# Bspline/NURBS and Subdivision Surface

Pertemuan 12-13

# Today

- More about Bspline
- NURBS
- Subdivision Surface

# B-Spline : from the last lecture

suatu Bspline orde k (polinomial derajat k-1) adalah kurva parametrik yang terdiri dari kombinasi linier basis B-splines $B_{i,n}$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{m} P_i B_{i,k}(t)$$

**$P_i$ (*$i=0,\ldots,m$*)** adalah titik kontorl

**Knots:** $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_{k+m}$ - knot membagi domain kurva B-spline kedalam suatu kumpulan bentangan knot$[t_i, t_{i+1})$

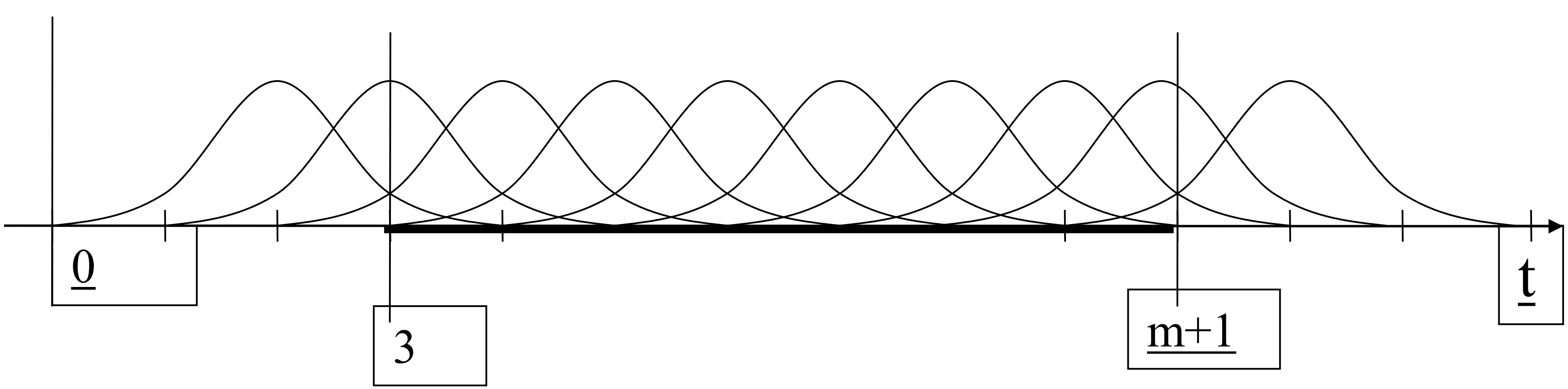
B-splines dapat didefinisikan sebagai:

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, \ \mathrm{t_i} \le \mathrm{t} < \mathrm{t_{i+1}} \\ 0, \ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i+1,k-1}(t)$$

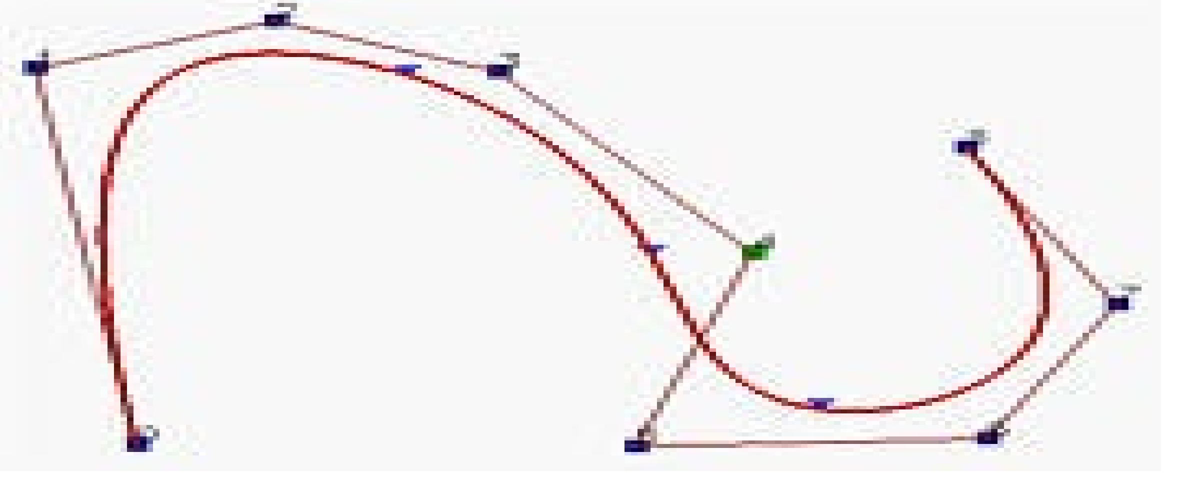
# Domain dari Fungsi

- Order $k$, Degree $k$-1 *(fungsi basis adalah polynomials degree k-1)*
- Titik Kontrol $\boldsymbol{P_i}$ **(***i=0,…,m***)**
- Knots : $t_j$, ($j=0,\ldots, n$)
- Rule penting : n – m = k
- Domain dari fungsi $t_{k-1} \leqq t \leqq t_{m+1}$
  - k = 4, m = 9, domain, $t_3 \leqq t \leqq t_{10}$



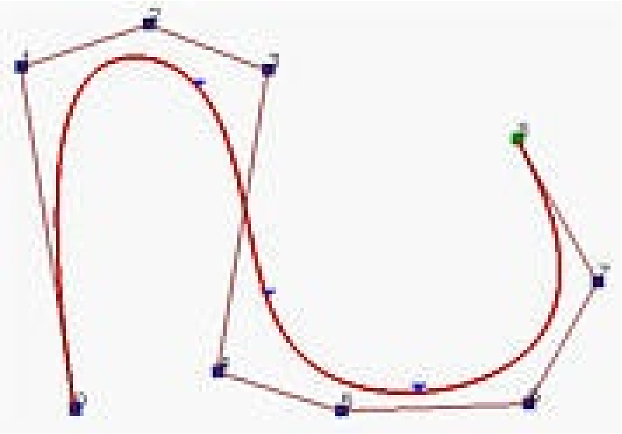
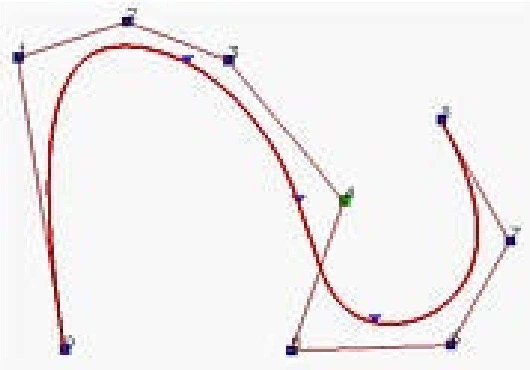
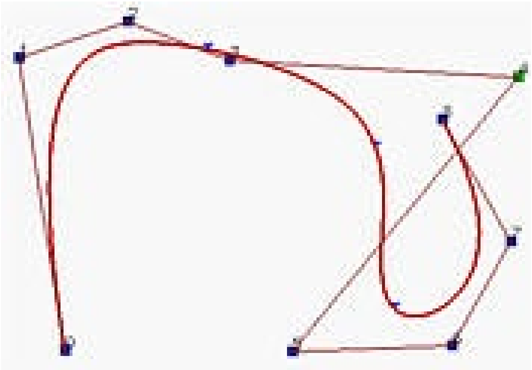
# Clamped Bsplines

- Nilai knot (simpul) pertama dan terakhir diulang dengan multiplisitas yang sama dengan urutannya (degree + 1)
- Titik akhir melewati titik control
- Untuk bspline kubik, banyaknya knot pertama / terakhir harus 4 (diulang empat kali)



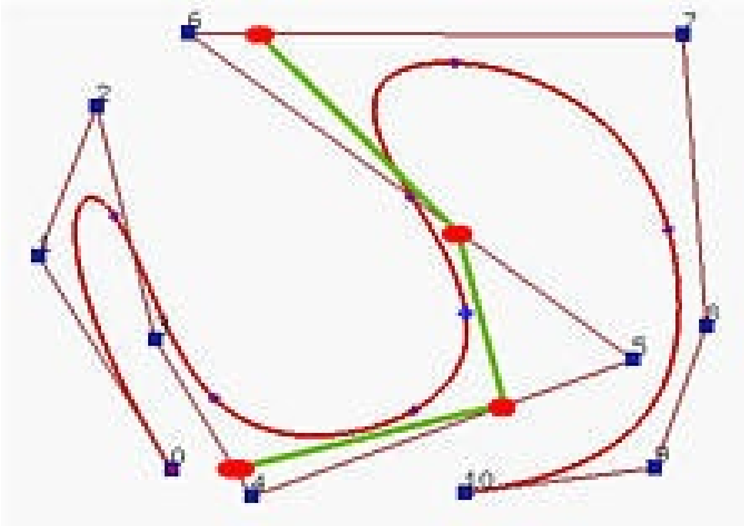
# Kontroling shape dari B-splines

- Memindahkan titik kontrol adalah cara paling jelas untuk mengontrol kurva bspline
- Mengubah posisi titik kontrol Pi hanya mempengaruhi interval [ti, ti+k), di mana k adalah orde kurva B-spline
- Mengedit bentuk melalui vektor simpul tidak terlalu intuitif

# Knot insertion

- Jika ingin meningkatkan resolusi kurva saat mengedit kurva
- Kita bisa melakukan ini dengan Penyisipan simpul (knot) baru dapat ditambahkan tanpa mengubah bentuk kurva
- Karena aturan dasarnya n-m = k (n+1: jumlah kntos, m+1 : jumlah titik kendali, k : orde) titik kendali juga bertambah



# Knot insertion

- Jika knot baru t disisipkan ke dalam span $[t_j, t_{j+1})$,

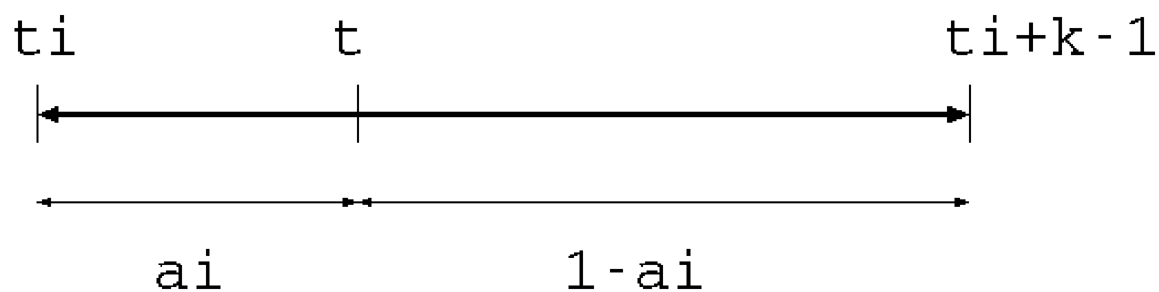
titik kontorl baru dapat dihitung dengan persamaan:

$$\mathbf{Q_i} = (1 - a_i)\mathbf{P_{i-1}} + a_i\mathbf{P_i}$$

ketika **Qi** adalah titik control baru dan $a_i$ dihitung melalui:

$$a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \quad \text{for } j\text{-}k + 2 \leq i \leq j$$

**P**$_{j-k+1}$, **P**$_{j-k+2}$, ..., **P**$_{j-1}$, **P**$_j$ digantikan dengan **P**$_{j-k+1}$, **Q**$_{j-k+2}$, ..., **Q**$_{j-1}$, **O**$_i$ ,**P**$_i$.



# Contoh

- Suatu bspline curve derajat 3 (k=4) mempunyai knot sbg:
- t=0.5 inserted

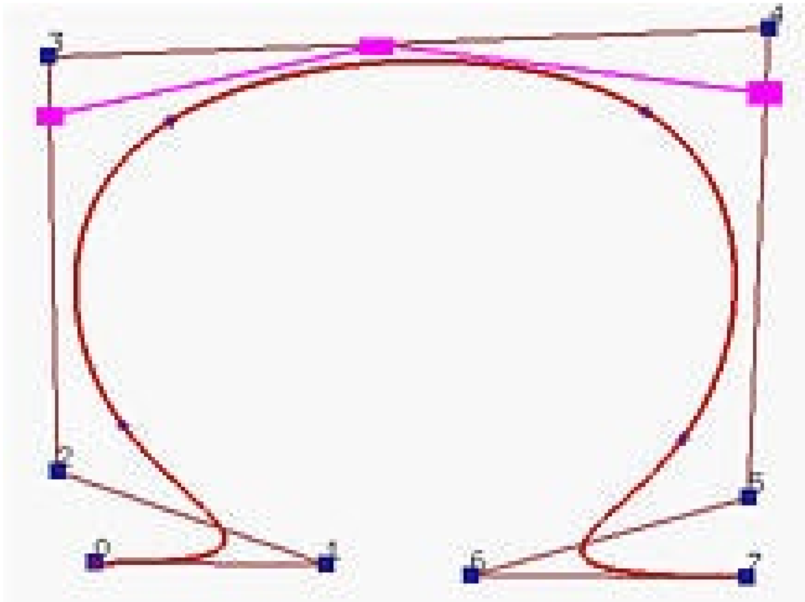
| $t_0$ to $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ | $t_7$ | $t_8$ to $t_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |

| $t_0$ to $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ | $t_7$ | $t_8$ | $t_9$ to $t_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.4 | **0.5** | 0.6 | 0.8 | 1 |

$$a_5 = \frac{t - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{0.5 - 0.4}{1 - 0.4} = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{t - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{0.5 - 0.2}{0.8 - 0.2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{t - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{0.5 - 0}{0.6 - 0} = \frac{5}{6}$$




$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_5 &= \left(1 - \frac{1}{6}\mathbf{P}_4\right) + \frac{1}{6}\mathbf{P}_5 \\ \mathbf{Q}_4 &= \left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{P}_3\right) + \frac{1}{2}\mathbf{P}_4 \\ \mathbf{Q}_3 &= \left(1 - \frac{5}{6}\mathbf{P}_2\right) + \frac{5}{6}\mathbf{P}_3 \end{aligned}$$

# NURBS (Non-uniform rational B-spline)

- Kurva standar/representasi permukaan dalam computer aided design (CAD)

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(t) w_i}$$

**Pi :** titik kontrol

**$\mathbf{B_{i,k}}$:** Bspline basis order k

**wi :** bobot

# Keuntungan penggunaan NURBS

- Lebih banyak derajat kebebasan untuk mengontrol kurva (dapat mengontrol bobot)

- Invarian di bawah transformasi perspektif

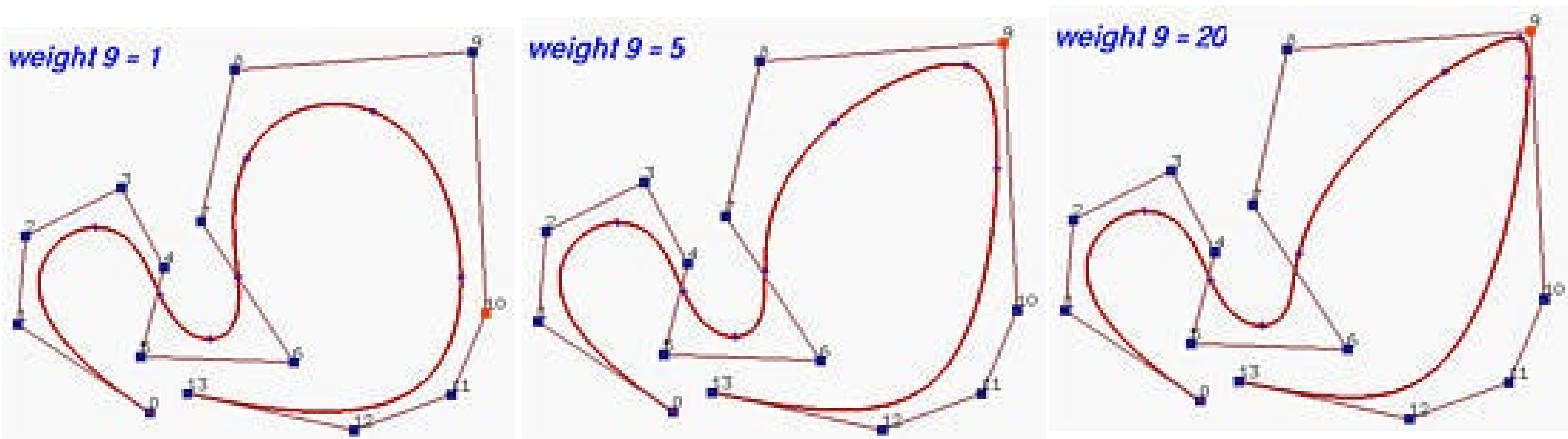
-Dapat memproyeksikan titik kontrol ke layar dan interpolasi di layar

-Tidak perlu menerapkan transformasi perspektif ke semua titik pada kurva

- Dapat memodelkan bagian kerucut seperti lingkaran, elips, dan hiperbola

# Contoh perubahan bobot

- Meningkatkan bobot akan membawa kurva lebih dekat ke titik kontrol yang sesuai

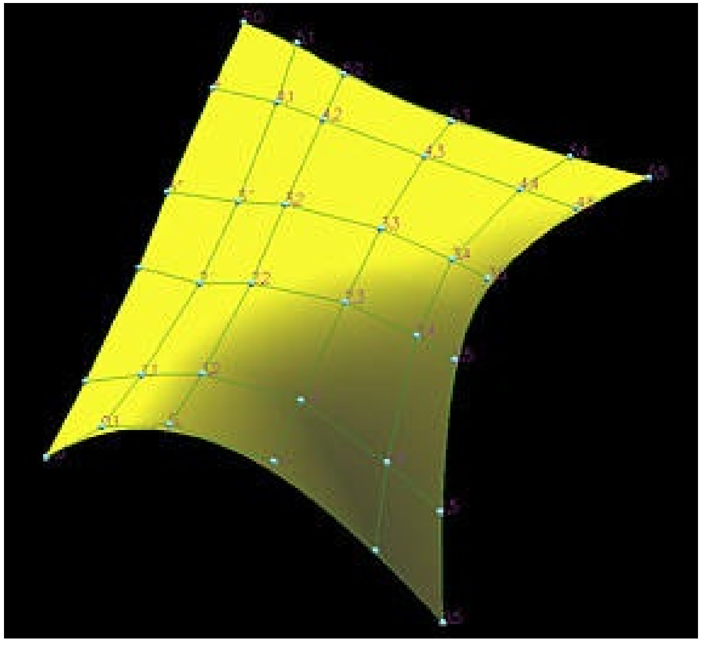


# Bspline Surfaces

- Diberikan informasi sebagai berikut:
- Suatu himpunan baris *m*+1 dan *n*+1 titik control **p***i,j*, dimana 0 <= *i* <= *m* and 0 <= *j* <= *n*;
- Vektor knot yang sesuai dalam arah *u dan v*,

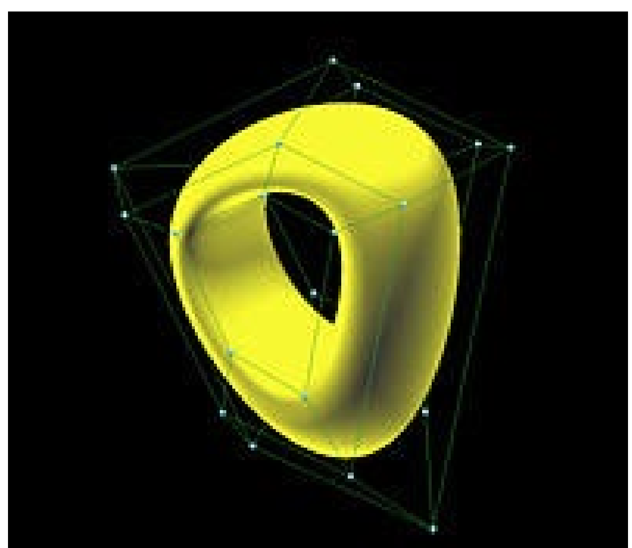
$$p(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} B_{i,p}(u) B_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j} \text{ : non – rational B - spline}$$

$$p(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} w_{i,j} B_{i,p}(u) B_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} w_{i,j} B_{i,p}(u) B_{j,q}(v)} \text{ : NURBS}$$



# Clamped, Closed and Open B-spline Surfaces

- Since a B-spline curve can be clamped, closed or open, a B-spline surface can also have three types *in each direction*.
- That is, we could ask to have a B-spline surface clamped in the *u*-direction and closed in the *v*-direction.
- If a B-spline is clamped in both directions, then this surface passes though control points $\mathbf{p}_{0,0}$, $\mathbf{p}_{m,0}$, $\mathbf{p}_{0,n}$ and $\mathbf{p}_{m,n}$
- If a B-spline surface is closed in one direction, then the surface becomes a tube.
- Closed in two direction : torus
  - Problems handling objects of arbitrary topology, such as a ball, double torus



# spline curves lain: Catmull-Rom Spline

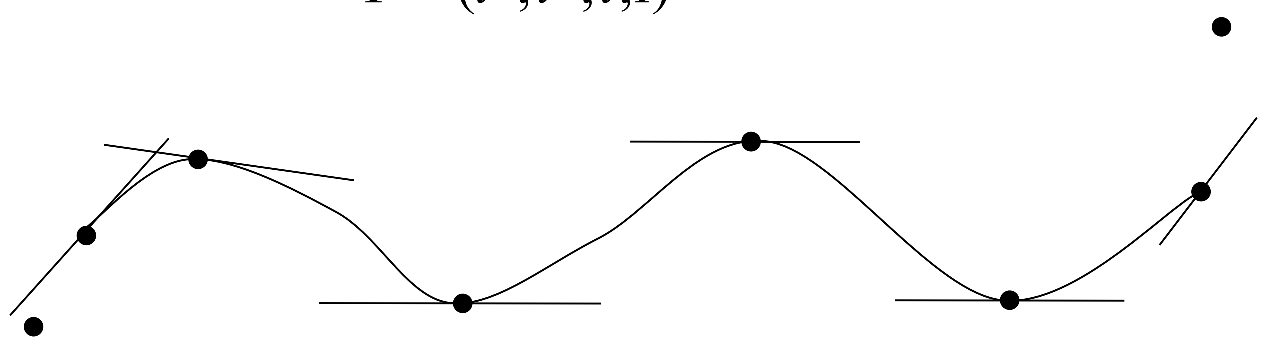
Interpolasi titik kontrol. Gradien pada setiap titik kontrol sejajar dengan vektor antara titik kontrol yang berdekatan.

Digunakan dalam permainan komputer untuk menginterpolasi gerakan kamera

$$P^i(t) = T \cdot M_{CR} \cdot G_B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

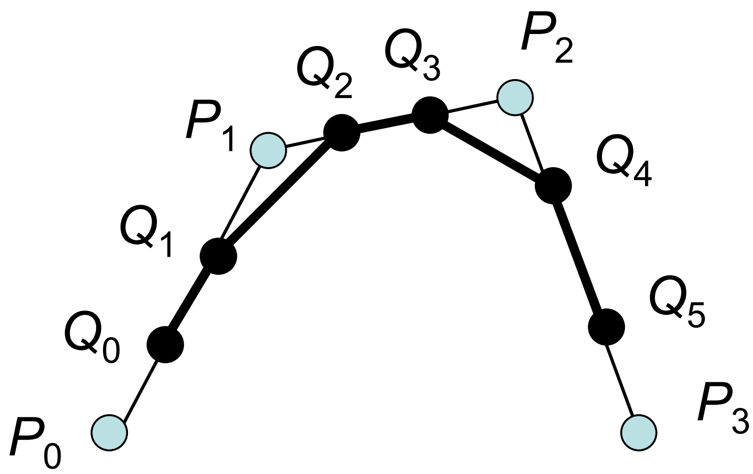
$$T = (t^3, t^2, t, 1)$$



# Subdivisi Surface


- Suatu metode untuk model smooth surfaces

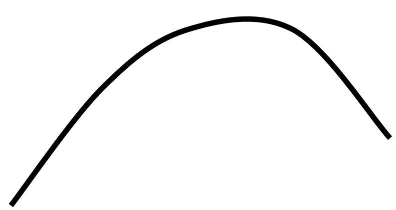
# Algoritma Chaiken




Terapkan Iterasi Sistem Fungsi

$$Q_{2i} = \frac{3}{4} P_i + \frac{1}{4} P_{i+1}$$

$$Q_{2i+1} = \frac{1}{4} P_i + \frac{3}{4} P_{i+1}$$



Batasi Permukaan Kurva

$$Q_0 = \frac{3}{4} P_0 + \frac{1}{4} P_1$$

$$Q_1 = \frac{1}{4} P_0 + \frac{3}{4} P_1$$

---

$$Q_2 = \frac{3}{4} P_1 + \frac{1}{4} P_2$$

$$Q_3 = \frac{1}{4} P_1 + \frac{3}{4} P_2$$

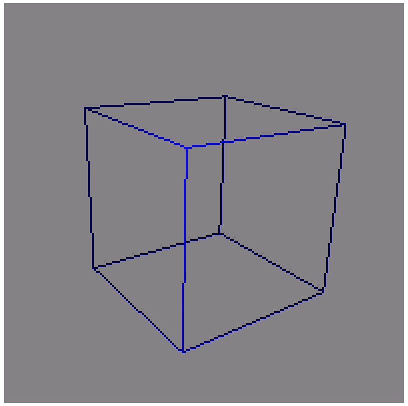
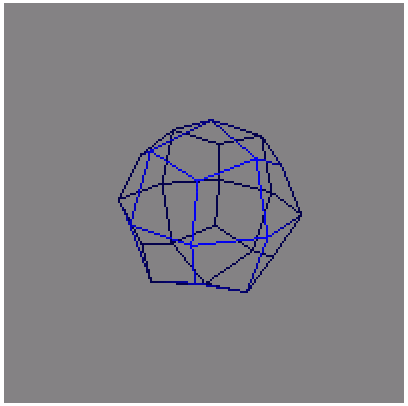
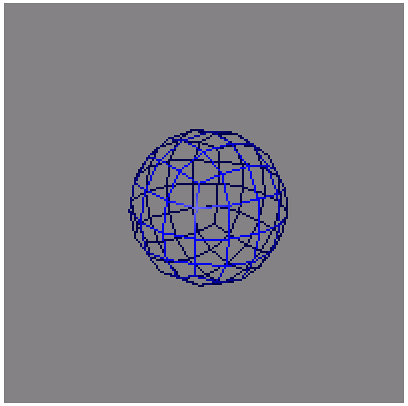
---

$$Q_4 = \frac{3}{4} P_2 + \frac{1}{4} P_3$$

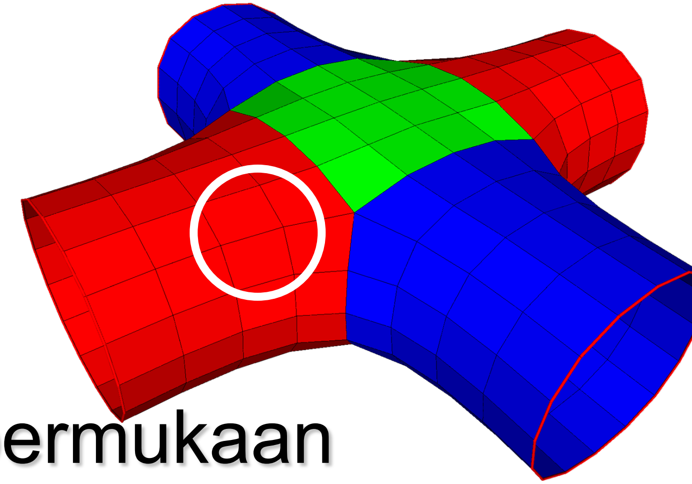
$$Q_5 = \frac{1}{4} P_2 + \frac{3}{4} P_3$$

# 3D subdivision surface

- Dalam bidang grafik komputer 3D, permukaan subdivisi adalah permukaan melengkung yang diwakili oleh spesifikasi mesh poligonal yang lebih kasar dan dihasilkan dengan metode algoritmik rekursif
- Memberikan bentuk kasar terlebih dahulu dan membaginya secara rekursif
- Berhenti ketika bentuknya cukup halus
- Digunakan untuk memodelkan permukaan yang halus

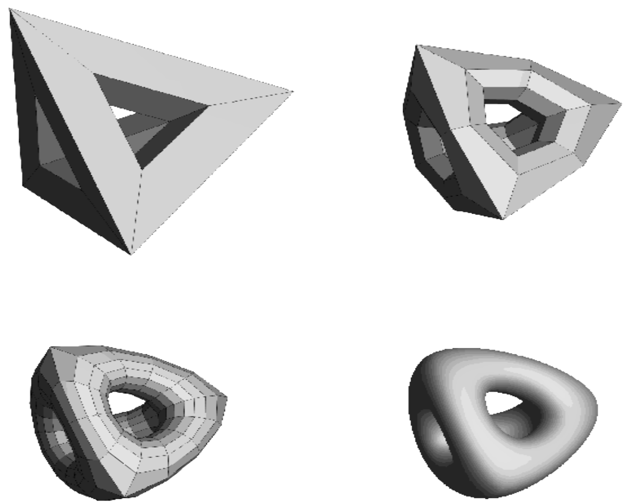
# Motivasi



- Shape modeling
  - Pembatasan secara topologi dari permukaan NURBS
    - Bidang, silinder, dan Torus
    - Sulit untuk mempertahankan kehalusan pada jahitan tambal sulam.
      - contoh: menyembunyikan jahitan di Woody (*Toy Story*) [DeRose98]
  - NURBS juga membutuhkan net control terdiri dari suatu grid persegi panjang regulrar dari titik-titik control.
- LOD dalam suatu scene
  - Bentuk kasar ketika jauh, suatu permukaan padat halus saat lebih dekat ke kamera.

# Subdivision surface

- Dapat mengatasi arbitrary topologi

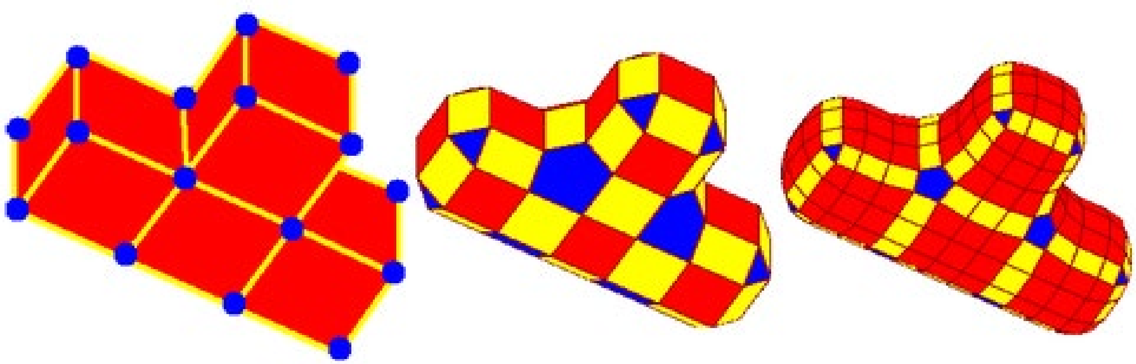


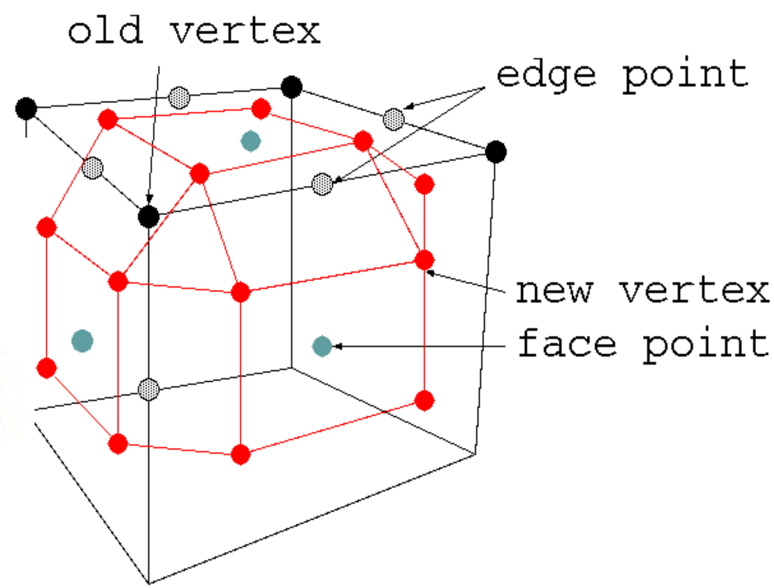
# Skema yang berbeda-beda:

- Doo-Sabin ‘78
- Catmull-Clark ‘78
- Etc (Loop, Butterfly, and many others)

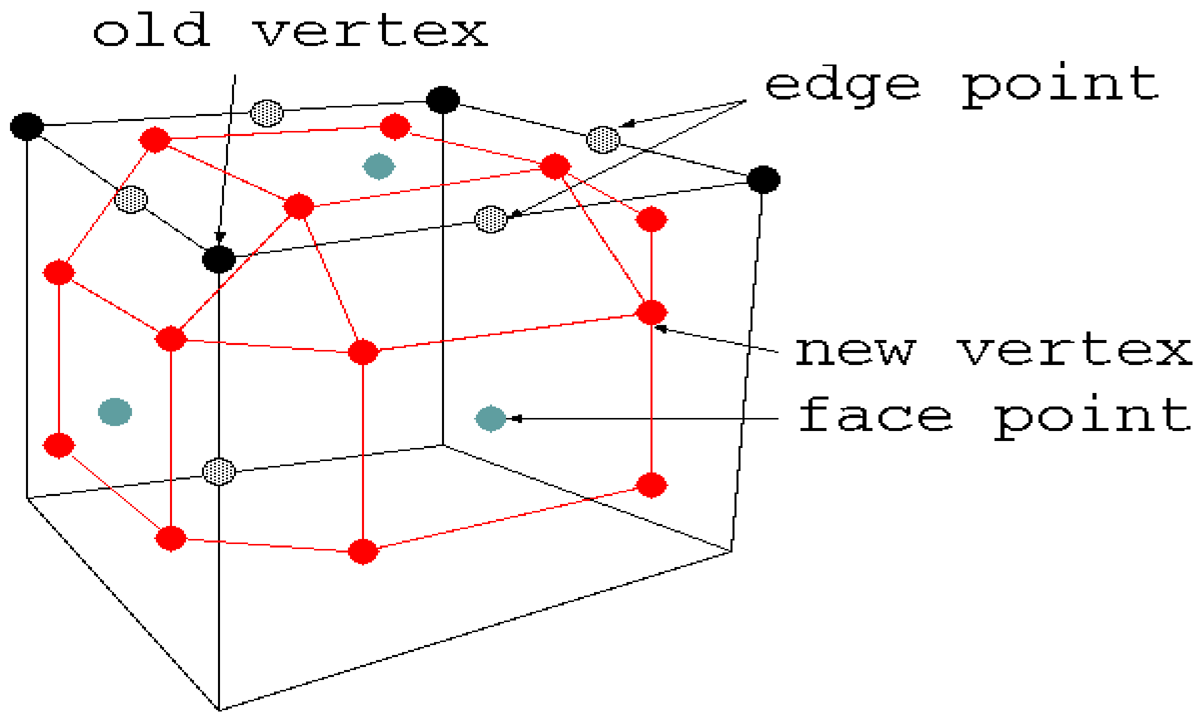
# Doo-Sabin Subdivision

- Suatu *edge point* dibentuk dari midpoint dari tiap edge
- Suatu *face point* dibentuk sebagai pusat massa setiap poligon mesh.
- Akhirknya, tiap vertex dalam mesh baru adalah bentuk rata-rata dari
  - sebuah simpul di mesh lama,
  - titik muka untuk poligon yang menyentuh simpul lama itu
  - titik tepi untuk dua tepi yang termasuk dalam poligon itu dan menyentuh titik tua itu.





# Subdivisi Doo-Sabin

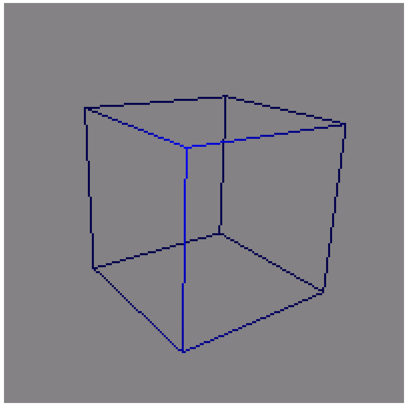


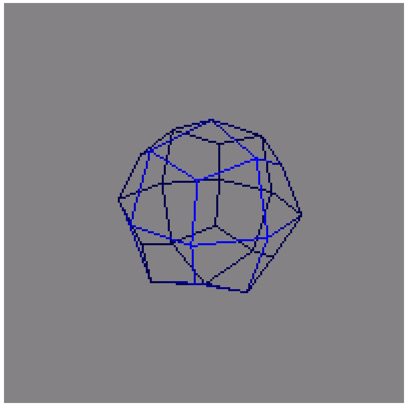

mesh baru, oleh karena itu

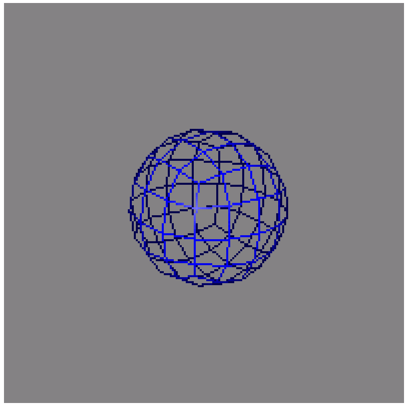
- buat segi empat untuk setiap tepi di mesh lama,
- buat poligon sisi-n yang lebih kecil untuk setiap poligon sisi-n di mesh lama, dan
- buat poligon bersisi-n untuk setiap simpul bervalensi-n (Valensi adalah jumlah sisi yang menyentuh simpul).

# Subdivisi Catmull-Clark

- Sebuah face dengan n sisi dibagi menjadi n segi empat Quads lebih baik daripada segitiga dalam menangkap simetri objek alam dan buatan manusia.
- Permukaan seperti tabung (lengan, kaki, jari) lebih mudah dimodelkan.







# Subdivisi Catmull-Clark

- FACE

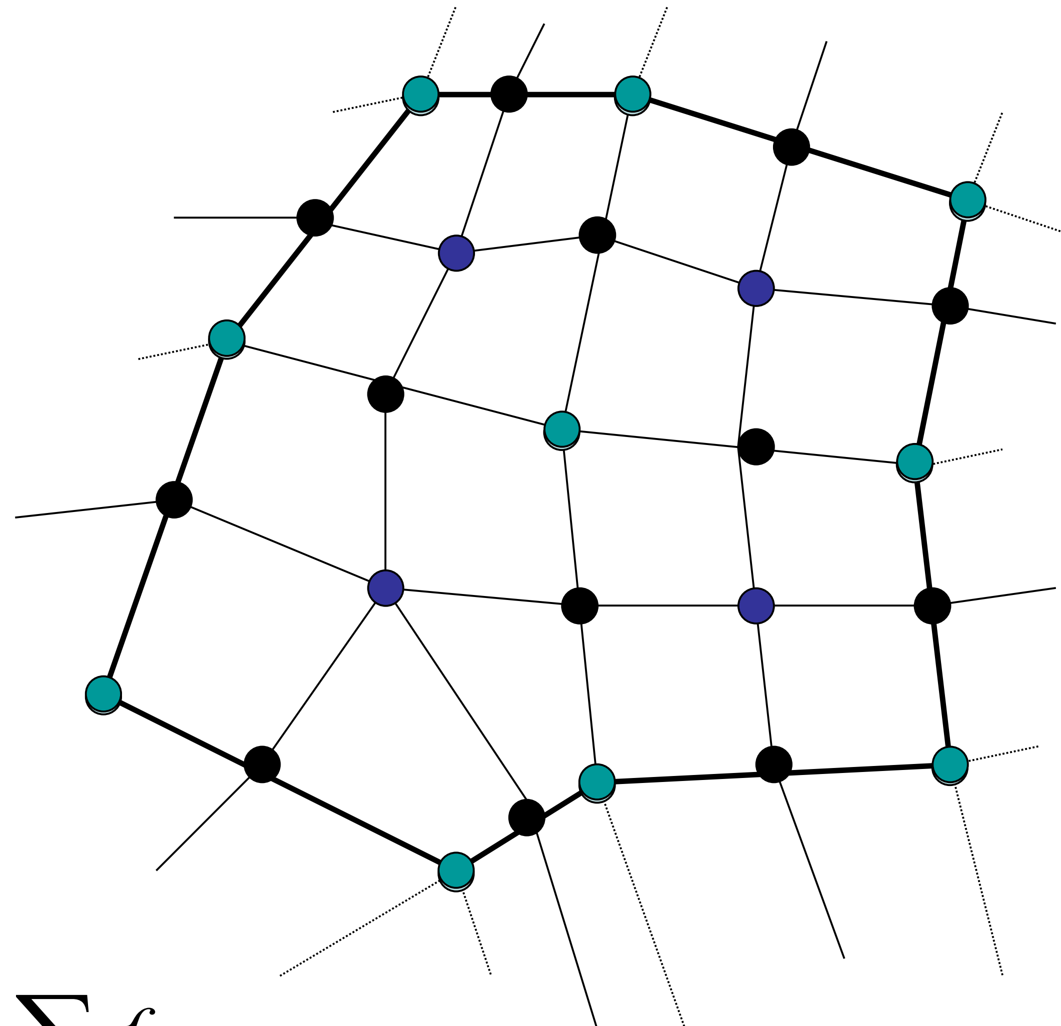
$$f = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} v_i$$

- EDGE

$$e = \frac{v_1 + v_2 + f_1 + f_2}{4}$$

- → VERTEX

$$v_{i+1} = \frac{n-2}{n} v_i + \frac{1}{n^2}\sum_j e_j + \frac{1}{n^2}\sum_j f_j$$



# Pemodelan dengan Catmull-Clark

- Subdivisi menghasilkan permukaan kontinu yang halus. Bagaimana "ketajaman" dan lipatan dikendalikan dalam lingkungan pemodelan?
- ANSWER: Tentukan aturan subdivisi baru untuk tepi dan simpul "berkerut".

1. Tag Tepi tepi tajam.
2. Jika tepinya tajam, terapkan aturan pembagian baru yang tajam.
3. Jika tidak, bagilah dengan aturan normal.

# Sharp Edges…

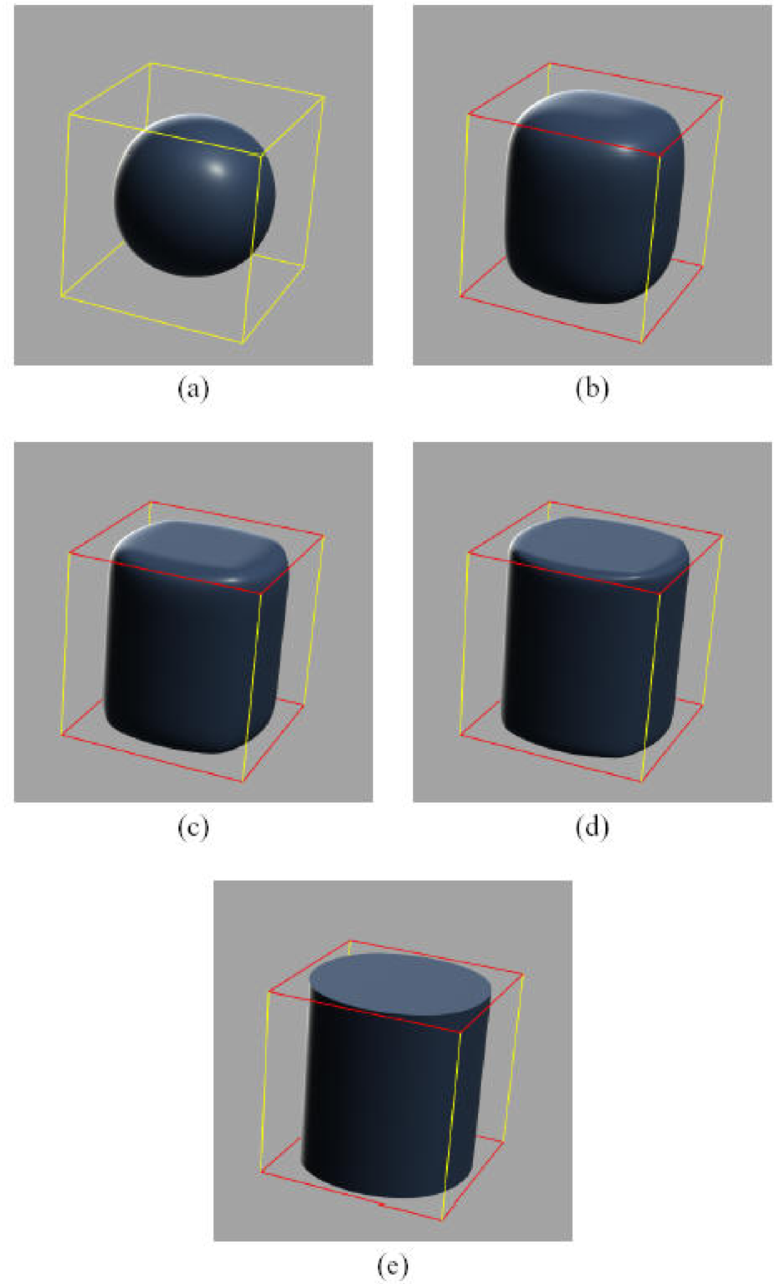
- Tag Edges as “**sharp**” or “not-sharp”
  - n = 0 – “**not sharp**”
  - n > 0 – sharp

During Subdivision,

- if an edge is “sharp”, use sharp subdivision rules. Newly created edges, are assigned a sharpness of n-1.
- If an edge is “not-sharp”, use normal smooth subdivision rules.

IDEA: Edges with a sharpness of “n” do not get subdivided smoothly for “n” iterations of the algorithm.

- In the picture on the right, the control mesh is a unit cube
- Different sharpness applied



# Sharp Rules

FACE (unchanged)

$$f = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} v_i$$

EDGE

$$e = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

VERTEX

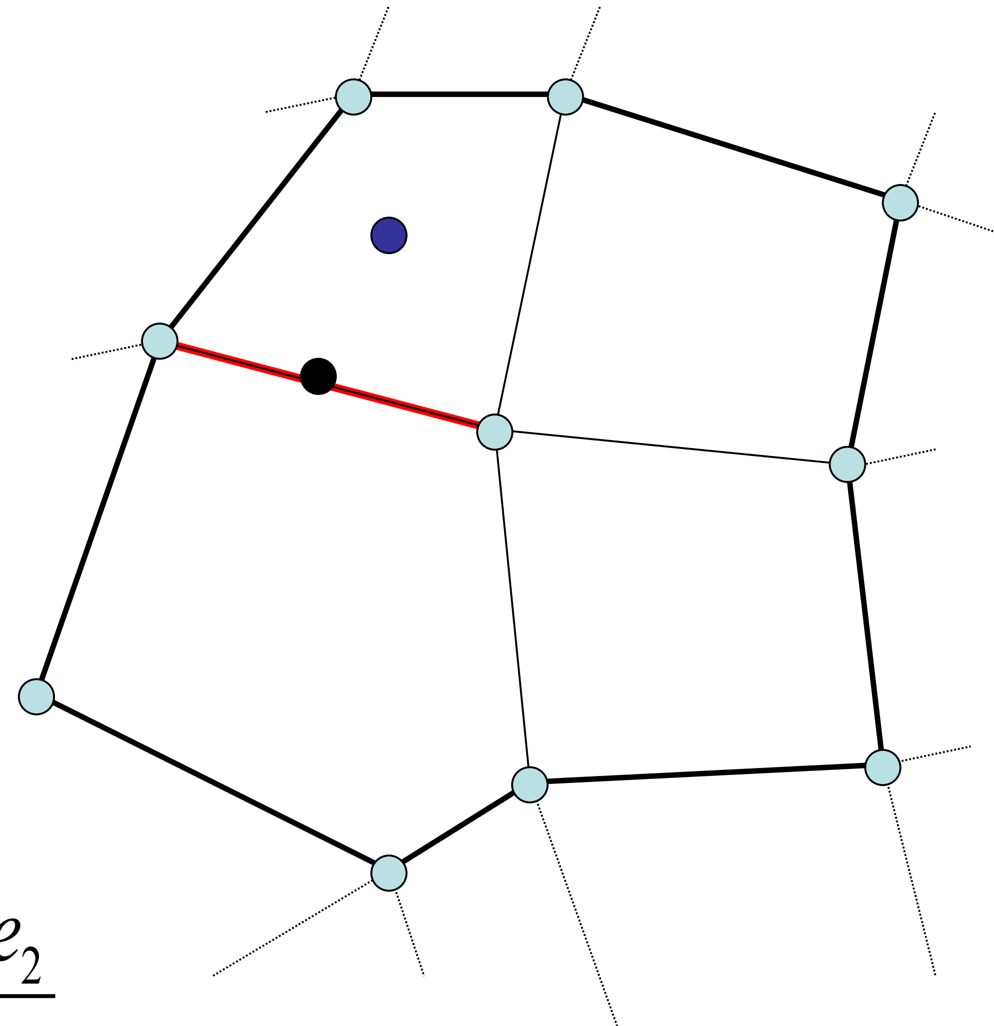
# adj. Sharp edges

corner >2

$$v_{i+1} = v_i$$

crease 2

$$v_{i+1} = \frac{e_1 + 6v_i + e_2}{8}$$



# Contoh lain dari lipatan

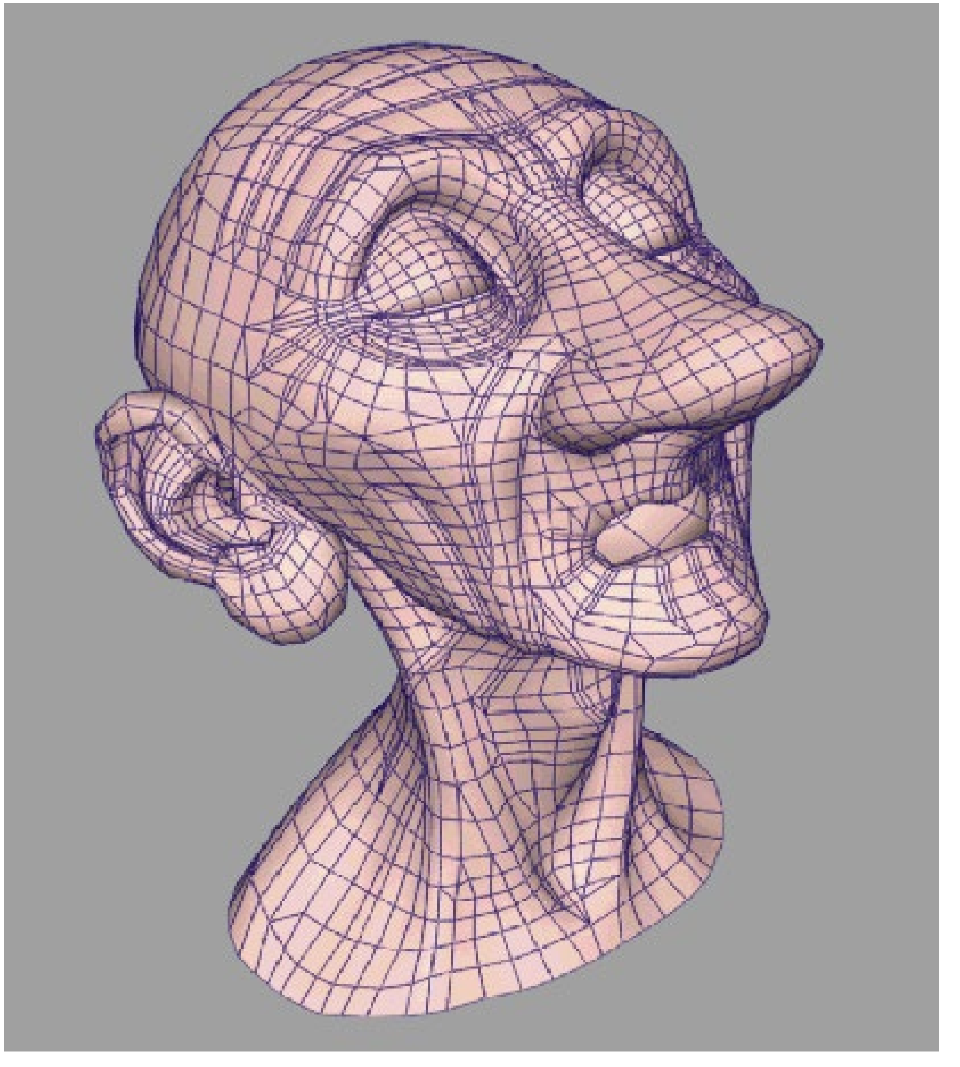
# Non-Integer Sharpness

- Kepadatan mesh yang baru dibuat meningkat dengan cepat.
- Dalam praktiknya, 2 atau 3 iterasi subdivisi sudah cukup.
- Perlu "kontrol" yang lebih baik.

IDEA: Interpolasi antara aturan smooth dan sharp untuk nilai ketajaman bukan bilangan bulat dari n.

# Subdivision Surfaces dalam karakter [DeRose98]

- Digunakan untuk pertama kalinya dalam permainan Geri untuk mengatasi pembatasan topologi NURBS
- Model kepala, tangan, jaket, celana, kemeja, dasi, dan sepatu Geri
- Metode simulasi kain yang dikembangkan



# Demo movie [Geri's Game]

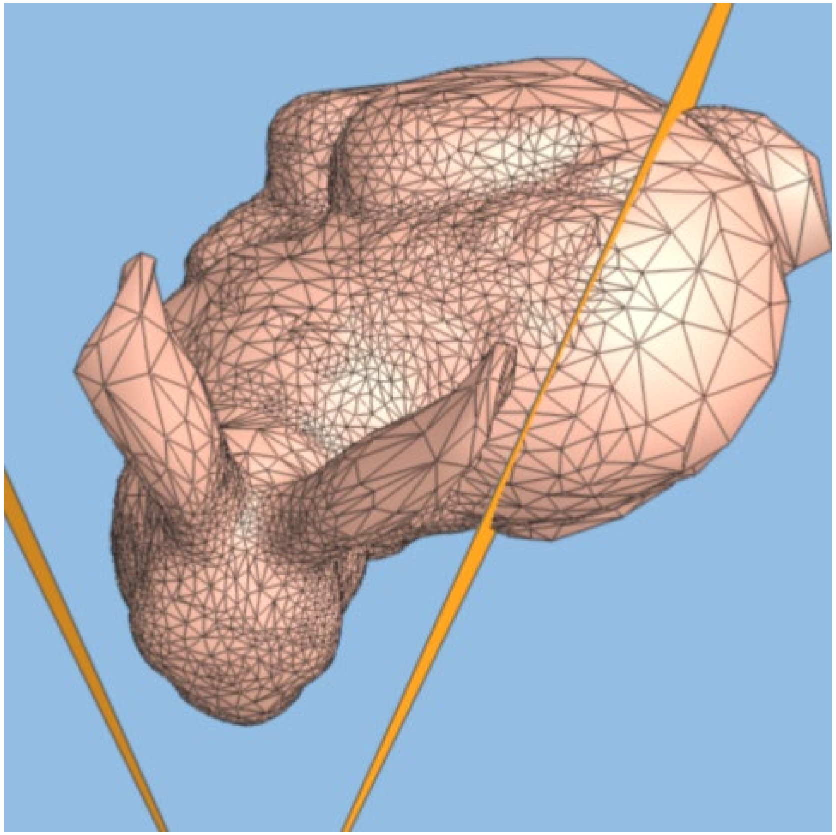
- Academy Award winning movie by Pixar
- http://www.youtube.com/watch?v=Kgg9Dn2ahlM

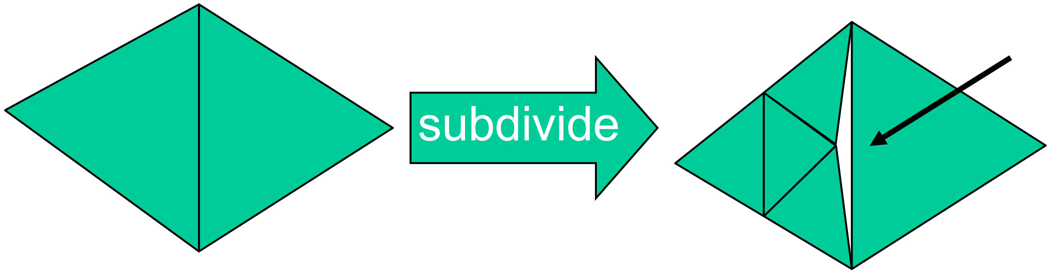
Demo of Catmull-Clark subdivision surface

- http://www.youtube.com/watch?v=IU8f0hnorU8&feature=related

# Adaptive Subdivision

- Tidak semua region dari suatu model dapat di-subdivisi.
- Idea:  Gunakan beberapa kriteria dan secara adaptif membagi mesh jika diperlukan.
- Curvature
  - Screen size ( buat segitiga < ukuran piksel)
  - View dependence
    - Jarak dari viewer
    - Silhouettes
    - Dalam view frustum
  - Hati-hati! Harus memastikan bahwa "retak" tidak terjadi





# Ringkasan Subdivision Surface

Keuntungan

- Metode sederhana untuk menggambarkan permukaan yang kompleks
- Relatif mudah diimplementasikan
- Topologi arbitrary
- Dukungan lokal Kontinuitas terjamin
- Multi-resolusi

Kekurangan

- Spesifikasi intuitif
- Parameterisasi
- Interseksi

# Referensi


- A very good website for parametric curves / surfaces http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/
- DeRose, Tony, Michael Kass, and Tien Truong. Subdivision Surfaces in Character Animation. *SIGGRAPH 98*.
- Clark, E., and J. Clark. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 10, No. 6, 1978.
- Doo, D. and M. Sabin. Behavior of Recursive Division Surfaces Near Extraordinary Points. Computer-Aided Design. Vol. 10, No. 6, 1978.
- Taku Komura. Slide Lecture 12. Bspline/NURBS and Subdivision Surface