PERTEMUAN 05-06
INTERPOLASI

ADHI PRAHARA, MURINTO

Teknik Informatika. Fakultas Teknologi Industri

Universitas Ahmad Dahlan

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu:

- Menjelaskan tentang konsep interpolasi
- Jenis-jenis interpolasi (Nearest Neighbor, Linear, Cosine)
- Kurva polynomial dan Interpolasi Cubic
- Aplikasi interpolasi dan kurva

INTERPOLASI

- Nama lain untuk ***interpolasi*** adalah. ***tweening.*** Melakukan interpolasi berarti menyisipkan di antara dua bagian yang berbeda atau memperkirakan nilai dari suatu fungsi antara dua nilai yang telah diketahui. Pada komputer grafik, interpolasi digunakan untuk menggabungkan beberapa efek yang ingin dilakukan pada suatu obyek.
- Ada beragam teknik interpolasi, salah satu di antaranya adalah interpolasi linear.
- Interpolasi digunakan untuk memberikan nilai sela diantara dua titik
- Nilai sela yang diberikan tergantung dari fungsi interpolasi
- Macam-macam interpolasi diantaranya:
    - Interpolasi Nearest Neighbor
    - Interpolasi Linear
    - Interpolasi Bilinear
    - Interpolasi Cosine
    - Interpolasi Cubic
    - Interpolasi Bicubic
    - dsb

INTERPOLASI NEAREST NEIGHBOR

- Menggunakanpengulangan data terdekatuntukinterpolasi
- Bila terdapatduatitik yang akandiinterpolasiyaitu:

$$(x_0, y_0) \text{dan } (x_1, y_1)$$

- Makatitiksela(x_i, y_i) dariduatitiktersebutadalahpengulangan data yang terdekatdengantitikselatersebut

INTERPOLASI NEAREST NEIGHBOR

Hitung nilaiinterpolasititik (1,1) sampai (11,5) denganjumlahtitikselan n = 5

Jawab:

- Bila $n = 5$maka jarakkenaikan$x$ di setiap titikselaadalah$d = \frac{\Delta x}{5} = \frac{10}{5} = 2$
- Sehinggakenaikannilai$x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$
- Untuk $x_0 = 1$, maka $y_0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$
- Untuk $x_1 = 3$,
- dicaridulu mana jarak yang paling dekatke$x_1$darikeduaujungtitik$x_0$danx_5
- $\Delta x_{10} = x_1 - x_0 = 3 - 1 = 2$
- $\Delta x_{51} = x_5 - x_1 = 11 - 3 = 8$
- karenajarakterdekatke$x_0$adalah$x_1$maka$y_1 = 1 \Rightarrow$koordinattitik$(3, 1)$

INTERPOLASI NEAREST NEIGHBOR

- Untuk nilai$x$ yang lain terapkanaturan yang sama:
- Untuk $x_2 = 5$,
- Karena$x_2$lebihdekatkex_0 maka $y_2 = 1 \Rightarrow$koordinattitik$(5, 1)$
- Untuk $x_3 = 7$,
- Karena$x_3$lebihdekatke$x_5$maka$y_3 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 5)$
- Untuk $x_4 = 9$,
- Karena$x_4$lebihdekatkex_5 maka $y_4 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 5)$
- $x_5 = 11$ maka $y_5 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI LINEAR

- Menggunakan fungsi linear untukmelakukaninterpolasi
- Bilaterdapatduatitik yang akandiinterpolasiyaitu:

$$(x_0, y_0)\text{dan } (x_1, y_1)$$

- Makatitiksela(x_i, y_i) dariduatitiktersebut:

$$\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_i = y_0 + (x_i - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

INTERPOLASI LINEAR

- Bila jarak(x_0, y_0) sampai (x_1, y_1) dimisalkan 1 (dinormalisasi)
- Diketahuijarakawal(x_0, y_0) sampai titiksela(x_i, y_i) adalah u maka:

$$y_i = y_0 \cdot (1 - u) + y_1 \cdot u$$

- Dimana$u = \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0}$

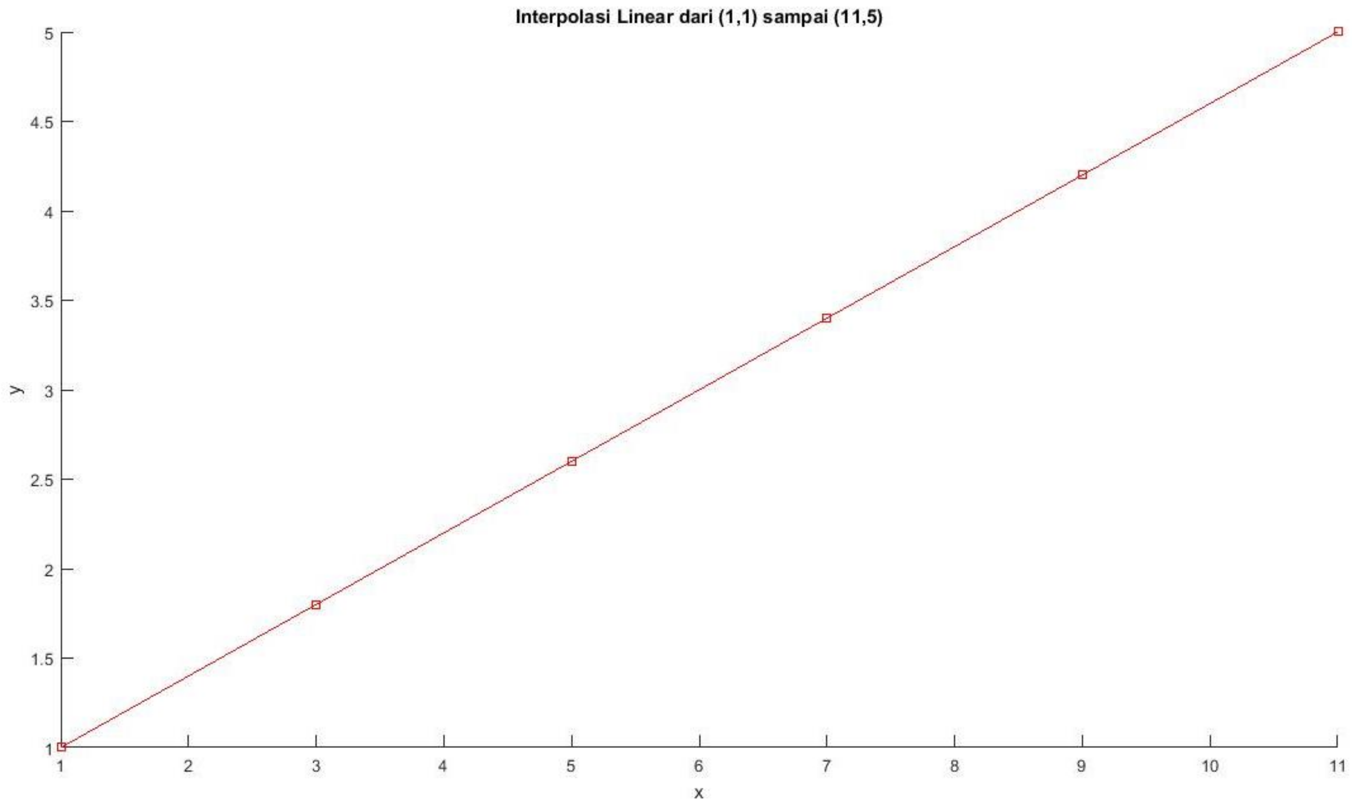
INTERPOLASI LINEAR

Hitung nilaiinterpolasititik(1,1) sampai(11,5)denganjumlahtitik$n$ = 5

Jawab:

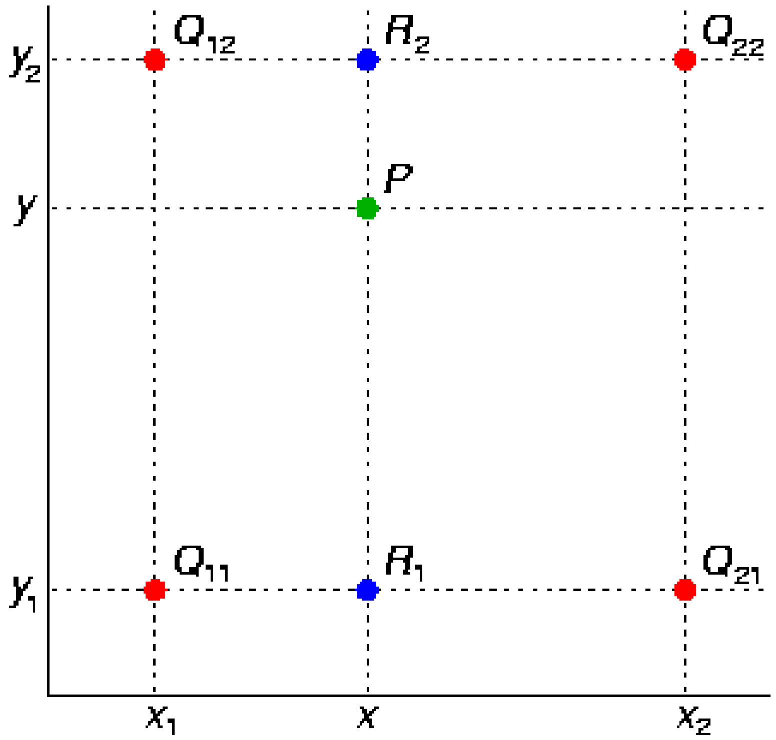
- Bila$n = 5$makajaraksetiaptitikselau $= \frac{1}{5}$ sehingga kenaikan$u = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$
- Bila $n = 5$makajaraksetiaptitikselaadalah$d = \frac{x_1 - x_0}{5} = \frac{11-1}{5} = \frac{10}{5} = 2$sehingga kenaikan $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$
- Menggunakanrumusinterpolasi linear $y_i = y_0 \cdot (1 - u) + y_1 \cdot u$makatitikseladapatdihitung:
- Untuk $x_0 = 1$, maka$y_0 = 1 \cdot (1 - 0) + 5 \cdot 0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$
- Untuk $x_1 = 3$, maka$y_1 = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) + 5 \cdot \frac{1}{5} = 1\frac{4}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(3, 1.8)$
- Untuk $x_2 = 5$, maka$y_2 = 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) + 5 \cdot \frac{2}{5} = 2\frac{3}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(5, 2.6)$
- Untuk $x_3 = 7$, maka$y_3 = 1 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) + 5 \cdot \frac{3}{5} = 3\frac{2}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 3.4)$
- Untuk $x_4 = 9$, maka$y_4 = 1 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + 5 \cdot \frac{4}{5} = 4\frac{1}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 4.2)$
- Untuk $x_5 = 11$, maka$y_5 = 1 \cdot (1 - 1) + 5 \cdot 1 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI LINEAR



INTERPOLASI BILINEAR

- Merupakan interpolasi linear pada data 2D
- Dilakukan dengan cara interpolasi linear ke arah X kemudian interpolasi linear ke arah Y
- Terdapat dua titik merah kemudian diinterpolasi linear terhadap X menghasilkan dua titik biru
- Dua titik biru diinterpolasi linear terhadap Y menghasilkan titik hijau sebagai hasil interpolasi bilinear



INTERPOLASI COSINE

- Menggunakan fungsi cosine untukmelakukaninterpolasi
- Bilaterdapatduatitik yang akandiinterpolasiyaitu:

$$(x_0, y_0)\text{dan } (x_1, y_1)$$

- Bilajaraktersebutdinormalisasimenjadi 1
- Dan jaraktitiksela(x_i, y_i) dengantitikawaladalah$u$maka:

$$y_i = y_0 \cdot \left(1 - ((1 - \cos(u\pi))/2)\right) + y_1 \cdot ((1 - \cos(u\pi))/2)$$

- Dimana$u = \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0}$

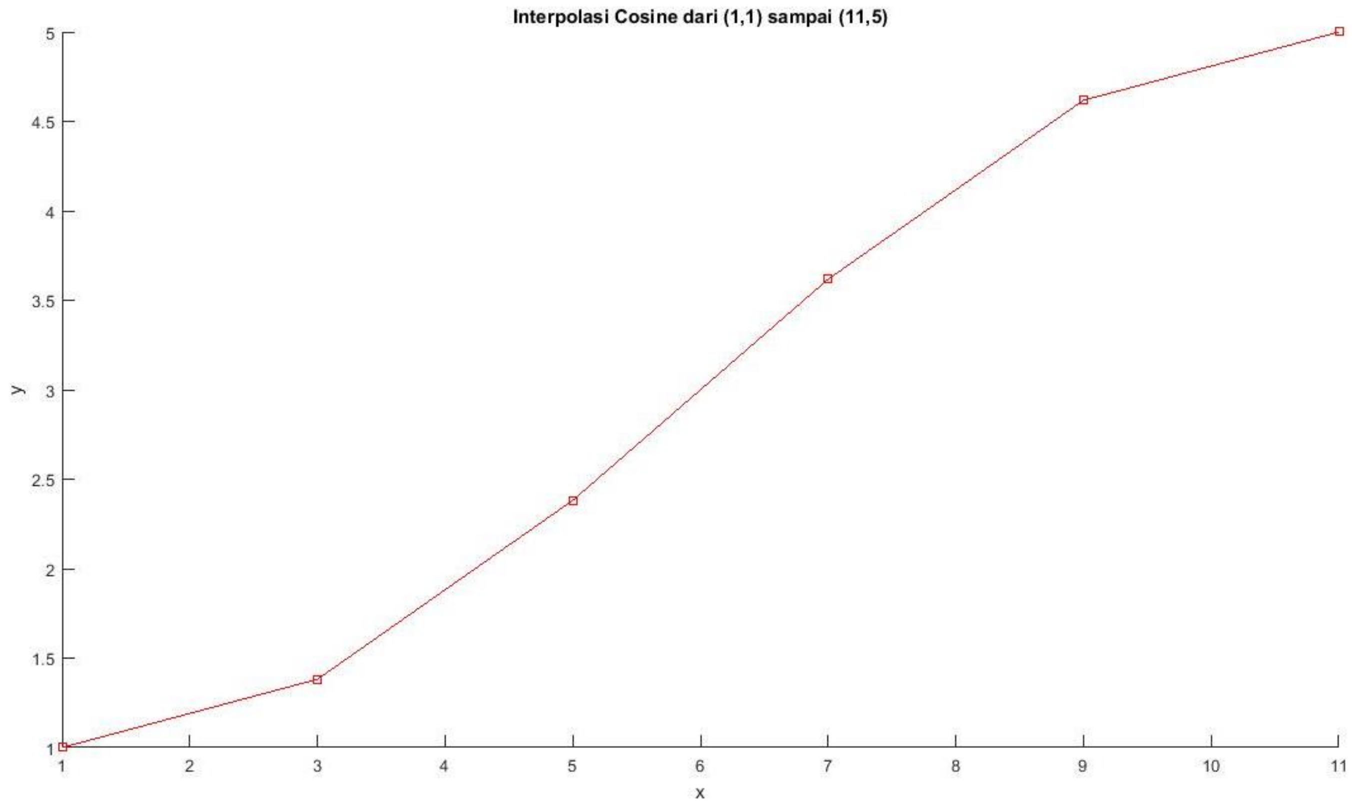
INTERPOLASI COSINE

Hitung nilaiinterpolasititik (1,1) sampai (11,5) denganjumlahtitik$n$ = 5

Jawab:

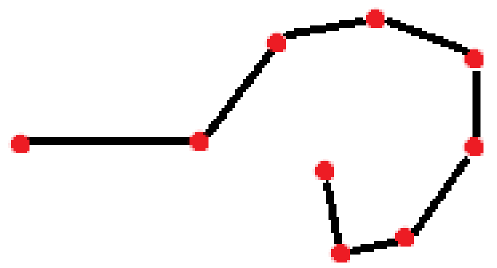
- Bila $n = 5$makajaraksetiaptitikselа$u = \frac{1}{5}$ sehingga kenaikan$u = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$
- Bila $n = 5$makajaraksetiaptitikselaadalah$d = \frac{x_1 - x_0}{5} = \frac{11-1}{5} = \frac{10}{5} = 2$sehingga kenaikan $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$
- Menggunakan rumusinterpolasicosine $y_i = y_0 \cdot \left(1 - ((1 - \cos(u\pi))/2)\right) + y_1 \cdot ((1 - \cos(u\pi))/2)$
- Makatitikseladapatdihitung:
- Untuk $x_0 = 1$, maka$y_0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$
- Untuk $x_1 = 3$, maka$y_1 = 1{,}382 \Rightarrow$ koordinat titik $(3, 1.382)$
- Untuk $x_2 = 5$, maka$y_2 = 2{,}382 \Rightarrow$ koordinat titik $(5, 2.382)$
- Untuk $x_3 = 7$, maka$y_3 = 3{,}618 \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 3.618)$
- Untuk $x_4 = 9$, maka$y_4 = 4{,}618 \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 4.618)$
- Untuk $x_5 = 11$, maka$y_5 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI COSINE



KONSEP KURVA

- Dapat dimodelkan dengan :
- Polylines
  - Rentetan titik yang terkoneksi oleh garis lurus
  - Tidak terlalu halus bentuk kurvanya
  - Semua kurva akan dikonversi ke bentuk polyline
- Kurva
  - Menggunakan fungsi
  - Bentuknya halus / smooth
  - Cukup sulit dalam pemodelannya



KONSEP KURVA

Kurva : Rentetan titik 1D yang berkelanjutan pada bidang 2D atau 3D

Kurva : Pemetaan sebuah interval pada bidang

Atribut Kurva : warna, ketebalan, pola, bentuk

Representasi kurva :

- Eksplisit
- Implisit
- Parametrik

REPRESENTASI EKSPLISIT

- Dalambidangx, y
- Bila$x$ variable bebasmaka$y = f(x)$atau kebalikannya$x = g(y)$
- Padabidang3D
- Bila$x$ variable bebasmaka $y = f(x)$ dan $z = g(x)$
- Padapermukaan2D
- Dibutuhkan2 variable bebas$z = f(x, y)$
- Contoh:
- Garis lurus : $y = mx + b$
- Lingkaran : $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dan $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$untuk$0 \leq |x| \leq r$

REPRESENTASI IMPLISIT

Dalam bidangx, y,representasiimplisitnya

- $f(x, y) = 0$

Padabidang 3D, deskripsipermukaanya

- $f(x, y, z) = 0$

Contoh

- Garislurus : $ax + by + c = 0$
- Lingkaran : $x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- Bola : $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

REPRESENTASI PARAMETRIK

Setiap variable titikpadakurvadinyatakandengan variable bebas (parameter)

Dalambidang 3D

- $x = x(u)$
- $\mathrm{y} = y(u)$
- $z = z(u)$

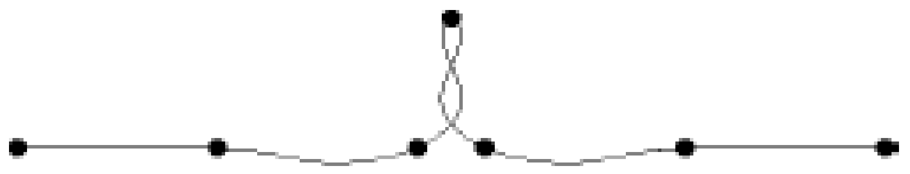
Padapermukaanmembutuhkan 2 parameter

- $x = x(u, v)$
- $\mathrm{y} = y(u, v)$
- $z = z(u, v)$

INTERPOLATION & APPROXIMATION

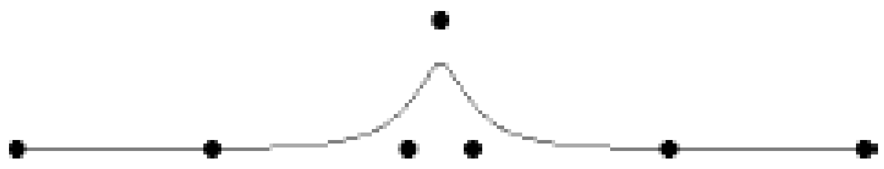
Interpolation :

- Garis akan melalui semua titik
- Tidak stabil



Approximation:

- Garis tidak selalu melalui semua titik
- Lebih stabil



KURVA POLINOMIAL

- Kurva polynomial denganderajat n didefinisikan :

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

- Derajat 2 = kuadrat,
- Derajat 3 = kubik,
- Derajat 4 = quadric,
- dst

KURVA POLINOMIAL

- Mendesain obyekdiperlukantitik-titik yang mewakilibentukobyek
- Kurvaakandibentukdarititik-titiktersebut (curve fitting)
- Misalnyadengan polynomial kubik yang bentukparametriknya :

$$x = a_{x0} + a_{x1}u + a_{x2}u^2 + a_{x3}u^3$$
$$\mathrm{y} = a_{y0} + a_{y1}u + a_{y2}u^2 + a_{y3}u^3$$

- Dimana parameter $u = 0 \ldots 1$
- Kurvakontinu yang dibentukdaripotongankurva polynomial disebutkurva spline

INTERPOLASI KUBIK

- Menggunakan fungsipangkattiga / kubikuntukmelakukaninterpolasi
- Interpolasikubikmemerlukan 2 titiktambahan di ujung 2 titikutamauntukinterpolasi
- Bilaterdapat 4 titik yang akandiinterpolasiyaitu:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\text{dan } (x_3, y_3)$$

- Bilajaraktersebutdinormalisasimenjadi 1
- Dan jaraktitikawal(x_0, y_0) sampaititiksela(x_i, y_i) adalah u
- Dari duatitiktersebutmakapersamaannya :

$$y_i = au^3 + bu^2 + cu + d$$

- Dimana :
- $a = y_3 - y_2 - y_0 + y_1$
- $b = 2y_0 - 2y_1 - y_3 + y_2$
- $c = y_2 - y_0$
- $d = y_1$

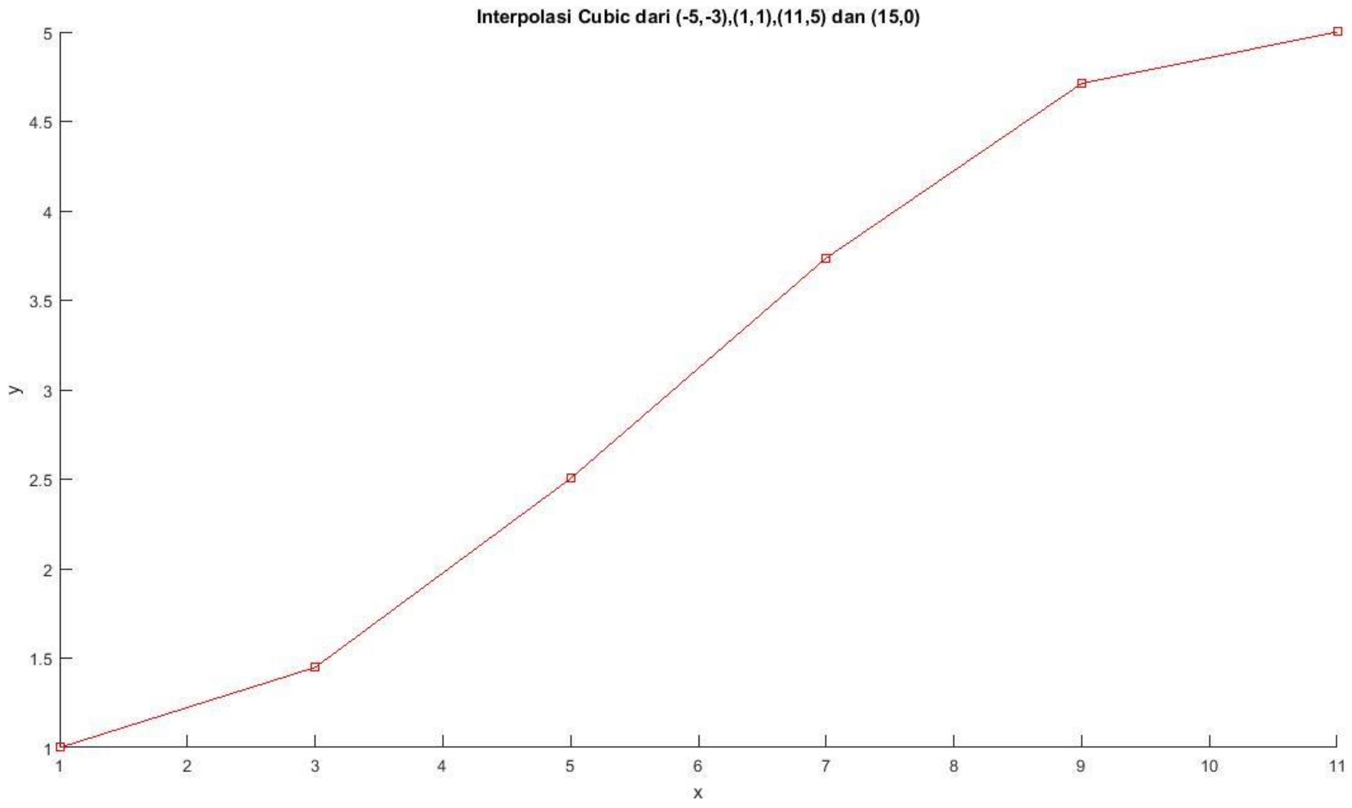
INTERPOLASI KUBIK

Hitung nilaiinterpolasititik (-5,5), **(1,1), (11,5),** dan (15,0) denganjumlahtitik$n$ = 5

Jawab:

- Bila$n = 5$makajaraksetiaptitikselau $= \frac{1}{5}$ sehingga kenaikan$u = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$
- Bila $n = 5$makajaraksetiaptitikselaadalah$d = \frac{x_1 - x_0}{5} = \frac{11-1}{5} = \frac{10}{5} = 2$
- Sehinggakenaikan $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$
- Menggunakan rumusinterpolasicubic $y_i = au^3 + bu^2 + cu + d$
- Makatitikseladapatdihitung:
- Untuk $x_0 = 1$, maka$y_0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$
- Untuk $x_1 = 3$, maka$y_1 = 1.448 \Rightarrow$ koordinat titik $(3, 1.448)$
- Untuk $x_2 = 5$, maka$y_2 = 2{,}504 \Rightarrow$ koordinat titik $(5, 2.504)$
- Untuk $x_3 = 7$, maka$y_3 = 3{,}736 \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 3.736)$
- Untuk $x_4 = 9$, maka$y_4 = 4{,}712 \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 4.712)$
- Untuk $x_5 = 11$, maka$y_5 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI KUBIK



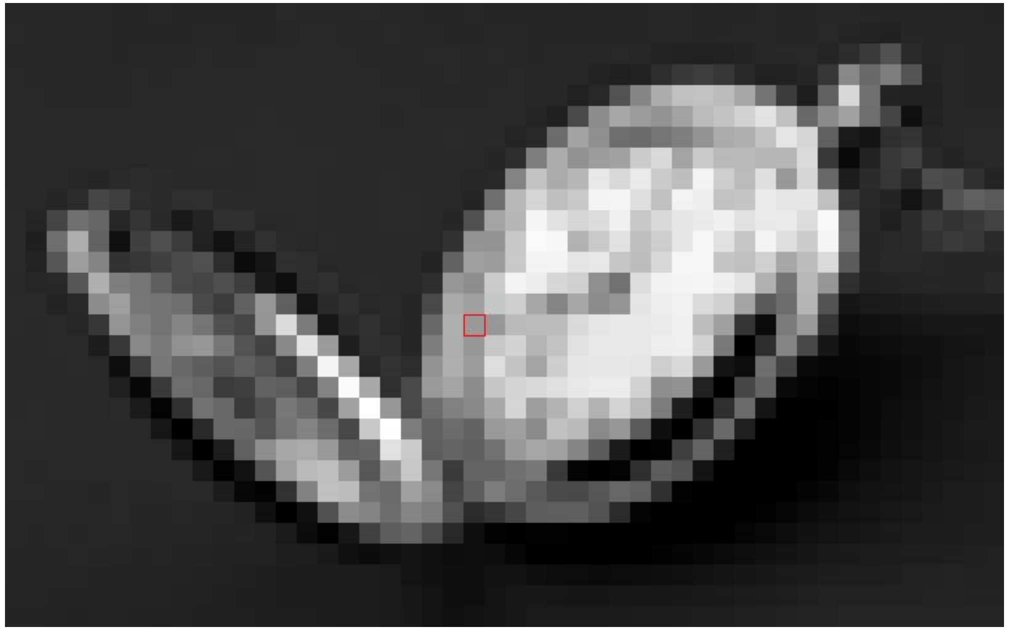
PENERAPAN INTERPOLASI

- Dalam bidang pengolahan citra digunakan dalam perubahan ukuran citra dan zooming citra
- Misalnya ada gambar :

- Akan di zoom 16x menggunakan interpolasi

PENERAPAN INTERPOLASI

Nearest Neighbor



Linear

PENERAPAN INTERPOLASI

Bilinear

Bicubic