	0,977	0,981	0,985	0,987
18	0,858	0,874	0,897	0,914	0,956	0,978	0,982	0,986	0,988
19	0,863	0,879	0,901	0,917	0,957	0,978	0,982	0,986	0,988
20	0,868	0,884	0,905	0,920	0,959	0,979	0,983	0,986	0,988
21	0,873	0,888	0,908	0,923	0,960	0,980	0,983	0,987	0,989
22	0,878	0,892	0,911	0,926	0,961	0,980	0,984	0,987	0,989
23	0,881	0,895	0,914	0,928	0,962	0,981	0,984	0,987	0,989
24	0,884	0,898	0,916	0,930	0,963	0,981	0,984	0,987	0,989
25	0,888	0,901	0,918	0,931	0,964	0,981	0,985	0,988	0,989
26	0,891	0,904	0,920	0,933	0,965	0,982	0,985	0,988	0,989
27	0,894	0,906	0,923	0,935	0,965	0,982	0,985	0,988	0,990
28	0,896	0,908	0,924	0,936	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
29	0,898	0,910	0,926	0,937	0,966	0,982	0,985	0,988	0,990
30	0,900	0,912	0,927	0,939	0,967	0,983	0,985	0,988	0,990
31	0,902	0,914	0,929	0,940	0,967	0,983	0,986	0,988	0,990
32	0,904	0,915	0,930	0,941	0,968	0,983	0,986	0,988	0,990
33	0,906	0,917	0,931	0,942	0,968	0,983	0,986	0,989	0,990
34	0,908	0,919	0,933	0,943	0,969	0,983	0,986	0,989	0,990
35	0,910	0,920	0,934	0,944	0,969	0,984	0,986	0,989	0,990
36	0,912	0,922	0,935	0,945	0,970	0,984	0,986	0,989	0,990
37	0,914	0,924	0,936	0,946	0,970	0,984	0,987	0,989	0,990
38	0,916	0,925	0,938	0,947	0,971	0,984	0,987	0,989	0,990
39	0,917	0,927	0,939	0,948	0,971	0,984	0,987	0,989	0,991
40	0,919	0,928	0,940	0,949	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
41	0,920	0,929	0,941	0,950	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
42	0,922	0,930	0,942	0,951	0,972	0,985	0,987	0,989	0,991
43	0,923	0,932	0,943	0,951	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
44	0,924	0,933	0,944	0,952	0,973	0,985	0,987	0,990	0,991
45	0,926	0,934	0,945	0,953	0,973	0,985	0,988	0,990	0,991
46	0,927	0,935	0,945	0,953	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
47	0,928	0,936	0,946	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
48	0,929	0,937	0,947	0,954	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
49	0,929	0,938	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991
50	0,930	0,939	0,947	0,955	0,974	0,985	0,988	0,990	0,991

Exercícios

- 1) O valor médio de espessura de toucinho, para animais prontos para o abate, obtido com pistola eletrônica é de 24 *mm*. Um produtor, não dispondo da pistola eletrônica, fez as mensurações usando regra milimetrada e obteve os seguintes resultados:

37,8	28,8	36,6	28,6	40,1	28,9	29,4	36,2	32,7	35,6
41,0	33,4	35,1	33,7	38,5	23,9	23,8	36,6	24,3	36,5
33,9	36,4	32,4	39,2	26,4	37,7	27,1	27,6	25,7	26,0

- Determine a média, a variância, o desvio-padrão, o erro-padrão da média e o coeficiente de variação dos dados;
 - Construa o gráfico de caixas. Há algum *outlier* nesses dados?
 - Verifique se os dados apresentam distribuição normal;
 - Verifique se a média obtida com a régua milimetrada difere da média esperada com a pistola eletrônica.
- 2) A finalidade de um estudo foi investigar a natureza da destruição do pulmão em fumantes antes do desenvolvimento de enfisema. Três mensurações foram realizadas nos pulmões de fumantes e não-fumantes que morreram repentinamente de causas não-respiratórias. Uma maior pontuação indica maior dano ao pulmão, o qual é o valor registrado. O dano ao pulmão é maior aos fumantes que aos não-fumantes?

Não fumantes	18,1	6,0	10,8	11,0	7,7	17,9	8,5	13,0	18,9
Fumantes	16,6	13,9	11,3	26,6	17,4	15,3	15,8	12,3	18,6
	12,0	12,0	24,1	16,5	21,8	16,3	23,4	18,8	

- Calcule a média, a variância, o desvio-padrão, o erro-padrão da média e o coeficiente de variação dos dados para cada grupo;
- Construa o gráfico de caixas. Há evidências de diferenças entre as médias? Observa-se algum *outlier* em algum dos grupos?
- Teste se as variâncias são homogêneas. Adote $\alpha = 5\%$.

d) Pode-se concluir que os fumantes tem um dano maior no pulmão que os não-fumantes?

Considere $\alpha = 5\%$. Vale a pena fumar?

3) Os dados a seguir (parte deles) são relativos a um experimento com Tilápias do Nilo (*Oreochromis niloticus*) e foram obtidos pelos alunos do curso de Medicina Veterinária da UEL em 2004.

Turma	Indução (s)	Peso (g)	Comprimento (cm)
2021	165	408,50	29,00
2021	183	400,00	29,50
2021	161	397,20	29,30
2021	108	431,60	29,50
2021	146	336,50	26,20
2021	147	309,40	25,80
2021	173	387,70	29,80
2021	193	348,50	27,50
2021	160	346,10	26,70
2021	155	307,80	27,00
2022	261	477,20	31,00
2022	203	282,50	25,70
2022	238	290,00	26,00
2022	174	429,10	30,50
2022	155	346,80	27,50
2022	202	464,60	30,50
2022	231	429,60	29,00
2022	207	284,20	26,50
2022	279	400,50	29,20

a) Calcule a média, variância, desvio padrão, o erro-padrão da média e o coeficiente de variação para cada uma das variáveis numéricas ;

b) Construa o gráfico de caixas para o peso das tilápias. O que se observa?

c) Verifique se os dados seguem uma distribuição normal;

- d) O peso médio de tilápia do nilo adulta é de 340 g. Pode-se afirmar que o peso médio encontrado no experimento segue este padrão?
- e) Repita o item 3a, mas calculado para cada Turma;
- f) Faça um gráfico de caixas, comparando as Turmas, para cada uma das três variáveis e discuta os resultados;
- g) Para cada variável, verifique se os dados seguem uma distribuição normal;
- h) Para cada variável, verifique se as variâncias entre as Turmas são homogêneas;
- i) Para cada variável, verifique se há diferença entre as médias das Turmas.
- 4) Dez coelhos adultos foram submetidos a suplementação alimentar durante uma semana. Os animais foram mantidos em gaiolas individuais e tiveram seus pesos (kg) mensurados no início e no final da suplementação.

Início	2,43	2,59	2,50	2,48	2,53	2,52	2,57	2,51	2,47	2,43
Final	2,62	2,71	2,69	2,65	2,70	2,68	2,67	2,64	2,68	2,66

- a) Qual dos tempos, Início ou Final, apresentou maior variabilidade?
- b) Construa o gráfico de caixas. Discuta o resultado;
- c) Adotando-se $\alpha = 0,05$, há razão para acreditar que a suplementação fornece um aumento no peso médio?

Capítulo 2

Análise de Variância

2.1 Introdução

A ideia básica da **análise de variância** é decompor a variabilidade total, em partes atribuídas a causas conhecidas e independentes e a uma parte residual de origem desconhecida e de natureza aleatória.

Banzatto and Kronka (1995), enunciam alguns conceitos básicos relacionados às etapas da experimentação, que são:

- a) **Experimento ou ensaio:** é um trabalho previamente planejado, que segue determinados **princípios básicos** e no qual se faz a comparação dos efeitos dos tratamentos;
- b) **Tratamento:** é o método, elemento ou material cujo efeito se deseja medir ou comparar em um experimento. Os tratamentos podem ser considerados fixos ou aleatórios, dependendo da forma como o experimento é conduzido.

Exemplos: Ração, doses de medicamentos, inseticidas, raças, etc.;

- c) **Unidade experimental ou parcela:** é a unidade que vai receber o tratamento e fornecer os dados que deverão refletir seu efeito.

Exemplos: Um animal, um grupo de animais, uma planta, uma placa de Petri com um meio de cultura, etc.;

- d) **Delineamento experimental:** é o plano utilizado na experimentação e implica na forma como os tratamentos serão designados às unidades experimentais. Esta etapa é extremamente importante porque os erros cometidos no delineamento podem invalidar os resultados do experimento.

Exemplos: Delineamentos experimentais: inteiramente casualizado, blocos casualizados, quadrado latino, etc.

2.2 Princípios básicos da experimentação

- a) **Repetição:** a ideia, em experimentação, é comparar grupos, não apenas unidades. As unidades experimentais do mesmo grupo recebem, em estatística, o nome de repetições e sua finalidade é obter uma estimativa do erro experimental. O número de repetições a ser usado em um experimento é uma questão difícil de responder. De um modo geral, quanto maior for o número de repetições mais precisas serão as estimativas das médias e dos desvios-padrões. Como regra prática, aplicável a uma grande maioria de casos, Gomes (1990) destaca que os experimentos devem ter pelo menos vinte parcelas ou dez graus de liberdade para o resíduo.
- b) **Casualização:** consiste em se aplicar os tratamentos às parcelas, através do sorteio. Tem por finalidade propiciar a todos os tratamentos a **mesma probabilidade** de serem designados a qualquer das unidades experimentais, fazendo com que cada observação (ou erro) seja uma variável aleatória independentemente distribuída. A casualização foi formalmente proposta por Fisher, na década de 1920;
- c) **Controle Local:** é uma técnica usada para melhorar a precisão do experimento, cuja finalidade é dividir um ambiente heterogêneo em sub-ambientes homogêneos e tornar o delineamento experimental mais eficiente, pela **redução do erro experimental**. Esses sub-ambientes homogêneos são chamados blocos.

2.3 Condução do experimento

Não se deve permitir que uma técnica experimental inadequada ou imperfeita seja a responsável principal pelo tamanho do erro experimental. Um ensaio bem delineado e planejado pode perder muito do seu valor se não for conduzido cuidadosamente. Deve-se pesar o material, calibrar o equipamento ou tirar as medidas necessárias, com o máximo de precisão possível.

Uma das primeiras precauções a se tomar é com a marcação adequada das unidades experimentais. Com animais, há métodos padronizados de marcação de gado ou aves, assim, o único cuidado é manter a anotação do código utilizado.

Uma falha bastante comum é a aplicação não uniforme dos tratamentos em todas as repetições. Por exemplo, quando não se cuida da limpeza do equipamento utilizado para fornecer rações aos animais, podem ocorrer diferenças que não são devidas às rações e sim, à quantidade de ração que cada animal recebeu. Em experimentos com animais eventualmente coprófagos¹, como suínos, quando os mesmos têm acesso a uma área comum e quando os

¹ Copro em latim significa 'fezes'; fagia significa 'ingestão'. Pratica ingestão de fezes

tratamentos são aditivos de rações (vitaminas, minerais, etc.), que podem ser eliminados pelas fezes, se não houver um monitoramento constante, os resultados obtidos podem ser influenciados por esse hábito dos animais.

Finalmente, se mais de uma pessoa está aplicando os tratamentos, deve-se cuidar para que as variações entre elas não sejam confundidas com variações entre tratamentos. Neste caso, é possível aproveitar o delineamento experimental fazendo com que as variações entre as pessoas afetem todos os tratamentos igualmente.

2.4 Planejamento do experimento

Para se ter um experimento planejado, é necessário definir:

- a) os tratamentos que serão comparados;
- b) o número de repetições a ser utilizado;
- c) a unidade experimental;
- d) a forma como os tratamentos serão designados às unidades experimentais;
- e) a variável em análise e a forma como será medida;
- f) o delineamento experimental.

Exemplo 1: Suponha que se deseja comparar o efeito de duas rações na engorda de suínos. O experimento poderia ser planejado, definindo-se:

- a) os tratamentos que serão comparados:
_____;
- b) a unidade experimental:
_____;
- c) a forma como os tratamentos serão designados às unidades experimentais:
_____.
- d) a variável em análise e a forma como será medida:
_____;
- e) o delineamento experimental:
_____;

Animais - Tratamentos	1 - S_5	2 - A_6	3 - B_4	4 - M_6	5 - B_2	6 - M_1
Produção (kg)	22,81	35,19	20,37	24,80	24,37	23,40
Animais - Tratamentos	7 - M_4	8 - M_3	9 - M_5	10 - B_3	11 - B_1	12 - B_6
Produção (kg)	25,12	24,36	22,94	26,54	22,15	24,06
Animais - Tratamentos	13 - S_6	14 - S_4	15 - A_2	16 - A_3	17 - A_4	18 - B_5
Produção (kg)	23,54	25,42	32,47	34,48	35,04	19,54
Animais - Tratamentos	19 - A_5	20 - M_2	21 - A_1	22 - S_3	23 - S_2	24 - S_1
Produção (kg)	35,04	22,37	35,42	23,43	21,07	19,58

Seja y_{ij} o valor da produção de leite da j -ésima vaca que recebeu o i -ésimo tratamento. Os valores das produções (kg) de leite a 4% de gordura das vacas que participaram do estudo, podem ser resumidos na forma da Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores de produção de leite (kg), obtidos no experimento.

	Sem suplementação (t_1)	Mandioca (t_2)	Araruta (t_3)	Batata Doce (t_4)
	19,58	23,40	35,42	22,15
	21,07	22,37	32,47	24,37
	23,43	24,36	34,48	26,54
	25,42	25,12	33,79	20,37
	22,81	22,94	35,04	19,54
	23,54	21,56	35,19	24,06
$\sum_{i=1}^6 y_{ij}$	135,85	139,75	206,39	137,03
$\sum_{i=1}^6 y_{ij}^2$	3.096,8903	3.263,4781	7.105,6495	3.164,523
\bar{y}_i	22,6417	23,2917	34,3983	22,8383

Ao nível de 5% de significância, concluir a respeito da suplementação e sobre os tipos de suplementação usados.

É sempre interessante examinar os dados graficamente. A Figura 2.1 apresenta o gráfico de caixas (*box plot*) para cada nível da variável produção de leite. Note que há uma forte evidência de que a produção de leite pode estar relacionada com o suplemento alimentar Araruta.

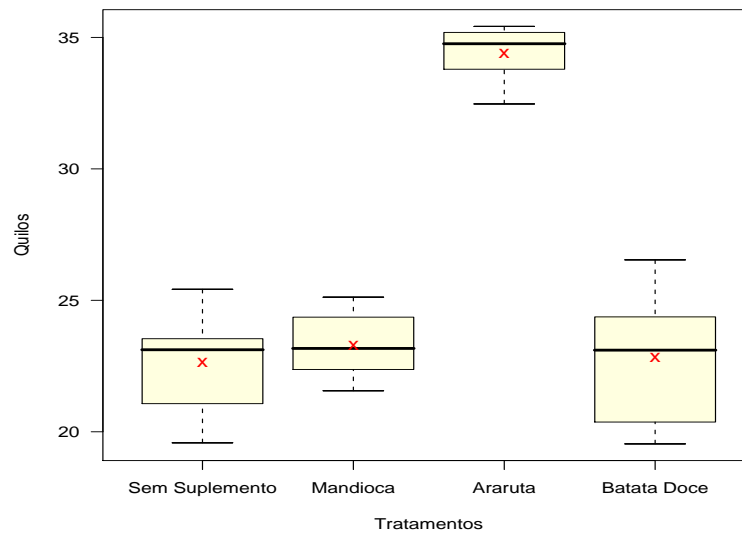


Figura 2.1 – Produção de leite (*kg*) levando-se em conta o complemento alimentar.

A **média geral** e o **desvio padrão** de produção diária (*kg*) são, respectivamente, dadas por:

$$\bar{y} = 25,7925 \text{ kg} \quad s = 5,374932 \text{ kg}$$

As médias e desvios de cada suplementação são dadas a seguir:

Tabela 2.2 – Estatísticas calculadas para cada tratamento.

	Sem Suplementação	Mandioca	Araruta	Batata Doce
Médias (<i>kg</i>)	22,64	23,29	34,398	22,84
Variâncias (<i>kg</i> ²)	4,203977	1,6935367	1,2354967	6,997257
Desvios-Padrão (<i>kg</i>)	2,0503601	1,3013595	1,111529	2,6452328
Erros-Padrão (<i>kg</i>)	0,837056	0,531278	0,4537798	1,079911768

Os resultados anteriores são obtidos no R com os seguintes comandos:

```
Quilos = c(19.58, 21.07, 23.43, 25.42, 22.81, 23.54,
           23.40, 22.37, 24.36, 25.12, 22.94, 21.56,
           35.42, 32.47, 34.48, 33.79, 35.04, 35.19,
           22.15, 24.37, 26.54, 20.37, 19.54, 24.06)
(Leite = data.frame(Trat = factor(rep(c('T1', 'T2', 'T3', 'T4'), each=6)),
                    Quilos))
attach(Leite)
```

```

names(Leite)
(media = tapply(Quilos, Trat, mean))
(desvio = tapply(Quilos, Trat, sd))
(variâncias = tapply(Quilos, Trat, var))
par(mai=c(1, 1, .2, .2))
boxplot(Quilos ~ Trat, las=1, col='LightYellow',
        ylab='`Produção leite (kg)`', xlab='`Tipos de Suplementos`',
        names=c('`Sem Suplementação`', '`Mandioca`', '`Araruta`',
                '`Batata Doce`'))
points(media, pch='`+`', col='red', cex=1.5)

```

Poder-se-ia pensar em aplicar o teste t para amostras independentes e analisar-mos todos os pares de médias. Sabe-se que a estatística de teste para comparação de duas amostras é dada por:

$$t_{cal} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad s_p^2 = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}},$$

e a hipótese nula é: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$.

Os resultados do teste t para todas as amostras, tomadas duas a duas, são dados por:

	SS	MA	AR	BD
Sem Suplemento (SS)	—	ns	**	ns
Mandioca (MA)	—	—	**	ns
Araruta (AR)	—	—	—	**
Batata Doce (BD)	—	—	—	—

em que:

ns - não há diferença significativa entre as médias e,

** - Há diferença significativa entre as médias, ao nível de 5%.

Obs.: Para se obter a **variância geral** dos dados, calculou-se:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, a; \\ j = 1, \dots, n_i. \end{cases}$$

Para o cálculo da variância **para cada tipo de suplemento**, calculou-se:

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_j - \bar{y}_i)^2, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, a; \\ j = 1, \dots, n_i. \end{cases}$$

Entretanto, **esta solução será incorreta**, pois leva a uma considerável distorção no erro Tipo I. Por exemplo, suponha que seja testada a igualdade das quatro médias usando comparações pareadas. Há 6 possíveis pares e, se a probabilidade de corretamente aceitar a hipótese nula para cada par testado é de $(1 - \alpha) = 0,95$, então a probabilidade de corretamente aceitar a hipótese nula para todos os 6 pares é $(0,95)^6 = 0,7359$, se os testes forem independentes. **O procedimento apropriado** para testar a igualdade de várias médias **é a análise de variância**.

2.5 Classificação dos experimentos

Os experimentos com animais podem ser classificados em: **contínuos** e **alternativos**. Nos primeiros, os animais colocados sob um determinado tratamento, nele permanecem até o fim do experimento. Os delineamentos mais utilizados nesse tipo de estudo são: inteiramente ao acaso, blocos casualizados, quadrados latinos e parcelas subdivididas. Os **ensaios contínuos** são, de forma geral, realizados com aves, coelhos, suínos, ovinos, equídeos, gado de corte e, mais raramente, com vacas leiteiras.

Nos **ensaios alternativos** (*cross-over* ou *change-over*), os animais recebem, em sequência, dois ou mais tratamentos durante o transcorrer do experimento. São, em especial, realizados com vacas leiteiras, mas, conforme o tipo do problema, os delineamentos podem ser adaptados às outras espécies de animais.

Capítulo 3

Delineamento Inteiramente Casualizado

3.1 Introdução

Suponha que haja a tratamentos ou diferentes níveis de um único fator que se queira comparar. A resposta observada de cada dos a tratamentos é uma variável aleatória. Os dados seriam da forma:

Tratamentos	Observações				Totais	Médias
1	y_{11}	y_{12}	\cdots	y_{1n}	$y_{1\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
2	y_{21}	y_{22}	\cdots	y_{2n}	$y_{2\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots	\cdots	\vdots	\vdots	\vdots
a	y_{i1}	y_{i2}	\cdots	y_{in}	$y_{i\cdot}$	$\bar{y}_{i\cdot}$
					$y_{\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

em que y_{ij} representa a j -ésima observação do i -ésimo tratamento;

$$y_{i\cdot} = \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad \bar{y}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij}}{n} \quad e \quad \bar{y}_{\cdot\cdot} = \frac{y_{\cdot\cdot}}{an} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \frac{y_{ij}}{an}.$$

Por levar em consideração apenas os princípios da **repetição** e da **casualização**, são considerados os mais simples delineamentos experimentais. São instalados em situação de homogeneidade, por isso, são muito usados em laboratórios, casas de vegetação, etc.

O modelo estatístico para o delineamento inteiramente casualizado é:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

em que:

- a) y_{ij} é o valor observado na parcela j que recebeu o tratamento i ;
- b) μ é um parâmetro constante, comum a todos os tratamentos, chamado média geral (quando os dados são balanceados);
- c) τ_i é um parâmetro único que representa o i -ésimo efeito de tratamento;
- d) ϵ_{ij} é um componente do erro aleatório, associado à j -ésima repetição do i -ésimo tratamento;

O objetivo é testar hipóteses apropriadas sobre os efeitos dos tratamentos e estimá-los. A análise de variância para testar essas hipóteses só é válida se forem satisfeitas as seguintes condições:

- 1) **aditividade:** o modelo deve ser aditivo, ou seja, os efeitos devem se somar (não há interação). Para verificação da aditividade, pode-se usar o teste de não-aditividade de Tukey;
- 2) **independência:** os erros (ϵ_{ij}), devidos ao efeito de fatores não controlados, **devem ser independentes**, o que é, até certo ponto, garantido pelo princípio da casualização;
- 3) **normalidade:** os erros (ϵ_{ij}), devidos ao efeito de fatores não controlados, **devem possuir uma distribuição normal** de probabilidade. Para a verificação da normalidade dos erros, em geral, utilizam-se os testes de normalidade, tais como Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov), o χ^2 e Shapiro-Wilk, além da análise de resíduos, construindo o gráfico *qqplot*. O teste mais amplamente usado para este fim é o teste de Shapiro-Wilk e é apresentado em detalhes na página 13.

O comando do R, bem como o resultado do teste usando-se os resíduos dos dados da Tabela 2.1, é

```
shapiro.test(anava.av$res)
      Shapiro-Wilk normality test
data:  anava.av$res
W = 0.9705, p-value = 0.6787
require(nortest)
lillie.test(anava.av$res)
      Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
data:  anava.av$res
D = 0.1205, p-value = 0.4896
```

mostrando que os erros têm uma distribuição normal. Claro que pode-se, além do teste, utilizar os recursos gráficos para verificação da normalidade dos dados. Os comandos para gerar os gráficos dos resíduos e o QQ-Plot discutidos na aula prática são apresentados na seção 3.2.

- 4) **homocedasticidade ou homogeneidade de variâncias:** os erros (ϵ_{ij}), devido ao efeito de fatores não controlados, **devem possuir uma variância comum** σ^2 . A homogeneidade das variâncias pode ser verificada através de testes ou pela análise dos resíduos. No caso de se utilizar testes, têm-se:

- a) **F máximo ou teste de Hartley:** é dado por

$$F_{max} = \frac{s_{max}^2}{s_{min}^2}.$$

Esse valor calculado é comparado com o valor tabelado (Tabela 9.4, na página 126), em que a refere-se ao número de tratamentos e $\nu = n - 1$ (graus de liberdade do número de repetições em cada tratamento).

$$F_{Hart} = F(p = 1 - \alpha, df = \nu, k = a)$$

Se $F_{max} < F_{Hart}$, então não se rejeita a hipótese de homogeneidade de variâncias.

Para realizar o teste usando o R e obter os valores da tabela de Hartley, usa-se o seguinte comando:

```
require(SuppDists)
(F_hart = qmaxFratio(p=.95, df=5 , k=4))
[1] 13.72395
(F_max = max(variancia) / min(variancia))
[1] 5.663517
```

Portanto, como o $F_{max} < F_{Hart}$, não se rejeita a hipótese de homogeneidade de variâncias.

- b) **teste de Bartlett**¹, que é dado por:

$$B = \frac{M}{C}$$

em que:

$$M = \sum_{i=1}^a (n_i - 1) \ln(s_p^2) - \sum_{i=1}^a (n_i - 1) \ln s_i^2$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(a-1)} \left[\sum_{i=1}^a \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^a (n_i - 1)} \right]$$

ainda,

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^a (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^a (n_i - 1)}$$

¹Maurice Stevenson Bartlett, nascido em Chiswick, Londres, em 18 junho de 1910 e falecido em 8 janeiro de 2002

Muitos pesquisadores preferem trabalhar com logaritmos na base 10, logo, faz-se uma mudança de base, dada por:

$$\ln(s_p^2) = \frac{\log_{10}(s_p^2)}{\log_{10}(e)} = 2,302585 \times \log_{10}(s_p^2)$$

e a fórmula para o teste de Bartlett fica:

$$B = \frac{M}{C} = \frac{2,3026 \left[\sum_{i=1}^a (n_i - 1) \log(s_p^2) - \sum_{i=1}^a (n_i - 1) \log s_i^2 \right]}{1 + \frac{1}{3(a-1)} \left[\sum_{i=1}^a \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^a (n_i - 1)} \right]}$$

em que $B \sim \chi_{a-1;\alpha}^2$.

Obs.: Para experimentos desbalanceados, usar o teste de Bartlett.

Para realizar o teste de Bartlett no R, usa-se o seguinte comando:

```
bartlett.test(Quilos~Trat)
```

O resultado do teste para os dados da Tabela 2.1, é

```
Bartlett test of homogeneity of variances
data:  Quilos by Trat
Bartlett's K-squared = 5.2207, df = 3, p-value = 0.1563
```

Como o p -valor é 0,1563, não se rejeita a hipótese de homogeneidade de variâncias.

- c) **teste de Levene:** estudos indicam que o teste de Bartlett é muito sensível à falta de normalidade e não deve ser aplicado quando houver dúvida sobre a suposição de normalidade. Neste caso, deve-se utilizar o teste de Levene ou Brown-Forsythe que são alternativas ao teste de Bartlett por serem menos sensíveis a afastamentos da normalidade. Para a realização do teste de Levene, deve-se:

⇒ obter os resíduos da análise de variância: $e_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i$;

⇒ realizar uma análise de variância dos **valores absolutos** desses resíduos;

⇒ observar o p -valor obtido na análise e comparar com o nível de significância adotado e concluir.

Para aplicar o teste de Levene usando o R, basta o comando:

```
require(car)
leveneTest(Quilos, Trat, center=mean)
```


3.1.1 Modelos de efeitos fixos e aleatórios

O modelo (3.1) descreve duas situações diferentes com relação aos efeitos dos tratamentos. Primeira, os a tratamentos poderiam ter sido especificamente escolhidos pelo pesquisador. Nessa situação, o objetivo é testar hipóteses sobre as médias dos tratamentos e a conclusão se aplica apenas aos níveis do fator considerado na análise. As conclusões não podem ser estendidas à tratamentos similares que não foram explicitamente considerados. Pode-se estimar os parâmetros do modelo (μ, τ_i, σ^2) . Esse tipo de análise é chamada **modelo de efeitos fixos**.

Alternativamente, os a tratamentos poderiam ser uma amostra aleatória de uma população maior de tratamentos. Nessa situação, o objetivo é estender as conclusões (que são baseadas em uma amostra de tratamentos) para todos os tratamentos da população, quer eles tenham feito parte do experimento ou não. Nesse caso, os τ_i são variáveis aleatórias e os testes de hipóteses recaem sobre a variabilidade de τ_i tentando-se estimar essa variabilidade. Esse tipo de análise é chamada **modelo de efeitos aleatórios** ou **modelo de componentes de variância**.

3.2 Análise do modelo de efeitos fixos

Quando se instala um experimento no delineamento inteiramente casualizado, o objetivo é, em geral, verificar se existe diferença significativa entre pelo menos duas médias de tratamentos. As hipóteses testadas são:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_{i'} \text{ Pelo menos duas médias de tratamentos diferem entre si}$$

Uma forma equivalente de escrever as hipóteses anteriores é em termos dos efeitos dos tratamentos τ_i , que é:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$

$$H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ pelo menos um tratamento}$$

Considere a estimação dos parâmetros do modelo (3.1), usando o método de mínimos quadrados. A função de mínimos quadrados é:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \epsilon_{ij}^2}_L = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n [y_{ij} - \mu - \tau_i]^2.$$

Derivando-se L em relação aos parâmetros (μ e τ_i) tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mu} &= 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n [y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i] \times (-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \tau_i} &= 2 \sum_{j=1}^n [y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i] \times (-1) = 0\end{aligned}$$

e igualando-se os resultados a zero e aplicando os somatórios, obtém-se o chamado sistema de equações normais:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij} & = & an\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 + n\hat{\tau}_2 + \cdots + n\hat{\tau}_a \\ \sum_{j=1}^n y_{1j} & = & n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_1 \\ \sum_{j=1}^n y_{2j} & = & n\hat{\mu} \quad \quad \quad + n\hat{\tau}_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n y_{aj} & = & n\hat{\mu} \quad \quad \quad + n\hat{\tau}_a \end{array} \right.$$

cujo sistema tem $(a + 1)$ equações e $(a + 1)$ incógnitas $(\mu, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_a)$, apresentando infinitas soluções. Pode ser resumido como:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij} & = & an\hat{\mu} + n \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} & = & n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_i. \end{array} \right.$$

Para obter uma solução única impõe-se uma restrição, ou seja, $\sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i = 0$. que nos permite obter a estimativa da média independente do efeito de tratamentos.

Os estimadores de mínimos quadrados para μ e τ_i , são dados por:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}; \quad (3.2)$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad (3.3)$$

3.2.1 Decomposição das Somas de Quadrados

A variabilidade total dos dados pode ser reescrita em função das médias de cada tratamento, assim

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{\mu})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} + \bar{y}_{i\cdot} - \hat{\mu})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \left[(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 + (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})^2 + 2(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})^2 + 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) \\
 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{\mu})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})^2
 \end{aligned}$$

observe que,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) &= \sum_{i=1}^a \left[\sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) \right] (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..}) \\
 &= \sum_{i=1}^a 0 (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..}) \\
 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}) &= 0
 \end{aligned}$$

pois, a soma dos desvios das variáveis em relação à média respectiva é nula. Logo,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2}_{SQTotal} = \underbrace{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2}_{SQRes} + \underbrace{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})^2}_{SQTrat}$$

em que, desenvolvendo-se os quadrados, obtém-se

$$\begin{aligned}
 SQTotal &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{an} \\
 SQTrat &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i\cdot}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{an} \\
 SQRes &= SQTotal - SQTrat
 \end{aligned}$$

o termo $C = \frac{y_{..}^2}{an} = \frac{\left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij} \right)^2}{an}$ é chamado correção.

Fazendo-se a usual suposição de normalidade, a estatística apropriada para $H_0 : \tau_i = 0$

é

$$F_{cal} = \frac{SQTrat/(a-1)}{SQRes/a(n-1)} = \frac{QMTrat}{QMRes}.$$

sendo que $F_{cal} \sim F_{(a-1); a(n-1); \alpha}$. Se $F_{cal} > F_{\alpha; (a-1), a(n-1)}$, rejeita-se H_0 .

Para verificarmos se a hipótese nula (H_0) é aceita ou não, completa-se o seguinte

Quadro da Análise de Variância:

Tabela 3.1 – Quadro da Análise de Variância.

Causa de variação	Somas de Quadrados	g.l.	Quadrados Médios	F_{calc}	F_{tab}
Tratamentos	SQTrat	a - 1	$\frac{SQTrat}{a-1}$	$\frac{QMTrat}{QMRes}$	$F_{\alpha; a-1, a(n-1)}$
Resíduo	SQRes	a(n-1)	$\frac{SQRes}{a(n-1)}$		
Total	SQTotal	an - 1			

em que as somas de quadrados, obtidas a partir da equação (3.1), são dadas por:

$$SQTotal = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - C \quad C = \frac{\left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij} \right)^2}{an}$$

$$SQTrat = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - C \quad SQRes = SQTotal - SQtrat$$

Como não se rejeitou as hipóteses de homogeneidade de variâncias e de normalidade dos erros, já verificados anteriormente, pode-se aplicar a metodologia discutida aos dados apresentados na Tabela 2.1, cujas somas de quadrados são:

$$SQTotal = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$= 19,58^2 + 21,07^2 + \dots + 24,06^2 - \frac{(619,02)^2}{4 \times 6}$$

$$\mathbf{SQTotal = 664,4676}$$

$$SQTrat = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$= \frac{1}{6} [135,85^2 + 139,75^2 + 206,39^2 + 137,03^2] - \frac{(619,02)^2}{4 \times 6}$$

$$\mathbf{SQTrat = 593,82}$$

$$\begin{aligned}
 SQRes &= SQTot - SQRat \\
 &= 664,4676 - 593,82
 \end{aligned}$$

$$SQRes = 70,65$$

e substituindo-se esses resultados no quadro da análise de variância, dado na Tabela 3.1, obtém-se:

Tabela 3.2 – Análise de variância para os dados do Exemplo 2.

Causa de Variação	gl	S.Q.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	Pr(> F)
Tratamentos	3	593,8163167	197,9387722	56,03	3,098	6,4953602e-10
Resíduo	20	70,6513333	3,5325667			

Como $F_{cal} > F_{tab}$, **rejeita-se** H_0 , ou seja, pelo menos uma média de tratamento difere das demais.

Para obter esses resultados da análise de variância, utilizando-se do R, basta digitar o comando:

```

anava.av = aov(Quilos~Trat)
anova(anava.av)
qf(0.95, 3, 20)    # Valor tabelado

```

3.3 Testes de Comparações Múltiplas

Na análise realizada, rejeitou-se a hipótese de que as médias dos tratamentos (suplementos) fossem iguais. Claro que, nessa situação, seria lógico perguntar quais as médias que diferem entre si. Será que a média de produção sem suplemento é diferente da média da produção usando mandioca como suplemento? Será que a média de produção com araruta é diferente de batata doce? E assim por diante.

Para responder a estas perguntas o pesquisador precisa de um método que forneça a *diferença mínima significativa* entre duas médias. Há diversos testes de comparações múltiplas para calcular a diferença mínima significativa.

De acordo com (Conagin et al., 2007), a aplicação dos testes, no caso de tratamentos qualitativos, pode ser realizada da seguinte forma:

Contrastes ortogonais: teste t, teste F e teste de Scheffé;

Médias duas a duas: teste de Tukey, teste de Duncan, teste de Bonferroni e teste de Newman-Keuls;

Comparação entre o controle e as demais médias: teste de Dunnett.

Para os testes de comparações de médias duas a duas, pode-se citar, ainda, o teste de Scott-Knott.

Já para o estudo de tratamentos quantitativos, deve-se aplicar a análise de regressão.

3.3.1 Contrastes

Muitos métodos de comparações múltiplas usam a ideia de contraste. Uma vez que a hipótese nula $H_0 : \tau_i = 0$ foi rejeitada, sabe-se que algum tratamento produz uma produção de leite diferente dos outros. Mas qual deles causa tal diferença? Poderia-se pensar, inicialmente, que os suplementos 3 e 4 produzem a mesma quantidade de leite, implicando que poderia-se testar a hipótese:

$$H_0 : \mu_3 = \mu_4$$

$$H_1 : \mu_3 \neq \mu_4$$

Tal hipótese poderia ser testada utilizando-se uma combinação linear apropriada dos tratamentos, tal como:

$$y_{3\cdot} - y_{4\cdot} = 0$$

Se há suspeitas de que a média dos tratamentos 1 e 2 não diferem da média dos tratamentos 3 e 4, então a hipótese nula poderia ser

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

$$H_1 : \mu_1 + \mu_2 \neq \mu_3 + \mu_4$$

que implica na combinação linear

$$y_{1\cdot} + y_{2\cdot} - y_{3\cdot} - y_{4\cdot} = 0$$

Em geral, a comparação das médias de tratamentos de interesse implicará em uma combinação linear dos tratamentos, dada por:

$$C = \sum_{i=1}^a c_i y_i.$$

com a restrição $\sum_{i=1}^a c_i = 0$. Tais combinações lineares são chamadas **contrastes**.

Exemplo: Em um experimento para a cura de mastite em bovinos, foram utilizados dois antibióticos em duas dosagens para cada um. A variável resposta é o tempo de cura, em dias.

Tratamento	Dose	Droga	Descrição
1	Baixa	A	Dose baixa da droga A
2	Alta	A	Dose alta da droga A
3	Baixa	B	Dose baixa da droga B
4	Alta	B	Dose alta da droga B

Pode-se definir, entre outros, os seguintes contrastes:

$$\rightsquigarrow Y_1 = (\mu_1 - \mu_2) - (\mu_3 - \mu_4)$$

$$\rightsquigarrow Y_2 = (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\rightsquigarrow Y_3 = (\mu_3 - \mu_4)$$

A soma de quadrados para qualquer contraste é:

$$SQ_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^a c_i y_i \right)^2}{n \sum_{i=1}^a c_i^2} \quad (3.4)$$

e tem um grau de liberdade. Se o delineamento é desbalanceado, então a comparação das médias de tratamento exige que $\sum_{i=1}^a n_i c_i = 0$ e a equação 3.4 resultará em:

$$SQ_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^a c_i y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^a n_i c_i^2} \quad (3.5)$$

Um contraste é testado comparando-se sua soma de quadrados ao quadrado médio do resíduo. A estatística resultante terá uma distribuição F com $N - a$ graus de liberdade.

3.3.2 Contrastes ortogonais

Um caso especial muito importante do procedimento da subseção 3.3.1 é aquele de **contrastes ortogonais**. Dois contrastes com coeficientes c_i e d_i são ortogonais se

$$\sum_{i=1}^a c_i d_i = 0$$

ou, para um delineamento desbalanceado, se

$$\sum_{i=1}^a n_i c_i d_i = 0$$

A ortogonalidade indica que a variação de um contraste é inteiramente independente da variação de outro qualquer que lhe seja ortogonal.

Para a tratamentos o conjunto de $a - 1$ contrastes ortogonais particiona a soma de quadrados devido a tratamentos para $a - 1$ componentes independentes com um único grau de liberdade.

Há muitas maneiras de escolher os coeficientes dos contrastes ortogonais para um conjunto de tratamentos. Usualmente, algo na natureza do experimento deverá sugerir quais comparações serão de interesse.

Considere o experimento discutido no exemplo 2.1. Os contrastes ortogonais apropriados poderiam ser:

Tratamentos	Coeficientes dos contrastes		
	C_1	C_2	C_3
Sem Suplemento	3	0	0
Mandioca	-1	-1	1
Araruta	-1	2	0
Batata Doce	-1	-1	-1

Note que o contraste C_1 compara o efeito médio dos tratamentos com suplemento e sem suplemento. Já no contraste C_2 são comparados os efeitos médios da Araruta com a Mandioca e Batata Doce. Por último, compara-se o efeito médio da Mandioca e da Batata Doce.

Os coeficientes dos contrastes devem ser escolhidos antes de executar o experimento e examinar os dados. A razão para isto é que, se comparações são selecionadas após examinar os dados, muitos pesquisadores construiriam testes que corresponderiam a grandes diferenças observadas na média.

3.3.3 Teste t

É talvez o menos usado devido às suas exigências e porque as mesmas comparações feitas com ele, podem ser feitas com o teste F , na própria análise de variância, pois $F = t^2$, quando se tem apenas 1 grau de liberdade. As exigências do teste t , são:

- a) Os contrastes devem ser estabelecidos antes do conhecimento dos resultados, isto é, deve ser uma hipótese de pesquisa;
- b) Os contrastes devem ser ortogonais;
- c) o número de contrastes ortogonais deve ser, no máximo, igual ao número de graus de liberdade de tratamentos.

A equação do teste é dada por:

$$t_{calc} = \frac{\hat{Y}_i - 0}{\sqrt{\hat{V}(\hat{Y}_i)}}$$

em que:

\hat{Y}_i é a estimativa de um contraste;

$\hat{V}(\hat{Y}_i)$ é a estimativa da variância da estimativa de um contraste.

Quando se aplica o teste t a um contraste, o interesse, em geral, é verificar se a sua estimativa (\hat{Y}) difere significativamente de zero, valor que deveria assumir se a hipótese nula fosse verdadeira.

Para verificar a significância, ou não, do contraste, consulta-se a tabela t com $n' =$ número de graus de liberdade do resíduo, a um nível α de probabilidade.

Se $t_{calc} \geq t_{tab}$, rejeita-se H_0 , ou seja, admite-se que $Y_i \neq 0$.

Se $t_{calc} < t_{tab}$, aceita-se H_0 .

Exemplo: Considere os dados da Tabela 2.1 e que as hipóteses de pesquisa foram elaboradas antes da realização do experimento e são:

$$Y_1 = 3\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)$$

$$Y_2 = 2\mu_3 - (\mu_2 + \mu_4)$$

$$Y_3 = \mu_2 - \mu_4.$$

Uma estimativa para qualquer desses contrastes é obtida substituindo-se as médias por suas estimativas, dadas por \bar{y}_i .

Seja

$$\hat{Y}_1 = 3\bar{y}_1 - (\bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4)$$

a estimativa do contraste Y_1 , tomada em módulo. Portanto a variância do contraste, admitindo-se que as médias dos tratamentos sejam independentes, é dada por:

$$V(\hat{Y}_1) = 9V(\bar{y}_1) + V(\bar{y}_2) + V(\bar{y}_3) + V(\bar{y}_4)$$

mas, $V(\bar{y}_i) = \frac{\sigma_i^2}{n_i}$ e, admitindo-se que os dados são balanceados, tem-se:

$$V(\hat{Y}_1) = 9 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} + \frac{\sigma_3^2}{n_3} + \frac{\sigma_4^2}{n_4}$$

Se a homogeneidade de variâncias é aceita, tem-se que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$ e, portanto, $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = \hat{\sigma}_3^2 = \hat{\sigma}_4^2 = QMRes$. Assim, como os dados são balanceados com 6 repetições, a estimativa da variância da estimativa do contraste fica:

$$\hat{V}(\hat{Y}_1) = 12 \times \frac{QMRes}{n}$$

De forma geral, é dado por:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \sum_i \frac{a_i^2}{n_i} \times QMRes.$$

Como o $QMRes = 3,5325667$ e há 6 repetições por tratamento, o teste t para o contraste Y_1 fica:

$$\begin{aligned} t_{calc} &= \frac{\hat{Y}_i - 0}{\sqrt{\hat{V}(\hat{Y}_i)}} \\ &= \frac{-12,6033333 - 0}{\sqrt{12 \times \frac{3,5325667}{6}}} \\ t_{calc} &= -4,741604 \end{aligned}$$

o valor tabelado é $t_{tab} = t_{20;0,05} = 1,72$. Logo, o contraste Y_1 é significativo. Fica ao leitor a tarefa de realizar os cálculos para os demais contrastes.

Os comandos para realizar os testes para todos os contrastes usando o R é:

```
> require(gregmisc)
(C = rbind(" 3t1 vs (t2+t3+t4) " = c(3, -1, -1, -1),
          " 2t3 vs (t2 + t4) " = c(0, -1, 2, -1),
          " t2 vs t4 " = c(0, 1, 0, -1)))
fit.contrast(anava.av, "Trat", C, conf=0.95 )
qt(.95, 20)
```

cujos resultados são:

Contrasts	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	lower CI	upper CI
Trat 3t1 vs (t2+t3+t4)	-12.60	2.66	-4.74	0.00	-18.15	-7.06
Trat 2t3 vs (t2 + t4)	22.67	1.88	12.06	0.00	18.75	26.59
Trat t2 vs t4	0.45	1.09	0.42	0.68	-1.81	2.72

Obs.: O nível de significância obtido é por contraste. Já o nível de significância conjunto é dado por:

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^k \quad (3.6)$$

em que α é o nível de significância individual, geralmente 5% ou 1% e k o número de contrastes ortogonais.

No exemplo apresentado, $\alpha = 0,05$ e

$$\alpha' = 1 - (1 - 0,05)^3 = 0,1426.$$

ou seja, para 3 contrastes ortogonais, tem-se 14,26% de chance que ocorra uma diferença significativa por acaso (portanto, menos rigor nas conclusões).

Uma boa aproximação para α' é

$$\alpha' = n \times \alpha$$

que em nosso caso fica:

$$\alpha' = 3 \times 0,05 = 0,15.$$

3.3.4 Teste F

Esse mesmo estudo dos contrastes ortogonais feito pelo teste t , pode ser feito de forma mais elegante na própria análise de variância. Esse procedimento é conhecido como “desdobramento de graus de liberdade de tratamento” ou “partição da Soma de Quadrados de Tratamentos”, sendo que a cada contraste estará associado 1 grau de liberdade. Assim, em nosso exemplo, utilizando a equação 3.4 tem-se:

$$SQ_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n c_i y_{i.} \right)^2}{n \sum_{i=1}^a c_i^2}$$

$$SQ_{\hat{Y}_1} = \frac{(3 \times 135,85 - 139,75 - 206,39 - 137,03)^2}{6 \times [3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2]}$$

$$SQ_{\hat{Y}_1} = 79,4220054$$

$$SQ\hat{Y}_2 = \frac{(2 \times 206,39 - 139,75 - 137,03)^2}{6 \times [2^2 + (-1)^2 + (-1)^2]}$$

$$SQ\hat{Y}_2 = 513,7777778$$

$$SQ\hat{Y}_3 = \frac{(139,75 - 137,03)^2}{6 \times [(-1)^2 + (-1)^2]}$$

$$SQ\hat{Y}_3 = 0,616533$$

Assim, o quadro da análise de variância, apresentado na Tabela 3.3 pode ser escrito da seguinte forma:

Tabela 3.3 – Análise de variância para os dados do Exemplo 2.

Causa de Variação	gl	S.Q.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	Pr(> F)
\hat{Y}_1	1	79,4220054	79,4220054	22,48280419	4,351	0,0001
\hat{Y}_2	1	513,7777778	513,7777778	145,4404	4,351	1,245041e-10
\hat{Y}_3	1	0,61653333	0,61653333	0,1745	4,351	0,6806
Tratamentos	(3)	(593,8163167)	197,9387722	56,03	3,098	6,4953602e-10
Resíduo	20	70,6513333	3,5325667			

Obs.: Note que nesse caso em que F tem 1 grau de liberdade, tem-se que $F = t^2$. As conclusões são as mesmas.

Os comandos para realizar os desdobramentos usando o R é:

```
(contraste = rbind(c(3, -1, -1, -1),
                    c(0, -1, 2, -1),
                    c(0, 1, 0, -1)))
contr.ginv = ginv(contraste)
colnames(contr.ginv) = paste("Contraste", 1:3, sep = " ")
contrasts(exe0$Trat) = contr.ginv
mod1 = lm(Quilos ~ Trat, data = exe0)
anova(mod1)
summary(mod1)
exe0co = data.frame(model.matrix(Quilos ~ Trat, exe0)[, -1])
names(exe0co) = paste("Contraste", 1:3)
```

```
exe0co$resp = exe0$resp
mod2 = lm(Quilos ~ ., data = exe0co)
(av2 = anova(mod2))
contrasts(exe0$Trat) = NULL
```

3.3.5 Teste de Student-Newman-Keuls

O teste de Newman foi aperfeiçoado por Keuls e está sendo apresentado nos livros de estatística, como teste de Student-Newman-Keuls (SNK).

O SNK é derivado do teste de Tukey, sendo menos conservador (encontra mais diferenças). O teste de Tukey controla o erro para todas as comparações, já o SNK controla apenas para as comparações em consideração.

O teste consiste no seguinte: suponha-se que o experimento investigue a tratamentos. Deve-se ordenar pela ordem crescente, por exemplo, as médias obtidas; isto é, deve-se colocar $\bar{y}_1 < \bar{y}_2 < \dots < \bar{y}_a$.

Na sequência, calcula-se a diferença entre as médias. Se o valor obtido for maior que o determinado por Δ_{snk} :

$$\Delta_{snk} = q_i \sqrt{\frac{QMRes}{r}}$$

a diferença será significativa, e assim por diante.

O valor de q_i é obtido da tabela de Tukey, para o nível α de significância, correspondente a i distâncias entre as médias comparadas e n graus de liberdade do resíduo.

Se as médias comparadas \bar{y}_1 e \bar{y}_2 apresentarem diferente número de repetições, a diferença mínima significativa será dada por:

$$\Delta_{snk} = q_i \sqrt{\frac{QMRes}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

Os comandos para realizar o teste de Student-Newman-Keuls usando o R é:

```
require(agricolae)
teste.snk = SNK.test(anava.av, "Trat", main="")
              SNK.test(anava.av, "Trat", group=FALSE)
bar.group(teste.snk, ylim=c(0,40), density=4, border="blue", las=1,
           main='Teste SNK', xlab='Tipos de Ração',
           ylab='Peso médio das aves (kg)')
abline(h=0, col='black')
```

3.3.6 Teste de Tukey

Tukey (1953), propôs um procedimento de comparação múltipla que também é baseado na estatística da amplitude estudentizada. Para obter o valor da *diferença mínima significativa (d.m.s.)*, basta calcular:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{QMRes}{r}} \quad (3.7)$$

em que:

- ↪ $QMRes$ é o quadrado médio do resíduo da análise de variância;
- ↪ r é o número de repetições dos tratamentos;
- ↪ q é a amplitude total estudentizada e seu valor **tabelado** em função do número de tratamento (a) e do número de graus de liberdade do resíduo.

Para o exemplo em questão, tem-se que: $QMRes = 3,5325667$; $q = q_{4;20} = 3,958293$ e $r = 6$.

logo, substituindo-se os valores na Equação 3.7, a diferença mínima significativa será, ao nível de 5%:

$$\Delta = 3,96 \sqrt{\frac{3,5325667}{6}} = 3,04 \text{ kg.}$$

Construindo-se a tabela das médias ordenadas em ordem decrescente, tem-se:

	Médias (kg)	
Araruta (AR)	34,398	a
Mandioca (MA)	23,29	b
Batata Doce (BD)	22,84	b
Sem Suplemento (SS)	22,64	b

em que letras iguais indicam médias semelhantes.

Para obter o resultado do teste de Tukey usando o R, basta o seguinte comando:

```
anava.tukey = TukeyHSD(anava.av, 'Trat', ord=T)
anava.tukey
plot(anava.tukey, las=1, main=NULL, col='blue')
```

ou, usando o pacote *agricolae*:

```
teste.HSD = HSD.test(anava.av, 'Trat', main='Ganhos de Peso')
bar.group(teste.HSD, ylim=c(0,40), density=10, border="blue",
          las=1, angle=45, col='red', main='Teste de Tukey',
          xlab='Tipos de Ração', ylab='Peso médio das aves (kg)')
abline(h=0, col='black', lwd=1.9)
```

Os valores das diferenças (*diff*) entre as médias de pares de tratamentos, sendo t_1 = Sem Suplementação, t_2 = Mandioca, t_3 = Araruta e t_4 = Batata Doce, são:

```
Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level
factor levels have been ordered
Fit: aov(formula = Quilos ~ Trat)
$Trat
```

	diff	lwr	upr	p adj
t4-t1	0.1966667	-2.786929	3.180262	0.9976951
t2-t1	1.1900000	-1.793595	4.173595	0.6839503
t3-t1	11.7566667	8.773071	14.740262	0.0000000
t2-t4	0.9933333	-1.990262	3.976929	0.7882850
t3-t4	11.5600000	8.576405	14.543595	0.0000000
t3-t2	10.5666667	7.583071	13.550262	0.0000000

Observe que os pares que apresentam diferenças significativas são aqueles cujos limites inferiores (*lwr*) e superiores (*upr*) têm o mesmo sinal. Portanto, conclui-se que o suplemento alimentar Araruta, melhora a produção significativamente, não havendo diferença entre as médias dos demais tratamentos.

Uma visualização mais rápida das diferenças entre os pares de médias é obtida através da Figura 3.1:

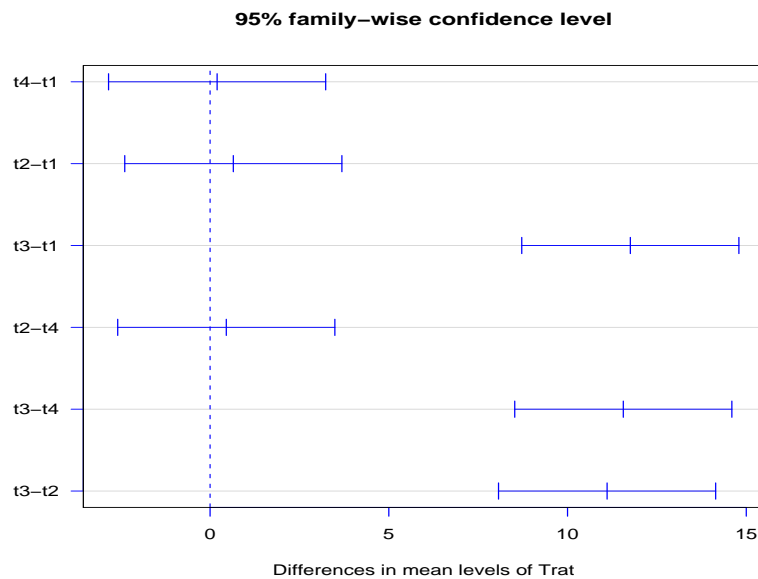


Figura 3.1 – Diferenças nas médias dos tratamentos

O método de Tukey é exato quando todos os tratamentos têm o mesmo número de repetições. Caso as médias confrontadas **não possuam o mesmo número de repetições**, aplica-se o teste de forma aproximada, da seguinte forma:

$$\Delta' = q \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V}(\hat{Y})}$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_k} \right) QM_{res}$$

em que r_i e r_k indicam o número de repetições das médias que estão sendo comparadas.

O teste de Tukey:

- fornece amplitudes dos intervalos de confiança menores que Bonferroni ou Scheffé;
- em sua forma básica, só pode ser usado para contrastes de médias duas a duas. (Há extensão para contrastes com mais de duas médias, mas neste caso é aconselhável o teste de Scheffé.)

3.3.7 Teste de Scheffé

O teste de Scheffé pode ser aplicado para testar todo e qualquer contraste envolvendo médias de tratamentos do tipo

$$Y = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_a\mu_a,$$

sendo a estimativa do contraste dada por:

$$\hat{Y} = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 + \cdots + c_a \bar{y}_a. \quad (3.8)$$

Ele não exige ortogonalidade nem que os contrastes sejam estabelecidos a priori, bastando apenas que o teste F da análise de variância para tratamentos seja significativo. A estatística do teste, denotada por S , é calculada por:

$$S = \sqrt{(a-1) F_{tab} \hat{V}(\hat{Y})},$$

em que:

- a) a é o número de tratamentos do experimento;
- b) F_{tab} é o valor crítico da tabela, ao nível α de probabilidade, em função dos números de graus de liberdade de tratamentos e do resíduo.
- c) $\hat{V}(\hat{Y}) = QMRes \sum_{i=1}^a \frac{c_i^2}{n_i}$

A Regra de Decisão do teste de Scheffé para saber se o contraste é diferente de zero, é tomada comparando-se a estimativa do contraste \hat{Y} com o valor de S , da seguinte forma

- a) se $|\hat{Y}| \geq S$, rejeita-se a hipótese $H_0 : Y_i = 0$, concluindo-se que o contraste de médias é diferente de zero;
- b) se $|\hat{Y}| < S$, não se rejeita a hipótese $H_0 : Y_i = 0$, concluindo-se que o contraste de médias não é diferente de zero;

Exemplo: Considere os dados da Tabela 2.1 e que o contraste a ser testado seja: $Y_1 = 3\mu_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_4)$.

Logo, as hipóteses são:

$$H_0 : Y_i = 0$$

$$H_1 : Y_i \neq 0$$

A estimativa do contraste Y_1 é, então:

$$\hat{Y}_1 = 3 \times 34,398 - (22,64 + 23,29 + 22,84)$$

$$\hat{Y}_1 = 34,424 \text{ kg}$$

Como o experimento é balanceado com 6 repetições para cada um dos 4 tratamentos, tem-se que o valor do $F_{tab} = F_{3; 20; 0,05} = 3,10$ e, ainda, que $QMRes = 3,5325667$.

Observando-se que:

$$\begin{aligned}\hat{V}(\hat{Y}) &= QMR_{es} \sum_{i=1}^a \frac{c_i^2}{n_i} \\ \hat{V}(\hat{Y}) &= 3,5325667 \times \left(\frac{3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{6} \right) \\ \hat{V}(\hat{Y}) &= 7,0651334 \text{ kg}^2.\end{aligned}$$

Aplicando-se o teste de Scheffé, tem-se:

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{(a-1) F_{tab} \hat{V}(\hat{Y})} \\ S &= \sqrt{(4-1) \times 3,10 \times 7,0651334} \\ S &= 8,10590776 \text{ kg}.\end{aligned}$$

Portanto, como $|Y_i| \geq S$, rejeita-se a hipótese $H_0 : Y_i = 0$, concluindo-se que a Araruta apresenta, em média, uma produção superior à média dos demais tipos de suplementação alimentar da ordem de 11,5 kg.

O teste de Scheffé:

- não importa quantas comparações serão feitas; aceito para comparações após os dados terem sido observados;
- se o número de comparações é grande, as amplitudes dos intervalos de confiança são menores do que o de Bonferroni;
- se o número de comparações é pequeno, é interessante usar outro teste.

Os comandos para realizar o teste de Scheffé usando o R é:

```
library(agricolae)
teste.scheffe = scheffe.test(anava.av, "Trat", main="")
bar.group(teste.scheffe, ylim=c(0,40), density=4, border="blue",
          las=1, main='Teste Scheffe',
          xlab='Tipos de Ração', ylab='Peso médio das aves (kg)')
abline(h=0, col='black')
```

Obs.: o teste de Scheffé é bastante rigoroso e seu uso é desaconselhável para a comparação entre duas médias de tratamentos, sendo mais indicado para testar contrastes mais complicados.

3.3.8 Teste de Duncan

Para aplicar o teste de Duncan para tratamentos com mesmo número de repetições, as médias dos a tratamentos são ordenadas de forma crescente. O teste de Duncan é

dado por:

$$R_p = D \times \sqrt{\frac{QMRes}{r}} \quad (3.9)$$

em que:

- $QMRes$ é o quadrado médio do resíduo da análise de variância;
- r é o número de repetições dos tratamentos;
- D é uma constante e seu valor é **tabelado** em função do número de médias abrangidas pelo teste e do número de graus de liberdade do resíduo.

As diferenças observadas entre as médias são testadas, iniciando-se com a maior *versus* a menor, que serão comparadas com a diferença mínima significativa R_p . A seguir, a diferença entre a menor e a segunda maior média é calculada e comparada com a diferença mínima significativa R_{a-1} . Estas comparações são realizadas até que todas as médias tenham sido comparadas com a maior média. Finalmente, a diferença da segunda maior média e a menor é calculada e comparada com o valor de R_{a-1} . O processo continua até que as diferenças entre todos os possíveis pares de médias tenham sido consideradas. Se uma diferença observada é maior que a diferença mínima significativa correspondente, então conclui-se que o par de médias em questão é significativamente diferente.

Caso o número de repetição dos tratamentos seja diferente, basta trocar r na Equação 3.9 pela média harmônica r_h dos r_i , dada por:

$$r_h = \frac{a}{\sum_{i=1}^a \frac{1}{r_i}}$$

Note que se $r_1 = r_2 = \dots = r_a$, então $r_h = r$.

O teste de Duncan é menos rigoroso que o teste de Tukey, pois o nível de significância varia de acordo com o número de médias envolvidas no grupo de médias ordenadas e pode detectar diferenças não discriminadas pelo teste de Tukey.

Para calcular o nível de significância do teste, basta substituir os termos da equação 3.6, observando que k é o número de médias abrangidas pelo teste.

Exemplo: Considere os dados da Tabela 2.1 cuja análise é apresentada na Tabela 3.3. Construindo-se a tabela das médias ordenadas em ordem crescente, tem-se:

	Médias (kg)	
Sem Suplemento (SS)	22,64	\bar{y}_1
Batata Doce (BD)	22,84	\bar{y}_2
Mandioca (MA)	23,29	\bar{y}_3
Araruta (AR)	34,398	\bar{y}_4

Os valores tabelados D , ao nível de 5% de significância, levam em consideração o número de médias abrangidas pelo teste, logo, tem-se que considerar:

$$D(2, 20) = 2,95$$

$$D(3, 20) = 3,10$$

$$D(4, 20) = 3,18$$

e as diferenças mínimas significativas, considerando-se 2, 3 e 4 médias, são dadas por:

$$R_2 = 2,95 \times \sqrt{\frac{3,5325667}{6}} = 2,26 \text{ kg}$$

$$R_3 = 3,10 \times \sqrt{\frac{3,5325667}{6}} = 2,38 \text{ kg}$$

$$R_4 = 3,18 \times \sqrt{\frac{3,5325667}{6}} = 2,45 \text{ kg}$$

Procedendo-se a comparação da diferença entre as médias com os valores de R_p , tem-se:

4	vs	1:	$34,398 - 22,64 = 11,758 \text{ kg}$	$> 2,45 \text{ kg}$	$\alpha' = 0,1855$
4	vs	2:	$34,398 - 22,84 = 11,558 \text{ kg}$	$> 2,38 \text{ kg}$	$\alpha' = 0,1426$
4	vs	3:	$34,398 - 23,29 = 11,108 \text{ kg}$	$> 2,26 \text{ kg}$	$\alpha' = 0,0975$
3	vs	1:	$23,29 - 22,64 = 0,65 \text{ kg}$	$< 2,38 \text{ kg}$	$\alpha' = 0,1426$
3	vs	2:	$23,29 - 22,84 = 0,45 \text{ kg}$	$< 2,26 \text{ kg}$	$\alpha' = 0,0975$
2	vs	1:	$22,84 - 22,64 = 0,20 \text{ kg}$	$< 2,26 \text{ kg}$	$\alpha' = 0,0975$

Do quadro, nota-se que só há diferença significativa para as médias confrontadas com a Araruta, não havendo diferença entre as demais.

No R para realizar o teste de Duncan bastam os seguintes comandos:

```
library(agricolae)
teste.duncan = duncan.test(anava.av, "Trat", main="Ganhos de Pesos")
duncan.test(anava.av, "Trat", alpha=0.01)
bar.group(teste.duncan, ylim=c(0,40), density=4, border="blue",
las=1, main='Teste de Duncan',
xlab='Tipos de Ração', ylab='Peso médio das aves (kg)')
abline(h=0, col='black')
```

3.3.9 Teste de Bonferroni

O teste de Bonferroni pode ser usado no cálculo de intervalos de confiança ou no estudo da comparação de k médias.

Se as médias de dois tratamentos forem \bar{y}_1 e \bar{y}_2 , com r repetições, as diferenças entre elas será considerada como significativa de acordo com o teste de Bonferroni, se $|\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}| > \Delta_B$, sendo que:

$$\Delta_B = t_{(\frac{\alpha}{2g}; gl)} \sqrt{QMRes \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i'}} \right)}$$

em que:

- i) o valor de t é o t de Student.
- ii) se vão ser feitas todas as comparações entre as médias, então o número de grupos de médias que serão comparados é dado por: $g = \binom{k}{2}$ (combinações das k médias, duas a duas).
- iii) se o nível α de significância for adotado para o conjunto das k comparações entre médias duas a duas, então o nível adotado de significância para os **testes individuais**, será $\gamma_B = \frac{\alpha}{g}$.
- iv) gl é o número de graus de liberdade do resíduo, no quadro da análise de variância.

O teste de Bonferroni:

- a) não é recomendado para dados já observados. É muito fácil ignorar as comparações que foram feitas para decidir o que testar;
- b) é interessante para comparações pré-planejadas, sendo pequeno o número de comparações planejadas;
- c) não é útil quando o número de comparações é grande.

Os comandos para realizar o teste de Bonferroni usando o R é:

```
library(agricolae)
teste.bonferroni = LSD.test(anava.av, "Trat", main="Ganhos de Pesos",
                             p.adj="bonferroni")
bar.group(teste.bonferroni, ylim=c(0,40), density=4, border="blue", las=1,
           main='Teste de Bonferroni', xlab='Tipos de Ração',
           ylab='Peso médio das aves (kg)')
abline(h=0, col='black')
```

3.3.10 Teste de Dunnett

Em muitos experimentos, um dos tratamentos é o chamado *controle* (ou *testemunha*) e o pesquisador está interessado em comparar cada uma das $a-1$ médias de tratamentos

com esse controle. Logo, há somente $a - 1$ comparações a serem feitas. Um procedimento para fazer estas comparações foi apresentado por Dunnett em 1964.

Suponha que o tratamento a seja o controle. Então, quer-se testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu_i = \mu_a$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_a$$

para $i = 1, 2, \dots, a - 1$. O teste de Dunnett é uma modificação do usual teste t . Para cada hipótese, calcula-se as diferenças observadas nas médias amostrais

$$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{a.} \quad i = 1, 2, \dots, a - 1$$

A hipótese nula $H_0 : \mu_i = \mu_a$ é rejeitada se

$$|\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{a.}| > d \sqrt{QMRes \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right)}$$

em que:

- ↪ $QMRes$ é o quadrado médio do resíduo da análise de variância;
- ↪ r_i é o número de repetições dos tratamentos;
- ↪ r_a é o número de repetições da testemunha;
- ↪ d é uma constante e seu valor é **tabelado** em função do número de tratamento ($a - 1$) e do número de graus de liberdade do resíduo.

Exemplo: Considere os dados da Tabela 2.1 cuja análise é apresentada na Tabela 3.3. Se o objetivo do pesquisador fosse comparar os tratamentos com a testemunha (neste caso *Sem Complemento*), aplicar-se-ia o teste de Dunnett:

$$D = d_{\alpha}(a - 1; gl) \sqrt{QMRes \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right)}$$

$$D = 2,54 \times \sqrt{3,5325667 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right)}$$

$$D = 2,707576 \text{ kg}$$

em que $d_{\alpha}(a - 1; gl)$ é o valor tabelado, sendo $a - 1 = 4 - 1 = 3$ tratamentos e $gl = 20$ graus de liberdade do resíduo, ao nível de 5% de significância.

$ \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{a.} $	Médias (kg)		
	Mandioca (23, 29)	Batata Doce (22, 84)	Araruta (34, 398)
Sem Suplemento (22, 64)	0,65 ^{ns}	0,196667 ^{ns}	11,756667 ^{**}

Assim, comparando-se as diferenças de médias entre os tratamentos e a testemunha com o valor calculado D , verifica-se que apenas a Araruta difere significativamente da testemunha (Sem Suplemento).

O teste de Dunnett:

- a) é o melhor método para comparações de tratamentos *vs* controle;
- b) não aplicável para outros tipos de comparações.

No R para realizar o teste de Dunnett, é preciso instalar o pacote *multcomp* e os seguintes comandos:

```
require(multcomp)
contra = glht(anava.av, linfct = mcp(Trat = c("t2 - t1 = 0",
                                             "t3 - t1 = 0",
                                             "t4 - t1 = 0")))
summary(contra)
confint(contra, level = 0.95)
```

Análise de variância com um fator

- 1) Experimentos realizados com aves (pintos) são baratos, relativamente homogêneos e de fácil manejo. Os fatores de variação a controlar são: linhagem, sexo e instalações e a unidade experimental tem, em geral, de 8 a 10 aves. Considerando que as condições experimentais são homogêneas, realizou-se um experimento no delineamento inteiramente casualizado para comparação de quatro tipos de rações. Os dados são apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Peso (*kg*) das parcelas (10 aves) ao final do experimento.

Ração A	Ração B	Ração C	Ração D
20,00	17,44	19,20	18,74
23,40	19,42	23,26	16,18
22,40	20,32	23,14	18,48
20,68	18,24	20,32	18,94
21,26	18,22	19,42	18,18
20,00	19,30	18,80	18,80

Pede-se:

- Determine as médias e variâncias para cada tratamento;
 - Faça o gráfico de caixas, comparando os tratamentos;
 - Verifique se a pressuposição de homogeneidade de variância é atendida;
 - Verifique se a pressuposição de normalidade dos resíduos é atendida;
 - Enuncie as hipóteses e proceda à análise de variância;
 - Caso haja significância dos tratamentos, aplique o teste de Tukey;
 - Tirar as conclusões práticas possíveis para este experimento;
 - Determine os erros padrões dos tratamentos e o coeficiente de variação do experimento.
- 2) Num experimento inteiramente casualizado com 4 tratamentos e 4 repetições, estudaram-se os efeitos de Bacitracina² de zinco (BDZ) e Anti-stress sobre frangos de corte alimentados com rações à base de sorgo, desde a fase inicial até a final. Foram utilizados 540 pintos da raça “Cobb-100” da Granja Avisco - Mococa, SP., e os tratamentos foram:

²A Bacitracina é um antibiótico produzido pelas cepas TRACY-I de *Bacillus subtilis*, formando um grupo de antibióticos polipeptídios

- A** - Concentrado Comercial + Milho;
B - Concentrado Comercial + Sorgo;
C - Concentrado Comercial + Sorgo + BDZ;
D - Concentrado Comercial + Sorgo + Anti-stress.

Os resultados obtidos para a conversão alimentar no período inicial (4 a 35 de idade) foram:

Tratamentos	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 4	Total
A	2,10	1,99	2,02	2,00	8,11
B	2,35	2,26	2,18	2,17	8,96
C	2,02	2,04	2,03	2,05	8,14
D	2,19	2,11	2,29	2,30	8,89

Pede-se:

- Determine as médias e variâncias para cada tratamento;
- Faça o gráfico de caixas, comparando os tratamentos;
- Verifique se a pressuposição de homogeneidade de variância é atendida;
- Verifique se a pressuposição de normalidade dos resíduos é atendida;
- Enuncie as hipóteses e proceda à análise de variância;
- Estabelecer os contrastes de totais de tratamentos para cada componente do desdobramento:
 - Milho *vs* sorgos;
 - Sorgo *vs* Sorgo + Aditivos;
 - Bacitracina *vs* Anti-stress.
- Calcular as somas de quadrados para cada componente do desdobramento realizado no item (2f);
- Construa o quadro da análise de variância, acrescentando as somas de quadrados dos desdobramentos dos graus de liberdade de tratamentos;
- Tirar as conclusões práticas possíveis para este experimento;
- Determine os erros padrões dos tratamentos e o coeficiente de variação do experimento.

“Aprender é a única coisa que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.”

Leonardo da Vinci.

Capítulo 4

Delineamento em Blocos Casualizados

4.1 Introdução

Experimento em blocos casualizados são aqueles que levam em consideração os 3 princípios básicos da experimentação, sendo que o **controle local** é feito na sua forma mais simples e é chamado de **blocos**.

Sempre que não houver homogeneidade das condições experimentais, deve-se utilizar o princípio do controle local, estabelecendo, então, sub-ambientes homogêneos (blocos) e instalando, em cada um deles, todos os tratamentos, igualmente repetidos. Como cada bloco deve receber todos os tratamentos uma só vez, diz-se que blocos são **repetições**. Se receber mais de uma vez cada tratamento, diz-se experimentos em blocos casualizados com repetições dentro de blocos.

O delineamento em blocos casualizados é mais eficiente que o inteiramente ao acaso e, essa eficiência depende da uniformidade das parcelas de cada bloco, podendo, inclusive, haver diferenças bem acentuadas de um bloco para outro.

4.2 Modelo estatístico

Suponha a tratamentos que serão comparados e b blocos. Suponha ainda que há uma observação por tratamento em cada bloco e a ordem em que os tratamentos são atribuídos a cada um dos blocos é determinado aleatoriamente. Os dados seriam da forma:

Bloco 1		Bloco 2		Bloco b
y_{11}		y_{12}		y_{1b}
y_{21}		y_{22}		y_{2b}
y_{31}		y_{32}	\dots	y_{3b}
\vdots		\vdots		\vdots
y_{a1}		y_{a2}		y_{ab}

O modelo estatístico para este delineamento é:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases} \quad (4.1)$$

em que:

- a) μ é a média geral (ou uma constante);
- b) y_{ij} é o valor observado na parcela que recebeu o i-ésimo tratamento no j-ésimo bloco;
- c) τ_i é um parâmetro que representa o i-ésimo efeito de tratamento;
- d) β_j é um parâmetro que representa o j-ésimo efeito de bloco;
- e) ϵ_{ij} é um componente do erro aleatório, associado ao j-ésimo bloco e i-ésimo tratamento, tal que $\epsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$.

Considere a estimação dos parâmetros do modelo (4.1), usando o método de mínimos quadrados. A função de mínimos quadrados é:

$$L = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [y_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j]^2.$$

Derivando-se L em relação aos parâmetros $(\mu, \tau_i$ e $\beta_j)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mu} &= 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j] \times (-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \tau_i} &= 2 \sum_{j=1}^b [y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j] \times (-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta_j} &= 2 \sum_{i=1}^a [y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j] \times (-1) = 0 \end{aligned}$$

e igualando-se os resultados a zero e aplicando os somatórios, obtém-se o chamado sistema de equações normais:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij} & = & ab\hat{\mu} + b\hat{\tau}_1 + b\hat{\tau}_2 + \cdots + b\hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_1 + a\hat{\beta}_2 + \cdots + a\hat{\beta}_b \\ \sum_{j=1}^b y_{1j} & = & b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_1 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \cdots + \hat{\beta}_b \\ \sum_{j=1}^b y_{2j} & = & b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_2 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \cdots + \hat{\beta}_b \\ & \vdots & \\ \sum_{j=1}^b y_{aj} & = & b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_a + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \cdots + \hat{\beta}_b \\ \sum_{i=1}^a y_{i1} & = & a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \cdots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_1 \\ \sum_{i=1}^a y_{i2} & = & a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \cdots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^a y_{ib} & = & a\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \cdots + \hat{\tau}_a + a\hat{\beta}_b \end{array} \right.$$

que pode ser resumido como:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij} & = & ab\hat{\mu} + b \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i + a \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j \\ \sum_{j=1}^b y_{ij} & = & b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j \\ \sum_{i=1}^a y_{ij} & = & a\hat{\mu} + \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i + a\hat{\beta}_j \end{array} \right.$$

cujo sistema só tem solução, se impusermos as restrições $\sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i = 0$ e $\sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j = 0$. E os resultados são:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij} & = & ab\hat{\mu} \\ \sum_{j=1}^b y_{ij} & = & b\hat{\mu} + b\hat{\tau}_i \quad i = 1, 2, \dots, a \\ \sum_{i=1}^a y_{ij} & = & a\hat{\mu} + a\hat{\beta}_j \quad j = 1, 2, \dots, b \end{array} \right.$$

Os estimadores de mínimos quadrados para μ , τ_i e β_j , são dados por:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}; \quad (4.2)$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad (4.3)$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \quad j = 1, 2, \dots, b; \quad (4.4)$$

A redução na soma de quadrados devido ao ajuste do modelo (4.1) é dada por:

$$R(\mu, \tau, \beta) = \hat{\mu} y_{..} + \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i y_{i.} + \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j y_{.j} \quad (4.5)$$

Substituindo-se as estimativas obtidas pelas equações de 4.2 a 4.4, na equação 4.5 e, após manipulação algébrica, tem-se:

$$\begin{aligned} R(\mu, \tau, \beta) &= \hat{\mu} y_{..} + \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i y_{i.} + \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j y_{.j} \\ &= \bar{y}_{..} y_{..} + \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) y_{i.} + \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) y_{.j} \\ R(\mu, \tau, \beta) &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} + \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $a + b - 1$ graus de liberdade. A variabilidade restante não levada em conta pelo modelo é a chamada soma de quadrados de resíduos, dada por:

$$SQRes = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - R(\mu, \tau, \beta) \quad (4.7)$$

Substituindo-se a equação 4.6 em 4.7, obtém-se:

$$SQRes = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} - \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} + \frac{y_{..}^2}{ab} \quad (4.8)$$

com $(a - 1)(b - 1)$ graus de liberdade.

Para testar a hipótese $H_0 : \tau_i = 0$, o modelo reduzido é:

$$y_{ij} = \mu + \beta_j + \epsilon_{ij}$$

que é uma análise de variância no delineamento inteiramente casualizado. Por analogia com a equação ??, tem-se:

$$R(\mu, \beta) = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a}$$

que tem b graus de liberdade. Portanto, a soma de quadrados devido a τ_i , após ajustar para μ e β_j é:

$$R(\tau \mid \mu, \beta) = R(\mu, \tau, \beta) - R(\mu, \beta) \quad (4.9)$$

$$= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} + \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} - \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} \quad (4.10)$$

$$R(\tau \mid \mu, \beta) = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab} \quad (4.11)$$

que é a **soma de quadrados de tratamentos**, com $a - 1$ graus de liberdade.

A soma de quadrados de blocos é obtida ajustando-se o modelo reduzido:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

que é, também, uma análise de variância no delineamento inteiramente casualizado. Novamente, por analogia com a equação ??, a redução na soma de quadrados para o ajuste desse modelo é:

$$R(\mu, \tau) = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b}$$

com a graus de liberdade. Assim, a **soma de quadrados para blocos** β_j , após ajustar para μ e τ_i é:

$$\begin{aligned} R(\beta \mid \mu, \tau) &= R(\mu, \tau, \beta) - R(\mu, \tau) \\ &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} + \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} \\ R(\beta \mid \mu, \tau) &= \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} \end{aligned}$$

que é a **soma de quadrados de blocos**, com $a - 1$ graus de liberdade.

Pode-se resumir as somas de quadrados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} SQTotal &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{ab} & SQTrat &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab} \\ SQBlocos &= \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} & SQRes &= SQTotal - SQTrat - SQBlocos \end{aligned}$$

Os cálculos são usualmente apresentados em uma tabela de variância, tal como a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Quadro da análise de variância para delineamento em blocos casualizados.

Causa de Variação	S.Q.	gl	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	Pr(> F)
Tratamentos	$SQTrat$	$a - 1$	$\frac{SQTrat}{a-1}$	$\frac{QMTreat}{QMRes}$	$F_{\alpha; a-1, (a-1)(b-1)}$	
Blocos	$SQBlocos$	$b - 1$	$\frac{SQBlocos}{b-1}$			
Resíduo	$SQRes$	$(a - 1)(b - 1)$	$\frac{SQRes}{(a-1)(b-1)}$			
Total	$SQTotal$	$ab - 1$				

Exemplo: Com a finalidade de estudar os efeitos da administração de raízes e tubérculos, como suplementação de inverno na alimentação de vacas em lactação, considerou-se um experimento em blocos casualizados com 4 tipos de suplementos (tratamentos) e 5 raças (blocos). As produções médias diárias de leite (kg) são apresentadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Valores de produção de leite (kg).

Blocos	Tratamentos				Totais
	Sem suplementação	Mandioca	Araruta	Batata Doce	
Gir	6,4	10,9	12,0	11,2	40,5
Holandesa	6,2	11,6	10,9	11,6	40,3
Jersey	6,2	11,4	11,5	10,9	40,0
Nelore	7,1	10,4	11,1	12,1	40,7
Guzerá	6,6	12,4	11,8	10,1	40,9
$\sum_{j=1}^5 y_{ij}$	32,5	56,7	57,3	55,9	202,4
$\sum_{j=1}^5 y_{ij}^2$	211,81	645,25	657,51	627,23	2.141,8

Antes de se proceder à análise de variância, pode-se utilizar o gráfico de caixas para exploração dos dados e, também, verificar se as exigências do modelo estão satisfeitas. A Figura 4.1 apresenta o gráfico de caixas (*box plot*) para cada nível da variável produção de leite. Note que há uma forte evidência de que a produção de leite pode estar relacionada com a suplementação alimentar.

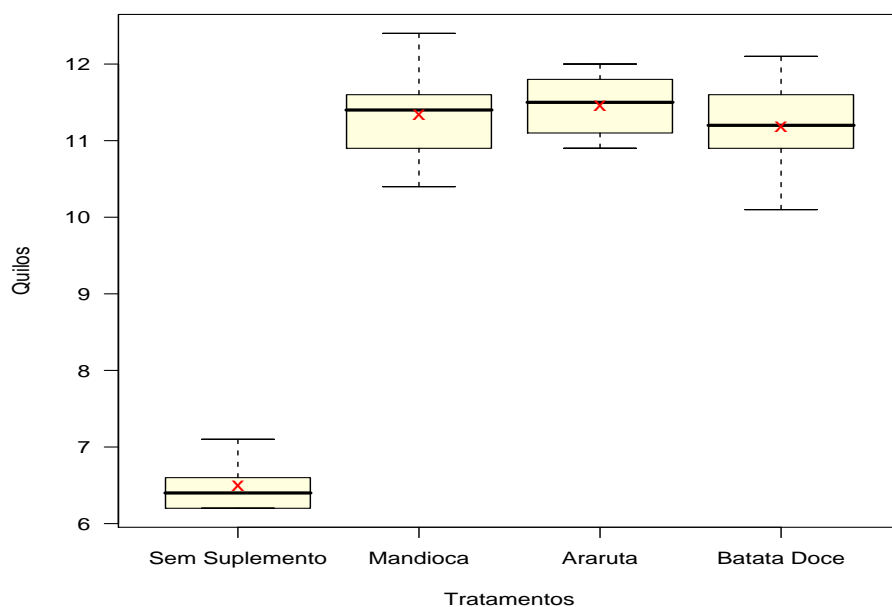


Figura 4.1 – Produção de leite (kg) levando-se em conta o complemento alimentar.

A entrada de dados no R é

```
prod = c(6.4,6.2,6.2,7.1,6.6,10.9,11.6,11.4,10.4,12.4,12.0,10.9,
        11.5,11.1,11.8,11.2,11.6,10.9,12.1,10.1)
Prod = data.frame(Trat=factor(rep(1:4, each=5)), Blocos=factor(rep(1:5, 4)), resp=prod)
attach(Prod)
```

Homogeneidade de variâncias: A aplicação do teste de Bartlett é:

```
> bartlett.test(prod, Trat)
      Bartlett test of homogeneity of variances
data:  Prod by Trat
Bartlett's K-squared = 2.5002, df = 3, p-value = 0.4753
```

mostrando que há homogeneidade de variâncias.

Normalidade dos resíduos: Usa-se o teste de Shapiro-Wilks, cujo resultado é:

```
> anava.bl = aov(prod~Trat+Blocos)
> shapiro.test(anava.bl$res)
      Shapiro-Wilk normality test
data:  res
W = 0.9778, p-value = 0.9033
```

Aditividade: Usa-se o teste de aditividade de Tukey, cujo resultado é:

```
> require(asbio)
> tukey.add.test(prod, Trat, Blocos)
      Tukey's one df test for additivity
data:  Trat and Blocos on  prod
F = 0.2978, num.df = 1, denom.df = 11, p-value = 0.5962
```

A realização do teste é apresentada em detalhes na seção 9.2.

Logo, verificou-se que há homogeneidade de variâncias, os erros têm distribuição normal e que os efeitos principais são aditivos. Pode-se, portanto, aplicar a metodologia

discutida aos dados apresentados na Tabela 4.2, tem-se:

$$\begin{aligned}
 SQT_{total} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{ab} \\
 &= (6,4^2 + 10,9^2 + \dots + 10,1^2) - \frac{(202,4)^2}{4 \times 5} \\
 SQT_{total} &= 93,512 \\
 SQT_{trat} &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab} \\
 &= \frac{1}{5} [55,9^2 + 56,7^2 + 57,3^2 + 32,5^2] - \frac{(202,4)^2}{4 \times 5} \\
 SQT_{trat} &= 87,560
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Blocos} &= \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} \\
 &= \frac{1}{4} [40,5^2 + 40,3^2 + 40,0^2 + 40,7^2 + 40,9^2] - \frac{(202,4)^2}{4 \times 5} \\
 SQ_{Blocos} &= 0,122 \\
 SQ_{Res} &= SQT_{total} - SQT_{trat} - SQ_{Blocos} \\
 &= 93,512 - 87,560 - 0,122 \\
 SQ_{Res} &= 5,83
 \end{aligned}$$

e substituindo-se esses resultados na Tabela 4.1, obtém-se a análise de variância no delineamento em blocos ao acaso, apresentada na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Análise de variância no delineamento em blocos casualizados.

Causa de variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	Pr(>F)
Blocos	0,122	4	0,030	0,0628	3,2592 ^{ns}	0,9918
Tratamentos	87,560	3	29,187	60,0755	3,4903 ^{**}	1,689e-07
Resíduos	5,830	12	0,486			

Como $F_{calc} > 3,49$, **rejeita-se** H_0 , ou seja, pelo menos um dos tratamentos difere dos demais.

Como pelo menos uma das médias dos tratamentos difere, é necessário aplicar o teste de Tukey para se determinar qual o tratamento que difere dos demais. Assim, aplicando-

se a fórmula 3.7, tem-se

$$\Delta = 4,19866 \sqrt{\frac{0,4858}{5}} = 1,308788 \text{ kg.}$$

No R para se determinar o valor q tabelado, basta o seguinte comando:

```
qtt = qtuke(.95, 4, 12)
```

ou, a diferença mínima significativa, diretamente, dada por:

```
Delta = qtuke(.95, 4, 12) * sqrt(anova(anava.bl) $Mean[3] / 5)
Delta
```

Construindo-se a tabela das médias ordenadas em ordem decrescente, tem-se:

	Médias (kg)	
Araruta (AR)	11,46	b
Mandioca (MA)	11,34	b
Batata Doce (BD)	11,18	b
Sem Suplemento (SS)	6,50	a

em que letras iguais indicam médias semelhantes.

Conclui-se que quando não se usa suplemento alimentar, a média de produção de leite reduz significativamente. As diferenças entre as médias de tratamentos podem ser visualizadas na Figura 4.2

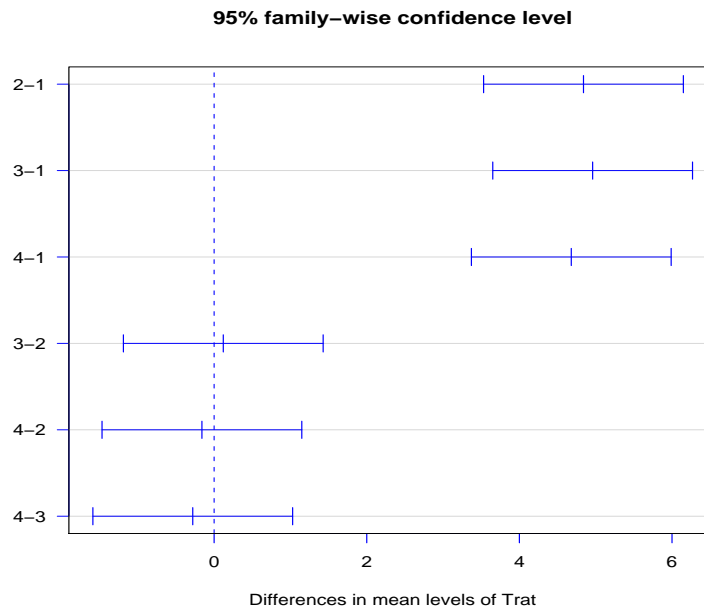


Figura 4.2 – Comparação das diferenças entre tratamentos pelo Teste de Tukey.

Para obter o teste de Tukey diretamente do R, os comandos são:

```
summary(anava.bl = aov(prod ~ Blocos + Trat))  
TukeyHSD(anava.bl, "Trat", ordered = TRUE)  
plot(TukeyHSD(anava.bl, "Trat"), col='blue', las=1)
```

Análise de variância com dois fatores

- 1) Em um experimento com poedeiras, os fatores a controlar são: raça ou linhagem; nível e estágio da produção de ovos; peso do corpo e instalações. O número de poedeiras comumente empregado por parcela é de 4 a 8. Assim, num experimento simulado de alimentação de poedeiras, utilizou-se cinco tratamentos e quatro repetições por bloco. A constituição dos blocos foi levando em consideração os pesos das poedeiras. Portanto, num bloco colocou-se as melhores poedeiras, noutra as de segunda escolha e assim por diante. Na Tabela 4.4 são apresentados os números médios de ovos por poedeira, durante o período total de postura, nos diferentes tratamentos e blocos.

Tabela 4.4 – Número médio de ovos por ave nos respectivos tratamentos e blocos.

Tratamentos	Bloco I	Bloco II	Bloco III	Bloco IV	Total
A	202,5	200,4	180,9	190,3	774,1
B	220,3	215,4	219,6	210,5	865,8
C	210,7	205,6	200,4	190,8	807,5
D	230,4	225,6	215,7	220,1	891,8
E	200,0	194,1	180,7	190,0	764,6
Total	1.063,9	1.041,1	997,1	1.001,7	4.103,8

Pede-se:

- Determine as médias e variâncias para cada tratamento;
- Faça o gráfico de caixas, comparando os tratamentos;
- Verifique se a pressuposição de homogeneidade de variância é atendida;
- Verifique se a pressuposição de normalidade dos resíduos é atendida;
- Verifique se a pressuposição de aditividade dos fatores é atendida;
- Enuncie as hipóteses e proceda à análise de variância;
- Caso haja significância dos tratamentos, aplique o teste de Tukey;
- Tirar as conclusões práticas possíveis para este experimento;
- Determine os erros padrões dos tratamentos e o coeficiente de variação do experimento.

Capítulo 5

Delineamento em Quadrado Latino

5.1 Introdução

Na Seção 4 introduziu-se o delineamento em blocos casualizados como um delineamento usado para reduzir o erro residual de um experimento, removendo a variabilidade devido a uma variável de perturbação conhecida e controlável. Há outros tipos de delineamentos que se utilizam do princípio de blocagem.

Considere um experimento, cujo objetivo foi estudar o efeito da idade de castração no desenvolvimento e produção de suínos, avaliando-se o peso dos leitões. Quatro tratamentos foram estudados:

A - castração aos 56 dias de idades;

B - inteiros (não castrados).

C - castração aos 7 dias de idade;

D - castração aos 21 dias de idade;

Duas causas de variação que podem afetar o peso final dos animais são: o número de leitões de cada cria (leitegada) e o peso inicial de cada animal. Essas duas causas de variação podem ser controladas utilizando-se o delineamento em Quadrado Latino, sendo que a **variação entre leitegadas** foi **controlada pelas linhas** do quadrado e a **variação dos pesos** dos leitões dentro das leitegadas foi **isolada pelas colunas**.

A Tabela 5.1 apresenta a aleatorização usada para cada fator e os valores de ganhos de pesos, em quilos, obtidos ao final do experimento (252 dias).

Tabela 5.1 – Ganhos de pesos, em quilos, ao final do experimento (252 dias), nos respectivos tratamentos

Linhas	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Totais da linha
Leitegada 1	(A) 93,0	(B) 108,6	(C) 108,9	(D) 102,0	412,5
Leitegada 2	(B) 115,4	(D) 96,5	(A) 77,9	(C) 100,2	390,0
Leitegada 3	(C) 102,1	(A) 94,9	(D) 116,9	(B) 96,0	409,9
Leitegada 4	(D) 117,6	(C) 114,1	(B) 118,7	(A) 97,6	448,0
Totais da Coluna	428,1	414,1	422,4	395,8	1.660,4

O quadrado latino é usado para eliminar duas causas de variação, ou seja, ele permite 'blocos' em duas direções. Deste modo linhas e colunas representam, na verdade, duas restrições à aleatorização. Em geral, um quadrado latino para p fatores, ou um quadrado latino $p \times p$, é um quadrado contendo p linhas e p colunas. Cada uma das p^2 caselas contém uma das p letras que correspondem aos tratamentos e, cada letra ocorre apenas uma vez em cada linha e coluna. Alguns exemplos de quadrados latinos são:

4 × 4				5 × 5					6 × 6					
A	B	C	D	A	D	B	E	C	A	D	C	E	B	F
B	D	A	C	D	A	C	B	E	B	A	E	C	F	D
C	A	D	B	C	B	E	D	A	C	E	D	F	A	B
D	C	B	A	B	E	A	C	D	D	C	F	B	E	A
				E	C	D	A	B	F	B	A	D	C	E
									E	F	B	A	D	C

A principal exigência do quadrado latino é que o número de repetições seja igual ao número de tratamentos. O inconveniente é que quando este número é muito grande, o quadrado latino torna-se impraticável.

Para atribuir os tratamentos às parcelas usando o R, basta digitar o comando:

```
library(agricolae)
Tratamentos = c(LETTERS[1:4])
# ou,
Tratamentos = c('A','B','C','D')
```

```
(QL = design.lsd(Tratamentos, number=1, seed=23))
```

O modelo estatístico para o delineamento quadrado latino é:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \beta_k + \epsilon_{ijk}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (5.1)$$

em que:

- a) y_{ijk} é o valor observado na i -ésima linha e k -ésima coluna para o j -ésimo tratamento;
- b) μ é a média geral;
- c) α_i é o efeito da i -ésima linha;
- d) τ_j é o efeito do j -ésimo tratamento;
- e) β_k é o efeito da k -ésima coluna;
- f) ϵ_{ijk} é um componente do erro aleatório, associado à i -ésima linha, k -ésima coluna e j -ésimo tratamento;

O modelo é completamente aditivo, ou seja, não há interação entre linhas, colunas e tratamentos.

Assim como nos modelos estudados anteriormente, o modelo dado pela equação (5.1) é superparametrizado. Logo, impõe-se as restrições usuais, que implicam que os efeitos α_i , β_k e τ_j sejam interpretados como desvios em relação à média geral, μ , devido à linha, coluna e tratamento:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0; \quad \sum_{k=1}^p \beta_k = 0; \quad \sum_{j=1}^p \tau_j = 0.$$

A análise de variância consiste em particionar a soma de quadrado de $N = p^2$ observações para componentes de linhas, colunas, tratamentos e resíduo, da seguinte forma:

$$SQTotal = SQLinhas + SQColunas + SQTratamentos + SQResiduo \quad (5.2)$$

com os respectivos graus de liberdade:

$$p^2 - 1 = (p - 1) + (p - 1) + (p - 1) + (p - 2)(p - 1).$$

Sob a suposição usual que $\epsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$, cada soma de quadrado do lado direito da Equação 5.2 é, após a divisão por σ^2 , uma variável aleatória qui-quadrado independentemente distribuída. A estatística apropriada para testar que não existe diferença entre tratamentos é dada por:

$$F_0 = \frac{QMTrat}{QMRes}$$

que tem distribuição $F_{(p-1), (p-2)(p-1)}$ sob a hipótese nula. Pode-se também testar se existe efeito de linhas e colunas através da razão entre QM_{Linhas} ou $QM_{Colunas}$ em relação ao QM_{Res} . Entretanto, como as linhas e colunas representam restrições na aleatorização, estes testes não são apropriados.

Para verificarmos se a hipótese nula ($H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$) é aceita ou não, completa-se o **Quadro da Análise de Variância** apresentado na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Quadro da Análise de Variância.

C.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}
Tratamentos	SQ_{Trat}	$p - 1$	$\frac{SQ_{Trat}}{p-1}$	$\frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$	$F_{\alpha; p-1, (p-2)(p-1)}$
Linhas	SQ_{Linhas}	$p - 1$	$\frac{SQ_{Linhas}}{p-1}$		
Colunas	$SQ_{Colunas}$	$p - 1$	$\frac{SQ_{Trat}}{p-1}$		
Resíduo	SQ_{Res}	$(p-2)(p-1)$	$\frac{SQ_{Res}}{(p-2)(p-1)}$		
Total	SQ_{Total}	$p^2 - 1$			

em que as somas de quadrados são dadas por:

$$\begin{aligned}
 SQ_{Total} &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p y_{ijk}^2 - C & C &= \frac{\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p y_{ijk} \right)^2}{N} \\
 SQ_{Trat} &= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p y_{.j.}^2 - C \\
 SQ_{Linhas} &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_{i..}^2 - C \\
 SQ_{Colunas} &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{..k}^2 - C \\
 SQ_{Res} &= SQ_{Total} - SQ_{Trat} - SQ_{Linhas} - SQ_{Colunas}
 \end{aligned}$$

Considerando os dados apresentados na Tabela 5.1, percebe-se que foram aproveitados quatro leitões de cada leitegada, de forma que na primeira coluna foram colocados os leitões mais pesados, na segunda os que vinham a seguir e na última os mais leves.

Antes de se proceder à análise de variância, pode-se utilizar o gráfico de caixas para exploração dos dados. As Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, mostram o comportamento da variável ganho de peso. Observa-se, na Figura 5.1, que o tratamento A parece destoar dos demais, o que é confirmado com o gráfico das médias, apresentado na Figura 5.4. Observe que o tratamento A é o número 1 do gráfico de médias.

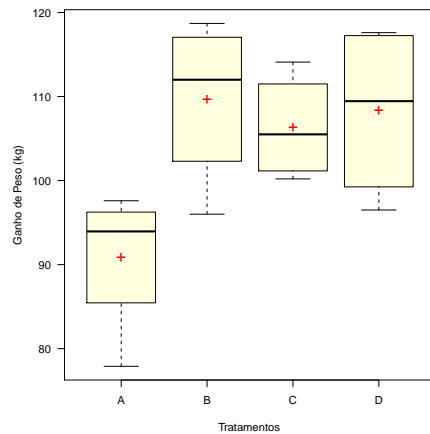


Figura 5.1 – Tratamentos

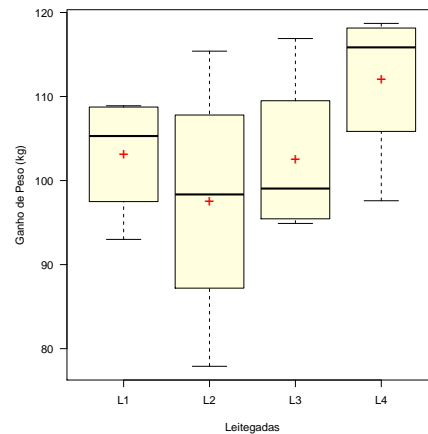


Figura 5.2 – Linhas

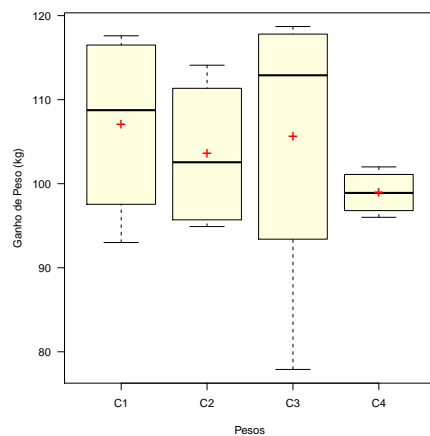


Figura 5.3 – Colunas

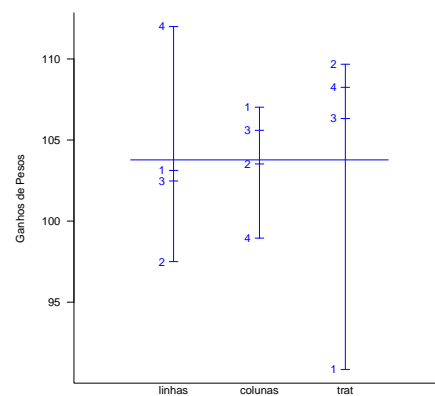


Figura 5.4 – Médias

Antes de proceder à análise de variância é necessário checar se os resíduos têm distribuição normal e se as variâncias são homogêneas. A verificação da distribuição dos erros é feita graficamente e através do teste de Shapiro-Wilks que no R, são realizadas com os comandos:

```
par(mai=c(1,1,.5,.5))
plot(latin, which=c(2:2), pch=19, col='red', las=1)
latin = aov(ganhoql ~ trat + linhas + colunas)
```

O gráfico para verificação da normalidade dos resíduos é apresentado na Figura 5.5. Percebe-se que não há razão para duvidar que os resíduos tenham distribuição normal.

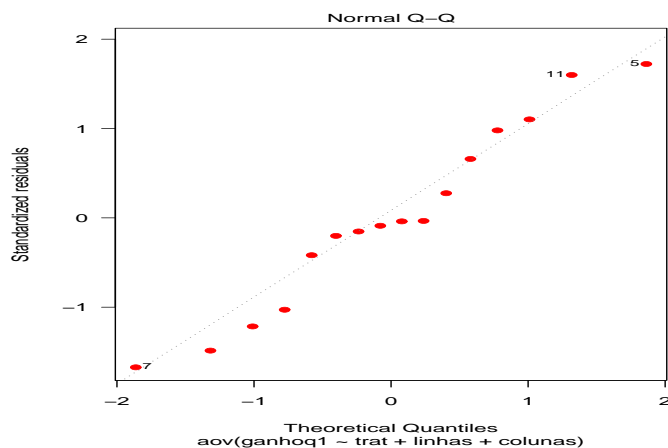


Figura 5.5 – QQPlot para verificar se os dados têm distribuição normal.

A confirmação da normalidade dos resíduos é feita através do teste de Shapiro-Wilk, cujo resultado é:

```
> shapiro.test(latin$res)
      Shapiro-Wilk normality test
data:  latin$res
W = 0.959, p-value = 0.644
```

A verificação da homogeneidade de variâncias, através do teste de Bartlett, é realizada com os seguintes comandos:

```
> bartlett.test(ganhoq, trat)
      Bartlett test of homogeneity of variances
data:  ganhoq and trat
Bartlett's K-squared = 0.7291, df = 3, p-value = 0.8663
```

mostrando não haver motivos para duvidar da homogeneidade entre as variâncias dos tratamentos.

Considerando que os pressupostos foram atendidos, procede-se à análise de variância:

C.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	$Pr(> F)$
Tratamentos	913,57	3	304,525	4,42	0,0578
Linhas	436,55	3	145,518	2,11	0,1998
Colunas	148,95	3	49,648	0,72	0,5749
Resíduo	413,00	6	68,833		

os cálculos para obtenção dos valores apresentados no quadro da Análise de variância são:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p y_{ijk} \right)^2}{N} \\
 &= \frac{(93,0 + 108,6 + \dots + 118,7 + 97,6)^2}{16} = \frac{(1660,4)^2}{16} \\
 C &= \mathbf{172.308} \\
 SQTotal &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p y_{ijk}^2 - C \\
 &= (93,0^2 + 108,6^2 + \dots + 118,7^2 + 97,6^2) - 172.308 \\
 SQTotal &= \mathbf{1.912,07} \\
 \\
 SQTrat &= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p y_{.j.}^2 - C \\
 &= \frac{1}{4} \times (363,4^2 + 438,7^2 + 425,3^2 + 433,0^2) - 172.308 \\
 SQTrat &= \mathbf{913,575} \\
 \\
 SQLinhas &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_{i..}^2 - C \\
 &= \frac{1}{4} \times (412,5^2 + 390,0^2 + 409,9^2 + 448,0^2) - 172.308 \\
 SQLinhas &= \mathbf{436,555} \\
 \\
 SQColunas &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{..k}^2 - C \\
 &= \frac{1}{4} \times (428,1^2 + 414,1^2 + 422,4^2 + 395,8^2) - 172.308 \\
 SQColunas &= \mathbf{148,945} \\
 \\
 SQRes &= SQTotal - SQTrat - SQLinhas - SQColunas \\
 &= 1.912,07 - 913,575 - 436,555 - 148,945 \\
 SQRes &= \mathbf{412,995}
 \end{aligned}$$

Considerando que o p - valor está no limite da significância e que o número de graus de liberdade do resíduo é baixo, seria interessante que o experimento pudesse ser repetido.

Caso, na condução do experimento, uma observação seja perdida é possível estimá-la usando:

$$y_{ijk} = \frac{p(y'_{i..} + y'_{.j.} + y'_{..k}) - 2y'_{...}}{(p-2)(p-1)}$$

em que as aspas indicam os totais para linha, tratamento e coluna com o valor perdido e, $y'_{...}$ é o total geral com o valor perdido.

5.1.1 Repetindo o Quadrado Latino

Uma desvantagem de quadrados latinos pequenos é que eles fornecem um número relativamente baixo de graus de liberdade no resíduo. Por exemplo, um quadrado latino 3×3 tem somente 2 graus de liberdade no resíduo, um quadrado latino 4×4 tem somente 6 graus de liberdade no resíduo e assim por diante. Quando pequenos quadrados latinos são usados é recomendável repeti-los para aumentar os graus de liberdade do resíduo.

Há algumas maneiras de se repetir o quadrado latino. Considere que o quadrado latino 4×4 foi repetido n vezes. Isto poderia ter sido feito da seguinte forma:

Caso 1. Usar os mesmos níveis (em linhas e colunas) em cada repetição;

Caso 2. Usar os mesmos níveis nas linhas, mas diferentes nas colunas em cada repetição (ou, de forma equivalente, usar os mesmos níveis nas colunas e diferentes nas linhas);

Caso 3. Usar níveis diferentes em linhas e colunas.

A análise de variância irá depender do método de repetição.

Caso 1 - Considere a situação em que os mesmos níveis dos fatores linhas e colunas são usados em cada repetição. Seja y_{ijkl} a observação da i -ésima linha, j -ésimo tratamento, k -ésima coluna e l -ésima repetição. Há $N = np^2$ observações no total. A análise de variância é resumida na Tabela 5.3

Tabela 5.3 – Quadro da Análise de Variância para um Quadrado Latino repetido - Caso 1.

C.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}
Tratamentos	$\frac{1}{np} \sum_{j=1}^p y_{j..}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SQ_{Trat}}{p-1}$	$\frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$
Linhas	$\frac{1}{np} \sum_{i=1}^p y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SQ_{Linhas}}{p-1}$	
Colunas	$\frac{1}{np} \sum_{k=1}^p y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SQ_{Colunas}}{p-1}$	
Quad. Latino	$\frac{1}{p^2} \sum_{l=1}^n y_{...l}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$n - 1$	$\frac{SQ_{QLatino}}{n-1}$	
Resíduo	Diferença	$(p-1)[n(p+1)-3]$	$\frac{SQ_{Res}}{(p-1)[n(p+1)-3]}$	
Total	$\sum \sum \sum \sum y_{ijkl}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$np^2 - 1$		

Caso 2 - Considere a situação em que o material usado nas linhas é diferente, mas o material usado nas colunas é o mesmo em cada repetição. Ou seja, há 5 novas linhas (em geral, p novas linhas) dentro de cada repetição. A análise de variância é resumida na Tabela 5.4

Tabela 5.4 – Quadro da Análise de Variância para um Quadrado Latino repetido - Caso 2.

C.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}
Tratamentos	$\frac{1}{np} \sum_{j=1}^p y_{j..}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SQ_{Trat}}{p-1}$	$\frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$
Linhas	$\frac{1}{p} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^p y_{i..l}^2 - \sum_{l=1}^n \frac{y_{...l}^2}{p^2}$	$n(p - 1)$	$\frac{SQ_{Linhas}}{n(p-1)}$	
Colunas	$\frac{1}{np} \sum_{k=1}^p y_{..k.}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SQ_{Colunas}}{p-1}$	
Quad. Latino	$\frac{1}{p^2} \sum_{l=1}^n y_{...l}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$n - 1$	$\frac{SQ_{QLatino}}{n-1}$	
Resíduo	Diferença	$(p - 1)(np - 2)$	$\frac{SQ_{Res}}{(p-1)(np-2)}$	
Total	$\sum \sum \sum \sum y_{ijkl}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$np^2 - 1$		

Caso 3 - Considere a situação em que o material na repetição é diferente, tanto nas linhas quanto nas colunas. A análise de variância é resumida na Tabela 5.5

Tabela 5.5 – Quadro da Análise de Variância para um Quadrado Latino repetido - Caso 3.

C.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}
Tratamentos	$\frac{1}{np} \sum_{j=1}^p y_{j..}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SQ_{Trat}}{p-1}$	$\frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$
Linhas	$\frac{1}{p} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^p y_{i..l}^2 - \sum_{l=1}^n \frac{y_{...l}^2}{p^2}$	$n(p - 1)$	$\frac{SQ_{Linhas}}{n(p-1)}$	
Colunas	$\frac{1}{p} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p y_{..kl}^2 - \frac{y_{...l}^2}{p^2}$	$n(p - 1)$	$\frac{SQ_{Colunas}}{n(p-1)}$	
Quad. Latino	$\frac{1}{p^2} \sum_{l=1}^n y_{...l}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$n - 1$	$\frac{SQ_{QLatino}}{n-1}$	
Resíduo	Diferença	$(p - 1)[n(p - 1) - 1]$	$\frac{SQ_{Res}}{(p-1)[n(p-1)-1]}$	
Total	$\sum \sum \sum \sum y_{ijkl}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$	$np^2 - 1$		

Obs.: esta é a situação que está sendo considerada no exemplo discutido. Se repetirmos o experimento, haverá novas leitegadas e o peso inicial deverá ser diferente também.

Considere a repetição do segundo experimento, no delineamento quadrado latino, e os resultados obtidos, apresentados na Tabela 5.6

Tabela 5.6 – Ganhos de pesos, em quilos, ao final do 2º experimento (252 dias), nos respectivos tratamentos

Linhas	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Totais da linha
Leitegada 5	(A) 125,2	(B) 109,4	(C) 116,4	(D) 114,5	465,5
Leitegada 6	(B) 120,7	(D) 106,8	(A) 95,4	(C) 102,9	425,8
Leitegada 7	(C) 117,6	(A) 112,4	(D) 112,3	(B) 110,4	452,7
Leitegada 8	(D) 135,8	(C) 126,3	(B) 133,3	(A) 101,8	497,2
Totais da Coluna	499,3	454,9	457,4	429,6	1.841,2

A análise de variância para os dados obtidos no segundo experimento é apresentada na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Análise de variância do segundo experimento.

CV	SQ	gl	QM	F_{calc}	Pr(>F)
Tratamentos	230,93	3	76,98	1,27	0,3664
Linhas	659,17	3	219,72	3,62	0,0842
Colunas	625,27	3	208,42	3,44	0,0926
Resíduos	363,89	6	60,65		

Nota-se, da Tabela 5.7 que os tratamentos também não diferiram entre si.

Considerando-se que os graus de liberdade para os dois experimentos são baixos, pode-se realizar uma análise conjunta, levando-se em conta os dois quadrados latinos e incorporando ao modelo o efeito do quadrado latino (experimento).

O gráfico de caixas para a análise conjunta, apresentado na Figura 5.6, mostra que o tratamento A parece diferir dos demais.

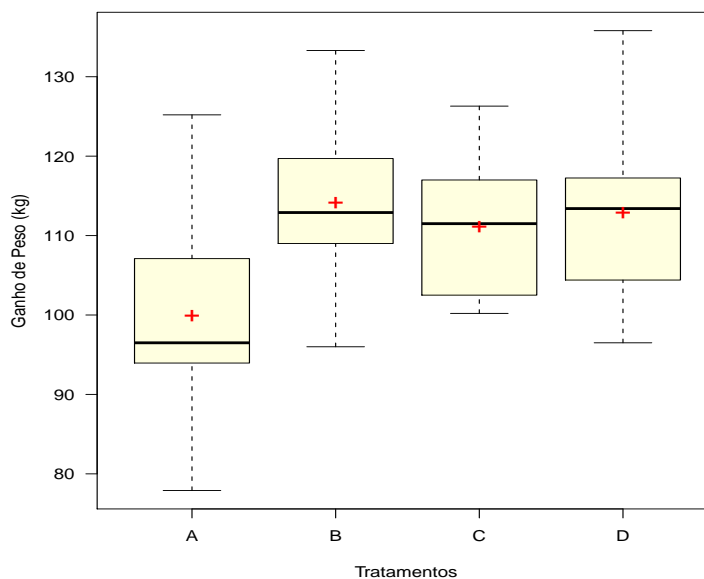


Figura 5.6 – Médias dos tratamentos considerando o experimento conjunto.

Aplicando-se as fórmulas apresentadas para o Caso 3 (Tabela 5.5), obtém-se a análise conjunta apresentada na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Análise de variância conjunta.

CV	SQ	gl	QM	F_{calc}	Pr(>F)
Tratamentos	3	1029,61	343,20	5,77	0,0079**
Quadrado Latino	1	1021,52	1021,52	17,18	0,0009***
Linhas d. QL	6	1095,72	182,62	3,07	0,0364*
Colunas d. QL	6	774,21	129,03	2,17	0,1047
Resíduos	15	891,78	59,45		

Nota-se que houve efeito de tratamentos, ou seja, pelo menos uma média de tratamento difere das demais. A obtenção dos valores da Tabela 5.8 foi obtida através da aplicação das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{y_{\dots}^2}{N} = \frac{(3.501,6)^2}{32} \Rightarrow C = 383.162,6 \\
 SQ_{Total} &= \sum \sum \sum \sum y_{ijkl}^2 - C \\
 &= (93,0^2 + 108,6^2 + \dots + 97,6^2 + 125,2^2 + 109,4^2 + \dots + 101,8^2) - 383.162,6 \\
 SQ_{Total} &= 4.812,84
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SQ_{Trat} &= \frac{1}{np} \sum_{j=1}^p y_{j..}^2 - C \\
&= \frac{1}{(2 \times 4)} (798,2^2 + 912,5^2 + 888,5^2 + 902,4^2) - 383.162,6 \\
SQ_{Trat} &= 1.029,608
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SQ_{Linhas} &= \frac{1}{p} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^p y_{i..l}^2 - \sum_{l=1}^n \frac{y_{...l}^2}{p^2} \\
&= \frac{1}{4} (412,5^2 + \dots + 448^2 + 465,5^2 + \dots + 497,2^2) - \frac{(1660,4^2 + 1841,2^2)}{16} \\
SQ_{Linhas} &= 1.095,72
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SQ_{Colunas} &= \frac{1}{p} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p y_{..kl}^2 - \frac{y_{...l}^2}{p^2} \\
&= \frac{1}{4} (428,1^2 + \dots + 395,8^2 + 499,3^2 + \dots + 429,6^2) - \frac{(1660,4^2 + 1841,2^2)}{16} \\
SQ_{Colunas} &= 774,21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SQ_{QLatino} &= \frac{1}{p^2} \sum_{l=1}^n y_{...l}^2 - C \\
&= \frac{1}{16} (1660,4^2 + 1841,2^2) - 383.162,6 \\
SQ_{QLatino} &= 1.021,52
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SQ_{Res} &= SQ_{Total} - SQ_{Trat} - SQ_{Linhas} - SQ_{Colunas} - SQ_{QLatino} \\
&= 4.812,84 - 1.029,608 - 1.095,72 - 774,21 - 1.021,51 \\
SQ_{Res} &= 891,7825
\end{aligned}$$

A seguir, aplica-se o teste de Tukey, cujos resultados são:

```

> require(laercio)
> LTukey(caso3, which='trat')
TUKEY TEST TO COMPARE MEANS
Confidence level: 0.95
Dependent variable: ganhoq
Variation Coefficient: 7.0464 %

```

Independent variable: trat

Factors Means

2	114.0625	a
4	112.8	a
3	111.0625	a
1	99.775	b

Portanto, conclui-se que tratamento 1 difere dos demais. As diferenças de médias entre os tratamentos pode ser visualizada na Figura 5.7

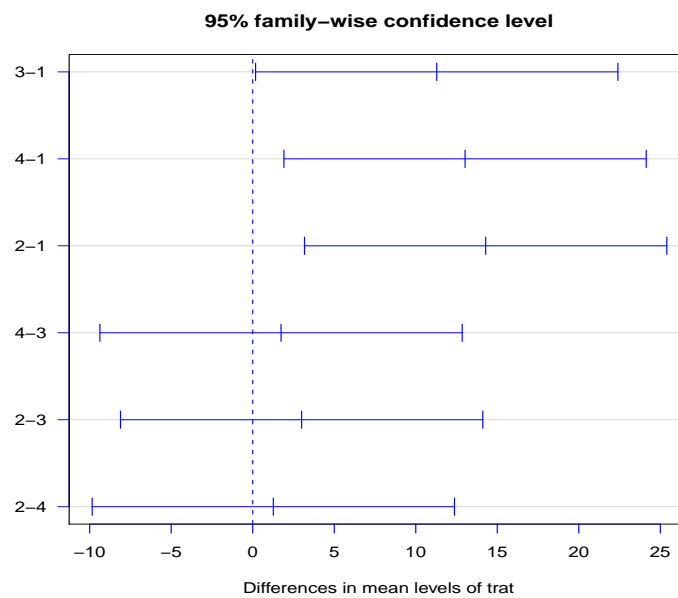


Figura 5.7 – Comparação das médias dos tratamentos considerando o experimento conjunto.

Análise de variância em Quadrado Latino

- 1) Considere o seguinte exemplo, extraído da apostila do Prof. Gener, UNESP Jaboticabal, citando Rao, P.V. *Statistical research methods in the life science*, pág. 727: Em um estudo para comparar as tolerâncias de gatos a quatro substâncias cardíacas (A, B, C, D) foi conduzida utilizando-se um Delineamento em Quadrado Latino, no qual as linhas representavam quatro combinações de dois períodos (A.M., P.M.) e duas técnicas (I e II) e as colunas representam os dias nos quais as medidas foram feitas. A cada um dos 16 gatos foi administrada uma substância cardíaca a uma taxa fixada e a dose (taxa de infusão \times tempo) na qual o efeito especificado foi observado foi anotado. As respostas medidas, em $10 \log(\text{dose em } \mu\text{g})$, são apresentadas na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Respostas observadas no experimento com gatos.

Linhas	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
I, AM	(D) 3,26	(B) 4,15	(A) 3,02	(C) 3,67
I, PM	(B) 2,73	(D) 3,38	(C) 3,29	(A) 4,50
II, AM	(A) 3,45	(C) 4,09	(B) 2,66	(D) 3,51
II, PM	(C) 3,20	(A) 3,14	(D) 3,48	(B) 3,40

Pede-se:

- Determine as médias e variâncias para cada **tratamento**;
- Faça o gráfico de caixas, comparando os tratamentos;
- Verifique se a pressuposição de homogeneidade de variância é atendida;
- Verifique se a pressuposição de normalidade dos resíduos é atendida;
- Enuncie as hipóteses e proceda à análise de variância;
- Construa o quadro da análise de variância;
- Conclua.

Capítulo 6

Experimentos Fatoriais

6.1 Introdução

Muitos experimentos envolvem o estudo dos efeitos de dois ou mais fatores. Em geral, experimentos fatoriais são mais eficientes para este tipo de experimento, pois estudam, ao mesmo tempo, os efeitos de dois ou mais tipos de tratamentos ou fatores. Cada subdivisão de um fator é denominada **nível do fator** e os tratamentos consistem de todas as combinações possíveis entre os diversos fatores nos seus diferentes níveis.

O tipo mais simples de experimento fatorial é o 2×2 . Nesses experimentos são analisados **dois fatores**, em **dois níveis**. Por exemplo, pode-se combinar 2 Variedades (V) de cana-de-açúcar, com 2 diferentes Herbicidas (H). Os níveis para Variedades (V) são dados por: V_1 e V_2 e os níveis de Herbicida (H) por: H_1 e H_2 , de forma que as combinações desses níveis, geram os seguintes tratamentos:

$$V_1H_1 \quad V_1H_2 \quad V_2H_1 \quad V_2H_2.$$

Considere os dados (fictícios) da Tabela 6.1, referentes a produção de uma determinada cultura.

Tabela 6.1 – Experimento fatorial 2×2 .

		Herbicidas	
		H_1	H_2
Variedades	V_1	20	30
	V_2	40	52

O efeito de um fator é definido como sendo a mudança na resposta produzida por uma mudança no nível do fator. Isto é frequentemente chamado **efeito principal** por que ele se refere aos fatores principais de interesse no experimento. O efeito principal do fator V poderia ser pensado como a diferença entre a resposta média para o primeiro nível de V e a resposta média para o segundo nível de V . Numericamente, tem-se:

$$V = \frac{40 + 52}{2} - \frac{20 + 30}{2} = 21,$$

ou seja, acréscimos na produção (fator V) do nível H_1 para o nível H_2 causará um acréscimo na resposta média de 21 unidades. De forma análoga, o efeito principal de H é:

$$H = \frac{52 + 30}{2} - \frac{40 + 20}{2} = 11,$$

Em alguns experimentos, pode-se encontrar que a diferença na resposta entre os níveis de um fator não é a mesma para os níveis de outros fatores. Quando isto ocorre, **há uma interação** entre os fatores, como mostrado na Figura 6.2. Na Figura 6.1 é apresentado a situação em que não há interação entre os fatores (as linhas de H_1 e H_2 são paralelas), mostrando que a diferença nos níveis de um fator ocorre para os níveis de outros fatores (vide Tabela 6.1).

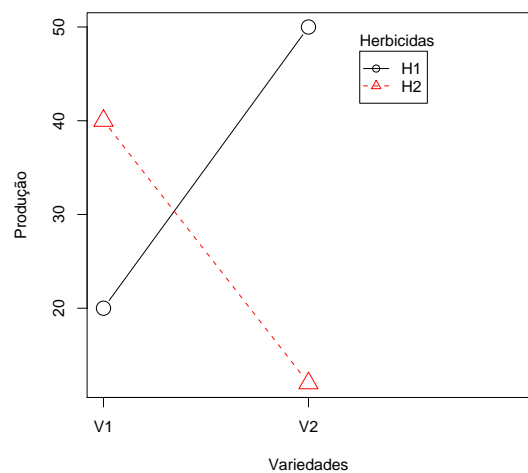
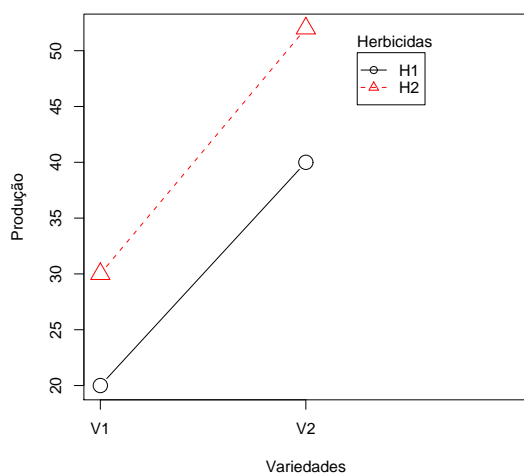


Figura 6.1 – Experimento fatorial sem interação. Figura 6.2 – Experimento fatorial com interação.

Obs.: Os experimentos fatoriais não constituem um delineamento experimental, e sim um **esquema** orientado de desdobramento de graus de liberdade de tratamentos e podem ser instalados em qualquer dos delineamentos experimentais.

6.2 Análise e interpretação de um experimento fatorial, com 2 fatores

Considere os dados da Tabela 6.2, referentes a um experimento no delineamento inteiramente casualizado, no esquema fatorial 3×2 , para testar os efeitos de três 3 recipientes para produção de mudas e 2 espécies de eucaliptos, quanto ao desenvolvimento das mudas. Esse exemplo é apresentado em Banzatto & Kronka (1995).

Tabela 6.2 – Alturas médias das mudas, em centímetros, aos 80 dias de idade.

Recipientes	Espécies			
	E_1		E_2	
R_1	26,2	26,0	24,8	24,6
	25,0	25,4	26,7	25,2
R_2	25,7	26,3	19,6	21,1
	25,1	26,4	19,0	18,6
R_3	22,8	19,4	19,8	21,4
	18,8	19,2	22,8	21,3

em que:

R_1 - saco plástico pequeno;	E_1 - <i>Eucalyptus citriodora</i> ;
R_2 - saco plástico grande;	E_2 - <i>Eucalyptus grandis</i> ;
R_3 - laminado;	

Antes de proceder à análise dos dados da Tabela 6.2, considere o caso geral de um experimento fatorial com dois fatores.

Seja y_{ijk} a resposta observada para o i -ésimo nível ($i = 1, 2, \dots, a$) do fator A e j -ésimo nível ($j = 1, 2, \dots, b$) do fator B , para a k -ésima repetição ($k = 1, 2, \dots, n$). Em geral, os dados serão apresentados na forma da Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Arranjo geral para um experimento fatorial.

		Fator B			
		1	2	...	b
Fator A	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12n}$...	$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{22n}$...	$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots, y_{2bn}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$...	$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abn}$

As observações podem ser descritas pelo modelo estatístico linear:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (6.1)$$

em que μ é o efeito da média geral, τ_i é o efeito do i -ésimo nível do fator linha A , β_j é o efeito do j -ésimo nível do fator coluna, $(\tau\beta)_{ij}$ é o efeito da interação entre τ_i e β_j e ϵ_{ijk} é o componente de erro aleatório.

No experimento fatorial com 2 fatores, deseja-se testar a significância de ambos os fatores. Há interesse em testar hipóteses sobre a igualdade dos efeitos de tratamentos nas linhas, isto é:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots \tau_a = 0$$

$$H_0 : \text{Pelo menos um } \tau_i \neq 0$$

e a igualdade nos efeitos de tratamentos nas colunas, ou seja:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_b = 0$$

$$H_0 : \text{Pelo menos um } \beta_j \neq 0$$

e, ainda, se há interação entre linhas e colunas:

$$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad \text{para todo } i, j$$

$$H_0 : \text{Pelo menos um } (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

Considere a estimação dos parâmetros do modelo, dado pela Equação 6.1, usando o método de mínimos quadrados. A função de mínimos quadrados é:

$$L = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n [y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - (\tau\beta)_{ij}]^2.$$

Derivando-se L em relação aos parâmetros $(\mu, \tau_i, \beta_j$ e $(\tau\beta)_{ij})$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mu} &= 2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n [y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j - \widehat{(\tau\beta)}_{ij}] \times (-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \tau_i} &= 2 \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n [y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j - \widehat{(\tau\beta)}_{ij}] \times (-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta_j} &= 2 \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n [y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j - \widehat{(\tau\beta)}_{ij}] \times (-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} &= 2 \sum_{k=1}^n [y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i - \hat{\beta}_j - \widehat{(\tau\beta)}_{ij}] \times (-1) = 0 \end{aligned}$$

e igualando-se os resultados a zero e aplicando os somatórios, obtém-se o chamado sistema de equações normais:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} &= abn\hat{\mu} + bn \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i + an \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \widehat{(\tau\beta)}_{ij} \\ \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} &= bn\hat{\mu} + bn\hat{\tau}_i + n \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j + n \sum_{j=1}^b \widehat{(\tau\beta)}_{ij} \\ \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk} &= an\hat{\mu} + n \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i + an\hat{\beta}_j + n \sum_{i=1}^a \widehat{(\tau\beta)}_{ij} \\ \sum_{k=1}^n y_{ijk} &= n\hat{\mu} + n\hat{\tau}_i + n\hat{\beta}_j + n\widehat{(\tau\beta)}_{ij} \end{aligned}$$

cujo sistema só tem solução, se impusermos as restrições:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \hat{\tau}_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_j &= 0 \\ \sum_{i=1}^a \widehat{(\tau\beta)}_{ij} &= 0 \quad j = 1, 2, \dots, b \quad \text{e} \\ \sum_{j=1}^b \widehat{(\tau\beta)}_{ij} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, a \end{aligned}$$

Assim, os estimadores de mínimos quadrados para μ , τ_i , β_j e $(\tau\beta)_{ij}$, são dados

por:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \bar{y}_{...}; \\
\hat{\tau}_i &= \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} \quad i = 1, 2, \dots, a; \\
\hat{\beta}_j &= \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \quad j = 1, 2, \dots, b; \\
\widehat{\tau\beta}_{ij} &= \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases}
\end{aligned}$$

sendo:

$$y_{...} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \quad \bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{abn} \quad (6.2)$$

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk} \quad \bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{bn} \quad i = 1, 2, \dots, a \quad (6.3)$$

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk} \quad \bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{an} \quad j = 1, 2, \dots, b \quad (6.4)$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^n y_{ijk} \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{y_{ij.}}{n} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases} \quad (6.5)$$

Usando a notação das Equações de 6.2 a 6.5, pode-se escrever a **soma de quadrados total** corrigida como:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \left[(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) \right. \\
&\quad \left. + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) \right]^2 \\
&= bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
&\quad + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2, \quad (6.6)
\end{aligned}$$

já que os seis produtos cruzados resultam em zero.

Note que a soma de quadrados total foi particionada para a soma de quadrados de “linhas” ou fator A (SQA); uma soma de quadrados devido à “colunas” ou fator B (SQB); uma soma de quadrados devido à interação entre A e B ($SQA \times B$); e uma soma de quadrados devido ao resíduo ($SQRes$).

Assim, pode-se escrever a Equação 6.6, como:

$$SQT_{total} = SQA + SQB + SQA \times B + SQRes,$$

de forma que a soma de quadrados total, usualmente calculada, é dada por:

$$SQT_{total} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}. \quad (6.7)$$

As somas de quadrados para os efeitos principais são:

$$SQA = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn} \quad (6.8)$$

$$SQB = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}. \quad (6.9)$$

Para o cálculo da soma de quadrados da interação ($SQA \times B$), deve-se, inicialmente, calcular a soma de quadrados do efeito conjunto de A e B , denotada por SQA, B . Logo,

$$SQA, B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn}.$$

Esta soma de quadrados contém SQA e SQB . Portanto, a soma de quadrados da interação é:

$$SQA \times B = SQA - SQB - SQA, B,$$

e, a soma de quadrados de resíduos, obtém pela diferença:

$$SQRes = SQTotal - SQA - SQB - SQA \times B.$$

Obs.: Nos experimentos fatoriais com 2 fatores, a soma de quadrados do efeito conjunto é sempre igual à soma de quadrados de tratamentos.

O procedimento para a realização da análise de variância é resumido na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Análise de variância para um experimento fatorial com 2 fatores.

Causa de Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{cal}	F_{tab}
A	SQA	$a - 1$	$QMA = \frac{SQA}{a-1}$	$F_{cal} = \frac{QMA}{QMRes}$	
B	SQB	$b - 1$	$QMB = \frac{SQA}{b-1}$	$F_{cal} = \frac{QMB}{QMRes}$	
$A \times B$	$SQA \times B$	$(a - 1)(b - 1)$	$QMA \times B = \frac{SQA \times B}{(a-1)(b-1)}$	$F_{cal} = \frac{QMA \times B}{QMRes}$	
Resíduo	$SQRes$	$ab(n - 1)$	$QMRes = \frac{SQRes}{ab(n-1)}$		
Total	$SQTotal$	$abn - 1$			

A Tabela 6.5 apresenta os dados do desenvolvimento das mudas de 2 espécies de eucaliptos (E_1 e E_2) plantados em 3 tipos de recipientes (R_1 , R_2 e R_3).

Tabela 6.5 – Alturas médias das mudas, em centímetros, aos 80 dias de idade.

Recipientes	Espécies						$y_{i..}$
	E_1	$y_{ij.}$	E_2	$y_{ij.}$	$y_{ij.}$	$y_{ij.}$	
R_1	26,2	26,0	102,6	24,8	24,6	101,3	203,9
	25,0	25,4		26,7	25,2		
R_2	25,7	26,3	103,5	19,6	21,1	78,3	181,8
	25,1	26,4		19,0	18,6		
R_3	22,8	19,4	80,2	19,8	21,4	85,3	165,5
	18,8	19,2		22,8	21,3		
$y_{.j.}$	286,3			264,9			$y_{...} = 551,2$

As somas de quadrados são calculadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 SQ_{Total} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
 &= (26,2)^2 + (26,0)^2 + \dots + (21,3)^2 - \frac{(551,2)^2}{3 \times 2 \times 4} = \mathbf{198,7933}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Rec} &= \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
 &= \frac{(203,9^2 + 181,8^2 + 165,5^2)}{2 \times 4} - \frac{(551,2)^2}{3 \times 2 \times 4} = \mathbf{92,86083333}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Esp} &= \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
 &= \frac{(286,3^2 + 264,9^2)}{3 \times 4} - \frac{(551,2)^2}{3 \times 2 \times 4} = \mathbf{19,08166667}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Rec, Esp} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn} \\
 &= \frac{(102,6^2 + 103,5^2 + \dots + 85,3^2)}{4} - \frac{(551,2)^2}{3 \times 2 \times 4} = \mathbf{175,7033333}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Rec \times Esp} &= SQ_{Rec, Esp} - SQ_{Rec} - SQ_{Esp} \\
 &= 175,7 - 92,86 - 19,08 = \mathbf{63,76083333}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SQ_{Res} &= SQ_{Total} - SQ_{Rec} - SQ_{Esp} - SQ_{Rec \times Esp} \\
 &= 198,79 - 92,86 - 19,08 - 63,76 = \mathbf{23,09}
 \end{aligned}$$

Substituindo-se os resultados obtidos na Tabela 6.4, tem-se o quadro da análise de variância, apresentado na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Análise de variância de acordo com o esquema fatorial 3×2 . Quero ver como ele fazx com linhas compridas.

Causa de Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	$Pr(> F)$
Recipientes (Rec)	92,86083333	2	46,43041667	36,20	3,554557	4,924e-07 ***
Espécies (Esp)	19,08166667	1	19,08166667	14,88	4,413873	0,001155 **
Rec×Esp	63,76083333	2	31,88041667	24,85	3,554557	6,635e-06 ***
Resíduo	23,09000000	18	1,2827778			
Total	198,79333333	23				

Como o valor tabelado é $F_{0,05; 2; 18} = 3,5546$, conclui-se que há uma interação significativa entre Recipientes e Espécies de eucaliptos, o que pode ser observado nas Figuras 6.3 e 6.4.

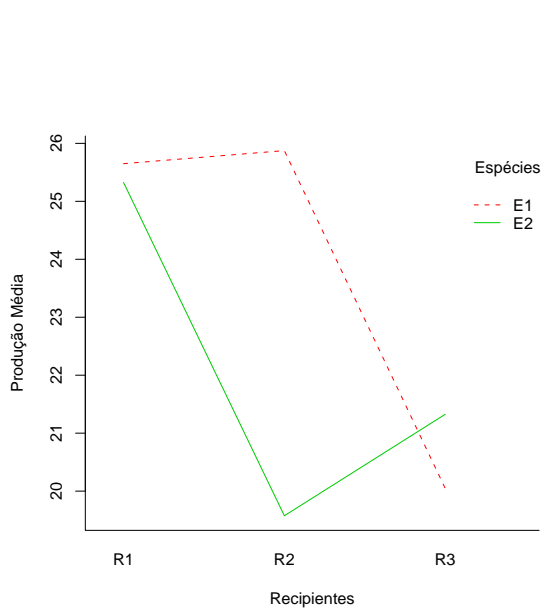


Figura 6.3 – Interação $Rec \times Esp$.

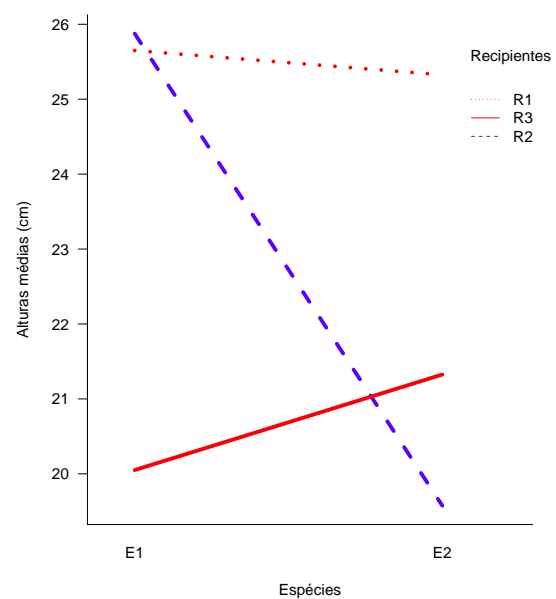


Figura 6.4 – Interação $Esp \times Rec$.

Note que a soma de quadrados devido ao modelo é definida por:

$$\begin{aligned}
 SQ_{Modelo} &= SQ_{Rec} + SQ_{Esp} + SQ_{Rec \times Esp} \\
 &= 92,86083333 + 19,08166667 + 63,76083333 = \mathbf{175,7033}
 \end{aligned}$$

e que

$$R^2 = \frac{SQ_{Modelo}}{SQ_{Total}} = \frac{175,7033}{198,7933} = \mathbf{0,8838}.$$

ou seja, cerca de 88% da variabilidade no desenvolvimento das mudas é explicada pelos recipientes, espécies e a interação recipientes-espécies.

Pelos resultados apresentados na Tabela 6.6, conclui-se que a interação entre Recipientes e Espécies foi significativa. Sendo assim, as conclusões para os efeitos principais ficam prejudicadas, dado que existe dependência entre os efeitos dos fatores estudados. Logo, deve-se proceder ao desdobramento da interação Recipiente \times Espécie, o que pode ser feito de duas maneiras:

~> estudar o comportamento das espécies dentro de cada recipiente;

~> estudar o comportamento dos recipientes dentro de cada espécie.

Para obter os resultados apresentados na Tabela 6.6, os comandos são:

```
fat.av = aov(alturas ~ recip*espec)
summary(fat.av)
# ou, ainda
fat.av = aov(alturas ~ recip + espec + recip*espec)
summary(fat.av)
```

6.2.1 Desdobramento da interação $R \times E$ para estudar o comportamento das espécies dentro de cada recipiente

Tem-se que:

$$SQE_{sp\ d. R_1} = \frac{1}{4} (102,6^2 + 101,3^2) - \frac{(203,9)^2}{8} = 0,21$$

$$SQE_{sp\ d. R_2} = \frac{1}{4} (103,5^2 + 78,3^2) - \frac{(181,8)^2}{8} = 79,38$$

$$SQE_{sp\ d. R_3} = \frac{1}{4} (80,2^2 + 85,3^2) - \frac{(165,5)^2}{8} = 3,25$$

O quadro de análise da variância do desdobramento é apresentado na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Estudo das Espécies dentro de cada Recipiente.

Causa de Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	$Pr(> F)$
Recipientes	92,86	2	46,43	36,20	3,554557	4,924e-07 ***
Recip:Espec	(82,84)	(3)	27,61	21,53	3,1599	< 0,0001 * **
Espécies d. R_1	0,21	1	0,21	0,16	3,554557	0,6897 ^{ns}
Espécies d. R_2	79,38	1	79,38	61,88	4,413873	< 0,0001 * *
Espécies d. R_3	3,25	1	3,25	2,53	4,413873	0,1288 ^{ns}
Resíduo	23,09000000	18	1,2827778			
Total	198,79333333	23				

Considerando-se que há apenas dois tipos de Recipientes sendo analisado, a interpretação dos resultados apresentados na Tabela 6.7 é direta, sem a necessidade de algum teste de comparação múltipla. Portanto, tem-se as seguintes conclusões:

- Quando se utiliza o recipiente: **saco plástico pequeno** (R_1), não há diferença significativa ($p = 0,6897$) para o desenvolvimento das mudas das 2 espécies;
- Quando se utiliza o recipiente: **saco plástico grande** (R_2), há diferença significativa ($p < 0,0001$) para o desenvolvimento das mudas das 2 espécies, sendo que a espécie *Eucalyptus citriodora* (E_1) é a melhor;
- Quando se utiliza o recipiente: **laminado** (R_3), não há diferença significativa ($p = 0,1288$) para o desenvolvimento das mudas das 2 espécies;

Para obter os resultados apresentados na Tabela 6.7, os comandos são:

```
fat.esprec = aov(alturas ~ recip/espec)
summary(fat.esprec, split=list("recip:espec" = list(r1=1, r2=2, r3=3)))
```

6.2.2 Desdobramento da interação $R \times E$ para estudar o comportamento dos recipientes dentro de cada espécie

Tem-se que:

$$SQ_{Rec \text{ d. } E_1} = \frac{1}{4} (102,6^2 + 103,5^2 + 80,2^2) - \frac{(286,3)^2}{12} = 87,12$$

$$SQ_{Rec \text{ d. } E_2} = \frac{1}{4} (101,3^2 + 78,3^2 + 85,3^2) - \frac{(264,9)^2}{12} = 69,50$$

O quadro de análise da variância do desdobramento é apresentado na Tabela 6.7.

Tabela 6.8 – Estudo dos Recipientes dentro de cada Espécie.

Causa de Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}	$Pr(> F)$
Espécies	19,08	1	19,08	14,88	4,413873	0,0012 ***
Espec:Recip	(156,62)	(4)	39,16	30,52	2,927744	< 0,0001 ***
Recip d. E_1	87,12	2	43,56	33,96	3,554557	7,776e – 07 ***
Recip d. E_2	69,50	2	34,75	27,09	3,554557	3,730e – 06 ***
Resíduo	23,09000000	18	1,2827778			
Total	198,79333333	23				

Portanto, tem-se as seguintes conclusões:

- Os recipientes têm efeitos diferentes ($p < 0,0001$) sobre o desenvolvimento das mudas de *Eucalyptus citriodora* (E_1);
- Os recipientes têm efeitos diferentes ($p < 0,0001$) sobre o desenvolvimento das mudas de *Eucalyptus grandis* (E_2).

Basta, agora, aplicar o teste de Tukey para se verificar quais as médias do fator Recipiente diferem, dentro de cada nível de Espécie.

Para obter os resultados apresentados na Tabela 6.7, os comandos são:

```
fat.recesp = aov(alturas ~ espec/recip)
summary(fat.recesp, split=list("espec:recip" = list(e1=c(1,3), e2=c(2,4))))
```

6.2.2.1 Recipientes dentro de E_1

Assume-se que a melhor estimativa da variância residual é o $QMRes$ da tabela da análise de variância, utilizando a suposição de que a variância residual experimental é a mesma para todos os tratamentos. As três médias para recipientes, em ordem decrescente, são:

$$\bar{y}_{21.} = \frac{103,5}{4} = 25,875 \text{ cm} \quad (R_2 - \text{saco plástico grande})$$

$$\bar{y}_{11.} = \frac{102,6}{4} = 25,650 \text{ cm} \quad (R_1 - \text{saco plástico pequeno})$$

$$\bar{y}_{31.} = \frac{80,2}{4} = 20,050 \text{ cm} \quad (R_3 - \text{laminado})$$

O erro padrão das médias desses tratamentos é:

$$s_{\bar{y}_{i1.}} = \sqrt{\frac{QMRes}{n}} = \sqrt{\frac{1,282778}{4}} = 0,5663 \text{ cm}$$

A diferença mínima significativa pelo teste de Tukey é:

$$\Delta = qs_{\bar{y}_{i1.}} = 3,6093 \times 0,5663 = \mathbf{2,04 \text{ cm}} \quad (6.10)$$

e as comparações das médias dos recipientes geram:

$$R_2 \text{ vs } R_1 = 25,875 - 25,650 = \mathbf{0,225 \text{ cm}} < 2,04 \text{ cm}$$

$$R_2 \text{ vs } R_3 = 25,875 - 20,050 = \mathbf{5,825 \text{ cm}} > 2,04 \text{ cm}$$

$$R_1 \text{ vs } R_3 = 25,650 - 20,050 = \mathbf{5,6 \text{ cm}} > 2,04 \text{ cm}$$

Conclusão: Para o *Eucalyptus citriodora* (E_1), os melhores recipientes foram os sacos plásticos (R_1 e R_2), que determinaram desenvolvimento de mudas significativamente maiores que o laminado (R_3), sem diferirem entre si.

6.2.2.2 Recipientes dentro de E_2

Neste caso, as três médias para recipientes, em ordem decrescente, são:

$$\bar{y}_{12.} = \frac{101,3}{4} = 25,325 \text{ cm} \quad (R_1 - \text{saco plástico pequeno})$$

$$\bar{y}_{32.} = \frac{85,3}{4} = 21,325 \text{ cm} \quad (R_3 - \text{laminado})$$

$$\bar{y}_{22.} = \frac{78,3}{4} = 19,575 \text{ cm} \quad (R_2 - \text{saco plástico grande})$$

A diferença mínima significativa, pelo teste de Tukey, é apresentada na Equação 6.10, e as

$$R_1 \text{ vs } R_3 = 25,325 - 21,325 = \mathbf{4,00 \text{ cm}} > 2,04 \text{ cm}$$

comparações das médias dos recipientes geram: $R_1 \text{ vs } R_2 = 25,325 - 19,575 = \mathbf{5,75 \text{ cm}} > 2,04 \text{ cm}$

$$R_3 \text{ vs } R_2 = 21,325 - 19,575 = \mathbf{1,75 \text{ cm}} < 2,04 \text{ cm}$$

Conclusão: Para o *Eucalyptus grandis* (E_2), o melhor recipiente foi o saco plástico pequeno (R_1), que determinou desenvolvimento de mudas significativamente maior que o saco plástico grande (R_2) e que o laminado.

Exercícios

- 1) Em experimentos com suínos, deve-se considerar como fatores de variação: raça ou grau-de-sangue; sexo; idade e pesos iniciais e, se possível, filiação. É usual parcelas formadas por apenas um animal, embora dependa da quantidade de material disponível. Um experimento foi instalado com o objetivo de estudar a utilização do milho opaco-2 no crescimento e engorda de suínos. Os tratamentos foram dispostos em esquema fatorial, com três repetições, e as parcelas constituídas por dois animais. Os fatores estudados foram: Milho (comum e opaco-2) e Soja (ausência e presença). Na Tabela 6.9 são apresentados os índices de conversão (kg de ração / kg de ganho de peso).

Tabela 6.9 – Índices de conversão alimentar (kg de ração / kg de ganho de peso).

Tratamentos	Bloco I	Bloco II	Bloco III	Total
A	4,07	3,80	3,86	11,73
B	3,91	3,77	3,46	11,14
C	4,90	5,31	4,73	14,94
D	3,79	3,50	3,46	10,75
Total	16,67	16,38	15,51	48,56

em que:

- A** - Milho Opaco-2, sem soja; **B** - Milho Opaco-2, com soja;
C - Milho Comum, sem soja; **D** - Milho Comum, com soja;

Pede-se:

- Determine as médias e variâncias para cada **tratamento**;
- Faça o gráfico de caixas, comparando os tratamentos;
- Verifique se a pressuposição de homogeneidade de variância é atendida;
- Verifique se a pressuposição de normalidade dos resíduos é atendida;
- Enuncie as hipóteses e proceda à análise de variância;
- Caso haja significância dos tratamentos, desdobre os graus de liberdade de tratamento usando o esquema fatorial;
- Construa o quadro da análise de variância incluindo os desdobramentos;
- Caso a interação seja significativa, proceda a novo desdobramento, estudando o efeito da soja junto ao milho opaco2 e comum;
- Determine o coeficiente de variação do experimento.

Capítulo 7

Experimentos em parcelas subdivididas

7.1 Introdução

Nos experimentos fatoriais, todas as combinações de tratamentos são distribuídas nas unidades experimentais, seguindo a casualização característica de um delineamento inteiramente casualizado, em blocos ao acaso, ou em quadrados latinos. Entretanto, outros tipos de casualização são possíveis e uma dessas alternativas nos leva ao experimento em parcelas subdivididas, que é um tipo especial de delineamento em blocos casualizados.

Há muitas variações do experimento em parcelas subdivididas e cada variação impõe certas restrições. O experimento básico envolve a designação de tratamentos de um fator às parcelas. Estas, por sua vez, podem ser arrançadas em blocos completos casualizados ou em quadrado latino. Deve-se designar às parcelas os tratamentos para os quais se deseja, ou que se pode, ter uma precisão menor. Os tratamentos do segundo fator são então designados, por sorteio, às subparcelas dentro de cada parcela. Tal disposição permite obter uma estimativa geral de maior precisão para os efeitos dos tratamentos do segundo fator. Tem-se, portanto, dois resíduos distintos: um correspondente às parcelas e outro às subparcelas dentro das parcelas.

Em casos mais complexos, as subparcelas podem, também, ser repartidas em subsubparcelas. Tem-se, neste caso, três resíduos distintos: Resíduo (a), referente às parcelas; Resíduo (b), às subparcelas e Resíduo (c), correspondendo às subsubparcelas.

Esse tipo de experimento é largamente utilizado nas pesquisas agrícolas, industrial e biológica, é útil em situações, tais como:

a) quando os níveis de um ou mais fatores exigem grandes quantidades do material experi-

- mental (por exemplo, métodos de preparo do solo);
- b) quando informações prévias asseguram que as diferenças entre os níveis de um dos fatores são maiores do que às do outro fator;
 - c) quando se deseja maior precisão para comparações entre níveis de um dos fatores;
 - d) quando existe um fator de maior importância e outro de importância secundária, sendo que este é incluído para aumentar a extensão dos resultados;
 - e) nas situações práticas onde é difícil a instalação do experimento no esquema fatorial.

Os experimentos em parcelas subdivididas são úteis nas seguintes condições:

- a) os tratamentos associados com os níveis de um dos fatores exigem grandes porções do material experimental. Isto é comum na experimentação de campo, laboratórios, indústrias e certas áreas de sociologia. Por exemplo, um experimento de campo, um dos fatores pode ser métodos de preparo do solo ou aplicação de fertilizantes, ambos normalmente requerem grandes parcelas. O outro fator pode ser cultivares, que podem ser comparadas usando parcelas pequenas;
- b) quando um fator adicional é introduzido no experimento para aumentar seu objetivo.

A decomposição do número de graus de liberdade de um experimento em parcela subdividida, em que as parcelas são dispostas nos principais delineamentos, é apresentada na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Quadro da análise de variância de um experimento em parcela subdividida com a tratamentos primários, b tratamentos secundários e c repetições, nos delineamentos inteiramente casualizado, blocos casualizados e quadrado latino.

Inteiramente Casualizado		Blocos Casualizados		Quadrado Latino	
CV	gl	CV	gl	CV	gl
Fator A	$a - 1$	Blocos	$b - 1$	Linhas	$a - 1$
Resíduo(a)	$a(b - 1)$	Fator A	$a - 1$	Colunas	$a - 1$
Parcelas	$ab - 1$	Resíduo(a)	$(a - 1)(b - 1)$	Fator A	$a - 1$
Fator B	$c - 1$	Parcelas	$ab - 1$	Resíduo(a)	$(a - 1)(a - 2)$
$A \times B$	$(a - 1)(c - 1)$	Fator B	$c - 1$	Parcelas	$a^2 - 1$
Resíduo(b)	$a(b - 1)(c - 1)$	$A \times B$	$(a - 1)(c - 1)$	Fator B	$c - 1$
Total	$abc - 1$	Resíduo(b)	$a(b - 1)(c - 1)$	$A \times B$	$(a - 1)(c - 1)$
		Total	$abc - 1$	Resíduo(b)	$a(a - 1)(c - 1)$
				Total	$a^2c - 1$

Exemplo: Suponha o caso de um experimento com três rações (*A*, *B*, e *C*), em seis blocos casualizados, cada parcela constituída por dois animais. Em uma determinada fase do ensaio, os bovinos, dentro de cada parcela, passaram a receber, por sorteio, um dos tipos de suplementos minerais (*M* ou *P*). Os ganhos de pesos individuais, ao final do experimento, são apresentados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Ganhos de pesos, em quilos, ao final do experimento.

Blocos	Tipos de Ração						Totais
	A		B		C		
	M	P	M	P	M	P	
I	107	89	116	101	90	96	599
II	117	101	136	110	112	89	665
III	122	98	130	104	99	92	645
IV	111	101	122	91	105	78	608
V	90	95	117	100	110	90	602
VI	116	90	114	94	114	93	621
Totais	663	574	735	600	630	538	3.740

As Figuras 7.1 e 7.2 mostram o comportamento de ganho de peso para os tipos de rações e os tipos de suplementos.

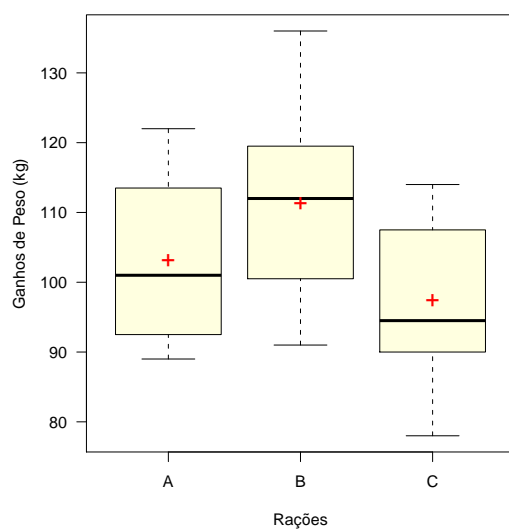


Figura 7.1 – Tipos de rações.

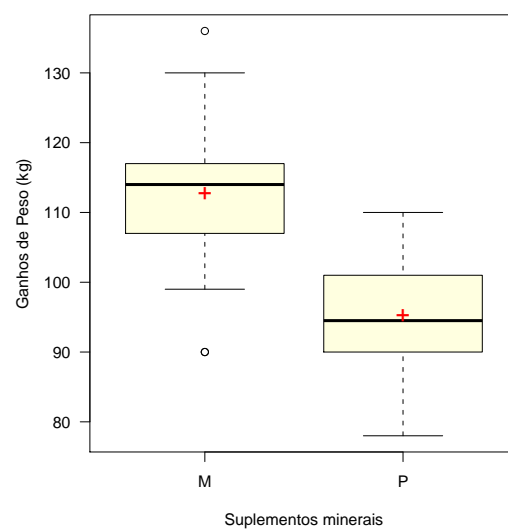


Figura 7.2 – Tipos de suplementos.

Os comandos para a criação do conjunto de dados usando o R são:

```
ganhos = scan()
```

```

107  89 116 101  90 96 117 101 136 110 112 89 122 98 130 104  99 92
111 101 122  91 105 78  90  95 117 100 110 90 116 90 114  94 114 93
(Ganhos = data.frame(Blocos=factor(rep(1:6, each=6)), Trat=factor(rep(1:3, each=2)),
Supl=factor(rep(1:2, 2)), resp=ganhos))
attach(Ganhos)

```

e os comandos para a construção do gráfico de caixas para Rações e Suplementos, são dados por:

```

par(mai=c(1,1,.2,.2))
boxplot(ganhos ~ Trat, names=c("A", "B", "C"), las=1, col='LightYellow',
        ylab="Ganhos de Peso (kg)", xlab="Rações")
points(mediast, pch="+", col=2, cex=1.5)

boxplot(ganhos ~ Supl, names=c("M", "P"), las=1, col='LightYellow',
        ylab="Ganhos de Peso (kg)", xlab="Suplementos minerais")
points(mediasup, pch="+", col=2, cex=1.5)

```

O modelo linear para o experimento em parcelas subdivididas no delineamento em blocos ao acaso é dado por:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \gamma_k + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, c \end{cases} \quad (7.1)$$

em que:

- a) y_{ijk} é o valor observado no i -ésimo tratamento, j -ésimo bloco e k -ésima subparcela;
- b) μ é uma constante;
- c) τ_i é o efeito do i -ésimo tratamento (ração);
- d) β_j é o efeito do j -ésimo bloco;
- e) $(\tau\beta)_{ij}$ é o resíduo da parcela;
- f) γ_k é o efeito do k -ésimo suplemento mineral;
- g) $(\tau\gamma)_{ik}$ e $(\beta\gamma)_{jk}$ são as interações;
- h) $(\tau\beta\gamma)_{ijk}$ é o resíduo da subparcela;

Considerando que as pressuposições para a realização da análise de variância foram atendidas, passa-se, então, a construção do quadro de análise de variância que é dado por:

Tabela 7.3 – Quadro da Análise de Variância.

C.V.	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	F_{tab}
Blocos	$SQBlocos$	$j - 1$	$\frac{SQBlocos}{j-1}$	$\frac{QMBlocos}{QMRes(a)}$	$F_{\alpha;[(j-1);(i-1)(j-1)]}$
Tratamentos	$SQTrat$	$i - 1$	$\frac{SQTrat}{i-1}$	$\frac{QMTrat}{QMRes(a)}$	$F_{\alpha;[(i-1);(i-1)(j-1)]}$
Resíduo(a)	$SQRes(a)$	$(i - 1)(j - 1)$			
(Parcelas)	$SQParcelas$	$ij - 1$			
Subparcelas	$SQSubparc$	$k - 1$	$\frac{SQSubparc}{k-1}$	$\frac{QMSubparc}{QMRes(b)}$	$F_{\alpha;[(k-1);i(j-1)(k-1)]}$
Interação($Trat \times Subparcelas$)	$SQInter$	$(i - 1)(k - 1)$	$\frac{SQInt}{(i-1)(k-1)}$	$\frac{QMSubparc}{QMInt}$	$F_{\alpha;[(i-1)(k-1);i(j-1)(k-1)]}$
Resíduo(b)	$SQRes(b)$	$i(j - 1)(k - 1)$	$\frac{SQRes(b)}{i(j-1)(k-1)}$		
Total	$SQTotal$	$ijk - 1$			

em que as somas de quadrados são dadas por:

$$\begin{aligned}
 SQTotal &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk}^2 - C & C &= \frac{\left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk} \right)^2}{N} \\
 SQTrat &= \frac{1}{j \times k} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - C \\
 SQBlocos &= \frac{1}{i \times k} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - C \\
 SQParcelas &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij.}^2 - C \\
 SQRes(a) &= SQParcelas - SQTrat - SQBlocos \\
 SQSubparc &= \frac{1}{i \times j} \sum_{k=1}^c y_{..k}^2 - C \\
 SQTrat, Subparc &= \frac{1}{i \times k} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{i..}^2 - C \\
 SQInter &= SQTrat, Subparc - SQTrat - SQSubparc \\
 SQRes(b) &= SQTotal - SQParcelas - SQSubparc - SQInter
 \end{aligned}$$

Para facilitar o cálculo das somas de quadrados, pode-se construir tabelas auxiliares, como apresentado na Tabela 7.9.

Tabela 7.4 – Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das parcelas.

Blocos (2)	Tipos de Ração			Totais
	A	B	C	
I	196	217	186	599
II	218	246	201	665
III	220	234	191	645
IV	212	213	183	608
V	185	217	200	602
VI	206	208	207	621
Totais	1.237 (12)	1.335 (12)	1.168 (12)	3.740

Para o cálculo das somas de quadrados das **Parcelas**, tem-se:

$$C = \frac{\left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk} \right)^2}{N} = \frac{(107 + 117 + \dots + 90 + 93)^2}{3 \times 2 \times 6} = \mathbf{388.544,4}$$

$$SQ_{Total} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{ijk}^2 - C = (107^2 + 117^2 + \dots + 90^2 + 93^2) - 388.544,4 = \mathbf{6.061,556}$$

$$SQ_{Trat} = \frac{1}{j \times k} \sum_{i=1}^a y_{i..}^2 - C = \frac{1}{2 \times 6} \times (1.237^2 + 1.335^2 + 1.168^2) - 388.544,4 = \mathbf{1.173,722}$$

$$SQ_{Blocos} = \frac{1}{i \times k} \sum_{j=1}^b y_{.j.}^2 - C = \frac{1}{2 \times 3} \times (599^2 + \dots + 621^2) - 388.544,4 = \mathbf{582,2222}$$

$$SQ_{Parcelas} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij.}^2 - C = \frac{1}{2} \times (196^2 + 218^2 + \dots + 200^2 + 207^2) - 388.544,4 = \mathbf{2.377,556}$$

$$SQ_{Res(a)} = SQ_{Parcelas} - SQ_{Trat} - SQ_{Blocos} = 2.377,556 - 1.173,722 - 582,2222 = \mathbf{621,6111}$$

Para o cálculo das demais somas de quadrados, utiliza-se a Tabela 7.5.

Tabela 7.5 – Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das **Subparcelas**.

Suplementos (6)	Tipos de Ração			Totais
	A	B	C	
M	663	735	630	2.028
P	574	600	538	1.712
Totais	1.237 (12)	1.335 (12)	1.168 (12)	3.740

$$\begin{aligned}
 \text{SQSubparc} &= \frac{1}{i \times j} \sum_{k=1}^c y_{..k}^2 - C \\
 &= \frac{1}{3 \times 6} \times (2.028^2 + 1.712^2) - 388.544,4 \\
 &= \mathbf{2.773,778}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{SQTrat,Subparc} &= \frac{1}{i \times k} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c y_{i..}^2 - C \\
 &= \frac{1}{3 \times 2} (663^2 + 574^2 + \dots + 630^2 + 538^2) - 388.544,4 \\
 \text{SQTrat,Subparc} &= \mathbf{4.057.889}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{SQInter} &= \text{SQTrat, Subparc} - \text{SQTrat} - \text{SQSubparc} \\
 &= 4.057,889 - 1.173,722 - 2.773,778
 \end{aligned}$$

$$\text{SQInter} = \mathbf{110,3889}$$

$$\begin{aligned}
 \text{SQRes(b)} &= \text{SQTotal} - \text{SQParcelas} - \text{SQSubparcec} - \text{SQInter} \\
 &= 6.061,556 - 2.377,556 - 2.773,778 - 110,3889
 \end{aligned}$$

$$\text{SQRes(b)} = \mathbf{799,8333}$$

Assim, o quadro da análise de variância para os dados da Tabela 7.2 fica:

Tabela 7.6 – Quadro da análise de variância do experimento em parcelas subdivididas no delineamento em blocos ao acaso.

Causa da Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	$Pr(> F)$
Blocos	582,22	5	116,44		
Ração	1.173,72	2	586,86	9,441	0,004976**
Resíduo(a)	621,61	10	62,16		
(Parcelas)	2.377,556	17			
Suplementos	2.773,78	1	2.773,78	52,0192	$3,011 \times 10^{(-6)}$ ***
Ração \times Suplementos	110,39	2	55,19	1,0351	0,3792
Resíduo(b)	799,83	15	53,32		
Total	6.061,556	35			

Os efeitos das Rações e dos Blocos são testados usando o Resíduo(a).

Os efeitos dos Suplementos e da Interação são testados usando o Resíduo(b).

Verifica-se da Tabela 7.6 que a interação entre os tipos de Ração e Suplementos não foi significativa, havendo efeito dos fatores principais: Ração e Suplemento. Logo, aplica-se o teste de Tukey para verificar quais os tipos de Ração que diferem entre si. No caso de Suplementos, como só há dois níveis, não é necessário a aplicação do teste de Tukey.

Assim, aplica-se a Equação 7.2 para Ração, observando-se que o $QMRes$ utilizado será o $Residuo(a)$ da Tabela 7.6.

$$\begin{aligned}
 \Delta &= q \sqrt{\frac{QMRes}{r}} \\
 &= 3,876777 \times \sqrt{\frac{62,16111}{12}} \\
 \Delta &= \mathbf{8,8 \text{ kg}}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Construindo-se a tabela das médias ordenadas em ordem decrescente, tem-se:

	Médias (kg)	
Ração B	111,25	a
Ração A	103,0833	ab
Ração C	97,3333	b

em que letras iguais indicam médias semelhantes.

No caso dos suplementos, basta observar que a média de ganho de peso dos animais que foram alimentados com o suprimento M foi de $\bar{y}_M = 112,7 \text{ kg}$ e com o suprimento F foi de $\bar{y}_F = 95,1 \text{ kg}$, mostrando que o suprimento M foi mais eficiente no ganho de peso.

7.1.1 Experimentos em parcelas subdivididas no tempo

Considere o exemplo apresentado por Pimentel Gomes (1990), que consiste de um experimento com 8 tratamentos (7 adubos verdes e milho) em blocos ao acaso, com 4 repetições, realizado em dois anos consecutivos nas mesmas parcelas. Os dados são apresentados na Tabela 7.7.

Tabela 7.7 – Produção de adubos verdes e milho (*kg* de matéria seca verde por parcela).

Tratamentos	Bloco 1		Bloco 2		Bloco 3		Bloco 4		Totais
	1º ano	2º ano	1º ano	2º ano	1º ano	2º ano	1º ano	2º ano	
Mucuna preta	86,8	90,2	76,8	94,0	88,6	86,4	81,6	82,2	686,6
Feijão de porco	44,0	83,8	56,6	72,2	52,4	88,6	52,2	83,2	533,0
<i>Crot. juncea</i>	102,4	120,2	90,8	104,6	92,0	112,0	84,8	113,6	820,4
Guandu	68,4	91,0	55,2	78,8	49,0	83,4	61,2	91,2	578,2
<i>Teph. Candida</i>	34,0	57,2	32,4	54,0	24,4	50,8	30,0	46,2	329,0
Soja	33,0	33,6	34,8	33,2	32,0	33,4	33,6	42,6	276,2
<i>Crot. grantiana</i>	25,8	77,0	21,6	62,4	19,2	63,6	21,0	63,4	354,0
Milho	138,8	110,2	106,4	80,0	108,0	92,0	81,8	90,6	807,8
Totais	533,2	663,2	474,6	579,2	465,6	610,2	446,2	613,0	4.385,2

Proceder à análise considerando um experimento em parcela subdividida no delineamento em blocos ao acaso, em que o tempo é a subparcela.

Complete o quadro da análise de variância.

Tabela 7.8 – Quadro da análise de variância do experimento em parcelas subdivididas no delineamento em blocos ao acaso.

Causa da Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	$Pr(> F)$
Blocos					
Tratamentos					
Resíduo(a)					
(Parcelas)					
Anos					
Anos \times Tratamentos				18,82	$2,571e - 08^{***}$
Resíduo(b)					
Total	53.348,8775	63			

As tabelas auxiliares, para o cálculos das somas de quadrados de parcelas e sub-parcelas, são dadas por:

Tabela 7.9 – Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das parcelas.

Tratamentos	Blocos				Totais
	I	II	III	IV	
Mucuna preta	177,00	170,80	175,00	163,80	686,6
Feijão de porco	127,80	128,80	141,00	135,40	533,0
<i>Crot. juncea</i>	222,60	195,40	204,00	198,40	820,4
Guandu	159,40	134,00	132,40	152,40	578,2
<i>Teph. Candida</i>	91,20	86,40	75,20	76,20	329,0
Soja	66,60	68,00	65,40	76,20	276,2
<i>Crot. grantiana</i>	102,80	84,00	82,80	84,40	354,0
Milho	249,00	186,40	200,00	172,40	807,8
Totais	1.196,4	1.053,8	1.075,8	1.059,2	4.385,2

Para o cálculo das demais somas de quadrados, utiliza-se a Tabela 7.10.

Tabela 7.10 – Tabela auxiliar para cálculo das somas de quadrados das **Subparcelas**.

Tratamentos	Anos		Totais
	1º Ano	2º Ano	
Mucuna preta	333,8	352,8	686,6
Feijão de porco	205,2	327,8	533,0
<i>Crot. juncea</i>	370,0	450,4	820,4
Guandu	233,8	344,4	578,2
<i>Teph. Candida</i>	120,8	208,2	329,0
Soja	133,4	142,8	276,2
<i>Crot. grantiana</i>	87,6	266,4	354,0
Milho	435,0	372,8	807,8
Totais	1.919,6	2.465,6	4.385,2

No caso da interação ser significativa, pode-se estudar o efeito dos anos em cada tratamento, fazendo o desdobramento dos graus de liberdade da interação ou, ainda, verificar quais os tratamentos que diferem dentro de cada ano.

Tabela 7.11 – Efeito dos anos em cada tratamento separadamente.

Causa da Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	$Pr(> F)$
Blocos					
Tratamentos					
Resíduo(a)					
(Parcelas)					
Anos d. Trat. 1					
Anos d. Trat. 2					
Anos d. Trat. 3					
Anos d. Trat. 4					
Anos d. Trat. 5					
Anos d. Trat. 6					
Anos d. Trat. 7					
Anos d. Trat. 8					
Resíduo(b)					
Total	53.348,8775	63			

Tabela 7.12 – Efeito dos tratamentos em cada ano separadamente.

Causa da Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.	F_{calc}	$Pr(> F)$
Blocos					
Tratamentos					
Resíduo(a)					
(Parcelas)					
Tratamentos d. Ano 1					
Tratamentos d. Ano 2					
Resíduo(b)					
Total	53.348,8775	63			

Sendo significativos os efeitos dos tratamentos dentro dos anos 1 e 2, aplica-se o teste de Tukey para verificar quais os tratamentos que diferem entre si.

Serão considerados quatro casos, baseados na tabela geral:

Causa da Variação	S.Q.	g.l.	Q.M.
Blocos		$r - 1$	
Tratamentos (A)		$a - 1$	
Resíduo(a)		$n_a = (a - 1)(r - 1)$	s_a^2
(Parcelas)		$(ar - 1)$	
Tratamentos (B)		$b - 1$	
Interação $A \times B$		$(a - 1)(b - 1)$	
Resíduo(b)		$n_b = a(b - 1)(r - 1)$	s_b^2
Subparcelas		$abr - 1$	

1º Caso: A comparação entre médias de tratamentos A é feita utilizando-se o desvio-padrão s_a , sendo:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{s_a^2}{br}}$$

em que q é o valor tabelado, correspondendo a a tratamentos e n_a graus de liberdade.

2º Caso: A comparação entre médias de tratamentos B é feita utilizando-se o desvio-padrão s_b , sendo:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{s_b^2}{ar}}$$

em que q é o valor tabelado, correspondendo a b tratamentos e n_b graus de liberdade.

3º Caso: A comparação entre médias de tratamentos B num mesmo nível de A , ainda se utiliza o desvio-padrão s_b , sendo:

$$\Delta = q \sqrt{\frac{s_b^2}{ar}}$$

em que q é o valor tabelado, correspondendo a b tratamentos e n_b graus de liberdade.

4º Caso: A comparação entre médias de tratamentos A num mesmo nível de B , é um pouco mais complexa, por envolver, simultaneamente, os desvios-padrões s_a e s_b . Neste caso, calcula-se s' , da seguinte forma:

$$s' = \sqrt{\frac{(b - 1) s_b^2 + s_a^2}{b}}$$

sendo que os graus de liberdade de s' é dado por Satterthwaite:

$$n' = \frac{\left[\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{(b - 1) s_b^2}{n_b} \right]^2}{\frac{(s_a^2)^2}{n_a} + \frac{(b - 1)^2 (s_b^2)^2}{n_b}}$$

Portanto, o teste de Tukey fica:

$$\Delta = q \frac{s'}{\sqrt{r}}$$

em que q é o valor tabelado, correspondendo a a tratamentos e n' graus de liberdade.

Capítulo 8

Transformação de dados

8.1 Introdução

Após a análise gráfica dos resíduos e da aplicação de um teste para verificação da homogeneidade de variâncias, se for constatada a violação de uma ou mais suposições para os erros, é possível amenizar o problema fazendo alguma transformação pertinente na variável resposta para contornar o problema, antes de optar pela aplicação da estatística não-paramétrica.

Uma **suposição comumente violada** é a de variâncias homocedásticas (constante) e isto ocorre pelo fato da variável resposta seguir, em geral, uma distribuição de probabilidade em que a variância está funcionalmente relacionada com a média.

Se o pesquisador conhece a relação entre a variância das observações e a média, ele usa esta informação para selecionar a forma da transformação. Caso ele não conheça a relação é possível estimar o tipo de transformação usando os dados.

Seja $E(Y) = \mu$ a média de Y e suponha que o desvio padrão de Y é proporcional a potência da média de Y tal que:

$$\sigma_Y \propto \mu^\alpha.$$

O objetivo é encontrar uma transformação de Y que gere uma variância constante. Suponha que a transformação é uma potência dos dados originais, isto é

$$Y^* = Y^\lambda$$

E pode ser mostrado que

$$\sigma_{Y^*} \propto \mu^{\lambda+\alpha-1}.$$

Caso $\lambda = 1 - \alpha$, então a variância dos dados transformados Y^* é constante, mostrando que não é necessário transformação. Algumas das transformações mais comuns são apresentadas na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 – Transformações estabilizadoras da variância.

Relação entre σ_Y e μ	α	$\lambda = 1 - \alpha$	Transformação
$\sigma_Y \propto \text{constante}$	0	1	não é necessária
$\sigma_Y \propto \mu^{1/2}$	1/2	1/2	Raiz quadrada
$\sigma_Y \propto \mu$	1	0	Log
$\sigma_Y \propto \mu^{3/2}$	3/2	-1/2	Recíproca da raiz quadrada
$\sigma_Y \propto \mu^2$	2	-1	Recíproca

Observe que $\lambda = 0$ implica na transformação logarítmica.

8.1.1 Seleção empírica de α

Em muitas situações de delineamentos experimentais em que há repetições, pode-se estimar empiricamente α a partir dos dados. Dado que na i -ésima combinação de tratamentos $\sigma_Y \propto \mu_i^\alpha = \theta \mu_i^\alpha$, em que θ é uma constante de proporcionalidade, pode-se aplicar logaritmos para obter:

$$\log \sigma_{Y_i} = \log \theta + \alpha \log \mu_i \quad (8.1)$$

Portanto, um gráfico de $\log \sigma_{Y_i}$ versus $\log \mu_i$ seria uma linha reta com uma inclinação α . Como não se conhece σ_{Y_i} e μ_i , utilizam-se estimativas delas na equação 8.1 e usa-se o parâmetro de inclinação da equação linear ajustada como uma estimativa de α . Em geral, utiliza-se o desvio padrão s_i e a média \bar{y}_i do i -ésimo tratamento para estimar σ_{Y_i} e μ_i .

8.1.2 Método analítico para selecionar uma transformação em Y

Box & Cox (1964) mostraram como o parâmetro de transformação λ em $Y^* = Y^\lambda$ pode ser estimado simultaneamente com outros parâmetros do modelo (média geral e efeitos de tratamentos) usando o método de máxima verossimilhança.

O objetivo da transformação de Box e Cox, quando aplicada a um conjunto de valores observados, é produzir aproximadamente a normalidade, a constância de variância e também a linearidade.

O procedimento consiste em realizar, para vários valores de λ , uma análise de variância padrão sobre:

$$z = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{para } \lambda \neq 0 \\ \log y, & \text{para } \lambda = 0 \end{cases}$$

sendo λ uma constante conhecida. A estimativa de máxima verossimilhança de λ é o valor para o qual a soma de quadrado do resíduo, $SQRes(\lambda)$, é mínima. Este valor de λ é encontrado através do gráfico de $SQRes(\lambda)$ versus λ , sendo que λ é o valor que minimiza a $SQRes(\lambda)$.

Um intervalo de confiança $100(1 - \alpha)\%$ para λ pode ser encontrado calculando-se:

$$IC(\lambda) = SQRes(\lambda) \left(1 \pm \frac{t_{\alpha/2; \nu}^2}{\nu} \right)$$

em que ν é o número de graus de liberdade. Se o intervalo de confiança incluir o valor $\lambda = 1$, isto quer dizer que não é necessário transformar os dados.

Exemplo: Kronka & Banzatto apresentam os dados de um experimento que visa o controle do pulgão (*Aphis gossypii* Glover) em cultura de pepino em que se utilizou um delineamento inteiramente ao acaso com cinco tratamentos e seis repetições por tratamento. Os dados são apresentados na Tabela 8.2.

Tabela 8.2 – Contagem do número de pulgões encontrados.

Tratamentos	Repetições					
	1	2	3	4	5	6
A	2.370	1.687	2.592	2.283	2.910	3.020
B	1.282	1.527	871	1.025	825	920
C	562	321	636	317	485	842
D	173	127	132	150	129	227
E	193	71	82	62	96	44

sendo que:

A - Testemunha;

B - Azinfós etílico;

C - Supracid 40CE dose 1;

D - Supracid 40CE dose 2;

E - Diazinon 60CE.

A Figura 8.1 apresenta o número de pulgões considerando os tratamentos.

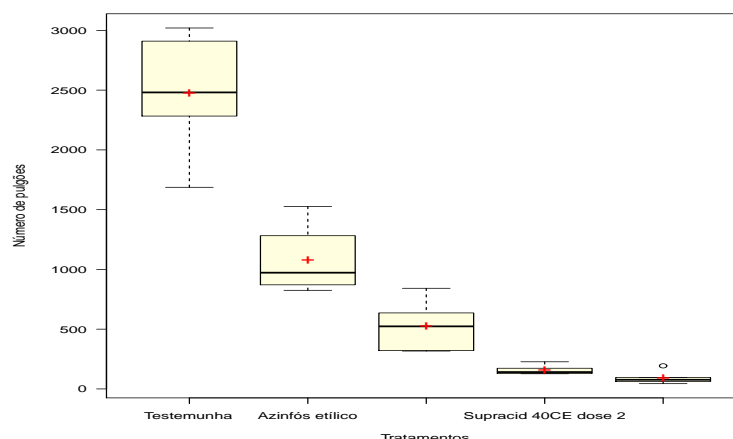


Figura 8.1 – Número de pulgões encontrados considerando-se os tratamentos.

O p – valor do teste de Bartlett para verificação da homogeneidade de variâncias foi $5,942 \times 10^{-6}$, o que mostra que as variâncias não são homogêneas, tendo sido violada uma das pressuposições para realização da análise de variância. Portanto, deve-se proceder a uma transformação dos dados para tentar estabilizar as variâncias.

Como são dados de contagem, poder-se-ia pensar em utilizar diretamente a transformação \sqrt{Y} para tentar estabilizar as variâncias, porém, deve-se aplicar uma das duas formas de transformação de dados discutidas nas seções 8.1.1 e 8.1.2.

Os logaritmos da média e da variância, para cada tratamento, são dados por:

Tabela 8.3 – Logaritmos das médias e variâncias dos tratamentos.

Tratamentos	$\log(\bar{y}_i)$	$\log(\bar{V}_i)$
A	7,81	12,36
B	6,98	11,23
C	6,27	10,60
D	5,05	7,31
E	4,51	7,93

Ajustando-se o modelo linear, dado pela equação 8.1, obtém:

$$\log \sigma_{Y_i} = 0,44 + 1,54 \times \log \mu_i.$$

Logo, o valor de λ será:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \alpha \\ &= 1 - 1,54 \\ \lambda &= 0,54, \end{aligned}$$

indicando que a transformação indicada é a \sqrt{Y} . O ajuste do modelo aos dados da Tabela 8.3 é apresentado na Figura 8.2.

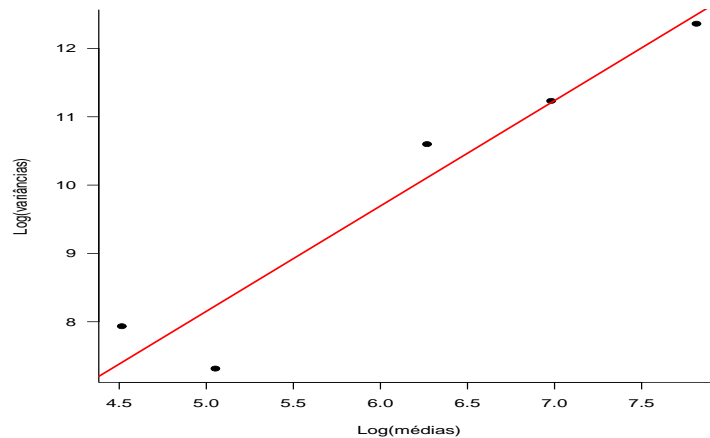


Figura 8.2 – Relação linear dos dados da Tabela 8.3.

Os comandos do R são:

```
pulgao = scan()
  2370 1687 2592 2283 2910 3020 1282 1527 871 1025 825 920 562 321 636
  317  485  842  173  127  132  150  129 227  193  71  82  62  96  44
Exp = data.frame(Trat = factor(rep(1:5, each=6), labels=LETTERS[1:5]), resp = pulgao)
attach(Exp)

  (mediastrat = tapply(pulgao, Trat, mean))
  (varitrat = tapply(pulgao, Trat, var))
  bartlett.test(resp ~ Trat)
# Usando a relação linear:
  data.frame(log(mediastrat), log(varitrat))
  par(mai=c(1,1,.2,.2))
  plot(log(varitrat)~log(mediastrat), xlab='Log(médias)',
       ylab='Log(variâncias)', las=1, pch=19, bty='l')
  reg = lm(log(varitrat) ~ log(mediastrat)) ; anova(reg) ; names(reg)
  abline(reg, col='red', lwd=2)
  reg$coef ; lambda = 1 - reg$coef[2] ; lambda
```

Cabe ao leitor a transformação dos dados, a verificação das pressuposições dos dados transformados e a análise de variância.

Capítulo 9

Polinômios Ortogonais

9.1 Introdução

A variável analisada na análise de variância nos delineamentos discutidos anteriormente pode ser qualitativa ou quantitativa. Uma variável quantitativa é aquela cujos níveis podem ser associados com pontos em uma escala numérica, tal como temperatura, pressão ou tempo. Variáveis qualitativas, por outro lado, apresentam valores que não podem ser colocados em ordem de magnitude.

Num experimento de alimentação de suínos em crescimento realizado no delineamento inteiramente casualizado foram utilizadas quatro tipos de ração: A, B, C e D. Os animais da raça Duroc-Jersey, com idade aproximada de 3 meses.

Nas rações, a farinha de carne era substituída total ou parcialmente pelo farelo de soja torrada, de tal modo que a porcentagem desta última nas rações eram as seguintes:

A - zero de soja (18% de farinha de carne);

B - 10% de soja (12% de farinha de carne);

C - 20% de soja (6% de farinha de carne);

D - 30% de soja (zero de farinha de carne);

O experimento foi conduzido por 98 dias, procedendo-se às pesagens regulares dos animais a cada 14 dias, sempre pela manhã e com animais em jejum por mais de 15 horas. Na Tabela 9.1 são apresentados os índices de conversão observados durante o período de 98 dias.

Tabela 9.1 – Índices de conversão (*kg* de ração / *kg* de ganho de peso)

Ração A	Ração B	Ração C	Ração D
3,66	3,15	3,14	3,17
3,38	3,33	3,47	3,04
2,93	3,42	3,11	2,97
3,71	3,28	3,38	3,13
3,67	3,16	3,15	2,75
3,39	3,47	3,00	2,62
3,22	3,35	3,06	3,37
3,34	2,99	3,01	3,05
27,3	26,15	25,32	24,10

A entrada de dados no R pode ser da seguinte forma:

```
indices = c(3.66,3.15,3.14,3.17,3.38,3.33,3.47,3.04,2.93,3.42,3.11,2.97,3.71,3.28,3.38,3.13,
            3.67,3.16,3.15,2.75,3.39,3.47,3.00,2.62,3.22,3.35,3.06,3.37,3.34,2.99,3.01,3.05)
(Indices = data.frame(Rações=factor(rep(1:4,8)), P_Soja=rep(c(0,10,20,30),4), resp=indices))
attach(Indices)
```

A análise de variância para os dados é apresentada na Tabela 9.2

Tabela 9.2 – Análise de variância para índices de conversão.

CV	gl	SQ	QM	F_{calc}	Pr(>F)
Rações	3	0,68321	0,22774	5,025	0,0065**
Resíduos	28	1,26899	0,04532		

O comando R para a construção da tabela da análise de variância é:

```
anava.reg = aov(indices ~ Rações)
anova(anava.reg)
```

Como o efeito de Rações foi significativo e, como os níveis das rações são quantitativos, deve-se decompor os graus de liberdade das Rações em regressão linear, quadrática e cúbica. Em situações em que os níveis da variável são igualmente espaçados, esta decomposição pode ser feita de modo simples pelo método dos polinômios ortogonais, com o auxílio de

coeficientes dados em tabelas, como por exemplo no livro *Design and Analysis of Experiments*, pág. 623, de Douglas Montgomery.

Constrói-se uma tabela em que constam os totais dos tratamentos ($y_{i.}$) e os coeficientes (c_i) a serem usados para os componentes de 1^o grau (c_{1i}), 2^o grau (c_{2i}) e 3^o grau (c_{3i}):

Níveis dos Tratamentos	Totais de Tratamentos ($y_{i.}$)	Coeficientes dos contrastes ortogonais (c_i)		
		Linear	Quadrático	Cúbico
0	27,30	-3	1	-1
10	26,15	-1	-1	3
20	25,32	1	-1	-3
30	24,10	3	1	1
	$K = \sum_{i=1}^a c_i^2$	20	4	20
	λ	2	1	$\frac{10}{3}$

Assim, pode-se construir os contrastes para cada regressão polinomial e obter suas respectivas somas de quadrados, da seguinte maneira:

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^a c_i y_{i.}$$

$$\hat{Y}_L = -3 \times (27,30) - 1 \times (26,15) + 1 \times (25,32) + 3 \times (24,1) = \mathbf{-10,43}$$

$$\hat{Y}_Q = 1 \times (27,30) - 1 \times (26,15) - 1 \times (25,32) + 1 \times (24,1) = \mathbf{-0,07}$$

$$\hat{Y}_C = -1 \times (27,30) + 3 \times (26,15) - 3 \times (25,32) + 1 \times (24,1) = \mathbf{-0,71}$$

As somas de quadrados dos contrastes é definida por: $SQ\hat{Y}_{reg} = \frac{\hat{Y}_{reg}^2}{n \times K}$.

Assim, tem-se:

$$SQ\hat{Y}_L = \frac{(-10,43)^2}{8 \times 20} = \mathbf{0,679906} \quad SQ\hat{Y}_Q = \frac{(-0,07)^2}{8 \times 4} = \mathbf{0,000153} \quad SQ\hat{Y}_C = \frac{(-0,71)^2}{8 \times 20} = \mathbf{0,003151}$$

A decomposição é apresentada na Tabela9.3

Tabela 9.3 – Decomposição dos graus de liberdade de tratamentos.

CV	gl	SQ	QM	F_{calc}	Pr(>F)
Linear	1	0,679906	0,679906	15,002**	0,0065**
Quadrática	1	0,000153	0,000153	0,003 ^{ns}	0,954 ^{ns}
Cúbica	1	0,003151	0,003151	0,069 ^{ns}	0,794 ^{ns}
Rações	(3)	(0,68321)	0,22774	5,025	0,0065**
Resíduos	28	1,26899	0,04532		
Total	31	1,952197			

Tal decomposição é obtida no R com os seguintes comandos:

```
(anava.reg = aov(indices ~ I(P_Soja) + I(P_Soja^2) + I(P_Soja^3)))
summary(anava.reg)
```

Da Tabela 9.3 nota-se que apenas o modelo linear foi significativo. Assim, deve-se determinar os coeficientes do modelo:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x) + \varepsilon$$

em que:

$$\alpha_0 = \bar{y}_{..} \quad \text{ou seja, a média geral dos dados.}$$

$$\alpha_1 = \frac{\hat{Y}_L}{n \times K_L}$$

e $P_u(x)$ é a u -ésima ordem do polinômio ortogonal, que implica que se há a níveis de x , tem-se $\sum_{i=1}^a P_u(x_i)P_s(x_i) = 0$, para $u \neq s$.

Os primeiros cinco polinômios ortogonais são:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \lambda_1 \left[\frac{x - \bar{x}}{d} \right]$$

$$P_2(x) = \lambda_2 \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right)^2 - \left(\frac{a^2 - 1}{12} \right) \right]$$

$$P_3(x) = \lambda_3 \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right)^3 - \left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right) \left(\frac{3a^2 - 7}{20} \right) \right]$$

$$P_4(x) = \lambda_4 \left[\left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right)^4 - \left(\frac{x - \bar{x}}{d} \right)^2 \left(\frac{3a^2 - 13}{14} \right) + \frac{3(a^2 - 1)(a^2 - 9)}{560} \right]$$

sendo \bar{x} a média dos níveis quantitativos e d a distancia entre os níveis de x .

Como $\alpha_0 = \bar{y}_{..} = 3,214688$, $\lambda_1 = 2$, tem-se

$$\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x)$$

$$\hat{y} = \bar{y}_{..} + \frac{\hat{Y}_L}{n \times K_L} \times \lambda_1 \left[\frac{x - \bar{x}}{d} \right]$$

$$\hat{y} = 3,2146 + \frac{-10,43}{8 \times 20} \times 2 \times \frac{(x - 15)}{10}$$

Assim, o modelo de regressão linear ajustado aos dados é:

$$\hat{y} = 3,41 - 0,013 x$$

que explica, aproximadamente, 35% da variabilidade do índice de conversão. O modelo ajustado é apresentado na Figura 9.1.

O ajuste do modelo final pode ser obtido no R com:

```
(anava.reg = aov(indices~I(P_Soja)))
summary(anava.reg)
(anavareg = lm(indices~I(P_Soja)))
summary(anavareg)
```

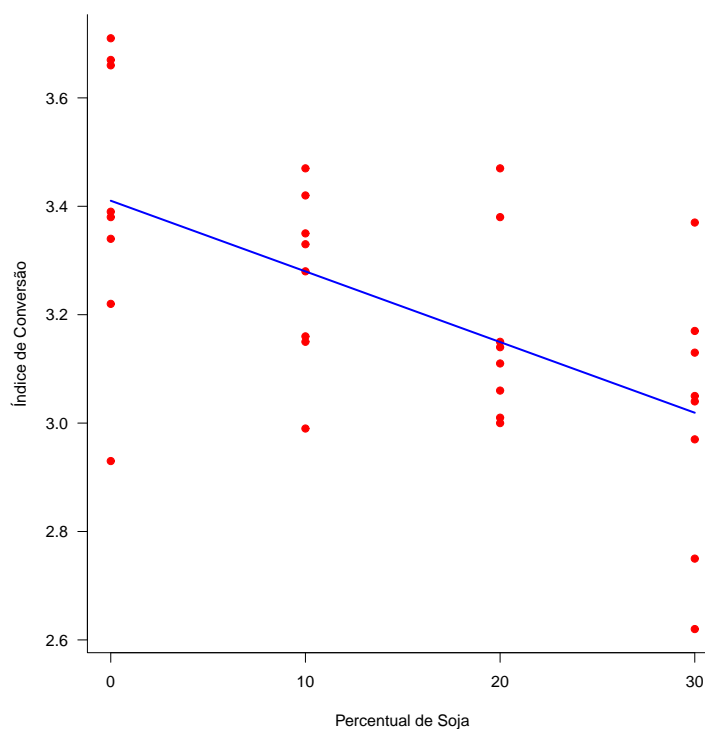


Figura 9.1 – Modelo de regressão linear ajustado aos dados.

E x e r c í c i o s

- 1) Num experimento estudou-se a adição de triguilho¹ a uma dieta básica de milho e farelo de soja na alimentação de suínos, mestiços (Landrace x Large White), com peso inicial de 10,5 kg durante um período experimental de 40 dias, mantidos em gaiolas metálicas de $1,90 \times 0,74$ m. O delineamento experimental foi o inteiramente casualizado com 5 tratamentos e 8 repetições e a parcela experimental representada por 4 animais (dois machos castrados e duas fêmeas). Os tratamentos consistiram na inclusão de 0; 7,5; 15,0; 22,5; e 30% de triguilho em dietas à base de milho e soja.

Os ganhos de peso médio diário em gramas (média dos 4 animais na parcela) foram:

Tratamentos % de triguilho	Repetições								Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	
0,0	340	320	310	350	320	340	330	340	2.650
7,5	360	350	350	360	370	380	340	350	2.860
15,0	370	370	380	390	360	370	360	380	2.980
22,5	380	390	380	390	360	360	360	390	3.010
30,0	400	390	410	420	380	390	410	420	3.220

- a) Determine as médias e variâncias para cada tratamento;
- b) Faça o gráfico de caixas, comparando os tratamentos;
- c) Verifique se a pressuposição de homogeneidade de variância é atendida;
- d) Verifique se a pressuposição de normalidade dos resíduos é atendida;
- e) Construa o quadro da análise de variância;
- f) Calcule as somas de quadrados para o efeito linear, quadrático e cúbico;
- g) Construa a tabela da análise de variância com desdobramento dos graus de liberdade de tratamentos por polinômios ortogonais;
- h) Tire as conclusões práticas possíveis para este experimento;
- i) Calcule as médias e os erros padrões das médias dos tratamentos e o coeficiente de variação do experimento.

¹Denomina-se de TRIGUILHO os grãos de trigo pouco desenvolvidos, mal granados ou chochos, obtidos após o processamento de limpeza e industrialização de lotes cujo peso específico é menor que o mínimo exigido na moagem ou da classificação do trigo e por isso são considerados subprodutos do mesmo.

9.2 Teste de aditividade de Tukey

Como citado, um dos pressupostos para a realização da análise de variância é que os efeitos principais do modelos são aditivos. Para verificação da aditividade dos efeitos é aplicado o teste de aditividade de Tukey.

9.2.1 Desenvolvimento do teste estatístico

Como notado na seção 4.2, a análise de variância foi construída sem testar a interação entre blocos e tratamento. No modelo considerado, para realizar o teste para a aditividade do efeitos, basta acrescentar o termo da interação entre os efeitos que poderia ser dado por:

$$(\alpha\beta)_{ij} = D\alpha_i\beta_j$$

e, portanto, o modelo seria:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + D\alpha_i\beta_j + \epsilon_{ij}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases} \quad (9.1)$$

sendo que cada um dos termos tem o significado usual, definido na seção 4.2.

Portanto, a soma de quadrados da interação $\sum_i \sum_j D^2 \alpha_i^2 \beta_j^2$ precisa ser obtida. Assumindo que os outros parâmetros sejam conhecidos, o estimador de mínimos quadrados para D é:

$$\hat{D} = \frac{\sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j y_{ij}}{\sum_i \alpha_i^2 \sum_j \beta_j^2} \quad (9.2)$$

O estimador usual para α_i é $(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})$ e que de β_j é $(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$. Substituindo os parâmetros em \hat{D} pelos estimadores, obtém-se:

$$\hat{D} = \frac{\sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})y_{ij}}{\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2} \quad (9.3)$$

Logo, a soma de quadrados da interação $\sum_i \sum_j D^2 \alpha_i^2 \beta_j^2$ é:

$$SQAB = \frac{\left[\sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})y_{ij} \right]^2}{\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2} \quad (9.4)$$

Observe que a soma de quadrados calculada em (4.8) reflete somente a variabilidade dos erros sem a interação. Se a interação existe, a $SQRes$ reflete não somente a variação

aleatória do erro, mas também refletirá os efeitos da interação. Assim, a soma de quadrados do erro puro pode ser obtida por subtração:

$$SQEP = SQRes - SQAB$$

em que a $SQRes$ é definida por (4.8) e $SQAB$ por (9.5).

Pode-se mostrar que se $D = 0$, ou seja, se não existe interação, $SQEP$ e $SQAB$ são independentemente distribuídas, e a estatística de teste é dada por:

$$F_{calc} = \frac{SQAB}{1} \div \frac{SQEP}{ab - a - b}$$

é distribuída como $F(1, ab - a - b)$. Note que um grau de liberdade é associado com $SQAB$ e $(a - 1)(b - 1) = ab - a - b$ graus de liberdade são associados com $SQEP$.

Portanto, para testar:

$$H_0 : D = 0 \quad \text{não existe interação}$$

$$H_0 : D \neq 0 \quad \text{existe interação}$$

usa-se a estatística de teste F_{calc} . A regra de decisão apropriada para controlar o erro Tipo I é:

$$\text{Se } F_{calc} \leq F(1 - \alpha; 1, ab - a - b) \quad \text{aceita-se } H_0$$

$$\text{Se } F_{calc} > F(1 - \alpha; 1, ab - a - b) \quad \text{rejeita-se } H_0$$

Exemplo: Para aplicação do teste de aditividade ao exemplo apresentado na Tabela 4.3, procede-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})y_{ij} &= (6, 50 - 10, 12)(10, 125 - 10, 12)(6, 4) + \dots \\ &\quad + (11, 18 - 10, 12)(10, 225)(10, 1) = -0,2865 \end{aligned}$$

$$\sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{SQTrat}{b} = \frac{87,560}{5} = 17,512$$

$$\sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 = \frac{SQBlocos}{a} = \frac{0,122}{4} = 0,0305$$

Portanto, a soma de quadrados da interação é:

$$SQAB = \frac{(-0,2865)^2}{17,512 \times 0,0305} = 0,1536787$$

A soma de quadrados dos resíduos, conforme a Tabela 4.3 é $SQRes = 5,83$. Logo, a soma de quadrados do erro puro é:

$$\begin{aligned} SQEP &= SQRes - SQAB \\ &= 5,83 - 0,1536787 \\ SQEP &= 5,676321305 \end{aligned}$$

e, aplicando-se a estatística de teste, tem-se:

$$\begin{aligned} F_{calc} &= \frac{SQAB}{1} \div \frac{SQEP}{ab - a - b} \\ &= \frac{0,1536787}{1} \div \frac{5,676321305}{20 - 4 - 5} \\ F_{calc} &= 0,2978 \end{aligned}$$

Como o F_{calc} é **menor** que o valor tabelado, dado por $F(0,95; 1, 11) = 4,84$, aceita-se H_0 , logo os efeitos principais são aditivos.

9.3 Tabela de Hartley

Tabela 9.4 – Tabela para o F_{max} .

ν	Número de Tratamentos										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39,0	87,5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15,4	27,8	39,2	50,7	62,0	72,9	83,5	93,9	104	114	124
4	9,6	15,5	20,6	25,2	29,5	33,6	37,5	41,1	44,6	48,0	51,4
5	7,2	10,8	13,7	16,3	18,7	20,8	22,9	24,7	26,5	28,2	29,9
6	5,82	8,38	10,4	12,1	13,7	15,0	16,3	17,5	18,6	19,7	20,7
7	4,99	6,94	8,44	9,70	10,8	11,8	12,7	13,5	14,3	15,1	15,8
8	4,43	6,00	7,18	8,12	9,03	9,78	10,5	11,1	11,7	12,2	12,7
9	4,03	5,34	6,31	7,11	7,80	8,41	8,95	9,45	9,91	10,3	10,7
10	3,72	4,85	5,67	6,34	6,92	7,42	7,87	8,28	8,66	9,01	9,34
12	3,28	4,16	4,75	5,30	5,72	6,09	6,42	6,72	7,00	7,25	7,43
15	2,86	3,54	4,01	4,37	4,68	4,95	5,19	5,40	5,59	5,77	5,95
20	2,46	2,95	3,29	3,54	3,76	3,94	4,10	4,24	4,37	4,49	4,59
30	2,07	2,40	2,61	2,78	2,91	3,02	3,12	3,21	3,29	3,36	3,39
60	1,67	1,85	1,96	2,04	2,11	2,17	2,22	2,26	2,30	2,33	2,36
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

 ν - Graus de Liberdade

Referências Bibliográficas

- Banzatto, D.A.; Kronka, S.N. **Experimentação Agrícola**. 3^a ed., Funep, Jaboticabal, 1995.
- Gomes, F.P. **Curso de Estatística Experimental**. 13^a ed. ESALQ, 1990.
- Kalil, E.B.; **Princípios de Técnica Experimental com Animais**. Material apostilado do curso de pós-graduação de nutrição animal e pastagens da ESALQ. Piracicaba, 1974.
- Montgomery, D.C. **Design and Analysis of Experiments**. 3^a Editora Wiley & Sons, 1991.
- Neter, J.; Wasserman, W.; Kutner, M.H. **Applied Linear Statistical Models**. 2^a , Richard D. Irwin, Inc., 1985.
- Shapiro, S.S; Wilk, M.B **An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)**. Biometrika, vol. 52, n° 3/4, dec. 1965.
- Silva, N. N. **Amostragem Probabilística**. 2^a ed., Editora da Universidade de São Paulo, 2004, 120p.
- Steel, R.G.; Torrie, J.H. **Principles and Procedures of Statistics**. Editora McGraw-Hill, 1980.
- Vieira, S. **Estatística Experimental**. 2^a Editora Atlas, 1999.
- Winer, B.J. **Statistical Principles in Experimental Design**. 2^a ed., Editora McGraw-Hill, 1971.

Referências Bibliográficas

- D.F. Andrade and P.J. Ogliari. *Estatística para as ciências agrárias e biológicas com noções de experimentação*. Editora da UFSC, Florianópolis, 2007.
- D.A. Banzatto and S.N. Kronka. *Experimentação Agrícola*. Ed. Funep, Jaboticabal, 3^a edition, 1995.
- A. Conagin, V. Nagai, and L. A. Ambrósio. Princípios de técnica experimental e análise estatística de experimentos. Material utilizado nos vários cursos ministrados no Instituto Agronômico de Campinas, 2007.
- F.P Gomes. *Curso de Estatística Experimental*. Ed. ESALQ, Piracicaba, 13^a edition, 1990.
- S.S Shapiro and M.B. Wilk. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3-4):591–611, Dec 1965.