

Ampliación de Ecuaciones Diferenciales

Manuel Fernández García-Hierro

Índice general

Capítulo 1. Sistemas Diferenciales Lineales	5
1. Sumario sobre Sistemas Lineales	5
2. Sistemas lineales autónomos	7
3. Conjugación	19
4. Clasificación topológica de sistemas hiperbólicos	21
5. Sistemas diferenciales lineales periódicos	25
6. Ejercicios	27
Capítulo 2. Sistemas diferenciales	29
1. Sumario sobre el problema de valor inicial	29
2. Diferenciabilidad de la solución respecto de las condiciones iniciales y parámetros	31
3. Integrales primeras	33
4. Sistemas autónomos. Órbitas	34
5. Relación entre sistemas autónomos y no autónomos	37
6. Sistemas dinámicos	39
7. Linealización	39
8. Ejercicios	40
Capítulo 3. Estabilidad en Sistemas Diferenciales Autónomos	43
1. Conjuntos límites	43
2. Estabilidad de los puntos de equilibrio. El método de Liapunov	47
3. Sistemas gradientes	50
4. Sistemas Hamiltonianos	52
5. Inestabilidad	54
6. Conjuntos invariantes	56
7. Ejercicios	60
Capítulo 4. Soluciones periódicas en sistemas autónomos planos	65
1. Sistemas Hamiltonianos en el plano	65
2. El Teorema del flujo tubular	67
3. El Teorema de Poincaré-Bendixon	71
4. Ejercicios	74

Sistemas Diferenciales Lineales

1. Sumario sobre Sistemas Lineales

1.1. Funciones matriciales. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Se define

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

donde $\|x\|$ es una norma en \mathbb{K}^n .

La aplicación $\|A\|$ es una norma en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que verifica:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

donde $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $x \in \mathbb{K}^n$.

Si $n \neq m$ lo anterior sigue siendo válido con los cambios obvios.

Sea la función $t \in I \rightarrow A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se verifica:

1. $A(t)$ es continua si y solo si $a_{ij}(t)$ es continua para todos i, j , donde $A(t) = [a_{ij}(t)]$.
2. $A(t)$ es derivable si y solo si $a_{ij}(t)$ es derivable para todos i, j .
Además

$$A'(t) = [a'_{ij}(t)].$$

3. $A(t)$ es integrable si y solo si $a_{ij}(t)$ es integrable para todos i, j .
Además

$$\int A(t) dt = \left[\int a_{ij}(t) dt \right].$$

4. Sean $A_k, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $k = 1, 2, \dots$. Entonces $A_k \rightarrow A$, $k \rightarrow \infty$ si y solo si $a_{ij}^k \rightarrow a_{ij}$, $k \rightarrow \infty$ para todos i, j .

1.2. Existencia y unicidad de soluciones para el problema de valor inicial.

TEOREMA 1.1. Sean $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ funciones continuas en el intervalo I . Entonces para cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ existe una única solución, definida en todo I , del problema de valor inicial

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Sea $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continua. Entonces el conjunto de soluciones de $x' = A(t)x$ es un espacio vectorial n -dimensional y el conjunto de soluciones de $x' = A(t)x + b(t)$ es un espacio afín n -dimensional.

1.3. Soluciones matriciales fundamentales. Una ecuación diferencial lineal matricial tiene la forma

$$X' = A(t)X,$$

donde $A: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Una solución matricial es una función derivable $X: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{para todo } t \in I.$$

Es fácil comprobar que si $x_0 \in \mathbb{K}^n$

$$(X(t)x_0)' = X'(t)x_0 = A(t)X(t)x_0.$$

De modo que $X(t)x_0$ es solución de $x' = A(t)x$.

TEOREMA 1.2. *Sea $t \in I \rightarrow A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continua. El problema de valor inicial*

$$X' = A(t)X, \quad X(t_0) = X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t_0 \in I,$$

tiene una única solución matricial definida en todo I .

PROPOSICIÓN 1.3 (Fórmula de Abel-Jacobi-Liouville). *Sea $t \in I \rightarrow A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continua. Si $X(t)$ es una solución matricial de $x' = A(t)x$ y $t_0 \in I$, entonces*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{traza } A(s) ds \right),$$

para todo $t \in I$.

El valor $|\det X(t)|$ representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores columnas, $X^1(t), \dots, X^n(t)$. De modo que la fórmula describe cómo varía el volumen de dicho paralelepípedo a lo largo del tiempo.

DEFINICIÓN 1.1. Una solución matricial $X(t)$ de $x' = A(t)x$ se dice fundamental si $X(t)$ es invertible para todo t , o equivalentemente si es invertible para algún t_0 .

Entonces, fijado $t_0 \in I$ se verifica que $x(t)$ es solución si y solo si

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0).$$

PROPOSICIÓN 1.4. *Sean X_1, X_2 soluciones matriciales de $X' = A(t)X$. Si X_1 es fundamental, entonces existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que*

$$X_2(t) = X_1(t)C.$$

1.4. Soluciones del sistema no homogéneo. Fórmula de variación de constantes. Si $X(t)$ es una solución matricial fundamental de $x' = A(t)x$, la solución de $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ es

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)b(s) ds,$$

donde $t, t_0 \in I$.

2. Sistemas lineales autónomos

2.1. Resultados básicos sobre sistemas diferenciales autónomos. Un sistema diferencial autónomo es de la forma

$$(1.1) \quad x' = f(x)$$

donde $f: U \rightarrow \mathbb{K}^n$ es una función definida en $U \subset \mathbb{R}^n$. Si $f(x) = Ax$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces el sistema autónomo es lineal.

El sistema $x' = f(x)$, admite la siguiente interpretación geométrica: A cada punto $x \in U$ le asignamos el vector $f(x)$. Así tenemos definido un campo de direcciones. Las soluciones son curvas tangentes al campo de direcciones. El siguiente resultado es fundamental para lo que sigue.

PROPOSICIÓN 1.5. *Si $x: I \rightarrow U$ es solución de (2.6), entonces para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, $x(t + \tau)$ es también solución de (2.6) definida en $-\tau + I = \{t - \tau : t \in I\}$.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\frac{dx(t + \tau)}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t + \tau) = f(x(t + \tau)).$$

□

DEFINICIÓN 1.2. Se dice que $x_0 \in U$ es un punto de equilibrio de (2.6) si $f(x_0) = 0$. A los demás puntos se les llama regulares.

Se verifica que $x_0 \in U$ es un punto de equilibrio si y solo si $x(t) \equiv x_0$ es solución de (2.6).

Sea $x: I \rightarrow U$ una solución de (2.6). La órbita de x es $\text{orb}(x) = x(I) = \{x(t) : t \in I\}$.

PROPOSICIÓN 1.6. *Supóngase que por cada condición inicial hay una única solución que la verifica. Entonces por cada $x_0 \in U$ pasa una única órbita.*

DEMOSTRACIÓN. La existencia es obvia. Probemos la unicidad. Sean $x: I \rightarrow U$ solución maximal tal que $x(0) = x_0$ e $y: J \rightarrow U$ solución maximal tal que $y(t_0) = x_0$. Entonces $\bar{x}: t_0 + I \rightarrow U$, $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$ también es solución y verifica, $\bar{x}(t_0) = x(0) = x_0 = y(t_0)$. Por tanto, $t_0 + I = J$ y $\bar{x}(t) = y(t)$ para todo $t \in J$. Así que $\text{orb}(x) = \text{orb}(\bar{x}) = \text{orb}(y)$. □

2.2. Exponencial de una matriz. Si λ es un autovalor de A y p un autovector asociado, entonces

$$x(t) = e^{t\lambda}p$$

es solución de (1.2). Además, si p^1, \dots, p^n es una base de autovectores con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente, entonces

$$e^{t\lambda_1}p^1, \dots, e^{t\lambda_n}p^n$$

es una base de soluciones de (1.2).

Para resolver el sistema $x' = Ax$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se define la exponencial de A , que es una matriz denotada por e^A , con casi las mismas propiedades que la exponencial de un escalar.

Del mismo modo que las soluciones de la ecuación escalar $x' = ax$, $a \in \mathbb{K}$, son $x(t) = e^{ta}x_0$, $x_0 \in \mathbb{K}$, las soluciones de

$$(1.2) \quad x' = Ax, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

serán $x(t) = e^{tA}x_0$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$, donde e^{tA} es la exponencial de la matriz tA , que definiremos a continuación.

DEFINICIÓN 1.3. Sean $t \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La función e^{tA} es la única solución matricial fundamental de $X' = AX$ tal que $X(0) = I$.

Las propiedades de e^{tA} , que llamaremos exponencial de la matriz tA , vienen recogidas en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.7. *Se verifica*

1.

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}, \quad e^{0A} = I.$$

2.

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

siendo la convergencia de la serie uniforme en cada intervalo compacto de \mathbb{R} .

3.

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \quad (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

4. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $P \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tales que $AP = PB$. Entonces

$$e^{tA}P = Pe^{tB}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

5. Si $AB = BA$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tA}B &= Be^{tA}, \\ e^{t(A+B)} &= e^{tA}e^{tB}. \end{aligned}$$

2.3. Soluciones complejas. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. El polinomio característico de A es

$$|A - \lambda I| = P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r},$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son los autovalores distintos de A con multiplicidades algebraicas n_1, \dots, n_r respectivamente. El Teorema de descomposición de Jordan garantiza la existencia de una matriz no singular P y una matriz

$B = \text{diag}(B_1, \dots, B_r)$, $B_l = \text{diag}(J_1^l, \dots, J_{p_l}^l)$, $l = 1, \dots, r$, donde

$$J_k^l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \lambda_l & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_l & \dots \end{pmatrix},$$

tales que $AP = PB$. Así que una solución matricial fundamental de $x' = Ax$ es $e^{tA}P = Pe^{tB}$ y todo lo que tenemos que hacer es calcular e^{tB} . Puesto que

$$e^{tB} = \text{diag}(e^{tB_1}, \dots, e^{tB_r}), \quad e^{tB_l} = \text{diag}(e^{J_1^l}, \dots, e^{J_{p_l}^l}),$$

debemos calcular e^{tJ} , donde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots \end{pmatrix}.$$

La matriz $J = \lambda I + N$, donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

La potencias sucesivas de N son

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \dots, N^m = 0,$$

donde m es el orden de la matriz N . Entonces

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t\lambda I + tN} = e^{t\lambda} I e^{tN} \\ &= e^{t\lambda} \left(I + \frac{tN}{1!} + \dots + \frac{(tN)^{m-1}}{(m-1)!} \right) \\ &= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si P es una matriz $n \times m$ cuyas columnas son P^1, \dots, P^m , entonces

$$Pe^{tJ} = [P^1 \ \dots \ P^m]e^{tJ} \\ = e^{t\lambda} \begin{bmatrix} P^1 & tP^1 + P^2 & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}P^1 + \dots + P^m \end{bmatrix}.$$

A partir de la fórmula anterior se deduce que las componentes de cualquier solución son funciones de la forma $e^{t\lambda}p(t)$, donde λ es un autovalor de A y donde $p(t)$ es un polinomio de grado estrictamente menor que la multiplicidad del autovalor λ . También es fácil, aunque de escritura engorrosa, calcular una base de soluciones de $x' = Ax$ sin más que considerar las n columnas de $e^{tB}P$.

2.4. Soluciones reales. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y considérese el sistema $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si permitimos soluciones con valores complejos, tenemos que $x(t)$ es solución si y solo si $\operatorname{Re} x(t)$ y $\operatorname{Im} x(t)$ son soluciones. Para obtener una base de soluciones reales, basta tener en cuenta que $x(t)$ es solución si y solo si su conjugada compleja $\bar{x}(t)$ es solución y que si $x^1(t), \dots, x^r(t), y^1(t), \bar{y}^1(t), \dots, y^s(t), \bar{y}^s(t)$ es una base de soluciones, siendo $x^1(t), \dots, x^r(t)$ reales, entonces

$$x^1(t), \dots, x^r(t), \operatorname{Re} y^1(t), \operatorname{Im} y^1(t), \dots, \operatorname{Re} y^s(t), \operatorname{Im} y^s(t)$$

es una base de soluciones reales.

2.5. Sistemas lineales autónomos planos. Sea $x' = Ax$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supóngase que $AP = PB$, donde P es no singular. Si se efectúa el cambio de variables $x = Py$, se obtiene

$$x' = Py' = Ax = APy, \quad y' = P^{-1}APy = By.$$

Así que si se resuelve $y' = By$, las soluciones del sistema de partida son $x(t) = Py(t)$.

Sea $x' = Ax$, donde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\det A \neq 0$. El objetivo es estudiar las órbitas del sistema diferencial.

El origen es el único punto de equilibrio.

El polinomio característico de A es:

$$\lambda^2 - (\operatorname{traza} A)\lambda + \det A = 0.$$

Distinguimos los siguientes casos.

1. Hay dos autovalores de A , λ_1, λ_2 reales y distintos. En este caso hay dos autovectores linealmente independientes, p^1, p^2 , de modo que

$$(Ap^1 \ Ap^2) = (p^1 \ p^2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Cualquier solución es de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = (p^1 \ p^2) \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}.$$

Llamamos $y_1(t)$, $y_2(t)$ a las componentes de $x_1(t)$, $x_2(t)$ respecto de la base p^1, p^2 . Entonces

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}.$$

Los cuatro semiejes coordenados son órbitas.

Distinguiremos tres casos atendiendo al signo de los autovalores.

1a). $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Entonces

$$\begin{aligned} y_1(t), y_2(t) &\rightarrow 0, & t &\rightarrow \infty \\ |y_1(t)|, |y_2(t)| &\rightarrow \infty, & t &\rightarrow -\infty \\ \frac{y_2(t)}{y_1(t)} &= \frac{y_{02}}{y_{01}} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0, & t &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Esta última afirmación significa que las órbitas tienden al origen con tangente nula cuando $t \rightarrow \infty$. Esta configuración del plano de fases se llama de nodo estable. También se dice que el punto de equilibrio o la ecuación diferencial es un nodo estable.

1b). $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Entonces

$$\begin{aligned} y_1(t), y_2(t) &\rightarrow 0, & t &\rightarrow -\infty \\ |y_1(t)|, |y_2(t)| &\rightarrow \infty, & t &\rightarrow \infty \\ \frac{y_2(t)}{y_1(t)} &= \frac{y_{02}}{y_{01}} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0, & t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Esta última afirmación significa que las órbitas tienden al origen con tangente nula cuando $t \rightarrow -\infty$. El plano de fases tiene una configuración de nodo inestable.

1c). $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Entonces

$$\begin{aligned} y_1(t) &\rightarrow 0, & t &\rightarrow -\infty \\ |y_2(t)| &\rightarrow \infty, & t &\rightarrow -\infty \\ y_2(t) &\rightarrow 0, & t &\rightarrow \infty \\ |y_1(t)| &\rightarrow \infty, & t &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Se dice que el plano de fases tiene una configuración de punto de silla.

2. Hay un autovalor doble, necesariamente real, λ .

2a) Hay dos autovectores linealmente independientes. En este caso si $P = (p^1 \ p^2)$, entonces $AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, de modo que $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Así que las soluciones son de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} y_{01} \\ e^{t\lambda} y_{02} \end{pmatrix}.$$

Todas las órbitas son semirectas que parten del origen. Si $\lambda < 0$ tenemos una configuración de punto de estrella estable y si $\lambda > 0$ de punto de estrella inestable.

2b) Sólo hay un autovector linealmente independiente. Entonces

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Y, por tanto,

$$y_1(t) = (y_{01} + y_{02}t)e^{t\lambda}, \quad y_2(t) = e^{t\lambda}y_{02}.$$

Se dice que el plano de fases tiene una configuración de nodo impropio.

El comportamiento asintótico de las órbitas se deduce fácilmente de las fórmulas anteriores.

3. Hay dos autovalores complejos conjugados, $\lambda = \alpha \pm i\beta$

3a) Sea $\alpha \neq 0$. Se verifica que si $\text{Re } p + i \text{Imag } p$ es un autovector de $\alpha + i\beta$ y si

$$P = (\text{Re } p \quad \text{Im } p),$$

entonces

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\beta & \sin t\beta \\ -\sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}.$$

Sea el sistema diferencial

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Si efectuamos un cambio de variable a polares se obtiene $r' = \alpha r$ $\theta' = -\beta$, e integrando,

$$r(t) = \sqrt{y_1(t)^2 + y_2(t)^2} = r_0 e^{t\alpha}$$

$$\theta(t) = \arctan \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \theta_0 - t\beta.$$

Eliminado t entre las dos ecuaciones, se tiene

$$\rho(\theta) = r(t(\theta)) = \rho_0 \exp^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta_0 - \theta)},$$

que es una espiral logarítmica.

Se dice que el plano de fases tiene una configuración de foco.

3b) Sea $\alpha = 0$. Entonces $r(t) = r_0$ y la órbita es una circunferencia. Las soluciones son $\frac{2\pi}{\beta}$ periódicas. Se dice que el plano de fases tiene configuración de centro.

Finalmente consideremos el caso en que $\det A = 0$. Si exceptuamos el caso trivial en que A es la matriz nula, hay dos casos posibles. Nótese que hay un autovalor nulo.

Caso 1.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

El sistema es $y_1' = \lambda y_1$, $y_2' = 0$ y las soluciones $y_1(t) = y_{01} \exp(t\lambda)$, $y_2(t) = y_{02}$. El eje $y_1 = 0$ está formado por puntos de equilibrio y todas las órbitas son semirectas horizontales.

Caso 2.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

El sistema es $y_1' = y_2$, $y_2' = 0$ y las soluciones $y_1(t) = y_{02}t + y_{01}$, $y_2(t) = y_{02}$. El eje $y_2 = 0$ está formado por puntos de equilibrio y todas las órbitas son rectas horizontales.

Si λ_1, λ_2 son los autovalores de A y si tenemos en cuenta que el polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

podemos expresar la discusión anterior en términos del $\det A$ y $\text{traza } A$ tal como se muestra en el siguiente gráfico, donde

$$\Delta = (\text{traza } A)^2 - 4 \det A.$$

2.6. Campos hiperbólicos. Atractores y fuentes. Se dice que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es hiperbólico si todos sus autovalores tienen parte real distinta de 0. Puesto que para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de $x' = Ax$ podemos utilizar cualquier norma en \mathbb{K}^n , construiremos una adecuada a nuestros propósitos.

LEMA 1.8. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y α tales que

$$\operatorname{Re} \lambda < \alpha, \text{ para todo } \lambda \text{ autovalor de } A.$$

Entonces existe un producto escalar en \mathbb{K}^n tal que

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq \alpha |x|^2, \quad (x \in \mathbb{K}^n),$$

donde $|\cdot|$ es la norma asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Existe una base en \mathbb{C}^n , p^1, \dots, p^n tal que si P es la matriz cuyas columnas son los vectores anteriores, entonces

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & \delta \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A y donde δ es en cada fila 0 ó 1. Sea $\epsilon > 0$.

Construimos la nueva base $u^k = \epsilon^k p^k$, $k = 1, \dots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} Au^1 &= \lambda_1 u^1 \\ Au^2 &= \epsilon^2(\lambda_2 u^2 + \delta u^1) = \lambda_2 u^2 + \delta \epsilon u^1 \\ &\dots\dots\dots \\ Au^n &= \lambda_n u^n + \delta \epsilon u^{n-1}. \end{aligned}$$

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar respecto de esta base, es decir,

$$\langle u^j, u^k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle Au^1, u^k \rangle &= \langle \lambda_1 u^1, u^k \rangle \\ &= \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } 1 = k \\ 0 & \text{si } 1 \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $j \geq 2$

$$\begin{aligned} \langle Au^j, u^k \rangle &= \langle \lambda_j u^j + \delta \epsilon u^{j-1}, u^k \rangle \\ &= \begin{cases} \lambda_j & \text{si } k = j \\ \delta \epsilon & \text{si } j = k + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq k, k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Sea $x = x_1 u^1 + \dots + x_n u^n$. Se verifica

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \langle x_1 Au^1 + \dots + x_n Au^n, x_1 u^1 + \dots + x_n u^n \rangle \\ &= \sum_{j,k} x_j \bar{x}_k \langle Au^j, u^k \rangle \\ &= |x_1|^2 \lambda_1 + \dots + |x_n|^2 \lambda_n \\ &\quad + (x_2 \bar{x}_1 + x_3 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_{n-1}) \delta \epsilon. \end{aligned}$$

Tomando conjugados complejos se obtiene

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle &= |x_1|^2 \bar{\lambda}_1 + \dots + |x_n|^2 \bar{\lambda}_n \\ &\quad + (x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3 + \dots + x_{n-1} \bar{x}_n) \delta \epsilon. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle &= \langle Ax, x \rangle + \langle x, Ax \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} \lambda_1 |x_1|^2 + \dots + 2 \operatorname{Re} \lambda_n |x_n|^2 \\ &\quad + 2 \delta \epsilon \operatorname{Re}(x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_3 + \dots + x_{n-1} \bar{x}_n). \end{aligned}$$

Llamemos

$$\Phi(x) = |x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_3 + \cdots + x_{n-1}\bar{x}_n|,$$

entonces

$$\Phi(\lambda x) = |\lambda|^2 \Phi(x), \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Puesto que Φ es continua y la esfera unidad es compacta,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) \\ &= |x|^2 \Phi\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq M|x|^2, \end{aligned}$$

donde M es una constante positiva.

Elegimos $\epsilon > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} \lambda_j \leq \alpha - \epsilon M.$$

Entonces

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq (\alpha - \epsilon M)|x|^2 + \epsilon M|x|^2 = \alpha|x|^2.$$

Para probar el caso real, se construye el producto escalar complejo y se tiene en cuenta que $\operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar real. \square

COMENTARIO 1.9. El resultado anterior sigue siendo cierto y se demuestra de la misma forma para E subespacio de \mathbb{C}^n invariante por A . Es decir, si existe α tal que $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$, para todo λ autovalor de A con $\ker(A - \lambda) \subset E$, entonces existe un producto escalar en E tal que

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle_E \leq \alpha |x|_E^2, \quad (x \in E),$$

donde $|\cdot|_E$ es la norma asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$.

Ahora es fácil probar el

TEOREMA 1.10. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y α tales que

$$\operatorname{Re} \lambda < \alpha, \text{ para todo } \lambda \text{ autovalor de } A.$$

Entonces existe un producto escalar en \mathbb{K}^n tal que

$$(1.3) \quad |e^{tA}x| \leq e^{t\alpha}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \geq 0$$

$$(1.4) \quad |e^{tA}x| \geq e^{t\alpha}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \leq 0$$

donde $|\cdot|$ es la norma asociada al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta que la diferencial del producto escalar en $(x, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ es la aplicación lineal de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ definida por

$D\langle \cdot, \cdot \rangle(x, y)(h, k) = \langle x, k \rangle + \langle h, y \rangle$ y que $\frac{\partial}{\partial t} e^{tA}x = Ae^{tA}x$, aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle &= D\langle \cdot, \cdot \rangle(e^{tA}x, e^{tA}x)(Ae^{tA}x, Ae^{tA}x) \\ &= \langle e^{tA}x, Ae^{tA}x \rangle + \langle Ae^{tA}x, e^{tA}x \rangle \\ &= 2\operatorname{Re}\langle Ae^{tA}x, e^{tA}x \rangle \leq 2\alpha \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle. \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle}{\langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle} - 2\alpha \leq 0$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\ln \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle - 2\alpha t) \leq 0.$$

De modo que la función

$$\ln \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle - 2\alpha t$$

es decreciente. De aquí se deducen las ecuaciones (1.3). \square

COMENTARIO 1.11. Un comentario análogo al que sigue al lema también se verifica.

TEOREMA 1.12. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ hiperbólico. Entonces existen subespacios E^s y E^u de \mathbb{K}^n invariantes por A , tales que*

1. $\mathbb{K}^n = E^s \oplus E^u$.
2. $e^{tA}x \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, para todo $x \in E^s$.
3. $\|e^{tA}x\| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, para todo $x \notin E^s$, $x \neq 0$.
4. $e^{tA}x \rightarrow 0$, $t \rightarrow -\infty$, para todo $x \in E^u$.
5. $\|e^{tA}x\| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$, para todo $x \notin E^u$, $x \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_r$ los autovalores distintos de A con multiplicidades $n_1, \dots, n_s, n_{s+1}, \dots, n_r$ respectivamente y tales que $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, si $1 \leq j \leq s$ y $\operatorname{Re} \lambda_{s+j} > 0$, si $1 < j < r - s$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \left(\bigoplus_{j=1}^s \ker(A - \lambda_j)^{n_j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{r-s} \ker(A - \lambda_{s+j})^{n_{s+j}} \right) \\ &= E^s \oplus E^u. \end{aligned}$$

E^s, E^u son invariantes por A , porque lo son $\ker(A - \lambda_j)^{n_{\lambda_j}}$ y $(A - \lambda_{s+j})^{n_{\lambda_{s+j}}}$.

Se elige $\alpha > 0$ tal que $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha$ si $\operatorname{Re} \lambda < 0$, y $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ si $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Aplicando (1.11) a E^s, E^u se obtiene la existencia de productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ en E^s y $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$ en E^u tales que

$$\begin{aligned}
|e^{tA}x|_s &\leq e^{-t\alpha}|x|_s, & t \geq 0, x \in E^s \\
|e^{tA}x|_s &\geq e^{-t\alpha}|x|_s, & t \leq 0, x \in E^s \\
|e^{tA}x|_u &\leq e^{t\alpha}|x|_u, & t \leq 0, x \in E^u \\
|e^{tA}x|_u &\geq e^{t\alpha}|x|_u, & t \geq 0, x \in E^u.
\end{aligned}$$

Se define el producto escalar en \mathbb{C}^n

$$\langle x, y \rangle = \langle x^s, y^s \rangle_s + \langle x^u, y^u \rangle_u,$$

donde $x = x^s + x^u$, $y = y^s + y^u$, $x^s, y^s \in E^s$, $x^u, y^u \in E^u$. Nótese que

$$\langle x, y \rangle = \langle x^s, y^s \rangle_s, \quad \text{si } x, y \in E^s$$

y que

$$\langle x, y \rangle = \langle x^u, y^u \rangle_u, \quad \text{si } x, y \in E^u.$$

Además, puesto que E^s, E^u son invariantes por A , también lo son por e^{tA} .

Para probar (2) téngase en cuenta que

$$|e^{tA}x| \leq e^{-t\alpha}|x| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

si $x \in E^s, t > 0$.

(3) Si $x \notin E^s$, $x \neq 0$, entonces $x = x^s + x^u$, donde $x^u \neq 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}
e^{tA}x &= e^{tA}x^s + e^{tA}x^u \\
|e^{tA}x^u| &\geq e^{t\alpha}|x^u| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|e^{tA}x|^2 &= \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle \\
&= \langle e^{tA}x^s, e^{tA}x^s \rangle_s + \langle e^{tA}x^u, e^{tA}x^u \rangle_u \\
&= |e^{tA}x^s|_s^2 + |e^{tA}x^u|_u^2 \geq |e^{tA}x^u|_u^2.
\end{aligned}$$

De modo que

$$|e^{tA}x|^2 \rightarrow \infty \quad t \rightarrow \infty.$$

De forma análoga se prueba (4) y (5).

En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se consideran los subespacios $E^s \cap \mathbb{R}^n$, $E^u \cap \mathbb{R}^n$, que son subespacios vectoriales reales invariantes por A y los productos escalares reales $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ y $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle_u$. \square

DEFINICIÓN 1.4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que la ecuación $x' = Ax$ es un atractor si todos los autovalores de A tienen parte real estrictamente negativa, y que es una fuente si $x' = -Ax$ es un atractor.

PROPOSICIÓN 1.13. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son equivalentes

(1) $x' = Ax$ es un atractor.

(2) Existe $\alpha > 0$ y un producto escalar en \mathbb{K}^n tal que si $|\cdot|$ es la norma asociada

a) $|e^{tA}x| \leq e^{-t\alpha}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \geq 0.$

b) $|e^{tA}x| \geq e^{-t\alpha}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \leq 0.$

(3) Toda solución de $x' = Ax$ satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

(4) Toda solución, excepto la idénticamente nula, de $x' = Ax$ satisface

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = \infty.$$

(5) $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} = 0.$

Las proposiciones anteriores implican

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|e^{tA}\| = \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. (1) implica (2). Se elige $\alpha > 0$ tal que $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha$ para todo λ autovalor de A y se aplica el Teorema (1.10).

(2) implica (3) y (2) implica (4) son inmediatas de las desigualdades en (2). Para probar que (3) o (4) implican (1), supóngase que existe un autovalor λ con $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Sea x un autovector de λ . Entonces la solución $e^{t\lambda}x$ no tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, ni tiende a ∞ cuando $t \rightarrow -\infty$, ya que

$$\|e^{t\lambda}x\| = |e^{t\lambda}| \|x\| = e^{t \operatorname{Re} \lambda} \|x\|.$$

(2) implica (5) y (6). De la primera desigualdad en (2) y de la definición de norma de matriz, se obtiene que

$$|e^{tA}| \leq e^{-t\alpha}, \quad t \geq 0,$$

de donde se deduce (5). De la segunda desigualdad en (2), se obtiene

$$e^{-t\alpha}|x| \leq |e^{tA}x| \leq |e^{tA}| |x|, \quad t \leq 0,$$

de donde se deduce (6). □

Teniendo en cuenta la definición de fuente, se obtienen caracterizaciones análogas a las anteriores.

PROPOSICIÓN 1.14. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son equivalentes

(1) $x' = Ax$ es una fuente.

(2) Existe $\alpha > 0$ y un producto escalar en \mathbb{K}^n tal que si $|\cdot|$ es la norma asociada

a) $|e^{tA}x| \leq e^{t\alpha}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \leq 0.$

b) $|e^{tA}x| \geq e^{t\alpha}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \geq 0.$

(3) Toda solución de $x' = Ax$ satisface

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0.$$

(4) Toda solución, excepto la idénticamente nula, de $x' = Ax$ satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty.$$

$$(5) \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA} = 0.$$

Las proposiciones anteriores implican

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = \infty.$$

COMENTARIO 1.15. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y E un subespacio de \mathbb{K}^n invariante por A . Decimos que $x' = Ax$ es un atractor en E si todo λ autovalor de A con autovectores en E tiene $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Y decimos que A es una fuente en E si $-A$ es un atractor. Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, es fácil comprobar que las Proposiciones 1.13 y 1.14 tienen versiones obvias para un subespacio invariante E .

3. Conjugación

Toda clasificación se realiza en base a una relación de equivalencia. Definiremos la conjugación en sistemas diferenciales lineales, lo que nos permitirá obtener una clasificación de los sistemas hiperbólicos.

DEFINICIÓN 1.5. Se dice que los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son conjugados, si existe una biyección $h: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

Es decir, es una biyección que transforma la órbita que pasa por x en la órbita que pasa por $h(x)$, conservando la variable t .

Es fácil comprobar que la conjugación es una relación de equivalencia en el conjunto de los sistemas diferenciales lineales homogéneos con coeficientes constantes.

La conjugación se dice lineal si h es un isomorfismo, diferenciable, si es un difeomorfismo y topológica si es un homeomorfismo.

1. Una conjugación conserva las soluciones periódicas y los periodos. En efecto, si $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son conjugados y $e^{tA}x$ es T -periódica, entonces

$$h(x) = h(e^{TA}x) = e^{TB}h(x),$$

de donde se deduce que $e^{tB}h(x)$ es T -periódica. Por tanto en los sistemas planos, un centro nunca puede ser conjugado a un foco, nodo o un punto de silla.

2. Sea $\lambda > 0$. La función

$$h(x) = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -|x|^\lambda, & x < 0 \end{cases}$$

es una conjugación topológica entre $x' = x$ y $x' = \lambda x$. En efecto h es un homeomorfismo de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Además si $x > 0$

$$h(e^t x) = (e^t x)^\lambda = e^{t\lambda} h(x).$$

Si $x = 0$ la igualdad anterior es obvia, y si $x < 0$

$$h(e^t x) = -|e^t x|^\lambda = -e^{t\lambda} |x|^\lambda = e^{t\lambda} h(x).$$

PROPOSICIÓN 1.16. *Los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son linealmente conjugados si y solo si A y B son semejantes.*

DEMOSTRACIÓN. Si $h(x) = Px$ es el isomorfismo que define la conjugación lineal, entonces $\det P \neq 0$ y

$$Pe^{tA}x = e^{tB}Px.$$

Derivando con respecto a t

$$PAe^{tA}x = Be^{tB}Px.$$

En $t = 0$ se obtiene que $PAx = BPx$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$, de donde se deduce que $PA = BP$.

Recíprocamente si A y B son semejantes, existe P no singular tal que $PA = BP$. Por tanto $Pe^{tA} = e^{tB}P$, es decir, $h(x) = Px$ es una conjugación lineal. \square

De modo que cada clase de equivalencia está formada por los sistemas diferenciales que tienen matrices semejantes.

PROPOSICIÓN 1.17. *Los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son diferenciablemente conjugados si y solo si son linealmente conjugados.*

DEMOSTRACIÓN. Si h es lineal, es diferenciable. Por tanto supongamos que las ecuaciones sean diferenciablemente conjugadas y, en primer lugar, supongamos también que el difeomorfismo h satisface $h(0) = 0$.

Entonces derivando respecto de t

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x),$$

se obtiene

$$h'(e^{tA}x)Ae^{tA}x = Be^{tB}h(x).$$

En $t = 0$,

$$h'(x)Ax = Bh(x).$$

En particular, para $x = \lambda y$,

$$h'(\lambda y)Ay = B \frac{h(\lambda y) - h(0)}{\lambda}.$$

Tomando límite cuando $\lambda \rightarrow 0$ y teniendo en cuenta que h' es continua,

$$h'(0)Ay = Bh'(0)y$$

y, puesto que la igualdad anterior se verifica para cualquier $y \in \mathbb{K}^n$, finalmente se deduce que

$$h'(0)A = Bh'(0),$$

es decir, los sistemas son linealmente conjugados.

En el caso $h(0) = c \neq 0$, se tiene en cuenta que la función $k(x) = x - c$ es una conjugación diferenciable de $x' = Bx$ consigo mismo. En efecto,

$$e^{tB}c = e^{tB}h(0) = h(e^{tA}0) = h(0) = c.$$

Por tanto,

$$k(e^{tB}x) = e^{tB}x - c = e^{tB}x - e^{tB}c = e^{tB}k(x).$$

Entonces $k \circ h$ es una conjugación diferenciable entre $x' = Ax$ y $x' = Bx$ tal que $k \circ h(0) = 0$ y según lo que ya hemos demostrado, hay una conjugación lineal entre ambos sistemas diferenciales. \square

4. Clasificación topológica de sistemas hiperbólicos

Comenzamos con un lema sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema lineal.

LEMA 1.18. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces existe $\beta > 0$ tal que*

$$|e^{tA}x| \leq e^{-t\beta}|x|, \quad t \leq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\beta > 0$ tal que $\operatorname{Re} \lambda < \beta$ para todo λ autovalor de $-A$. Existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$|e^{t(-A)}x| \leq e^{t\beta}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \geq 0,$$

o equivalentemente,

$$|e^{tA}x| \leq e^{-t\beta}|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad t \leq 0.$$

\square

TEOREMA 1.19. *El sistema $x' = Ax$ es un atractor si y solo si es topológicamente conjugado a $x' = -x$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $x' = -x$ tiene a -1 como único autovalor, es un atractor. Probaremos en primer lugar que si h es una conjugación topológica entre $x' = Ax$ y el atractor $x' = Bx$, entonces el primer sistema también es un atractor. En efecto de $h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x)$ y por ser atractor $x' = Bx$ tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(e^{tA}x) = 0.$$

Si $x = 0$, $h(0) = 0$. Entonces

$$e^{tA}x = h^{-1}(e^{tB}h(x)) \rightarrow h^{-1}(0) = 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Recíprocamente, supóngase que $x' = Ax$ es un atractor. Probaremos que es topológicamente conjugado a $x' = -x$. Por el Teorema 1.10 existen $\alpha > 0$ y un producto escalar en \mathbb{K}^n tales que si $F(x) = \langle x, x \rangle$ y $G(t, x) = F(e^{tA}x)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(t, x) &= F'(e^{tA}x)Ae^{tA}x \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle e^{tA}x, Ae^{tA}x \rangle \\ &\leq -2\alpha \operatorname{Re} \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle \\ &= -2\alpha G(t, x) = -2\alpha F(e^{tA}x). \end{aligned}$$

Fijemos $x \neq 0$ y defínase $G(\cdot, x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mediante $G(\cdot, x)(t) = G(t, x)$. Entonces $G(\cdot, x)$ es estrictamente decreciente, $\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t, x) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t, x) = 0$. De modo que existe un único $t(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$1 = G(t(x), x) = F(e^{t(x)A}x) = |e^{t(x)A}x|^2.$$

La función $t(x)$ es continua en $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ya que coincide localmente con la única solución (dada por el teorema de funciones definidas implícitamente) de la ecuación

$$G(t, x) - 1 = 0,$$

puesto que

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, x) < 0, \quad \text{si } x \neq 0.$$

La función

$$h(x) = \begin{cases} e^{t(x)}e^{t(x)A}x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es una conjugación topológica entre $x' = Ax$ y $x' = -x$. En efecto, se verifica

$$1 = |e^{t(x)A}x|^2 = |e^{(-t+t(x))A}e^{tA}x|^2,$$

es decir, si $y = e^{tA}x$, entonces $t(y) = -t + t(x)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} h(e^{tA}x) &= e^{t(x)-t}e^{(t(x)-t)A}e^{tA}x \\ &= e^{t(x)-t}e^{t(x)A}x \\ &= e^{-t}h(x). \end{aligned}$$

Luego solo falta demostrar que h es un homeomorfismo. Si $x \neq 0$, h es continua por serlo $t(x)$. Para probar la continuidad en $x = 0$, observemos en primer lugar que si $x \neq 0$,

$$|h(x)| = |e^{t(x)}e^{t(x)A}x| = e^{t(x)}.$$

Entonces de (2a) en la Proposición 1.13 se obtiene que existe $\alpha > 0$ tal que si $t(x) \geq 0$

$$1 = |e^{t(x)A}x| \leq e^{-t(x)\alpha}|x|.$$

Por tanto,

$$e^{t(x)\alpha} = |h(x)|^\alpha \leq |x|.$$

Así que

$$|h(x)| \leq |x|^{1/\alpha}.$$

Si $t(x) \leq 0$, del Lema anterior se obtiene que existe $\beta > 0$ tal que

$$1 = |e^{t(x)A}x| \leq e^{-t(x)\beta}|x|.$$

Por tanto,

$$e^{t(x)\beta} = |h(x)|^\beta \leq |x|.$$

Así que

$$|h(x)| \leq |x|^{1/\beta}.$$

En definitiva,

$$|h(x)| \leq \max(|x|^{1/\alpha}, |x|^{1/\beta}),$$

de donde se obtiene que h es continua en $x = 0$.

La función inversa de h se puede calcular explícitamente, teniendo en cuenta que $h(x) \neq 0$ si $x \neq 0$ y $t(x) = \ln |h(x)|$. En efecto,

$$h(x) = |h(x)|e^{(\ln |h(x)|)A}x.$$

Así que

$$x = \frac{1}{|h(x)|}e^{-(\ln |h(x)|)A}h(x).$$

Por tanto, haciendo $h(x) = y$,

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{|y|}e^{-(\ln |y|)A}y, & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

La función h^{-1} es continua si $y \neq 0$. Para probar que es continua en $y = 0$ téngase en cuenta que si $|y| < 1$, $\ln |y| < 0$. Por (2a) en la Proposición 1.10

$$\begin{aligned} |h^{-1}(y)| &= \frac{1}{|y|}|e^{-(\ln |y|)A}y| \\ &\leq e^{\alpha \ln |y|}|y| \rightarrow 0, \quad \text{si } |y| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.20. *El sistema $x' = Ax$ es una fuente si y solo si es topológicamente conjugado a $x' = x$.*

DEMOSTRACIÓN. El sistema $x' = -Ax$ es un atractor lo que equivale a que es topológicamente conjugado a $x' = -x$. Es decir, existe un homeomorfismo $h: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ tal que

$$h(e^{-tA}x) = e^{-t}h(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{K}^n,$$

o equivalentemente

$$h(e^{tA}x) = e^th(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{K}^n,$$

es decir, $x' = Ax$ es topológicamente conjugado a $x' = x$. □

COMENTARIO 1.21. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y E un subespacio invariante por A . Decimos que $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son conjugados en E si existe una biyección $h: E \rightarrow E$ tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in E$$

Nótese que se deduce de la definición que E es invariante por B ya que si $x \in E$, $e^{tB}x = h(e^{tA}h^{-1}(x)) \in E$ para todo t . Entonces

$$\frac{e^{tB}x - e^{0B}x}{t} \in E,$$

y tomando límite cuando $t \rightarrow 0$, $Bx \in E$.

Ahora es fácil comprobar que los Teoremas 1.19 y 1.20 tienen versiones para subespacios invariantes.

TEOREMA 1.22. *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y E un subespacio invariante por A . Entonces*

1. $x' = Ax$ es un atractor en E si y solo si es topológicamente conjugado en E a $x' = -x$.
2. $x' = Ax$ es una fuente en E si y solo si es topológicamente conjugado en E a $x' = x$.

DEFINICIÓN 1.6. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $x' = Ax$ es hiperbólico. Llamamos índice de estabilidad del sistema a la dimensión del subespacio estable E^s dado por el Teorema 1.12.

TEOREMA 1.23. *Sean A y $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son hiperbólicos. Los sistemas son topológicamente conjugados si y solo si tienen el mismo índice de estabilidad.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x' = Ax$ hiperbólico y sean E^s y E^u los subespacios estable e inestable dados por el teorema 1.12. Entonces, $x' = Ax$ es un atractor en E^s y una fuente en E^u . De modo que es topológicamente conjugado a $x' = -x$ en E^s y a $x' = x$ en E^u .

Cada $x \in \mathbb{K}^n$ se descompone de manera única en $x = x^s + x^u$, donde $x^s \in E^s$ y $x^u \in E^u$. Probaremos que $x' = Ax$ es topológicamente conjugado a $x' = Jx$, donde $Jx = -x^s + x^u$. En efecto, sean $h^s: E^s \rightarrow E^s$ y $h^u: E^u \rightarrow E^u$, los homeomorfismos que establecen las equivalencias topológicas. Defínase $h: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ por $h(x) = h^s(x^s) + h^u(x^u)$. Se afirma que h es la conjugación topológica buscada.

1. h es sobre. Sea $y \in \mathbb{K}^n$, entonces $y = y^s + y^u$. Puesto que h^s y h^u son sobre, existen $x^s \in E^s$ y $x^u \in E^u$ tales que $h(x^s) = y^s$ y $h(x^u) = y^u$. Entonces $h(x) = y$.

2. h es inyectiva. Si $h(x) = h(\bar{x})$, $h(x) = h^s(x^s) + h^u(x^u) = h^s(\bar{x}^s) + h^u(\bar{x}^u)$. Por tanto, $h^s(x^s) - h^s(\bar{x}^s) = h^u(x^u) - h^u(\bar{x}^u) \in E^s \cap E^u = \{0\}$. En consecuencia, $h^s(x^s) = h^s(\bar{x}^s)$ y $h^u(x^u) = h^u(\bar{x}^u)$. Puesto que h^s y h^u son inyectivas, se obtiene que $x^s = \bar{x}^s$ y $x^u = \bar{x}^u$.

3. h es bicontinua. Dada una norma en \mathbb{K}^n definimos la nueva norma

$$||| x ||| = \max(\|x^s\|, \|x^u\|).$$

Entonces h es continua porque

$$\begin{aligned} & ||| h(x) - h(y) ||| \\ &= \max(\|h^s(x^s) - h^s(y^s)\|, \|h^u(x^u) - h^u(y^u)\|) \end{aligned}$$

y h^s, h^u son continuas.

De manera análoga se prueba que h^{-1} es continua.

4. h es una conjugación.

$$\begin{aligned} h(e^{tA}x) &= h(e^{tA}x^s + e^{tA}x^u) \\ &= h^s(e^{tA}x^s) + h^u(e^{tA}x^u) \\ &= e^{-t}h^s(x^s) + e^th^u(x^u) = e^{tJ}h(x). \end{aligned}$$

Supongamos que $x' = Ax$ y $x' = Bx$ tienen el mismo índice de estabilidad. Según hemos visto arriba, el sistema $x' = Ax$ es topológicamente conjugado a $x' = J_Ax$ y $x' = Bx$ lo es a $x' = J_Bx$. Por lo tanto, es suficiente comprobar que $x' = J_Ax$ y $x' = J_Bx$ son topológicamente conjugados. Puesto que $\dim E_A^s = \dim E_B^s$ y $\dim E_A^u = \dim E_B^u$, existen isomorfismos lineales

$$P^s: E_A^s \rightarrow E_B^s \quad P^u: E_A^u \rightarrow E_B^u.$$

Defínase $P: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ mediante $P(x) = P^s(x^s) + P^u(x^u)$. Entonces P es un isomorfismo lineal tal que

$$\begin{aligned} P(e^{tJ_A}x) &= P(e^{-t}x_A^s + e^tx_A^u) \\ &= P^s(e^{-t}x_A^s) + P^u(e^tx_A^u) \\ &= e^{-t}P^s(x_A^s) + e^tP^u(x_A^u) \\ &= e^{tJ_B}P(x). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si los sistemas $x' = Ax$ y $x' = Bx$ son topológicamente conjugados y h es una conjugación tal que $h(0) = 0$, (si $h(x) = c \neq 0$, se define $k(x) = x - c$ y se considera la conjugación $k \circ h$), entonces $h(E_A^s) = E_B^s$. En efecto, si $x \in E_A^s$, $e^{tB}h(x) = h(e^{tA}x) \rightarrow h(0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Es decir, $h(x) \in E_B^s$. Recíprocamente, si $y \in E_B^s$, $e^{tA}h^{-1}(y) = h^{-1}(e^{tB}y) \rightarrow h^{-1}(0) = 0$. Por tanto, $h^{-1}(y) \in E_A^s$, es decir $y \in h(E_A^s)$.

El Teorema de invarianza de la dimensión de Brouwer implica que $\dim E_A^s = \dim E_B^s$. \square

5. Sistemas diferenciales lineales periódicos

En este apartado estudiamos el sistema diferencial lineal

$$(1.5) \quad x' = A(t)x,$$

donde $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es T -periódica, es decir, existe $T > 0$ tal que

$$A(t+T) = A(t), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Supondremos además que $A(t)$ es continua. Es fácil comprobar que

PROPOSICIÓN 1.24. *Si $x(t)$ es solución de (1.5), entonces $x(t+T)$ también lo es.*

También se cumple que

PROPOSICIÓN 1.25. *Si $x(t)$ es solución de (1.5) y $x(0) = x(T)$ entonces $x(t)$ es T -periódica.*

En lo que sigue $X(t)$ denotará la solución matricial fundamental de (1.5) tal que $X(0) = I$. Entonces la solución no trivial $X(t)x$ es T -periódica si y solo si $x = X(0)x = X(T)x$, o equivalentemente, si y solo si 1 es autovalor de $X(T)$.

TEOREMA 1.26. *Si la única solución T -periódica de (1.5) es la trivial, entonces el sistema*

$$(1.6) \quad x' = A(t)x + b(t)$$

tiene una única solución T -periódica para cada $b(t)$ T -periódica y continua.

DEMOSTRACIÓN. Cualquier solución de (1.6) tiene la forma

$$x(t) = X(t)\left(x_0 + \int_0^t X^{-1}(s)b(s) ds\right),$$

donde $x_0 \in \mathbb{K}^n$. De modo que es T -periódica si y solo si $x(0) = x(T)$, es decir, si y solo si

$$x_0 = X(T) \left(x_0 + \int_0^T X^{-1}(s)b(s) ds \right),$$

o equivalentemente,

$$(I - X(T))x_0 = X(T) \int_0^T X^{-1}(s)b(s) ds.$$

De la hipótesis se deduce que $I - X(T)$ es invertible y, en consecuencia, existe un único x_0 que cumple el sistema anterior. \square

PROPOSICIÓN 1.27. *Sea el sistema diferencial*

$$(1.7) \quad x' = A(t)x + b(t),$$

donde $A(t)$ y $b(t)$ son T -periódicas. Entonces existen soluciones T -periódicas si y solo si existen soluciones acotadas.

TEOREMA 1.28 (Descomposición de Floquet). *Sea $X(t)$ la solución matricial de (1.5) tal que $X(0) = I$. Entonces existen $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y una función T -periódica $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $X(t) = P(t)e^{tB}$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $X(t+T)$ es solución matricial fundamental de (1.5), existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $X(t+T) = X(t)C$. Para $t = 0$ se obtiene $X(T) = C$. Puesto que $X(T)$ es no singular, existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $e^{TB} = C$. Sea $P(t) = X(t)e^{-tB}$, entonces

$$P(t+T) = X(t+T)e^{-(t+T)B} = X(t)X(T)e^{-TB}e^{-tB} = P(t)$$

\square

COMENTARIO 1.29. Si $x(t)$ es una solución de (1.5), entonces $x(t) = X(t)x_0 = P(t)e^{tB}x_0 = P(t)y(t)$, donde $y(t)$ es solución del sistema diferencial

$$(1.8) \quad x' = Bx.$$

Recíprocamente, si $y(t)$ es una solución de (1.8), entonces $x(t) = P(t)y(t)$ es solución de (1.5).

DEFINICIÓN 1.7. Los autovalores de $X(T)$ se llaman multiplicadores de (1.5) y los autovalores de B exponentes característicos.

Puesto que $X(T) = e^{TB}$, se verifica que λ es un multiplicador si y solo si $\lambda = e^{T\nu}$, donde ν es un exponente característico.

Sea ν un exponente característico y x_0 uno de sus autovectores. Entonces $e^{t\nu}x_0$ es una solución de (1.8) y $x(t) = P(t)e^{t\nu}x_0 = p(t)e^{t\nu}$ es una solución de (1.5).

6. Ejercicios

1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Probar que cada solución de $x' = Ax$ es acotada cuando $t \rightarrow \infty$ si y solo si, $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ para todo λ autovalor de A y para cada λ con $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $\dim \ker(A - \lambda) =$ multiplicidad del autovalor como solución del polinomio característico.
2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pruebe que existen subespacios E^s , E^u y E^c invariantes por A tales que
 - a) $\mathbb{K}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$.
 - b) $x \in E^s$ si y solo si $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0$.
 - c) $x \in E^u$ si y solo si $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA}x = 0$.
3. Sean los sistemas lineales planos $x' = y$, $y' = y$ y $x' = x - y$, $y' = 0$. Calcular sus soluciones, dibujar sus planos de fases, comprobar que son conjugados y encontrar una conjugación entre ambos.
4. Dibujar el plano de fases del sistema lineal $x' = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

¿ Son lineal o topológicamente conjugados?

5. Sea el sistema lineal $x' = (A + C(t))x$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $C(t)$ es una función matricial continua en $[0, \infty)$; ($C(t)$ representa una perturbación no autónoma de A). Pruebe que si A es un atractor y si $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$, entonces el sistema perturbado también es un atractor.
6. Sea el sistema lineal $x' = (A + C(t))x$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $C(t)$ es una función matricial continua en $(0, \infty)$. Pruebe que si

$$\int_0^\infty \|C(t)\| dt < \infty,$$

y todas las soluciones de $x' = Ax$ son acotadas en el intervalo $(0, \infty)$, entonces también lo son todas las soluciones del sistema perturbado.

7. Sea la ED escalar $x' = a(t)x$, donde $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y T periódica. Pruebe que toda solución de la ecuación diferencial se puede escribir de la forma $x(t) = p(t)e^{\lambda t}$, donde $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es T -periódica.

8. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continua y T -periódica. Pruebe que existe una constante no nula μ y al menos una solución no trivial $x(t)$ de $x' = A(t)x$, que verifica $x(t+T) = \mu x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
9. Demuestre que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es no singular, entonces existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $C = e^B$.
10. Pruebe que el resultado anterior no es cierto en el caso real.
11. Demuestre que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es no singular, entonces existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = e^B$.
12. (Descomposición de Floquet real) Sea el sistema diferencial $x' = A(t)x$, donde $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es T -periódica y continua. Sea $X(t)$ la solución matricial de (1.5) tal que $X(0) = I$. Entonces existen $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y una función $2T$ -periódica $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $X(t) = P(t)e^{tB}$.

Capítulo 2

Sistemas diferenciales

Esta parte recoge los conceptos y resultados básicos de la teoría del problema de valor inicial de sistemas diferenciales ordinarios.

1. Sumario sobre el problema de valor inicial

Un sistema diferencial no autónomo es una expresión de la forma

$$(2.1) \quad x' = f(t, x),$$

donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tiene interior no vacío y donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es costumbre llamar a x variable dependiente y a t variable independiente o tiempo. El sistema es no autónomo porque f depende explícitamente de t . Sea el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. La función $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución del sistema diferencial diferencial (2.1) si para todo $t \in I$, x es derivable en t , $(t, x(t)) \in D$ y

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Dado $(t_0, x_0) \in D$, el problema de valor inicial consiste en determinar la existencia y, en su caso, la unicidad de soluciones x de (2.1) tales que $x(t_0) = x_0$.

Es decir, soluciones de

$$(2.2) \quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Se dice que (2.2) es un problema de valor inicial y que (t_0, x_0) es una condición inicial.

El resultado básico de existencia y unicidad de soluciones se establecerá dentro de la clase de sistemas diferenciales definidas por funciones localmente Lipschitz respecto de x .

Se dice que f es Lipschitz en D respecto de x y se denota $f \in \text{Lip}(D, x)$, si existe $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos $(t, x), (t, y) \in D$.

La función f es localmente Lipschitz en D respecto de x (resumidamente $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$), si para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe un entorno V de dicho punto tal que $f \in \text{Lip}(D \cap V, x)$.

Una sencilla aplicación del Teorema del Valor Medio prueba que si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, entonces $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$.

Se verifica que si $f \in \mathcal{C}(K) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(K, x)$, siendo $K \subset D$ compacto, entonces $f \in \text{Lip}(K, x)$. En realidad no es necesario que f sea continua. Basta con que sea acotada en K .

1.1. El teorema de existencia y unicidad local. El método de aproximaciones sucesivas (ver p.e. E.A. Coddington, N. Levinson [p. 6]) permite demostrar una condición suficiente de existencia y unicidad de soluciones.

TEOREMA 2.1 (Picard-Lindelöf-Lipschitz). *Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$. Fijada una condición inicial $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{D}$, existen $\delta > 0$ y $x: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución de (2.2). Cualquier otra solución del problema de valor inicial coincide con x en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.*

Si se suprime la hipótesis $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$, se verifica la existencia de soluciones de (2.2), pero el ejemplo típico $x' = 3x^{\frac{2}{3}}$, muestra que no hay unicidad.

1.2. El teorema de existencia y unicidad global. Prolongación de soluciones.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$. Si $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ son soluciones de (2.1) cuyas gráficas tienen un punto en común, entonces $x = y$ en $I \cap J$.*

Consecuencia del resultado anterior es que entre todas las soluciones que verifican una misma condición inicial hay una única cuyo intervalo de definición contiene a todos los demás. Dicha solución se denomina maximal. Es decir:

TEOREMA 2.3. *Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$. Entonces para cada $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{D}$ existe una única solución maximal de (2.1) tal que $x(t_0) = x_0$.*

TEOREMA 2.4. *Sea $f \in \mathcal{C}(D)$. Sean $x: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta < \infty$, solución de (2.1) y $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Si $\{f(t, x(t)) : t \in [t_0, \beta)\}$ es acotado, entonces existe $\lim_{t \rightarrow \beta} x(t)$. Si este límite vale x_* y $(\beta, x_*) \in D$, entonces x es prolongable a la derecha, es decir, existe $\bar{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución de (2.1) tal que $I \supset (\alpha, \beta]$ y $x = \bar{x}$ en (α, β) .*

COROLARIO 2.5. *Sean $f \in \mathcal{C}(D)$ y $x: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de (2.1) tal que $\beta < \infty$. Supongamos que existen $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y un compacto K incluido en D tales que*

$$(t, x(t)) \in K, \quad \text{si } t \in [t_0, \beta),$$

entonces x es prolongable a la derecha.

TEOREMA 2.6. *Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$. Sea $x: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de (2.1) tal que $\beta < \infty$. Supóngase que existe una sucesión $\{t_m\}$ en (α, β) tal que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m \rightarrow \beta, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x(t_m) = x_*.$$

Si $(\beta, x_*) \in \overset{\circ}{D}$, entonces x es prolongable a la derecha.

1.3. Continuidad de la solución respecto de las condiciones iniciales y parámetros. Sean $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ abierto y $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x, \lambda) \rightarrow f(t, x, \lambda)$ una función continua y localmente Lipschitz respecto de x en D . Consideremos la familia de sistemas diferenciales dependiente del parámetro λ

$$(2.3) \quad x' = f(t, x, \lambda).$$

Fijada una condición inicial y un valor del parámetro, es decir fijado $(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \in D$, $u(t, \bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda})$ denotará el valor en t de la única solución maximal del problema de valor inicial

$$(2.4) \quad x' = f(t, x, \bar{\lambda}), \quad x(\bar{\tau}) = \bar{x}.$$

Llamaremos $I_{\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda}}$ al intervalo abierto de definición de dicha solución.

TEOREMA 2.7. *En las condiciones anteriores, sean $(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \in D$ y $\bar{u}(t) = u(t, \bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda})$, $a \leq t \leq b$. Existe un entorno de $(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{\lambda})$,*

$$V = \{(\tau, x, \lambda) : a \leq \tau \leq b, \|x - \bar{u}(\tau)\| \leq \delta, \|\lambda - \bar{\lambda}\| \leq \delta\} \subset D$$

tal que si $(\tau, x, \lambda) \in V$, entonces $u(t, \tau, x, \lambda)$ está definida al menos en el intervalo $[a, b]$ y la función

$$(t, \tau, x, \lambda) \in [a, b] \times V \rightarrow u(t, \tau, x, \lambda) \in \mathbb{R}^n$$

es continua. El conjunto

$$\mathcal{W} = \{(t, \tau, x, \lambda) : (\tau, x, \lambda) \in D, t \in I_{\tau, x, \lambda}\}.$$

es abierto y la función $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

2. Diferenciabilidad de la solución respecto de las condiciones iniciales y parámetros

Sea el sistema diferencial $x' = f(t, x)$, donde $f \in \mathcal{C}(D) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$, siendo D un conjunto abierto. Sea la función continua $u(t, \tau, x)$. Entonces

$$u_t(t, \tau, x) = f(t, u(t, \tau, x))$$

es una función continua en \mathcal{W} . Decimos que u es de clase 1 respecto de t , porque tiene derivada parcial de primer orden respecto de t y es una función continua en \mathcal{W} . Si $f \in \mathcal{C}^1(D)$, entonces derivando respecto de t en la fórmula anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} u_{tt} &= f_t(t, u) + f_x(t, u)u_t \\ &= f_t(t, u) + f_x(t, u)f(t, u), \end{aligned}$$

que es una función continua en \mathcal{W} . Es decir, u es una función de clase 2 respecto de t , porque tiene derivadas respecto de t hasta el orden 2 y son continuas.

Nuestro propósito en esta sección es establecer que si la derivada parcial $f_x(t, x)$ de $f(t, x)$ está definida y es continua en D , entonces la aplicación

$u(t, \tau, x)$ es de clase 1 respecto de x y de τ . Además describiremos un procedimiento para calcular dicha derivada.

Supongamos que $u(t, \tau, x)$ es diferenciable respecto a x . Entonces, derivando la relación $u_t(t, \tau, x) = f(t, u(t, \tau, x))$ con respecto a x , obtenemos,

$$\frac{\partial u_t}{\partial x}(t, \tau, x) = f_x(t, u(t, \tau, x))u_x(t, \tau, x).$$

Si suponemos adicionalmente que podemos conmutar las operaciones de diferenciación $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial x}$, obtenemos,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}(t, \tau, x) = f_x(t, u(t, \tau, x))u_x(t, \tau, x).$$

Como $u(\tau, \tau, x) = x$, entonces (suponemos $n = 1$)

$$\begin{aligned} u_x(\tau, \tau, x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\tau, \tau, x+h) - u(\tau, \tau, x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1. \end{aligned}$$

(Si $n > 1$, se obtiene $u_x(\tau, \tau, x) = I$, donde I es la matriz unidad). De modo que, fijado (τ, x) en D , $u_x(t, \tau, x)$ es la solución del sistema matricial

$$(2.5) \quad Z' = f_x(t, u(t, \tau, x))Z,$$

que satisface $Z(\tau) = I$.

Análogamente, si suponemos que $u(t, \tau, x)$ es diferenciable respecto a τ y que podemos conmutar las operaciones de diferenciación $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial \tau}$, obtenemos

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial t}(t, \tau, x) = f_x(t, u(t, \tau, x))u_\tau(t, \tau, x).$$

$$\begin{aligned} u_\tau(\tau, \tau, x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\tau+h}^{\tau} f(t, u(t, \tau+h, x)) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (-h) f(\bar{t}, u(\bar{t}, \tau+h, x)) \\ &= -f(\tau, u(\tau, \tau, x)) = -f(\tau, x) \end{aligned}$$

donde $\bar{t} \in [\tau, \tau+h]$.

Esta discusión será formalizada en el siguiente resultado.

TEOREMA 2.8. *(Diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales). Supongamos que $f(t, x)$ y $f_x(t, x)$ están definidas y son continuas en D . Entonces la función $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase 1 respecto de x y τ .*

La derivada parcial $u_x(t, \tau, x)$ es, para cada $(\tau, x) \in D$, la solución matricial $Z(t)$ de (2.5) que satisface $Z(\tau) = I$.

La derivada parcial $u_\tau(t, \tau, x)$ es, para cada $(\tau, x) \in D$, la solución $z(t)$ de (2.5) que satisface $z(\tau) = -f(\tau, x)$.

TEOREMA 2.9. *Si $f \in \mathcal{C}^m(D)$, entonces $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase $m+1$ respecto de t y de clase m respecto de τ y x .*

TEOREMA 2.10. *Sea el sistema diferencial (2.3) con $f \in C^m(D)$ y $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, abierto. Entonces $u: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase $m+1$ respecto de t y de clase m respecto de τ, x, λ en \mathcal{W} . Además*

$$\begin{aligned} u_{tx} &= f_x(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda)u_x, \quad u_x(\tau, \tau, x, \lambda) = I, \\ u_{t\tau} &= f_x(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda)u_\tau, \\ u_\tau(\tau, \tau, x, \lambda) &= -f(\tau, x, \lambda), \\ u_{t\lambda} &= f_x(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda)u_\lambda + f_\lambda, \\ u_\lambda(\tau, \tau, x, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Los siguientes argumentos de tipo heurístico nos ayudan a recordar cuáles son las condiciones iniciales que cumplen las derivadas de la solución. Suponemos que $n = 1$ y partimos de la ecuación diferencial

$$u_t(t, \tau, x, \lambda) = f(t, u(t, \tau, x, \lambda), \lambda).$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_x(\tau, \tau, x, \lambda) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\tau, \tau, x+h, \lambda) - u(\tau, \tau, x, \lambda)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\tau(\tau, \tau, x, \lambda) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\tau+h}^{\tau} f(t, u(t, \tau+h, x, \lambda), \lambda) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (-h) f(\bar{t}, u(\bar{t}, \tau+h, x, \lambda), \lambda) \\ &= -f(\tau, u(\tau, \tau, x, \lambda), \lambda) = -f(\tau, x, \lambda) \end{aligned}$$

donde $\bar{t} \in [\tau, \tau+h]$.

$$\begin{aligned} u_\lambda(\tau, \tau, x, \lambda) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\tau, \tau, x, \lambda+h) - u(\tau, \tau, x, \lambda)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x-x}{h} = 0. \end{aligned}$$

3. Integrales primeras

Sea el sistema diferencial $x' = f(t, x)$. Se dice que $F: D' \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ es una integral primera del sistema diferencial en D' si

- (i) $F \in C^1(D')$.
- (ii) $F'(t, x) \neq 0$, para todo $(t, x) \in D'$.
- (iii) Si $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución de (2.1) tal que su gráfica está incluida en D' , entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(t, x(t)) = c, \text{ para todo } t \in I.$$

Si para cada $(t, x) \in D'$ hay soluciones con gráfica incluida en D' , entonces (iii) es equivalente a

$$F_t + F_x f = 0 \quad \text{en } D'.$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente tener en cuenta que

$$\frac{d}{dt} F(t, x(t)) = F_t(t, x(t)) + F_x(t, x(t))x'(t).$$

□

4. Sistemas autónomos. Órbitas

El objetivo de esta parte es el estudio de las soluciones del sistema diferencial

$$(2.6) \quad x' = f(x)$$

donde $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función localmente lipschitziana en el abierto U de \mathbb{R}^n , lo que escribiremos como, $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$.

Sea $D = \mathbb{R} \times U$ y $g(t, x) = f(x)$, entonces D es abierto y g es continua y localmente lipschitziana respecto de x en D . De modo que se verifican los resultados sobre existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial, y de continuidad respecto de las condiciones iniciales y parámetros de la sección anterior.

Desde luego, si $f \in \mathcal{C}^m(U)$, entonces $g \in \mathcal{C}^m(D)$. Por tanto también se verifica el teorema de diferenciabilidad.

El siguiente resultado, de prueba trivial, es fundamental en lo que sigue.

PROPOSICIÓN 2.11. *Si $x: I \rightarrow U$ es solución de (2.6), entonces para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, $x(t + \tau)$ es también solución de (2.6) definida en $-\tau + I = \{t - \tau : t \in I\}$.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\frac{dx(t + \tau)}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t + \tau) = f(x(t + \tau)).$$

Si x es maximal, entonces $x(t + \tau)$ también es maximal. En efecto, si no lo fuera, se puede prolongar a la derecha o a la izquierda. Entonces x también se puede prolongar a la derecha o a la izquierda, respectivamente. □

Por el Teorema 2.4, si $x: (\alpha, \beta) \rightarrow U$, $\beta < \infty$, es una solución para la que existe $t_0 \in (\alpha, \beta)$, tal que

$$f(x([t_0, \beta)))$$

es acotado, entonces existe $\lim_{t \rightarrow \beta} x(t) = x_*$. Además, si $x_* \in U$, entonces x se puede prolongar a la derecha de β .

Por el Corolario 2.5 si $x: (\alpha, \beta) \rightarrow U$ es una solución maximal a la derecha para la que existe $t_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$\{x(t) : t \in [t_0, \beta)\} \subset K,$$

siendo $K \subset U$ compacto, entonces $\beta = \infty$. En efecto, si $\beta < \infty$,

$$(t, x(t)) \in [t_0, \beta] \times K, \quad \text{si } t \in [t_0, \beta].$$

Sea $x_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Sea $u(t, t_0, x_0)$ la solución de

$$(2.7) \quad x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

De la Proposición anterior se obtiene que $u(t - t_0, 0, x_0)$ es también solución de (2.7). Por el teorema de unicidad

$$u(t, t_0, x_0) = u(t - t_0, 0, x_0), \quad I_{t_0, x_0} = t_0 + I_{0, x_0}.$$

Así bastará estudiar el problema

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Sean $W = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U, t \in I_x\}$, $u: W \rightarrow U$ y $u(t, x) = u(t, 0, x)$. Entonces de los teoremas de continuidad y diferenciabilidad se deduce el

TEOREMA 2.12. *El conjunto W es abierto y u es continua. Si $f \in \mathcal{C}^m(U)$, entonces u también lo es. La derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$ es la solución matricial del sistema diferencial lineal, llamado variacional,*

$$y' = f'(u(t, x))y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, x) = I.$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente tener en cuenta que

$$W = \{(t, x) : (t, 0, x) \in \mathcal{W}\}, \quad u(t, x) = u(t, 0, x).$$

□

Sea el sistema diferencial autónomo $x' = f(x)$. Se dice que la función $F: U' \rightarrow \mathbb{R}$ es una integral primera del sistema diferencial en el abierto $U' \subset U$, si $G(t, x) = F(x)$ es una integral primera en $\mathbb{R} \times U'$.

4.1. Puntos de equilibrio y soluciones periódicas.

TEOREMA 2.13. *Si $x: I \rightarrow U$ es una solución maximal de (2.6) que no es inyectiva, es periódica.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $t_0 < t_1$ en I tales que $x(t_0) = x(t_1)$ y defínase $y(t) = x(t + T)$, donde $\tau = t_1 - t_0$. Entonces y es una solución maximal definida en $-\tau + I$. Como $y(t_0) = x(t_1) = x(t_0)$, se deduce que $y(t) = x(t)$ en $-\tau + I = I$. De modo que $I = \mathbb{R}$ y $x(t) = x(t + \tau)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

La posibilidad de que una solución sea periódica incluye a las soluciones constantes, las cuales corresponden a los llamados puntos de equilibrio. Concretamente,

DEFINICIÓN 2.1. Se dice que $x_0 \in U$ es un punto de equilibrio de (2.6) si $f(x_0) = 0$. A los demás puntos se les llama regulares.

Se verifica que $x_0 \in U$ es un punto de equilibrio si y solo si $x(t) \equiv x_0$ es solución de (2.6).

PROPOSICIÓN 2.14. Sea $x: \mathbb{R} \rightarrow U$ continua. Si

$$\inf\{T > 0 : T \text{ es un periodo de } x\} = 0,$$

entonces x es una función constante.

DEMOSTRACIÓN. Si no lo es, existen $t_1 < t_2$ tales que $x(t_1) \neq x(t_2)$. Sea $\epsilon = \|x(t_2) - x(t_1)\| > 0$. Se probará que para todo $\delta > 0$, existe $t \in \mathbb{R}$ verificando $|t - t_2| < \delta$ y $\|x(t) - x(t_2)\| \geq \epsilon$. Es decir, x no es continua en t_2 .

Sea un periodo $0 < \tau < \delta$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_2 - t_1 = n\tau + r$, $0 \leq r < \tau < \delta$. Tómese $t = t_1 + n\tau$. \square

Siempre que no haya confusión, llamaremos periodo al ínfimo de los periodos positivos.

PROPOSICIÓN 2.15. Sea $x: (\alpha, \infty) \rightarrow U$ una solución de (2.6) tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_* \in U.$$

Entonces x_* es un punto de equilibrio.

DEMOSTRACIÓN. Para cada componente x_j de x , el Teorema del valor medio dice

$$x_j(t+1) - x_j(t) = x'_j(s_j) = f_j(x(s_j)),$$

donde $s_j \in (t, t+1)$. Tomando límite cuando $t \rightarrow \infty$, se obtiene $f_j(x_*) = 0$. \square

4.2. Órbitas. El sistema diferencial autónomo $x' = f(x)$, donde $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$, admite la siguiente interpretación geométrica: A cada punto $x \in U$ le asignamos el vector $f(x)$. Así tenemos definido un campo de direcciones. Las soluciones son curvas tangentes al campo de direcciones.

Sea $x: I \rightarrow U$ una solución de (2.6). La órbita de x es $\text{orb}(x) = x(I) = \{x(t) : t \in I\}$. Si x es maximal, a su órbita se la llama maximal.

PROPOSICIÓN 2.16. Por cada $x_0 \in U$ pasa una única órbita maximal.

DEMOSTRACIÓN. la existencia es obvia. Probemos la unicidad. Sean $x: I \rightarrow U$ solución maximal tal que $x(0) = x_0$ e $y: J \rightarrow U$ solución maximal tal que $y(t_0) = x_0$. Entonces $\bar{x}: t_0 + I \rightarrow U$, $\bar{x}(t) = x(t - t_0)$ también es solución maximal y verifica, $\bar{x}(t_0) = x(0) = x_0 = y(t_0)$. Por tanto, $t_0 + I = J$ y $\bar{x}(t) = y(t)$ para todo $t \in J$. Así que $\text{orb}(x) = \text{orb}(\bar{x}) = \text{orb}(y)$. \square

Sabemos que si $x: I \rightarrow U$ es solución maximal no constante de (2.6), entonces es inyectiva o periódica. Si es periódica, puede suceder

a) $x(t) \equiv x_0$, $\text{orb}(x) = \{x_0\}$.

b) $0 < T = \inf\{\tau > 0 : \tau \text{ es un periodo de } x\}$. Entonces, $x: [0, T) \rightarrow U$ es inyectiva, $x(0) = x(T)$ y $\text{orb}(x) = x([0, T))$ con la topología inducida por U , es homeomorfo a la circunferencia unidad de \mathbb{R}^2 .

Recíprocamente, si $x: I \rightarrow U$ es una solución maximal tal que $x(I)$ es homeomorfo a la circunferencia unidad S^1 , entonces $x(I)$ es compacto y, por tanto, $I = \mathbb{R}$. Supóngase que $x: \mathbb{R} \rightarrow x(\mathbb{R})$ es biyectiva.

Si h es un homeomorfismo entre $x(\mathbb{R})$ y S^1 , la composición $h \circ x: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es continua y biyectiva. Su restricción

$$h \circ x: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow S^1 \setminus \{(h \circ x)(0)\}$$

también es continua y biyectiva.

Pero su imagen $S^1 \setminus \{(h \circ x)(0)\}$ es homeomorfa al intervalo $(0, 1)$. Así que existe una aplicación continua y biyectiva de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $(0, 1)$, lo que no puede suceder.

5. Relación entre sistemas autónomos y no autónomos

El sistema diferencial $x' = f(t, x)$ se reduce a uno autónomo aumentando en uno la dimensión. Es decir, son equivalentes $x' = f(t, x)$ y

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{dt}{ds}(s) &= 1 \\ \frac{dx}{ds}(s) &= f(t(s), x(s)) \end{cases}$$

En efecto, si $x(t)$ es solución de (2.1) tal que $x(t_0) = x_0$, entonces $t(s) = s + t_0$, $\bar{x}(s) = x(t(s))$ es solución de (2.8) y verifica $t(0) = t_0, \bar{x}(0) = x(t_0) = x_0$.

Para ver ésto solo hace falta comprobar que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{ds}(s) &= \frac{dx}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) \\ &= f(t(s), x(t(s))) = f(t(s), \bar{x}(s)). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $(t(s), \bar{x}(s))$ es solución de (2.8) tal que $t(0) = t_0, \bar{x}(0) = x_0$, entonces $x(t) = \bar{x}(t - t_0)$ es solución de (2.1) tal que $x(t_0) = x_0$. En efecto, sean $s(t) = t - t_0$ y $t(s) = s + t_0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \frac{d\bar{x}}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) \\ &= f(t(s(t)), \bar{x}(s(t))) = f(t, x(t)). \end{aligned}$$

También se cumple que un sistema autónomo n -dimensional en un entorno de un punto regular se reduce a uno no autónomo de dimensión $n - 1$. En efecto, sea el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n), & f_1 &\neq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Considérese el sistema diferencial no autónomo $n - 1$ -dimensional

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{f_2}{f_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dx_1} &= \frac{f_n}{f_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

con $f_1 \neq 0$.

Si $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ es solución del sistema diferencial autónomo tal que en $t = 0$ toma el valor (x_{01}, \dots, x_{0n}) , entonces $x_1'(t) \neq 0$ y $x_1: I \rightarrow J$ es un difeomorfismo entre los intervalos I y J con función inversa $t(x_1)$. La función $(x_2(t(x_1)), \dots, x_n(t(x_1)))$ es solución del sistema no autónomo y en x_{01} toma el valor (x_{02}, \dots, x_{0n}) . En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d(x_2 \circ t)}{dx_1}(x_1) &= \frac{dx_2}{dt}(t(x_1)) \frac{dt}{dx_1}(x_1) \\ &= \frac{dx_2}{dt}(t(x_1)) \left(\frac{dx_1}{dt}(t(x_1)) \right)^{-1} \\ &= \frac{f_2(x_1, x_2(t(x_1)), \dots)}{f_1(x_1, x_2(t(x_1)), \dots)}.\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\text{orb}(x) &= \{(x_1(t), \dots, x_n(t)) : t \in I\} \\ &= \{(x_1, x_2(t(x_1)), \dots, x_n(t(x_1))) : x_1 \in J\}.\end{aligned}$$

Sea $(x_2(x_1), \dots, x_n(x_1))$ la solución del sistema no autónomo que en x_{01} toma el valor (x_{02}, \dots, x_{0n}) . Sea $x_1(t)$ la solución de

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = f_1(x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1)) := F(x_1), \quad x_1(0) = x_{01}.$$

Entonces $(x_1(t), x_2(x_1(t)), \dots)$ es solución del sistema autónomo. En efecto,

$$\frac{d(x_j \circ x_1)}{dt}(t) = \frac{f_j}{f_1} f_1 = f_j.$$

En $t = 0$, toma el valor (x_{01}, \dots, x_{0n}) . Además

$$\text{orb}(x) = \text{gráfica de la solución}.$$

Para probar la última afirmación basta tener en cuenta que si J es el intervalo donde está definida la solución del sistema no autónomo, la solución $x_1: I \rightarrow J$ es un difeomorfismo de I en J .

6. Sistemas dinámicos

Una noción más general que la de sistema diferencial autónomo es la de sistema dinámico, que formalizamos a continuación.

Un sistema dinámico en un espacio métrico U es una función continua $u: W \rightarrow U$, donde $W \subset \mathbb{R} \times U$ es un abierto, que satisface

1. $(0, x) \in W$ y $u(t, x) = x$, para cada $x \in U$.
2. $(s, x) \in W$ y $(t, u(s, x)) \in W$ implican que $(s + t, x) \in W$ y

$$u(s + t, x) = u(t, u(s, x)).$$

Es habitual denotar al sistema dinámico por la familia de funciones $\{u^t\}$, donde $u^t(x) = u(t, x)$. Las propiedades 1) y 2) se denotan

1. $u^t = \text{identidad}$.
2. $u^{t+s} = u^t \circ u^s$.

Si para cada $x \in U$, existe

$$f(x) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s, x) - u(0, x)}{s} = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x),$$

entonces para cada $(t, x) \in W$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s + t, x) - u(t, x)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s, u(t, x)) - u(t, x)}{s} \\ &= f(u(t, x)). \end{aligned}$$

Es decir, $u(t, x)$ es la solución del problema de valor inicial $x' = f(x)$, $x(0) = x$. A la función f se la llama generador del sistema dinámico.

7. Linealización

Sean $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$ y $g \in \text{Lip}_{\text{loc}}(V)$, siendo U, V abiertos de \mathbb{R}^n . Se dice que el sistema diferencial $x' = f(x)$ es conjugado a $x' = g(x)$, si existe una aplicación biyectiva $h: U \rightarrow V$ tal que

$$h(u(t, x)) = v(t, h(x)), \quad (x \in U, t \in I_x).$$

El Teorema del Flujo Tubular, que probaremos en el Capítulo 4, dice que en cada entorno de un punto regular, el sistema diferencial $x' = f(x)$ es conjugado a $x' = e^1$, donde e^1 es el vector que tiene todas sus coordenadas nulas, salvo la que ocupa el primer lugar, que es 1.

Sea $f \in \mathcal{C}^1(U)$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n . Sea $x_0 \in U$ un punto de equilibrio. Entonces

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x) = f'(x_0)(x - x_0) + h(x),$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Parece natural suponer que cerca de x_0 los sistemas diferenciales $x' = f(x)$ y $x' = f'(x_0)(x - x_0)$ sean parecidos. En este último hagamos el cambio de

variable $\xi = x - x_0$, para obtener $\xi' = f'(x_0)\xi$. A este último sistema se le llama la linealización de $x' = f(x)$ en x_0 .

Se dice que el punto de equilibrio $x_0 \in U$ es hiperbólico, si $f'(x_0)$ es hiperbólico, es decir, tiene todos sus autovalores con parte real distinta de 0. En este caso, el siguiente resultado de Hartmann-Grobman dice qué significa que el sistema diferencial y su linealización sean parecidos.

TEOREMA 2.17 (Hartmann-Grobman). *Sea $f \in \mathcal{C}^1(U)$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n . Sea $x_0 \in U$ un punto de equilibrio hiperbólico. Existen entornos abiertos V_0, V_{x_0} de 0 y x_0 respectivamente, tales que $x' = f'(x_0)x$, $x \in V_0$ es topológicamente conjugado a $x' = f(x)$, $x \in V_{x_0}$.*

Ya sabemos del Capítulo anterior que dos sistemas autónomos lineales son topológicamente conjugados si y solo si tienen el mismo índice de estabilidad.

En consecuencia, los dos resultados anteriores clasifican localmente, (desde el punto de vista de la conjugación topológica), los puntos singulares hiperbólicos.

8. Ejercicios

8.1. El problema de valor inicial.

1. Pruebe el teorema de continuidad de la solución respecto de las condiciones iniciales y parámetros.
2. Pruebe el teorema de diferenciabilidad de la solución respecto de las condiciones iniciales en el caso unidimensional.
3. Supóngase que hay existencia de soluciones en $D' \subset D$. Demuestre que son equivalentes:
 - (iii) Si $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución de (2.1) tal que su gráfica está incluida en D' , entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(t, x(t)) = c, \text{ para todo } t \in I.$$

y
(iii')

$$F_t + F_x f = 0 \quad \text{en } D'.$$

4. Sea $f \in \mathcal{C}(D) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(D, x)$, donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es abierto. Sea $x: [t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta < \infty$, una solución maximal a la derecha del sistema diferencial $x' = f(t, x)$. Demuestre que para cada compacto $K \subset D$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(t, x(t)) \notin K \quad \text{para todo } t \in (\beta - \delta, \beta)$$

8.2. Sistemas diferenciales autónomos.

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente lipschitziana con un número finito de ceros. Estudie la recta de fases de la ecuación diferencial $x' = f(x)$.

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente lipschitziana con un número finito de ceros. Dibuje el plano de fases del sistema diferencial

$$\begin{cases} x' &= f(x) \\ y' &= y. \end{cases}$$

3. Calcular las soluciones y dibujar el plano de fases del sistema diferencial

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y^2. \end{cases}$$

4. Demuestre que $F(x_1, \dots, x_n)$ es una integral primera de

$$x'_1 = f_1, \dots, x'_n = f_n, \quad f_1 \neq 0,$$

si y solo si es una integral primera de

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{f_n}{f_1}$$

5. Calcular una integral primera para los sistemas diferenciales siguientes y dibujar su plano de fases:

a) $x' = x, \quad y' = -y.$

b) $x' = y, \quad y' = -x.$

c) $x' = x(1 - y), \quad y' = -y(1 - y).$

d) $x' = y(1 + x + y), \quad y' = -x(1 + x + y).$

e) $x' = y(1 + x^2 + y^2), \quad y' = -x(1 + x^2 + y^2).$

f) $x' = y, \quad y' = 1 + x^2.$

6. Probar que toda solución de la ecuación diferencial

$$x'' + x + x^3 = 0,$$

es periódica.

7. Sea la función $t \in I \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de clase 1 en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y sea $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} > 0$. Demuestre que existe una función $\theta(t)$ de clase 1 en I , tal que $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ e $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$.

8. Sean los sistemas diferenciales

a) $x' = -y + x(x^2 + y^2), \quad y' = x + y(x^2 + y^2),$

b) $x' = -y - x(x^2 + y^2), \quad y' = x - y(x^2 + y^2),$

Expresarlos en coordenadas polares y dibujar sus planos de fases.

9. Sea el sistema diferencial en el plano $x' = y, \quad y' = -\sin x$ que representa el movimiento de un péndulo sin fricción. Estudiar cualitativamente las soluciones y hacer un dibujo del plano de fases.

10. Sea el sistema diferencial

$$x' = y + \alpha x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = -x + \alpha y(1 - x^2 - y^2).$$

Obtenga el sistema diferencial en coordenadas polares y dibuje su plano de fases.

11. Sea el sistema diferencial

$$x' = (x^2 + y^2 - 1)^2 x$$

$$y' = (x^2 + y^2 - 1)^2 y.$$

Obtenga el sistema diferencial en coordenadas polares y dibuje su plano de fases.

12. Sea el sistema diferencial

$$x' = y + x(x^2 + y^2)^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$y' = -x + y(x^2 + y^2)^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right).$$

Demuestre que hay infinitos ciclos límites.

13. Sea $x: \mathbb{R} \rightarrow U$ continua y periódica. Demuestre que el $\{T > 0 : T \text{ es un periodo de } x\}$ es un subgrupo aditivo no trivial de \mathbb{R} que además es cerrado.

14. Deduzca del ejercicio anterior que o bien

$$\{T > 0 : T \text{ es un periodo de } x\} = T\mathbb{Z}, \quad T > 0,$$

, bien es denso en \mathbb{R} .

Estabilidad en Sistemas Diferenciales Autónomos

1. Conjuntos límites

Sea $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n . Considérese el sistema diferencial autónomo $x' = f(x)$. En esta sección x denota una solución maximal del SD cuyo dominio de definición contiene a un intervalo de la forma $[\tau, \infty)$.

DEFINICIÓN 3.1. El ω -límite de x es el conjunto

$$\Omega(x) = \{p \in U : \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = p, \\ \text{para alguna sucesión } t_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\}.$$

EJEMPLO 1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $x' = Ax$ es hiperbólico y sea x una solución tal que $x(0) \in E^s$. Entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, de modo que $\Omega(x) = \{0\}$.

Si $x \in E^u$, entonces $\Omega(x) = \emptyset$ ya que si $t \geq 0$, entonces $|e^{tA}x| \geq e^{t\alpha}|x|$, donde $|\cdot|$ es una norma euclídea y $\alpha > 0$.

A partir de ahora supondremos que $\overline{x([\tau, \infty))}$ es un subconjunto compacto incluido en U .

PROPOSICIÓN 3.1. *Se verifica*

$$\Omega(x) = \{p\} \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que $\Omega(x) = \{p\}$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$, ya que el recíproco es evidente.

Supóngase, por reducción al absurdo, que existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\{x(t_k)\}$ no converge a p . Podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que todos los términos de la sucesión están fuera de un entorno de p . Como la sucesión $\{x(t_k)\}$ es acotada, contiene una subsucesión $\{x(t_{k_j})\}$ convergente a q cuando $j \rightarrow \infty$. Entonces $q \neq p$ y $q \in \Omega(x)$. \square

PROPOSICIÓN 3.2. *Si $x: \mathbb{R} \rightarrow U$ es una solución T -periódica de $x' = f(x)$, entonces $\Omega(x) = \text{orb}(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $p \in \text{orb}(x)$, entonces $p = x(t_0)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Sea $t_k = t_0 + kT$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ y $p = x(t_0) = x(t_0 + kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$. Es decir, $p \in \Omega(x)$.

Recíprocamente, si $p \in \Omega(x)$, existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $p = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$. Para cada k , sea

$$t_k = n_k T + r_k, \quad n_k \in \mathbb{Z}, \quad r_k \in [0, T).$$

Entonces $x(t_k) = x(r_k)$. Como $[0, T]$ es compacto, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = r$ con $r \in [0, T]$. De aquí

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(r_k) = x(r) \in \text{orb}(x).$$

□

PROPOSICIÓN 3.3. *Si V es un abierto de \mathbb{R}^n que contiene a $\Omega(x)$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) \in V$ para todo $t \geq t_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si el resultado es falso, existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $x(t_k) \notin V$ para todo k . Como $\{x(t_k)\}$ es acotada, contiene a una subsucesión convergente a $p \in \Omega(x) \subset V$. Puesto que dicha subsucesión está incluida en el complementario de V que es cerrado, también $p \notin V$. Esta contradicción termina la prueba. □

DEFINICIÓN 3.2. Se dice que un subconjunto A de U es positivamente (respectivamente negativamente) invariante por $x' = f(x)$, si

$$\xi \in A, \quad t \in I_\xi, \quad t \geq 0 \quad (\text{resp. } t \leq 0) \quad \Rightarrow \quad u(t, \xi) \in A.$$

Si A es simultáneamente positiva y negativamente invariante, se dice que es invariante.

PROPOSICIÓN 3.4. *$\Omega(x)$ es un subconjunto no vacío, compacto, conexo e invariante por $x' = f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $\Omega(x) \neq \emptyset$, ya que dada una sucesión $t_k \rightarrow \infty$, $\{x(t_k)\}$ es acotada y, por tanto, se puede extraer una subsucesión convergente a un punto $p \in \Omega(x)$.

El conjunto $\Omega(x)$ es acotado, porque $\Omega(x) \subset \overline{x([\tau, \infty))}$ que es un conjunto acotado.

El conjunto $\Omega(x)$ es cerrado. En efecto probaremos que si $p_k \in \Omega(x)$ para todo k y si $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$, entonces $p \in \Omega(x)$. En primer lugar observemos que

$$q \in \Omega(x), \quad \epsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists \tau > t : \|x(\tau) - q\| < \epsilon.$$

Entonces para $p_k \in \Omega(x)$, $\epsilon = 1/k$ y $t = k$, existe $\tau_k > k$ tal que $\|x(\tau_k) - p_k\| < 1/k$. Por tanto, $\tau_k \rightarrow \infty$ y

$$\|x(\tau_k) - p\| \leq \|x(\tau_k) - p_k\| + \|p_k - p\| \leq \|p_k - p\| + \frac{1}{k},$$

de modo que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(\tau_k) = p \in \Omega(x)$.

Para probar que $\Omega(x)$ es conexo, supongamos que no lo sea. Entonces es unión de dos subconjuntos compactos, disjuntos y no vacíos A_0 y A_1 . Por tanto, existen abiertos disjuntos $V_0 \supset A_0$ y $V_1 \supset A_1$. Como $V_0 \cup V_1$ es un abierto que contiene a $\Omega(x)$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) \in V_0 \cup V_1$ siempre

que $t > t_0$. Por otra parte, como $x((t_0, \infty))$ es conexo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x(t) \in V_0$ si $t > t_0$. Sean $p \in A_1$ y una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = p$. Ya que V_1 es abierto y $p \in V_1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x(t_N) \in V_1$ y $t_N > t_0$. De modo que $x(t_N) \in V_0 \cap V_1$. Esta contradicción prueba que $\Omega(x)$ es conexo.

Finalmente demostraremos que $\Omega(x)$ es invariante. Debemos probar

$$p \in \Omega(x), t \in I_p \Rightarrow u(t, p) \in \Omega(x).$$

Sea una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $p = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$. Si $t \in I_p$, $(t, p) \in W$ que es abierto. Así que a partir de un k en adelante $(t, x(t_k)) \in W$ y, por tanto, $t \in I_{x(t_k)}$. Sea la solución $u(t, x(t_k))$. De la continuidad respecto de las condiciones iniciales se sigue que $x(t + t_k) = u(t, x(t_k)) \rightarrow u(t, p)$, $k \rightarrow \infty$. De modo que $u(t, p) \in \Omega(x)$. \square

COROLARIO 3.5. Si $p \in \Omega(x)$, entonces $u(\cdot, p)$ está definida en todo \mathbb{R} .

DEMOSTRACIÓN. De $u(t, p) \in \Omega(x)$ para todo $t \in I_p$ con $\Omega(x)$ compacto, sigue que $I_p = \mathbb{R}$. \square

DEFINICIÓN 3.3. Dado $\xi \in U$, denotamos por $\Omega(\xi)$ al w -límite de la solución $u(t, \xi)$, siempre que esté definido.

La definición anterior es independiente del punto de la órbita que se elija.

PROPOSICIÓN 3.6. Sean $\xi \in U$, $s > 0$ y $\eta = u(s, \xi)$. Entonces $\Omega(\xi) = \Omega(\eta)$, siempre que ambos conjuntos estén definidos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in \Omega(\eta)$, entonces $p = \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, \eta)$, donde $t_k \rightarrow \infty$. Por tanto

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, u(s, \xi)) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k + s, \xi) \in \Omega(\xi).$$

\square

DEFINICIÓN 3.4. Sea $x: I \rightarrow U$ una solución de $x' = f(x)$, donde I contiene a un intervalo de la forma $(-\infty, \tau]$. Entonces el α -límite de x es

$$\alpha(x) = \{p \in U : \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = p, \text{ para alguna } t_k \rightarrow -\infty\}.$$

Es fácil comprobar que todo lo dicho para ω -límites se traslada de manera obvia para α -límites.

EJEMPLO 2. Sea la ecuación diferencial

$$(3.1) \quad \begin{cases} x' &= -y + x(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Se probará que para cada $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\Omega(\xi) = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

En primer lugar nótese que $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio, de modo que $\Omega((0, 0)) = \{(0, 0)\}$.

Sea $(x, y): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una solución tal que $(x(t_0), y(t_0)) \neq (0, 0)$ para algún $t_0 \in I$ y definamos

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Por la unicidad de soluciones $r(t) > 0$ para todo $t \in I$. Entonces existe una función $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase 1 tal que

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t).$$

Derivando estas expresiones respecto de t y sustituyendo en (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta &= -r \sin \theta + r^3 \cos \theta (1 - r^2), \\ r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta &= r \cos \theta + r^3 \sin \theta (1 - r^2). \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $-\sin \theta$, la segunda ecuación por $\cos \theta$ y sumando, se obtiene $\theta' = 1$. Multiplicando la primera ecuación por $\cos \theta$, la segunda ecuación por $\sin \theta$ y sumando se obtiene $r' = r^3(1 - r^2)$. De modo que $(r(t), \theta(t))$ es solución de

$$(3.2) \quad \begin{cases} r' &= r^3(1 - r^2) \\ \theta' &= 1 \end{cases}$$

Recíprocamente, si $(r(t), \theta(t))$ es una solución de (3.2), entonces

$$x(t) = r(t) \cos(t + \theta_0), \quad y(t) = r(t) \sin(t + \theta_0),$$

donde $\theta_0 \in \mathbb{R}$ y $r(t)$ es una solución positiva de $r' = r^3(1 - r^2)$ es solución de 3.1.

Las soluciones positivas de esta última ecuación tienen el siguiente comportamiento cualitativo: Hay dos puntos de equilibrio, $r = 0, r = 1$. Sea $r(t)$ una solución tal que $0 < r(0) < 1$. Puesto que es acotada, está definida en todo \mathbb{R} . Por ser $r'(t) > 0$ es estrictamente creciente y, en consecuencia, existen $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t)$. Puesto que los únicos puntos de equilibrio positivos son 0 y 1,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1.$$

Si $r(t)$ es una solución tal que $r(0) > 1$, entonces $r(t)$ es estrictamente decreciente y acotada en $[0, \infty)$. Por tanto está definida al menos en $[0, \infty)$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1$. Sea $\xi \neq (0, 0)$, entonces $\xi = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$ para ciertos $r_0 > 0$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Si $r(t)$ es la solución de $r' = r^3(1 - r^2)$ que verifica $r(0) = r_0$, entonces

$$x(t) = r(t) \cos(t + \theta_0), \quad y(t) = r(t) \sin(t + \theta_0)$$

es la solución de (3.1) que verifica $(x(0), y(0)) = \xi$. Para demostrar que $S^1 \subset \Omega(\xi)$, sea $p = (\cos \tau, \sin \tau)$ y defínase $t_k = 2\pi k - \theta_0 + \tau$. Entonces $x(t_k) = r(t_k) \cos \tau$, $y(t_k) = r(t_k) \sin \tau$, $t_k \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k), y(t_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} r(t_k) p = p.$$

Finalmente, puesto que para cualquier solución $x^2(t) + y^2(t) = r^2(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$, $\Omega(\xi) \subset S^1$.

El conjunto S^1 es una órbita periódica aislada en el conjunto de órbitas periódicas, es decir, un ciclo límite.

2. Estabilidad de los puntos de equilibrio. El método de Liapunov

DEFINICIÓN 3.5. Sea el sistema diferencial $x' = f(x)$. Se dice que un punto de equilibrio $x_0 \in U$ es estable, si para cada entorno $V \subset U$ de x_0 , existe otro entorno W de x_0 tal que $\xi \in W$ implica que $u(t, \xi)$ está definida en $[0, \infty)$ y $u(t, \xi) \in V$, para todo $t \geq 0$.

Se dice que un punto de equilibrio $x_0 \in U$ de $x' = f(x)$ es asintóticamente estable, si es estable y si existe un entorno $N \subset U$ de x_0 tal que $u(t, \xi)$ está definida en $[0, \infty)$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \xi) = x_0 \quad \text{siempre que } \xi \in N.$$

Todo punto de equilibrio asintóticamente estable es aislado. En efecto, si x_0 asintóticamente estable y si existe una sucesión de puntos de equilibrio que converge a x_0 , entonces las soluciones que parten de los equilibrios no tienden a x_0 .

EJEMPLO 3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tal que $f(x)x < 0$ si $x \neq 0$. Entonces 0 es un equilibrio asintóticamente estable. En efecto, como f es continua, $f(0) = 0$. Puesto que $f(x) > 0$ si $x < 0$ y $f(x) < 0$ si $x > 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, para cualquier solución x de la ecuación diferencial.

Sea $F: U_1 \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase 1 en el abierto U_1 . Se denota por derivada de F a lo largo de las órbitas de $x' = f(x)$ a la función $\dot{F}: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\dot{F}(x) = F'(x)f(x).$$

Obsérvese que si $x: I \rightarrow U$ es una solución de $x' = f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x(t)) &= F'(x(t))x'(t) \\ &= F'(x(t))f(x(t)) = \dot{F}(x(t)). \end{aligned}$$

Por otra parte nótese también que si $F(x) = \langle x, x \rangle$, entonces $\dot{F}(x) = 2\langle x, f(x) \rangle$.

DEFINICIÓN 3.6. Se dice que $F: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Liapunov para $x' = f(x)$ en el equilibrio $x_0 \in U_1$, si

1. $F \in \mathcal{C}^1(U_1)$.
2. $F(x_0) = 0$ y $F(x) > 0$ si $x \neq x_0$, $x \in U_1$.
3. $\dot{F}(x) \leq 0$, si $x \in U_1$.

Si además

$$\dot{F}(x) < 0, \quad \text{si } x \neq x_0, \quad x \in U_1,$$

se dice que F es de Liapunov estricta.

TEOREMA 3.7. *Si $F: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Liapunov para $x' = f(x)$ en el equilibrio $x_0 \in U_1$, entonces x_0 es estable.*

Si además, existe $R > 0$ tal que $B[x_0, R] \subset U_1$ y $\{x_0\}$ es el único subconjunto de $\{x \in B[x_0, R] : \dot{F}(x) = 0\}$ invariante por $x' = f(x)$, entonces x_0 es asintóticamente estable.

Si F es de Liapunov estricta, entonces satisface la hipótesis de la segunda parte del Teorema y, por tanto, x_0 es asintóticamente estable.

DEMOSTRACIÓN. Sea $r > 0$ tal que $B[x_0, r] \subset U_1$. Puesto que $S(x_0, r)$ es compacta, existe $m > 0$ tal que

$$F(x) \geq m, \quad \text{para todo } x \in S(x_0, r).$$

De la continuidad de F en x_0 , teniendo en cuenta que $F(x_0) = 0$, se deduce que existe un abierto $W \subset B(x_0, r)$ tal que $F(x) < m$, para todo $x \in W$.

AFIRMACIÓN 1. Sea $\xi \in W$. Probaremos que

$$u(t, \xi) \in B(x_0, r), \quad \text{para todo } t \in I_\xi, t \geq 0.$$

Supóngase por contradicción, que no es así. Entonces

$$t_1 = \inf\{t \in I_\xi : t \geq 0, \|u(t, \xi) - x_0\| \geq r\}$$

verifica

$$\begin{aligned} 0 < t_1 < \infty, \quad \|u(t_1, \xi) - x_0\| &= r, \\ \|u(t, \xi) - x_0\| < r, \quad \text{para todo } t \in [0, t_1]. \end{aligned}$$

La función $g(t) = F(u(t, \xi))$ está definida en $[0, t_1]$. Además $g(t_1) \geq m$. Por otra parte

$$g'(t) = \dot{F}(u(t, \xi)) \leq 0, \quad \text{en } [0, t_1].$$

Entonces

$$m \leq g(t_1) \leq g(0) = F(u(0, \xi)) = F(\xi) < m.$$

Esta contradicción prueba la AFIRMACIÓN 1.

Por tanto $u(t, \xi)$ es acotada para todo $t \in I_\xi, t \geq 0$ y, por tanto, definida para todo $t \geq 0$. Entonces

$$u(t, \xi) \in B(x_0, r), \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

lo que prueba que x_0 es estable. Además

$$g(t) \geq 0, \quad g'(t) \leq 0, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

De modo que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = l \geq 0$.

Para probar que x_0 es asintóticamente estable, tómese la $B[x_0, R]$, y sea W el entorno abierto de x_0 construido arriba para probar que x_0 es estable. Sea $\xi \in W$. Demostraremos que $\Omega(\xi) = \{x_0\}$, es decir que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \xi) = x_0$.

Observemos en primer lugar que puesto que $u(t, \xi) \in B(x_0, R)$ para todo $t \geq 0$, se verifica $\Omega(\xi) \subset B[x_0, R]$.

AFIRMACIÓN 2. F es constante en $\Omega(\xi)$.

En efecto, sea $p \in \Omega(\xi)$. Entonces $p = \lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, \xi)$, para alguna sucesión $t_k \rightarrow \infty$. Así que tenemos

$$F(p) = F\left(\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, \xi)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(t_k) = l$$

Por ser $\Omega(\xi)$ compacto e invariante, si $p \in \Omega(\xi)$, entonces $u(t, p) \in \Omega(\xi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto $F(u(t, p)) = l$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así que

$$\frac{d}{dt}F(u(t, p)) = \dot{F}(u(t, p)) = 0.$$

En definitiva, $\Omega(\xi)$ es un subconjunto de $\{x \in B[x_0, R] : \dot{F}(x) = 0\}$ invariante. en consecuencia, $\Omega(\xi) = \{x_0\}$. \square

COMENTARIO 3.8. El metodo de Liapunov sería la herramienta ideal para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio, si no fuera porque en los casos concretos es difícil encontrar una función de Liapunov.

Consecuencia del Teorema 3.7 es el siguiente resultado:

COROLARIO 3.9. Sean $f \in Lip_{loc}(U)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en \mathbb{R}^n tal que en un entorno abierto del origen $U_1 \subset U$ satisface

$$\langle f(x), x \rangle < 0, \text{ si } x \in U_1 \setminus \{0\}.$$

Entonces 0 es asintóticamente estable.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que 0 es un punto de equilibrio, considérese la función continua

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow h(t) = \langle f(tx), x \rangle.$$

Sea $x \neq 0$. Entonces $th(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por continuidad $h(0) = 0$. Así que $\langle f(0), x \rangle = 0$ siempre que $x \neq 0$, de donde se deduce que $f(0) = 0$.

Ahora basta tener en cuenta que $F(x) = \langle x, x \rangle$ es una función de Liapunov estricta para el origen. \square

COMENTARIO 3.10. La condición $\langle f(x), x \rangle < 0$, dice que el campo de vectores definido por f apunta hacia el interior de la esfera $S(0, |x|)$.

En efecto, el hiperplano $x + H = x + \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0\}$ divide al espacio en dos semiespacios. El punto $x + f(x)$ pertenece al semiespacio negativo, ya que

$$\begin{aligned} \langle x, x + f(x) \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, f(x) \rangle \\ &< \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Si $y \in B(0, |x|)$, entonces

$$\langle y, x \rangle \leq |y| |x| < |x|^2 = \langle x, x \rangle.$$

Es decir, la bola también pertenece al mismo semiplano negativo.

Consecuencia del Corolario 3.9 es el

COROLARIO 3.11. *Sea $x_0 \in U$ un punto de equilibrio de $x' = f(x)$, donde $f \in Lip_{loc}(U)$. Si f es diferenciable en x_0 y si su linealización en $x = x_0$, $x' = f'(x_0)x$ es un atractor, entonces x_0 es asintóticamente estable.*

DEMOSTRACIÓN. Mediante el cambio de variables $x = y + x_0$, se puede suponer que $x_0 = 0$. Por tener $f'(0)$ todos sus autovalores con parte real estrictamente negativa, existe un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathbb{R}^n y un $\alpha > 0$ tales que

$$\langle f'(0)x, x \rangle \leq -2\alpha|x|^2, \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Debido a que $f(0) = 0$ y f diferenciable en $x = 0$, existe un entorno $U_1 \subset U$ de $x = 0$ tal que

$$|f(x) - f'(0)x| \leq \alpha|x|, \quad \text{si } x \in U_1.$$

Si $x \in U_1$,

$$\begin{aligned} \langle f(x), x \rangle &= \langle f(x) - f'(0)x, x \rangle + \langle f'(0)x, x \rangle \\ &\leq |f(x) - f'(0)x| |x| + \langle f'(0)x, x \rangle \\ &\leq (\alpha - 2\alpha)|x|^2 = -\alpha|x|^2. \end{aligned}$$

En particular

$$\langle f(x), x \rangle < 0, \quad \text{si } x \in U_1 \setminus \{0\},$$

y el resultado sigue del Teorema 3.9. □

3. Sistemas gradientes

Sea $F: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase 1 en el abierto $U_1 \subset \mathbb{R}^n$. Sea u^1, \dots, u^n una base de \mathbb{R}^n . El vector gradiente, $\nabla F(x)$, es por definición el que tiene por componentes respecto de la base a $F'(x)u^1, \dots, F'(x)u^n$, es decir,

$$\nabla F(x) = \sum_{i=1}^n (F'(x)u^i)u^i.$$

Para el producto escalar, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, asociado a dicha base, se verifica

$$\begin{aligned} F'(x)y &= F'(x)(y_1u^1 + \dots + y_nu^n) \\ &= (F'(x)u^1)y_1 + \dots + (F'(x)u^n)y_n \\ &= \langle \nabla F(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Supóngase que F es una función de Liapunov estricta. Puesto que

$$\dot{F}(x) = F'(x)f(x) = \langle \nabla F(x), f(x) \rangle < 0, \quad \text{si } x \neq x_0,$$

se cumple que $\nabla F(x) \neq 0$, si $x \neq x_0$.

Considérese la base canónica en \mathbb{R}^n . Si $F(\bar{x}) = c > 0$ y si, por ejemplo, $\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0$, entonces el teorema de funciones definidas implícitamente asegura la existencia de una función $h(x_2, \dots, x_n)$ definida en un entorno de $(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ tal que

$$\begin{aligned} h &\in \mathcal{C}^1, & h(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) &= \bar{x}_1, \\ F(h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) &= c. \end{aligned}$$

Es decir, $F^{-1}(c)$ es una variedad $(n-1)$ -dimensional. Una curva sobre la variedad satisface $F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = c$. Derivando respecto de t y considerando el producto escalar ordinario,

$$\begin{aligned} 0 &= D_1 F(x(t))x_1'(t) + \dots + D_n F(x(t))x_n'(t) \\ &= \langle \nabla F(x(t)), x'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla F(x)$ es un vector normal a la variedad.

Si consideramos el hiperplano tangente

$$\bar{x} + \{y : \langle \nabla F(\bar{x}), y \rangle = 0\},$$

se tiene que $\bar{x} + \nabla F(\bar{x})$ y $\bar{x} + f(\bar{x})$ están en distintos semiespacios, ya que

$$\langle \nabla F(\bar{x}), \nabla F(\bar{x}) \rangle > 0, \langle \nabla F(\bar{x}), f(\bar{x}) \rangle < 0.$$

Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase 2 definida en un abierto U de \mathbb{R}^n y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar ordinario en \mathbb{R}^n . La función $\nabla F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase 1. Al sistema diferencial

$$x' = -\nabla F(x),$$

se le llama sistema gradiente.

Puesto que

$$\begin{aligned} \dot{F}(x) &= F'(x)f(x) = \langle \nabla F(x), -\nabla F(x) \rangle \\ &= -|\nabla F(x)|^2, \end{aligned}$$

son equivalentes

1. $x_0 \in U$ es un punto de equilibrio.
2. $\nabla F(x_0) = 0$,
3. $\dot{F}(x_0) = 0$.

PROPOSICIÓN 3.12. *En las condiciones anteriores, sea $x_0 \in U$ un punto de equilibrio aislado de $x' = -\nabla F(x)$, el cual es un mínimo local de $F(x)$. Entonces x_0 es asintóticamente estable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea un abierto $U_1 \subset U$ entorno de x_0 tal que $F(x)$ no tiene puntos de equilibrio en $U_1 \setminus \{x_0\}$. Entonces $F: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo global en x_0 , ya que $\nabla F(x) \neq 0$ para todo $x \in U_1 \setminus \{x_0\}$. En consecuencia $F(x) - F(x_0)$ es una función de Liapunov estricta en x_0 , porque

- $F(x_0) - F(x_0) = 0$,
- $F(x) - F(x_0) > 0$, si $x \in U_1 \setminus \{x_0\}$.

$$\blacksquare \quad \overline{F(x) - F(x_0)} = \dot{F}(x) = -|\nabla F(x)|^2 < 0, \text{ si } x \in U_1 \setminus \{x_0\}.$$

□

4. Sistemas Hamiltonianos

Comenzaremos motivando la definición general de sistema Hamiltoniano, a través de una clase particular de éstos, los llamados sistemas conservativos.

Son de la forma

$$(3.3) \quad x'' + \nabla G(x) = 0,$$

donde $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase 1 en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\nabla G(x)$ es localmente lipschitziana. (El gradiente se define respecto de la base canónica de \mathbb{R}^n). La función $G(x)$ se llama potencial o energía potencial del sistema. Por ejemplo, si $G(x) = |x|^{-1}$ y si llamamos $F(x) = \langle x, x \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} G'(x)y &= -\frac{1}{2}\langle x, x \rangle^{-\frac{3}{2}} F'(x)y \\ &= -\frac{1}{2}\langle x, x \rangle^{-\frac{3}{2}} 2\langle x, y \rangle \\ &= -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle^{\frac{3}{2}}} = -\left\langle \frac{x}{|x|^3}, y \right\rangle \\ &= \langle \nabla G(x), y \rangle. \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\nabla G(x) = -\frac{x}{|x|^3},$$

que es el potencial de Newton.

La ecuación (3.3) es equivalente al sistema de primer orden y $2n$ ecuaciones

$$(3.4) \quad \begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\nabla G(x), \end{cases}$$

donde y representa la velocidad.

Sea la energía total del sistema, $E(x, y) = G(x) + \frac{1}{2}|y|^2$, es decir, la suma de la energía potencial $G(x)$ más la energía cinética $\frac{1}{2}|y|^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{E}(x, y) &= E'(x, y) \begin{pmatrix} y \\ -\nabla G(x) \end{pmatrix} \\ &= (G'(x), \langle y, \cdot \rangle) \begin{pmatrix} y \\ -\nabla G(x) \end{pmatrix} \\ &= \langle \nabla G(x), y \rangle - \langle y, \nabla G(x) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Así que

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = \dot{E}(x(t), y(t)) = 0,$$

para toda solución $(x(t), y(t))$ de (3.4). En otras palabras: "la energía total del sistema permanece constante a lo largo de las trayectorias del sistema", lo que se conoce como "Principio de Conservación de la Energía".

PROPOSICIÓN 3.13. *En las condiciones anteriores, sea*

$$G(x_0) < G(x), \quad \text{si } x \neq x_0,$$

entonces $(x_0, 0)$ es un punto de equilibrio estable para (3.4).

DEMOSTRACIÓN. $(x_0, 0)$ es un punto de equilibrio, porque $\nabla G(x_0) = 0$. Sea $F(x, y) = E(x, y) - G(x_0)$ definida en $U \times \mathbb{R}^n$. Probaremos que es una función de Liapunov para $(x_0, 0)$. Se verifica que $F(x_0, 0) = 0$, $F(x, y) = G(x) - G(x_0) + \frac{1}{2}|y|^2 > 0$, siempre que $(x, y) \neq (x_0, 0)$ y $\dot{F}(x, y) = \dot{E}(x, y) = 0$. \square

Sea $H: U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $H \in \mathcal{C}^1$. Considérense las aplicaciones

$$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow H(x, y)$$

$$y \in \mathbb{R}^n \rightarrow H(x, y).$$

Entonces

$$D_x H(x, y)z = \langle \nabla_x H(x, y), z \rangle$$

$$D_y H(x, y)v = \langle \nabla_y H(x, y), v \rangle.$$

Además $DH(x, y)(z, v) = D_x H(x, y)z + D_y H(x, y)v$.

Un sistema Hamiltoniano es de la forma

$$(3.5) \quad \begin{cases} x' &= \nabla_y H(x, y), \\ y' &= -\nabla_x H(x, y), \end{cases}$$

donde H es de clase 1 y ∇H es localmente lipschitziana. La función H se llama Hamiltoniano del sistema y verifica

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y) &= DH(x, y) \begin{pmatrix} \nabla_y H(x, y) \\ -\nabla_x H(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \langle \nabla_x H(x, y), \nabla_y H(x, y) \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_y H(x, y), \nabla_x H(x, y) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Tomando $H = E$ en (3.4) se obtiene que es un Hamiltoniano.

PROPOSICIÓN 3.14. *En las condiciones anteriores, sea*

$$H(x_0, y_0) < H(x, y), \quad \text{si } (x, y) \neq (x_0, y_0).$$

Entonces (x_0, y_0) es un punto de equilibrio estable para (3.5).

DEMOSTRACIÓN. La función $H(x, y) - H(x_0, y_0)$ es de Liapunov para el equilibrio (x_0, y_0) . \square

Es usual la notación clásica

$$\begin{cases} p'_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \\ q'_i &= -\frac{\partial H}{\partial p_i}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n). \end{cases}$$

5. Inestabilidad

TEOREMA 3.15. *Sean el sistema diferencial $x' = f(x)$ y $F: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase 1 definida en el entorno abierto $U_1 \subset U$ del punto de equilibrio x_0 , tal que*

1. $F(x_0) = 0$.
2. *Todo entorno de x_0 contiene un punto donde F es estrictamente negativa (estrictamente positiva).*
3. $\dot{F}(x) \leq 0$ ($\dot{F}(x) \geq 0$) *para todo $x \in U_1$ y existe $R > 0$ tal que $B[x_0, R] \subset U_1$ y $\{x_0\}$ es el único subconjunto de $\{x \in B[x_0, R] : \dot{F}(x) = 0\}$ invariante por $x' = f(x)$.*

Entonces x_0 es inestable, lo que por definición significa que no es estable.

DEMOSTRACIÓN. De la continuidad de F en x_0 sigue la existencia de $0 < r < R$ tal que $|F(x)| \leq 1$ si $x \in B[x_0, r]$.

Supóngase que x_0 es estable, entonces existe $0 < \rho < r$ tal que la solución $u(t, \xi) \in B(x_0, r)$ siempre que $\xi \in B(x_0, \rho)$ y $t \geq 0$.

Sea $\bar{\xi} \in B(x_0, \rho)$ tal que $F(\bar{\xi}) < 0$ y definimos $g(t) = F(u(t, \bar{\xi}))$. Entonces

$$g'(t) = \dot{F}(u(t, \bar{\xi})) \leq 0, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Puesto que $|g(t)| \leq 1$, para todo $t \geq 0$, se concluye que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = l$. Observemos en primer lugar que puesto que $u(t, \bar{\xi}) \in B(x_0, r)$ para todo $t \geq 0$, se verifica $\Omega(\bar{\xi}) \subset B[x_0, r]$. Además F es constante en $\Omega(\bar{\xi})$.

Por tanto $\Omega(\bar{\xi})$ es un subconjunto de $\{x \in B[x_0, R] : \dot{F}(x) = 0\}$ invariante. Así que $\Omega(\bar{\xi}) = \{x_0\}$.

En consecuencia, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \bar{\xi}) = x_0$ y

$$g(t) = F(u(t, \bar{\xi})) \rightarrow F(x_0) = 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

de modo que $l = 0$. Como $g(t)$ es decreciente en $[0, \infty)$, $g(t) \geq 0$ en $[0, \infty)$ de suerte que $0 \leq g(0) = F(\bar{\xi}) < 0$. Esta contradicción termina la demostración. \square

COMENTARIO 3.16. La hipótesis $\dot{F}(x) < 0$ si $x \in U_1 \setminus \{x_0\}$ implica (iii) del enunciado del Teorema.

TEOREMA 3.17. *Sean $f \in Lip_{loc}(U)$, $x_0 \in U$ un punto de equilibrio de $x' = f(x)$ y f diferenciable en x_0 . Si $f'(x_0)$ tiene un autovalor con parte real estrictamente positivo, entonces x_0 es inestable.*

DEMOSTRACIÓN. (Caso $x' = f'(x_0)x$ hiperbólico). Mediante una traslación se puede suponer que $x_0 = 0$. Se verifica que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, donde E^s y E^u son subespacios invariantes por $f'(0)$, tales que $x' = f'(0)x$ es un atractor en E^s y una fuente en E^u . En consecuencia, existen productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$ en E^s y E^u respectivamente y un $\alpha > 0$ tales que

$$\langle f'(0)x, x \rangle_s \leq -\alpha|x|_s, \quad (x \in E^s),$$

$$\langle f'(0)x, x \rangle_u \geq \alpha|x|_u, \quad (x \in E^u).$$

Defínase el producto escalar en \mathbb{R}^n por

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle x^s, y^s \rangle + \langle x^u, y^u \rangle, \\ (x &= x^u + x^s, y = y^u + y^s \quad x^s, y^s \in E^s, \quad x^u, y^u \in E^u).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle_s &= \langle x, y \rangle, \quad \text{si } x, y \in E^s \\ \langle x, y \rangle_u &= \langle x, y \rangle, \quad \text{si } x, y \in E^u.\end{aligned}$$

Veremos que

$$F(x) = |x^s|^2 - |x^u|^2,$$

restringida a un entorno apropiado del origen, satisface las hipótesis del Teorema 3.15.

Es obvio que $F(0) = 0$ y que todo entorno del origen contiene un punto donde F es estrictamente negativa. Calculemos \dot{F} . Sean $\pi^s: \mathbb{R}^n \rightarrow E^s$ y $\pi^u: \mathbb{R}^n \rightarrow E^u$ las proyecciones asociadas a la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.

Defínase $R(x) = f(x) - f'(0)x$ y sea $\epsilon > 0$. Puesto que f es diferenciable en $x = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|R(x)| \leq \epsilon|x|, \quad \text{si } |x| < \delta.$$

Por otra parte

$$F(x) = (\langle \cdot, \cdot \rangle \circ (\pi^s, \pi^s) - \langle \cdot, \cdot \rangle \circ (\pi^u, \pi^u))(x),$$

aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que

$$D(\langle \cdot, \cdot \rangle)(x, y)(u, v) = \langle x, v \rangle + \langle u, y \rangle,$$

$$\pi^{j'}(x) = \pi^j, \quad j = s, u,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}D(\langle \cdot, \cdot \rangle \circ (\pi^j, \pi^j))(x) &= D\langle \cdot, \cdot \rangle(\pi^j x, \pi^j x) \circ D(\pi^j, \pi^j)(x) \\ &= D\langle \cdot, \cdot \rangle(\pi^j x, \pi^j x) \circ (\pi^j, \pi^j).\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}D(\langle \cdot, \cdot \rangle \circ (\pi^j, \pi^j))(x)y &= D\langle \cdot, \cdot \rangle(\pi^j x, \pi^j x)(\pi^j y, \pi^j y) \\ &= 2\langle \pi^j x, \pi^j y \rangle.\end{aligned}$$

$$DF(x)y = 2(\langle \pi^s x, \pi^s y \rangle - \langle \pi^u x, \pi^u y \rangle).$$

Para $y = f(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{F}(x) &= 2(\langle \pi^s x, \pi^s f(x) \rangle - \langle \pi^u x, \pi^u f(x) \rangle) \\
&= 2(\langle \pi^s x, \pi^s (f'(0)x + R(x)) \rangle \\
&\quad - \langle \pi^u x, \pi^u (f'(0)x + R(x)) \rangle) \\
&= 2(\langle \pi^s x, f'(0)\pi^s x + \pi^s R(x) \rangle \\
&\quad - \langle \pi^u x, f'(0)\pi^u x + \pi^u R(x) \rangle) \\
&\leq -2\alpha(|x^s|^2 + |x^u|^2) \\
&\quad + 2(|x^s| |\pi^s R(x)| + |x^u| |\pi^u R(x)|) \\
&\leq -2\alpha|x|^2 + 4\epsilon|x|^2 \\
&= -2(\alpha - 2\epsilon)|x|^2.
\end{aligned}$$

Tómese $\epsilon > 0$ tal que $\alpha - 2\epsilon > 0$. Entonces

$$\dot{F}(x) < 0, \quad \text{si } x \in B(0, \delta) \setminus \{0\}.$$

□

COMENTARIO 3.18. El teorema anterior también es cierto sin suponer que $x' = f(x_0)x$ es hiperbólico. Para una demostración de este caso más general, véanse por ejemplo, [?] o [?].

6. Conjuntos invariantes

Recordemos la definición de subconjunto invariante respecto de un sistema diferencial.

DEFINICIÓN 3.7. Se dice que un subconjunto A de U es positivamente (resp. negativamente) invariante por $x' = f(x)$, donde $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$ si

$$\xi \in A, t \in I_\xi, t \geq 0 \text{ (resp. } t \leq 0) \Rightarrow u(t, \xi) \in A.$$

Si A es simultáneamente positiva y negativamente invariante, se dice que es invariante.

PROPOSICIÓN 3.19. Si $A \subset U$ es positivamente (negativamente) invariante, también lo es su cierre, \bar{A} .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\xi \in \bar{A}$. Entonces existe una sucesión $\{\xi_k\} \subset A$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi$. Por el teorema de dependencia respecto de las condiciones iniciales, puesto que $W = \{(t, x) : x \in U, t \in I_x\}$ es abierto, se tiene que si $t \in I_\xi$, $t \geq 0$, existe un entero k_t tal que $k > k_t \Rightarrow t \in I_{\xi_k}$ y $u(t, \xi_k) \rightarrow u(t, \xi)$ cuando $k \rightarrow \infty$. Pero $u(t, \xi_k) \in A$, porque A es positivamente invariante. De modo que $u(t, \xi) \in \bar{A}$. □

El siguiente resultado es muy útil para comprobar que un conjunto es positivamente invariante.

PROPOSICIÓN 3.20. *Sea $A \subset U$ cerrado. Supóngase que para cada $\xi \in \mathcal{Fr}A$, donde $\mathcal{Fr}A$ es la frontera de A , existe $\epsilon > 0$ tal que $u(t, \xi) \in A$ para todo $0 \leq t < \epsilon$. Entonces A es positivamente invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que existen $\xi \in A$ y $t_0 \in I_\xi \cap (0, \infty)$ tales que $u(t_0, \xi) \notin A$. Defínase

$$\bar{t}_0 = \sup\{t \in [0, t_0) : u(t, \xi) \in A\}.$$

Al ser A un conjunto cerrado, $u(\bar{t}_0, \xi) \in A$, así que $0 \leq \bar{t}_0 < t_0$. Sea $\eta = u(\bar{t}_0, \xi)$. Entonces $\eta \in \mathcal{Fr}A$, ya que hay una sucesión $u(t_n, \xi) \rightarrow u(\bar{t}_0, \xi) = \eta$, $n \rightarrow \infty$, con $t_n \in [0, t_0)$ y $u(t_n, \xi) \in A$ y si $t > \bar{t}_0$, entonces $u(t, \xi) \notin A$. Pero por hipótesis, existe $\epsilon > 0$ tal que $u(t, \eta) \in A$ para todo $t \in [0, \epsilon)$. Así que

$$u(t, \eta) = u(t, u(\bar{t}_0, \xi)) = u(t + \bar{t}_0, \xi) \in A,$$

en contradicción con la definición de supremo. □

Teniendo en cuenta que $A \subset U$ es positivamente invariante con respecto a $x' = f(x)$ si y solo si es negativamente invariante con respecto a $x' = -f(x)$, usando la Proposición anterior se prueba la

PROPOSICIÓN 3.21. *Sea $A \subset U$ cerrado. Supóngase que para cada $\xi \in \mathcal{Fr}A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $u(t, \xi) \in A$ para todo $-\epsilon < t \leq 0$. Entonces A es negativamente invariante.*

EJEMPLO 4. Sea la ecuación diferencial en el plano

$$\begin{cases} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{cases}$$

donde $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones localmente lipschitzianas tales que

$$\begin{aligned} f(0, y) &\geq 0 && \text{para todo } y \geq 0, \\ g(x, 0) &\geq 0 && \text{para todo } x \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces el primer cuadrante, \mathbb{R}_+^2 , es positivamente invariante.

Nótese en primer lugar que la frontera del primer cuadrante es el conjunto de puntos (x, y) tales que $xy = 0$. Para aplicar la Proposición (3.20) consideraremos previamente el caso

$$\begin{aligned} f(0, y) &> 0 && \text{para todo } y \geq 0, \\ g(x, 0) &> 0 && \text{para todo } x \geq 0. \end{aligned}$$

Sea $(x(t), y(t))$ una solución tal que $(x(0), y(0))$ pertenece a la frontera del primer cuadrante y consideremos tres casos:

1. $x(0) > 0$ e $y(0) = 0$. Entonces $y'(0) = g(x(0), y(0)) = g(x(0), 0) > 0$, así que y es estrictamente creciente en $t = 0$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $y(t) > 0$ si $t \in (0, \epsilon)$. Puesto que $x(0) > 0$, se puede suponer que $x(t) > 0$ si $t \in (0, \epsilon)$.

2. $x(0) = 0$ e $y(0) > 0$. Entonces $x'(0) = f(x(0), y(0)) = f(0, y(0)) > 0$, así que x es estrictamente creciente en $t = 0$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$x(t) > 0$ si $t \in (0, \epsilon)$. Puesto que $y(0) > 0$, se puede suponer que $y(t) > 0$ si $t \in (0, \epsilon)$.

3. $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$. Entonces $x'(0) > 0$ e $y'(0) > 0$ y se procede como en los dos casos anteriores.

Es decir, en cualquiera de los tres casos, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x(t), y(t))$ pertenece a la frontera del primer cuadrante. El resultado sigue de la Proposición 3.20.

Para demostrar el caso general definimos para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x' &= f(x, y) + \lambda \\ y' &= g(x, y) + \lambda. \end{cases}$$

Del caso anterior se obtiene que \mathbb{R}_+^2 es positivamente invariante para el sistema anterior, siempre que $\lambda > 0$. Si $u(t, \xi, \lambda)$ es la solución del sistema diferencial respecto de las condiciones iniciales y parámetros, se tiene que

$$W = \{(t, \xi, \lambda) : (\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, t \in I_{\xi, \lambda}\}$$

es abierto y $u: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u(t, \xi, \lambda) = u_{\xi, \lambda}(t)$ es continua.

Sea $\xi \in Fr\mathbb{R}_+^2$. Puesto que $(0, \xi, 0) \in W$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|t| < \epsilon$, $|\lambda| < \epsilon$ implican $(t, \xi, \lambda) \in W$ y

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(t, \xi, \lambda) = u(t, \xi, 0) = u(t, \xi).$$

Si $0 < t, \lambda < \epsilon$, entonces $u(t, \xi, \lambda) \in \mathbb{R}_+^2$. Por continuidad $u(t, \xi) \in \mathbb{R}_+^2$.

COMENTARIO 3.22. El vector $(0, 1)$ es normal interior a \mathbb{R}_+^2 en cada punto de la forma $(x, 0)$ con $x > 0$. Por otra parte

$$\langle (0, 1), (f(x, 0), g(x, 0)) \rangle = g(x, 0) \geq 0$$

expresa que el campo (f, g) apunta hacia el interior de \mathbb{R}_+^2 . Una interpretación análoga se tiene para los puntos del eje y positivo.

EJEMPLO 5. Supóngase que $U = \mathbb{R}^n$ y que el campo f satisface

$$\langle f(x), x \rangle \leq 0, \quad \text{si } |x| = R,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $|\cdot|$ denotan un producto escalar en \mathbb{R}^n y su norma asociada respectivamente. Ya hemos dicho que en este caso f apunta hacia el interior de la $B[0, R]$. Probaremos que $A = B[0, R]$ es positivamente invariante y que $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, R)$ es negativamente invariante.

Comencemos observando que su frontera es $S(0, R)$. Consideremos previamente el caso en que

$$\langle f(x), x \rangle < 0, \quad \text{si } |x| = R.$$

Sean $\xi \in FrA$ y $g(t) = \langle u(t, \xi), u(t, \xi) \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2\langle u'(t, \xi), u(t, \xi) \rangle \\ &= 2\langle f(u(t, \xi)), u(t, \xi) \rangle, \end{aligned}$$

de modo que $g'(0) < 0$, así que existe $\epsilon > 0$ tal que $g(t) < g(0)$ para todo $t \in (0, \epsilon)$. En consecuencia, $|u(t, \xi)| < |\xi| = R$ para todo $t \in (0, \epsilon)$. Así que A es positivamente invariante.

Para probar el caso general, se define $f(x, \lambda) = f(x) - \lambda x$ y se procede como en el ejemplo anterior.

En el siguiente resultado se generaliza el ejemplo descrito arriba.

TEOREMA 3.23. *Sea $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase 1 tal que $\nabla F(x)$ es localmente lipschitziana. Sea $F^{-1}(0) \neq \emptyset$. Si*

$$\nabla F(x) \neq 0, \quad \dot{F}(x) \leq 0, \quad \text{para todo } x \in F^{-1}(0),$$

entonces $F^{-1}((-\infty, 0])$ es positivamente invariante y $F^{-1}([0, \infty))$ es negativamente invariante.

Si

$$\nabla F(x) \neq 0, \quad \dot{F}(x) \geq 0, \quad \text{para todo } x \in F^{-1}(0),$$

entonces $F^{-1}((-\infty, 0])$ es negativamente invariante y $F^{-1}([0, \infty))$ es positivamente invariante.

COMENTARIO 3.24. El Ejemplo anterior corresponde al caso $U = \mathbb{R}^n$ y $F(x) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle - \frac{1}{2} R^2$, ya que $DF(x)(\cdot) = \langle x, \cdot \rangle$

DEMOSTRACIÓN. La frontera de $F^{-1}((-\infty, 0])$ relativa a U es $F^{-1}(0)$. En efecto, sean $x_0 \in F^{-1}(0)$ y $\beta(t) = F(x_0 + t\nabla F(x_0))$.

Entonces

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= F'(x_0 + t\nabla F(x_0))\nabla F(x_0) \\ &= \langle \nabla F(x_0 + t\nabla F(x_0)), \nabla F(x_0) \rangle, \\ \beta'(0) &= \langle \nabla F(x_0), \nabla F(x_0) \rangle > 0. \end{aligned}$$

Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $-\epsilon < t_1 < 0 < t_2 < \epsilon$ implica $\beta(t_1) < \beta(0) = 0 < \beta(t_2)$. Desde luego,

$$\begin{aligned} x_0 + t_1 \nabla F(x_0) &\in F^{-1}((-\infty, 0]) \\ x_0 + t_2 \nabla F(x_0) &\notin F^{-1}((-\infty, 0]). \end{aligned}$$

Supóngase en primer lugar que

$$\dot{F}(x) < 0, \quad \text{si } x \in F^{-1}(0).$$

Sea $g(t) = F(u(t, \xi))$ para $\xi \in F^{-1}(0)$. Entonces $g'(t) = \dot{F}(u(t, \xi))$. Puesto que $g'(0) < 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $g(t) < g(0) = 0$ para todo $0 < t < \epsilon$ y $0 = g(0) < g(t)$ para todo $-\epsilon < t < 0$. En consecuencia, $u(t, \xi) \in F^{-1}((-\infty, 0])$ para todo $0 < t < \epsilon$ y $u(t, \xi) \in F^{-1}([0, \infty))$ para todo $-\epsilon < t < 0$.

Así que $F^{-1}((-\infty, 0])$ es positivamente invariante por la Proposición 3.20 y $F^{-1}([0, \infty))$ es negativamente invariante.

El caso general se prueba usando las perturbaciones

$$f(x, \lambda) = f(x) - \lambda \nabla F(x), \quad \lambda > 0.$$

(En este punto se usa la hipótesis $\nabla F(x) \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$.) \square

COMENTARIO 3.25. 1. Si

$$\dot{F}(x) < 0, \quad \text{para todo } x \in F^{-1}(0),$$

entonces $\nabla F(x) \neq 0$ y el Teorema se verifica sin la hipótesis $\nabla F(x) \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$. En todo caso, se puede demostrar, ver [?], que se cumple el Teorema sin utilizar esta hipótesis.

COROLARIO 3.26. *En las hipótesis del Teorema anterior, pero suponiendo que*

$$\nabla F(x) \neq 0, \quad \dot{F}(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in F^{-1}(0),$$

se verifica que $F^{-1}(0)$ es invariante.

DEMOSTRACIÓN. Se obtiene que $F^{-1}([0, \infty))$ y $F^{-1}((-\infty, 0])$ son invariantes. Puesto que la intersección de conjuntos invariantes es invariante, se tiene que $F^{-1}(0)$ es invariante. \square

7. Ejercicios

1. Sea la ED escalar $x' = f(x)$, donde $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$, siendo U un abierto de \mathbb{R} . Sea x_0 un punto de equilibrio. Demostrar que x_0 es estable, si existe $\delta > 0$ tal que $(x - x_0)f(x) \leq 0$ en $0 < |x - x_0| < \delta$. Demostrar que x_0 es inestable, si existe $\delta > 0$ tal que $(x - x_0)f(x) > 0$ para $0 < x - x_0 < \delta$ o $-\delta < x - x_0 < 0$.
2. Sea la ED

$$x' = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Determine la estabilidad de los puntos de equilibrio.

3. Sea el SD $x' = Ax + h(x)$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tiene todos sus autovalores con parte real < 0 y donde h está definida y es localmente lipschitziana en un entorno de $x = 0$. Además

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{\|x\|} = 0.$$

a) Usando la representación integral de las soluciones:

$$u(t, \xi) = e^{tA}\xi + \int_0^t e^{(t-s)A}h(u(s, \xi)) ds \quad t \in I_\xi$$

y el lema de Gronwall, pruebe que el origen es asintóticamente estable.

4. Sea el SD

$$x' = y, \quad y' = -\operatorname{sen} x - 3y.$$

Localizar los puntos de equilibrio y determinar si son estables a partir de la linealización en el equilibrio.

5. Sea el SD

$$x' = -y, \quad y' = \frac{x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x + y}{8}.$$

Localizar los puntos de equilibrio y determinar si son estables a partir de la linealización en el equilibrio.

6. Sea el SD

$$\begin{aligned} x' &= 2x + \operatorname{sen} y - 4x(x^2 + y^2) \\ y' &= \operatorname{sen} y - 3x \operatorname{sen}(x - 2y) - 2y(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Determine la estabilidad del $(0, 0)$.

7. Sea el SD

$$x' = y, \quad y' = -x^2 + y^2 + 1.$$

Determinar los puntos de equilibrio y la linealización del SD en dichos puntos. ¿Qué propiedades de estabilidad se pueden deducir a partir de su linealización?

8. Sea la ED del péndulo con fricción

$$x'' + ax' + b \sin x = 0, \quad a, b > 0.$$

Usar el cambio de variables $x_1 = x$, $x_2 = x'$, para expresar la ED como un SD equivalente en el plano. Para este sistema calcular los puntos de equilibrio y probar que $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

9. Sea el SD plano

$$x' = -x - \frac{y}{\ln r}, \quad y' = -y + \frac{x}{\ln r},$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$.

- Pruebe que $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio.
- Pruebe que la parte lineal en $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable.
- Pruebe que $(0, 0)$ es un punto espiral asintóticamente estable.

10. Sea el SD

$$x' = -x + x^4 + y^6, \quad y' = -2y - x^6 + y^8.$$

Demuestre que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de tipo no espiral.

11. Sea la ED
- $x'' + x' + x + x^2 = 0$
- . Considérese el sistema plano equivalente:

$$x' = y, \quad y' = -x - y - x^2.$$

Determine la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

12. Para cada
- ϵ
- determine la estabilidad del punto de equilibrio
- $(0, 0)$
- del SD

$$x' = y - \epsilon(x^2 + y^2)x, \quad y' = -x - \epsilon(x^2 + y^2)y.$$

13. Sea el sistema diferencial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix},$$

donde $a < 0$, $b > 0$, $P, Q \in \text{Lip}_{\text{loc}}$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P}{r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Q}{r} = 0, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Probar que las órbitas que empiezan suficientemente próximas del punto de equilibrio $(0, 0)$, se enrollan espiralmente en torno a él.

14. Sea el SD

$$\begin{aligned} x' &= -ax + P(x, y) \\ y' &= -ay + Q(x, y), \end{aligned}$$

donde $a > 0$ y donde P, Q empiezan con términos cuadráticos. Demuestre que el origen es asintóticamente estable y de tipo no espiral.

15. Sea el sistema diferencial en \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x + y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x + y)^2 \end{cases}$$

- a) Compruebe que no se puede deducir la estabilidad asintótica del origen $(0, 0)$ a partir de su linealización en $(0, 0)$.
b) Pruebe que $F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ es una función de Liapunov estricta en un entorno del origen.

16. Sea el sistema diferencial en \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ x' = -x^3 \end{cases}$$

- a) Pruebe que el origen no es estable para la linealización en $(0, 0)$.
b) Pruebe que el origen es estable usando la función $F(x, y) = x^4/4 + y^2/2$.

17. Sea x_0 una singularidad asintóticamente estable de $x' = f(x)$. El conjunto

$$C(x_0) = \{\xi \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \xi) = x_0\}$$

se llama cuenca o dominio de atracción de x_0 .

Pruebe que $C(x_0)$ es un conjunto abierto.

18. Sea el SD $x' = f(x)$, donde $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Sea x_0 un punto de equilibrio. Demostrar que si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Liapunov estricta para x_0 y

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} F(x) = \infty,$$

entonces $C(x_0) = \mathbb{R}^n$.

19. Sea la ED $x'' + g(x)x' + h(x) = 0$, donde $f, g \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $g(x) > 0$ y $xh(x) > 0$, si $x \neq 0$. (Esta ED se llama de Lienard y es un modelo matemático para un oscilador con fricción). Pruebe $(0, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema diferencial equivalente.
20. Sea la ED (de Van der Pol) $x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$. Demuestre que la solución nula es inestable y de tipo espiral.
21. Sea el sistema diferencial en el plano

$$\begin{cases} x' &= x^2 + y \sin x \\ y' &= -1 + xy + \cos y. \end{cases}$$

Pruebe que el primer cuadrante es positivamente invariante.

22. Sea el sistema diferencial en el plano

$$\begin{cases} x' &= -xy^2 \\ y' &= -yx^2. \end{cases}$$

- a) Expresarla en coordenadas polares.
b) Probar que el círculo unidad es positivamente invariante.

Soluciones periódicas en sistemas autónomos planos

1. Sistemas Hamiltonianos en el plano

Sea el sistema diferencial

$$(4.1) \quad \begin{cases} x' &= g(y) \\ y' &= -h(x), \end{cases}$$

donde $g: (-s, s) \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, ($0 < r, s \leq \infty$), son funciones localmente lipschitzianas. Sean

$$G(y) = \int_0^y g(\eta) d\eta, \quad H(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi$$

y $F(x, y) = G(y) + H(x)$. Entonces F es un hamiltoniano de (4.1). En lo que sigue suponemos

$$yg(y) > 0, \quad 0 < |y| < s, \quad xh(x) > 0, \quad 0 < |x| < r.$$

De donde sigue que $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio de (4.1). Además

$$F(0, 0) = 0,$$

$$F(x, y) > 0, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$\dot{F}(x, y) = 0, \text{ para todo } (x, y).$$

Por tanto $(0, 0)$ es estable.

Sean

$$G(\pm s) = \lim_{y \rightarrow \pm s} G(y), \quad H(\pm r) = \lim_{x \rightarrow \pm r} H(x),$$

$$c_m = \min\{G(\pm s), H(\pm r)\}.$$

PROPOSICIÓN 4.1. *Dado $\epsilon > 0$, existen $0 < R < r$ y $0 < S < s$ tales que $G(y) > c_m - \epsilon$, si $|y| > S$ y $H(x) > c_m - \epsilon$, si $|x| > R$.*

DEMOSTRACIÓN. Se verifica que $G(s) = \sup_{y \in (0, s)} G(y)$ y $G(-s) = \sup_{y \in (-s, 0)} G(y)$, de modo que existe $\bar{y} \in (0, s)$ tal que $G(\bar{y}) > G(s) - \epsilon$. Puesto que G es estrictamente creciente en $(0, s)$, si $y > \bar{y}$, se cumple que $G(y) > G(\bar{y}) > G(s) - \epsilon$. Análogamente se obtiene la existencia de $\bar{\bar{y}} \in (-s, 0)$ tal que $G(\bar{\bar{y}}) > G(-s) - \epsilon$. Puesto que G es estrictamente decreciente en $(-s, 0)$, si $y < \bar{\bar{y}}$, $G(y) > G(\bar{\bar{y}}) > G(-s) - \epsilon$. $S = \max\{\bar{y}, -\bar{\bar{y}}\}$ cumple la tesis.

Un razonamiento análogo para H completa la demostración. \square

TEOREMA 4.2. Sean $U = (-r, r) \times (-s, s)$ y $V = \{(x, y) \in U : F(x, y) < c_m\}$. Las soluciones de (4.1) con condición inicial en V , son periódicas.

DEMOSTRACIÓN. Sean $(x_0, y_0) \in V$ y $(x, y) : I \rightarrow U$ la solución de (4.1) tal que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Entonces $0 < c = F(x_0, y_0) < c_m$.

El conjunto $F^{-1}(c)$ es compacto, ya que es cerrado (F es continua) y es acotado, ya que si $\epsilon = c_m - c$, de la Proposición anterior se deduce la existencia de

$$0 < R < r \text{ y } 0 < S < s \text{ tales que}$$

$$G(y) > c, \text{ si } |y| > S, \quad H(x) > c, \text{ si } |x| > R.$$

Por tanto, si $G(y) + H(x) = c$, $G(y), H(x) \leq c$, ya que $G(y), H(x) \geq 0$. Entonces $|x| \leq R, |y| \leq S$. De modo que

$$F^{-1}(c) \subset [-R, R] \times [-S, S].$$

Puesto que $\dot{F}(x, y) = 0$, $F^{-1}(c)$ es invariante por (4.1). Así que

$$(x(t), y(t)) \in F^{-1}(c), \text{ para todo } t \in I$$

y, como una consecuencia, $I = \mathbb{R}$.

AFIRMACIÓN 1. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $t_1 > t_0$ tal que $x(t_1) > 0$. En efecto, supóngase que $x(t) \leq 0$ para todo $t_0 \leq t < \infty$. Entonces $y'(t) = -h(x(t)) \geq 0$. De modo que $y(t)$ es creciente en $[t_0, \infty)$. Sea $y^* = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Entonces

$$g(y^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t).$$

Si $g(y^*) \neq 0$, entonces por el Teorema del valor medio para cada t suficientemente grande, existe $t < s_t < 2t$ tal que

$$|x(2t) - x(t)| = |x'(s_t)t| \rightarrow \infty, \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

que está en contradicción con ser x acotada.

Como $|y^*| \leq S$ y $g(y^*) = 0$, $y^* = 0$. Por tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ y al ser y creciente en $[t_0, \infty)$, se obtiene que $y(t) \leq 0$ en $[t_0, \infty)$. Entonces $x'(t) = g(y(t)) \leq 0$ y, por tanto, x es decreciente en $[t_0, \infty)$. Al ser acotada, existe $x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t)) = -h(x^*).$$

Como y es acotada en $[t_0, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0 = -h(x^*)$, de donde se deduce que $x^* = 0$. Así que

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} F(x(t), y(t)) = F(0, 0) = 0.$$

Esta contradicción termina la prueba.

De manera análoga se prueba

AFIRMACIÓN 2. Dado $\tau_0 \in \mathbb{R}$, existe $\tau_1 > \tau_0$ tal que $x(\tau_1) < 0$.

Aplicando repetidamente las Afirmaciones 1 y 2 se obtiene la existencia de

$$\tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3,$$

tales que $x(\tau_i) < 0$ y $x(t_j) > 0$.

Sea $\sigma_i \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 1, 2$ tal que la restricción de $x(t)$ a $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ alcanza el máximo en σ_i . Puesto que $x(t_i) > 0$, también $x(\sigma_i) > 0$. Por otra parte $0 = x'(\sigma_i) = g(y(\sigma_i))$ implica que $y(\sigma_i) = 0$. En consecuencia

$$c = F(x(\sigma_i), y(\sigma_i)) = H(x(\sigma_i)) + G(0) = H(x(\sigma_i)).$$

Así $H(x(\sigma_1)) = H(x(\sigma_2))$. Como la restricción de H a $(0, s)$ es estrictamente creciente, $x(\sigma_1) = x(\sigma_2)$. Hemos probado que $(x(\sigma_1), y(\sigma_1)) = (x(\sigma_2), y(\sigma_2))$ y, entonces, (x, y) es periódica. \square

2. El Teorema del flujo tubular

Sean $f \in \text{Lip}_{\text{loc}}(U)$ y $g \in \text{Lip}_{\text{loc}}(V)$, siendo U, V abiertos de \mathbb{R}^n . Se dice que el sistema diferencial $x' = f(x)$ es conjugado a $x' = g(x)$, si existe una aplicación biyectiva $h: U \rightarrow V$ tal que

$$h(u(t, x)) = v(t, h(x)), \quad (x \in U, t \in I_x).$$

El Teorema del flujo tubular dice que en cada entorno de un punto regular, el sistema diferencial $x' = f(x)$ es conjugado a $x' = e^1$, donde e^1 es el vector que tiene todas sus coordenadas nulas, salvo la que ocupa el primer lugar, que es 1.

2.1. Secciones transversales. Sea el sistema diferencial $x' = f(x)$ donde $f \in \mathcal{C}^1(U)$ y U es un abierto de \mathbb{R}^n . Una sección transversal a f es una función $S: D \rightarrow U$ definida y de clase 1 en un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^{n-1} tal que

$$S'(q)p^1, \dots, S'(q)p^{n-1}, f(S(q))$$

es una base de \mathbb{R}^n para toda base de \mathbb{R}^{n-1} , p^1, \dots, p^{n-1} . Si $x_0 \in S(D)$, diremos que S es transversal a f en x_0 .

PROPOSICIÓN 4.3. Sea $S: D \rightarrow U$ una función de clase 1 definida en el abierto conexo $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Son equivalentes

1. S es una sección transversal a f .
2. Para cada $q \in D$, la aplicación lineal $L_q: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$L_q(t, w) = tf(S(q)) + S'(q)w$$

es un isomorfismo.

3. Para cada $q \in D$, la aplicación $S'(q): \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva y $f(S(q)) \notin S'(q)(\mathbb{R}^{n-1})$.

DEMOSTRACIÓN. (i) implica (ii). El conjunto $S'(q)p^1, \dots, S'(q)p^{n-1}, f(S(q))$ es una base de \mathbb{R}^n . Entonces

$$\begin{aligned} L_q(t, w) &= tf(S(q)) + S'(q)w \\ &= tf(S(q)) + S'(q)\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i p^i\right) \\ &= tf(S(q)) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i S'(q)p^i = 0, \end{aligned}$$

implica que $t = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$. Así que L_q es inyectiva y, por tanto, biyectiva.

(ii) implica (iii). $L_q(0, w) = S'(q)w$. Así que $L_q(0, \cdot) = S'(q)$. Como $L_q(0, \cdot)$ es inyectiva, también lo es $S'(q)$.

Si $f(S(q)) \in S'(q)\mathbb{R}^{n-1}$, que es un subespacio $n-1$ dimensional de \mathbb{R}^n , $L_q(t, w)$ no es sobre.

(iii) implica (i). Sea $q \in D$ y p^1, \dots, p^{n-1} una base de \mathbb{R}^{n-1} . Entonces $S'(q)p^1, \dots, S'(q)p^{n-1}, f(S(q))$ es una base de \mathbb{R}^n . En efecto

$$S'(q) \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i S'(q)p^i \right) = -c_n f(S(q)),$$

implica $c_n = 0$, porque $f(S(q)) \notin S'(q)\mathbb{R}^{n-1}$. Al ser $S'(q)$ inyectiva, $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$. \square

DEFINICIÓN 4.1. Una sección transversal $S: D \rightarrow U$ se dice afín si existe $x_0 \in U$ y una aplicación lineal (necesariamente inyectiva) $L: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $S(q) = x_0 + Lq$ para todo $q \in D$.

Si $n = 2$, toda sección afín es de la forma $S(q) = x_0 + qp$ para algún vector no trivial $p \in \mathbb{R}^2$. En este caso D es un intervalo abierto de \mathbb{R} que contiene a 0. Desde luego $f(S(q)), p$ son linealmente independientes para todo $q \in D \subset \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 4.4. Si $x_0 \in U$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces f posee una sección transversal en x_0 que es afín.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar ordinario en \mathbb{R}^n . Sea H el hiperplano de \mathbb{R}^n ortogonal a $f(x_0)$. Es decir

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, f(x_0) \rangle = 0\}.$$

Entonces $\mathbb{R}^n = \langle f(x_0) \rangle \oplus H$. Nótese que

$$x = \frac{\langle f(x_0), x \rangle}{\langle f(x_0), f(x_0) \rangle} f(x_0) + y, \quad y \in H.$$

Puesto que H es un subespacio vectorial $(n-1)$ -dimensional, existe $L: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal, inyectiva y tal que $L(\mathbb{R}^{n-1}) = H$. Sea $S(q) = x_0 + Lq$ para todo

$q \in \mathbb{R}^{n-1}$. Considérese la aplicación continua

$$q \in \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \langle f(S(q)), f(x_0) \rangle \in \mathbb{R}.$$

Como $\langle f(S(0)), f(x_0) \rangle = \langle f(x_0), f(x_0) \rangle > 0$, existe un abierto conexo $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ con $0 \in D$ tal que $\langle f(S(q)), f(x_0) \rangle > 0$ y, por tanto, $f(S(q)) \notin H$ para todo $q \in D$. En definitiva, S es una sección transversal afín a f en x_0 . \square

2.2. Teorema del flujo tubular.

TEOREMA 4.5. *Sea $S: D \rightarrow U$ una sección transversal a f y sea $q_0 \in D$. Entonces existe $\eta > 0$ tal que la aplicación $h: (-\eta, \eta) \times B(q_0, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$h(t, q) = u(t, S(q))$$

es un difeomorfismo de $(-\eta, \eta) \times B(q_0, \eta)$ en el abierto $\text{Im}(h)$.

La aplicación h es una C^1 conjugación entre $x' = e^1$ restringido a $(-\eta, \eta) \times B(q_0, \eta)$ y $x' = f(x)$ restringido a $\text{Im}(h)$.

DEMOSTRACIÓN. $(0, S(q_0)) \in W = \{(t, x) : x \in U, t \in I_x\}$. Por ser W abierto, existe $r > 0$ tal que

$$(0, S(q_0)) \in (-r, r) \times N \subset W,$$

donde N es un abierto de \mathbb{R}^n . Puesto que $S^{-1}(N)$ es un abierto de $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, eligiendo $r > 0$ tan pequeño como sea necesario,

$$B(q_0, r) \subset S^{-1}(N),$$

$$S(B(q_0, r)) \subset S(S^{-1}(N)) \subset N.$$

Entonces

$$(0, S(q_0)) \in (-r, r) \times S(B(q_0, r)) \subset W.$$

En particular la aplicación

$$h: (-r, r) \times B(q_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$h(t, q) = u(t, S(q))$$

está bien definida y es de clase 1. Además

$$\frac{\partial h}{\partial q}(t, q) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, S(q))S'(q),$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, q) = f(u(t, S(q))),$$

de modo que

$$\frac{\partial h}{\partial q}(0, q_0) = S'(q_0), \quad \frac{\partial h}{\partial t}(0, q_0) = f(S(q_0)).$$

En otras palabras, $h'(0, q_0)$ es la aplicación lineal L_{q_0} y, en consecuencia, es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa h es un difeomorfismo alrededor de $(0, q_0)$.

Si $t_0, t + t_0 \in (-\eta, \eta)$, $q \in B(q_0, \eta)$, entonces

$$\begin{aligned} h(t + t_0, q) &= u(t + t_0, S(q)) = u(t, u(t_0, S(q))) \\ &= u(t, h(t_0, q)). \end{aligned}$$

Sea sistema diferencial $x' = e^1$ cuya solución es $v(t, x) = v(t, t_0, q) = (t + t_0, q)$. Así que $h(v(t, t_0, q)) = u(t, h(t_0, q))$, donde $t_0, t + t_0 \in (-\eta, \eta)$, $q \in B(q_0, \eta)$. Es decir, h es una conjugación entre los sistemas $x' = e^1$ y $x' = f(x)$ restringidos a $(-\eta, \eta) \times B(q_0, \eta)$ y $h((-\eta, \eta) \times B(q_0, \eta))$, respectivamente. \square

COROLARIO 4.6. *En las condiciones del Teorema 4.5 si $p \in \text{Im}(h)$, existe $t \in (-\eta, \eta)$ tal que $u(t, p) \in S(D)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p = h(t, q)$, donde $t \in (-\eta, \eta)$ y $q \in B(q_0, \eta)$.

$$\begin{aligned} u(-t, p) &= u(-t, u(t, S(q))) \\ &= u(-t + t, S(q)) = u(0, S(q)) = S(q). \end{aligned}$$

\square

PROPOSICIÓN 4.7. *Sean $S: D \rightarrow U$ una sección transversal a f y $x: I \rightarrow U$ una solución no singular de $x' = f(x)$. Entonces el conjunto $A = \{t \in I : x(t) \in S(D)\}$ es de puntos aislados.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase para llegar a una contradicción que $t_0 \in A$ es un punto de acumulación de A . Sean $x(t_0) = S(q_0)$ y $h: (-\eta, \eta) \times B(q_0, \eta) \rightarrow \text{Im}(h)$ el difeomorfismo dado por el Teorema del Flujo Tubular. Puesto que x es continua en t_0 , existe un entorno de t_0 tal que si t pertenece a dicho entorno, $x(t) \in \text{Im}(h)$. Al ser t_0 punto de acumulación de A , existe $t_1 \in A$, $t_1 \neq t_0$, tal que

$$|t_1 - t_0| < \eta, \quad x(t_1) \in \text{Im}(h).$$

Si $x(t_1) = S(q_1) = h(0, q_1)$ con $q_1 \in B(q_0, \eta)$, entonces $x(t + t_1) = u(t, S(q_1))$, por la unicidad de soluciones del problema de valor inicial. De aquí se deduce

$$h(0, q_0) = S(q_0) = x(t_0) = u(t_0 - t_1, S(q_1)) = h(t_0 - t_1, q_1).$$

Puesto que h es inyectiva, $t_0 = t_1$, $q_0 = q_1$. \square

PROPOSICIÓN 4.8. *Si $S: D \rightarrow U$ es una sección transversal a f y $p \in \Omega(x_0) \cap S(D)$, entonces existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$, cuando $k \rightarrow \infty$, tal que $u(t_k, x_0) \rightarrow p$, $k \rightarrow \infty$, y $u(t_k, x_0) \in S(D)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p = S(q)$ y $h: (-\eta, \eta) \times B(q, \eta) \rightarrow \text{Im}(h)$ el homeomorfismo dado por el Teorema del flujo tubular. Por la continuidad de h en $(0, q)$ y teniendo en cuenta que $p = h(0, q)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $r_k \in (-\eta, \eta)$ tal que

$$h((-r_k, r_k) \times B(q, r_k)) \subset B\left(p, \frac{1}{k}\right).$$

Como $p \in \Omega(x_0)$, existe una sucesión $\tau_j \rightarrow \infty$ tal que $u(\tau_j, x_0) \rightarrow p$, $j \rightarrow \infty$. Puesto que h es un homeomorfismo, $h((-r_k, r_k) \times B(q, r_k))$ es un entorno de p , así que para cada k , existe $\tau_{j_k} > k$ tal que

$$u(\tau_{j_k}, x_0) \in h((-r_k, r_k) \times B(q, r_k)).$$

Sea (s_{j_k}, q_{j_k}) tal que $u(\tau_{j_k}, x_0) = h(s_{j_k}, q_{j_k})$. Entonces

$$\begin{aligned} u(-s_{j_k} + \tau_{j_k}, x_0) &= u(-s_{j_k}, u(\tau_{j_k}, x_0)) = u(-s_{j_k}, h(s_{j_k}, q_{j_k})) \\ &= u(-s_{j_k}, u(s_{j_k}, S(q_{j_k}))) = S(q_{j_k}) = h(0, q_{j_k}) \\ &\in h((-r_k, r_k) \times B(q, r_k)) \subset B\left(p, \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Además $-s_{j_k} + \tau_{j_k} \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, $u(-s_{j_k} + \tau_{j_k}, x_0) \in S(D)$ y $u(-s_{j_k} + \tau_{j_k}, x_0) \rightarrow p$, $k \rightarrow \infty$. \square

3. El Teorema de Poincaré-Bendixon

En todo este apartado $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase 1 en el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

En lo que sigue fijaremos $x_0 \in U$, se supondrá que $u(t, x_0)$ está definida al menos en $[0, \infty)$ y que el cierre de

$$\{u(t, x_0) : t \in [0, \infty)\}$$

es un subconjunto compacto de U . Entonces $\Omega(x_0)$, el ω -límite de x_0 , es un conjunto no vacío, compacto, conexo e invariante por $x' = f(x)$. El objetivo es probar el siguiente resultado:

TEOREMA 4.9. *Si $\Omega(x_0)$ no contiene puntos de equilibrio, es una órbita periódica. Es decir, $\Omega(x_0) = \{u(t, x_0) : t \in \mathbb{R}\}$, donde $u(t, x_0)$ es una solución periódica.*

La prueba de este teorema necesita varios resultados previos. En primer lugar se notará que si $u(t, x_0)$ es periódica, entonces $\Omega(x_0) = \text{orb}(u(t, x_0))$ y el teorema se verifica. Así que supondremos que $u(t, x_0)$ no es periódica.

Se usará el Teorema de separación de Jordan. Sea S^1 el conjunto de números complejos unitarios, es decir, la circunferencia de \mathbb{R}^2 de centro el origen y radio 1. Sea $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, continua e inyectiva. Diremos que $C = \gamma(S^1)$ es una curva de Jordan. Así que $\gamma: S^1 \rightarrow C$ es un homeomorfismo, ya que S^1 es compacto.

TEOREMA 4.10 (De separación de Jordan). *Si C es una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 , entonces $\mathbb{R}^2 \setminus C$ es la unión de dos abiertos no vacíos, disjuntos y conexos, V y W tales que $\text{Fr}V = \text{Fr}W = C$.*

Aunque la prueba del Teorema de Poincaré-Bendixon no lo necesita, el Teorema 4.10 también dice que uno de los abiertos es acotado (llamado región interior), mientras que el otro no lo es (región exterior a C). También dice que la región interior es homeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Supondremos de aquí en adelante que $S: D \rightarrow U$ es una sección transversal afín a f . El orden en \mathbb{R} define un orden total en $S(D)$ de la siguiente forma: Dados $p_0 = S(q_0)$, $p_1 = S(q_1)$, se define $p_0 <_S p_1$, si $q_0 < q_1$.

Llamaremos $x(t)$ a $u(t, x_0)$.

LEMA 4.11. Sean $0 \leq t_0 < t_1$ tales que $x(t_i) \in S(D)$, $i = 0, 1$. Si $x(t_0) <_S x(t_1)$ y $x(t) \notin S(D)$ siempre que $t \in (t_0, t_1)$, entonces $x(t_1) <_S x(t)$ si $t > t_1$ y $x(t) \in S(D)$.

COMENTARIO 4.12. Si en el Lema anterior se reemplaza $x(t_0) <_S x(t_1)$ por $x(t_1) <_S x(t_0)$, entonces $x(t) <_S x(t_1)$ si $t > t_1$ y $x(t) \in S(D)$.

LEMA 4.13. $\Omega(x_0) \cap S(D)$ tiene a lo sumo un punto.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que hay dos puntos $p_0 = S(q_0) <_S p_1 = S(q_1)$ en $\Omega(x_0) \cap S(D)$.

CASO 1. $x(t) \notin [p_0, p_1]$ para todo $t \in I_x$. Por definición de $\Omega(x_0)$ existen $t_0 < t_1$ tales que

$$x(t_0) <_S p_0 <_S p_1 < x(t_1).$$

El $\{t \in (t_0, t_1) : x(t) \in S(D)\}$ tiene un número finito de puntos, ya que si fueran infinitos tendría un punto de acumulación, en contra de la Proposición 4.7. Así se puede suponer que $x(t) \notin S(D)$ para todo $t \in (t_0, t_1)$. Entonces por el Lema 4.11

$$x(t_1) <_S x(t), \quad \text{si } t > t_1, x(t) \in S(D).$$

En consecuencia $p_0 \notin \Omega(x_0)$.

CASO 2. $x(t_0) \in [p_0, p_1]$ para algún $t_0 \in I_x$. Entonces existe $t_1 > t_0$ tal que $x(t_1) \in S(D)$ y $x(t) \notin S(D)$ siempre que $t \in (t_0, t_1)$. Si $x(t_0) <_S x(t_1)$ (respectivamente $x(t_1) <_S x(t_0)$), entonces $x(t_1) <_S x(t)$ (respectivamente $x(t) <_S x(t_1)$), siempre que $t > t_1$ y $x(t) \in S(D)$. De aquí resulta que $p_0 \notin \Omega(x_0)$ (respectivamente $p_1 \notin \Omega(x_0)$). Esta contradicción termina la prueba. \square

LEMA 4.14. Si $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow U$ es una solución periódica no trivial con $\gamma(\mathbb{R}) \subset \Omega(x_0)$, entonces $\gamma(\mathbb{R}) = \Omega(x_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $\gamma(\mathbb{R}) \neq \Omega(x_0)$. Puesto que $\Omega(x_0)$ es conexo y $\gamma(\mathbb{R})$ no vacío y cerrado, $\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})$ no es cerrado. Así que tiene un punto de acumulación y_0 perteneciente a $\gamma(\mathbb{R})$. Puesto que y_0 es punto regular, sea $S: D \rightarrow U$ una sección transversal a f en y_0 afín y sea $h: (-\eta, \eta) \times B(0, \eta) \rightarrow \text{Im}(h)$ el homeomorfismo dado por el Teorema del Flujo Tubular. Puesto que $\text{Im}(h)$ es un entorno de y_0 , existe $z_0 \in (\Omega(x_0) \setminus \gamma(\mathbb{R})) \cap \text{Im}(h)$ y también existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(t_0, z_0) \in S(D)$. Como $\Omega(x_0)$ es invariante, se verifica que $u(t_0, z_0) \in \Omega(x_0)$. Puesto que $\Omega(x_0) \cap S(D)$ tiene a lo sumo un punto, $y_0 = u(t_0, z_0)$, ya que $y_0 \in \gamma(\mathbb{R}) \subset \Omega(x_0)$, $y_0 \in S(D)$. Finalmente $z_0 = u(-t_0, u(t_0, z_0)) = u(-t_0, y_0) \in \gamma(\mathbb{R})$. Esta contradicción termina la prueba. \square

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema principal.

DEMOSTRACIÓN. (Teorema de Poincaré-Bendixon) Sea $p \in \Omega(x_0)$. Puesto que este conjunto es compacto e invariante, $I_p = \mathbb{R}$ y $u(t, p) \in \Omega(x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego $\Omega(p) \subset \Omega(x_0)$. Fijemos $y_0 \in \Omega(p)$, que es regular. Sea $S: D \rightarrow U$ una sección transversal afín a f en y_0 . Existe una sucesión $t_k \rightarrow \infty$ tal que $u(t_k, p) \rightarrow y_0$ y $u(t_k, p) \in S(D)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $u(t_k, p) \in \Omega(x_0)$ y $\Omega(x_0) \cap S(D)$ tiene a lo sumo un punto, $u(t_k, p) = y_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\gamma(t) := u(t, p)$ es periódica. Además es una solución no trivial, porque y_0 es regular. El resultado sigue del Lema anterior. \square

COMENTARIO 4.15. En la prueba anterior se ha probado que si $\Omega(x_0)$ contiene a un punto p tal que $\Omega(p)$ contiene a un punto regular y_0 , entonces $\Omega(x_0)$ es periódica.

COMENTARIO 4.16. Sea $x_0 \in U$ tal que $u(t, x_0)$ está definida en $(-\infty, 0]$ y el cierre de $\{u(t, x_0) : t \in (-\infty, 0]\}$ es un compacto incluido en U . Se verifica que si el α -límite, $\alpha(x_0)$, no contiene puntos de equilibrio, entonces $\alpha(x_0)$ es una órbita periódica. En efecto, haciendo el cambio de variables $y(t) = x(-t)$, observamos que y es solución de $x' = -f(x)$ si y solo si x es solución de $x' = f(x)$. Además $y([0, \infty))$ tiene cierre compacto incluido en U y $\Omega_{-f}(x_0) = \alpha_f(x_0)$.

COROLARIO 4.17. Si $\Omega(x_0) \cap f^{-1}(0)$ es finito y no vacío, entonces para cada $p \in \Omega(x_0)$, $u(t, p)$ tiene límite cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

DEMOSTRACIÓN. Si $p \in \Omega(x_0)$ es singular, entonces obviamente existe el límite. Sea $p \in \Omega(x_0)$ regular. Si $\Omega(p)$ contiene a un punto regular, entonces del comentario anterior sigue que $\Omega(x_0)$ es periódica y, entonces $\Omega(x_0) \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, en contra de la hipótesis.

Así que $\Omega(p)$ está formado por un número finito de puntos singulares y al ser conexo, es unitario. En consecuencia existe $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, p)$.

Para probar la existencia del límite cuando $t \rightarrow -\infty$, nótese que $\alpha(x_0) \cap S(D)$ tiene a lo sumo un punto y que si $\gamma(\mathbb{R})$ es una órbita periódica incluida en $\alpha(x_0)$, entonces $\gamma(\mathbb{R}) = \alpha(x_0)$. Ahora sea $p \in \Omega(x_0)$. Entonces $\alpha(p) \subset \Omega(x_0)$. Si existe $y_0 \in \alpha(p)$ regular, entonces igual que en la prueba del Teorema de Poincaré-Bendixon, se concluye que $\Omega(x_0)$ es una órbita periódica. Por tanto, $\Omega(x_0) \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, en contra de la hipótesis.

Así que $\alpha(p)$ está formado por un número finito de puntos singulares y al ser conexo, es unitario. En consecuencia existe $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, p)$. \square

Mediante el cambio de variables $y(t) = x(-t)$ se prueba el

COROLARIO 4.18. Si $\alpha(x_0) \cap f^{-1}(0)$ es finito y no vacío, entonces para cada $p \in \alpha(x_0)$, $u(t, p)$ tiene límite cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

El Teorema de Poincaré-Bendixon nos permite probar que en la componente acotada de una órbita periódica hay un punto de equilibrio. Por tanto si un sistema diferencial no tiene puntos de equilibrio, no tiene soluciones periódicas.

TEOREMA 4.19. *Si $C = \gamma(\mathbb{R})$ es una órbita periódica, entonces existe un punto de equilibrio en V , donde V es la componente conexa acotada dada por el Teorema de Separación de Jordan.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbb{R}^2 \setminus C = V \cap W$ la descomposición dada por el Teorema de Separación de Jordan. Supóngase que V no tiene puntos de equilibrio.

En el conjunto de órbitas periódicas incluidas en V , se considera el orden parcial definido por

$$\gamma_1(\mathbb{R}) \leq \gamma_2(\mathbb{R}), \quad \text{si} \quad \bar{V}_1 \supset \bar{V}_2.$$

Probaremos que toda familia totalmente acotada tiene una cota superior. En efecto, sea $\{\gamma_\alpha(\mathbb{R})\}_{\alpha \in A}$ totalmente ordenada. El conjunto $\cap_{\alpha \in A} \bar{V}_\alpha$ es no vacío, por ser la intersección de una familia de compactos con la propiedad de la intersección finita. Sea $p \in \cap_{\alpha \in A} \bar{V}_\alpha$. Entonces $\Omega(p) \subset \cap_{\alpha \in A} \bar{V}_\alpha$, porque este conjunto es invariante al ser intersección de conjuntos invariantes. Por el Teorema de Poincaré-Bendixon, $\Omega(p)$ es una órbita periódica cota superior de la familia totalmente ordenada. El Lema de Zorn asegura que existe una órbita periódica maximal que llamaremos $\gamma_M(\mathbb{R})$. Sea p perteneciente a la componente acotada respecto de $\gamma_M(\mathbb{R})$. Entonces por el Teorema de Poincaré-Bendixon

$$\alpha(p) = \Omega(p) = \gamma_M(\mathbb{R}).$$

Sean $y_0 \in \gamma_M(\mathbb{R})$ y $S: D \rightarrow U$ una sección transversal por y_0 . Existe una sucesión $\{t_k\} \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ tal que $u(t_k, p) \in S(D)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k, p) \rightarrow y_0$. Si, por ejemplo $u(t_1, p) <_S y_0$, entonces para todo $t < t_1$ tal que $u(t, p) \in S(D)$ se verifica

$$u(t, p) <_S u(t_1, p),$$

de modo que $y_0 \notin \alpha(p)$. □

4. Ejercicios

1. Sea el SD

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(-c + dx), \end{aligned}$$

en el primer cuadrante del plano, siendo a, b, c, d constantes estrictamente positivas. Mediante el cambio de variables $p = \ln x + \ln\left(\frac{d}{c}\right)$, $q = \ln y + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, transfórmelo en uno de tipo Halmitoniano. Demuestre que toda solución maximal positiva es periódica.

2. Estudie las soluciones de la ecuación diferencial escalar de segundo orden $x'' + a \sin^5 x = 0$, donde $a > 0$.
3. Sea la ecuación diferencial escalar de segundo orden $x'' + g(x, x')x' + x = 0$, donde $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase 1, $g(0, 0) < 0$ y $g(x, y) > 0$, si $x^2 + y^2 \geq R > 0$. Pruebe que la ED tiene una solución periódica.

4. Demuestre que el sistema diferencial

$$\begin{aligned}x' &= x - y - x \left(x^2 + \frac{3}{2}y^2 \right) \\ y' &= x + y - y \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right),\end{aligned}$$

no tiene soluciones periódicas.