Grafika Computer

Kurva Spline (Spline Curve)

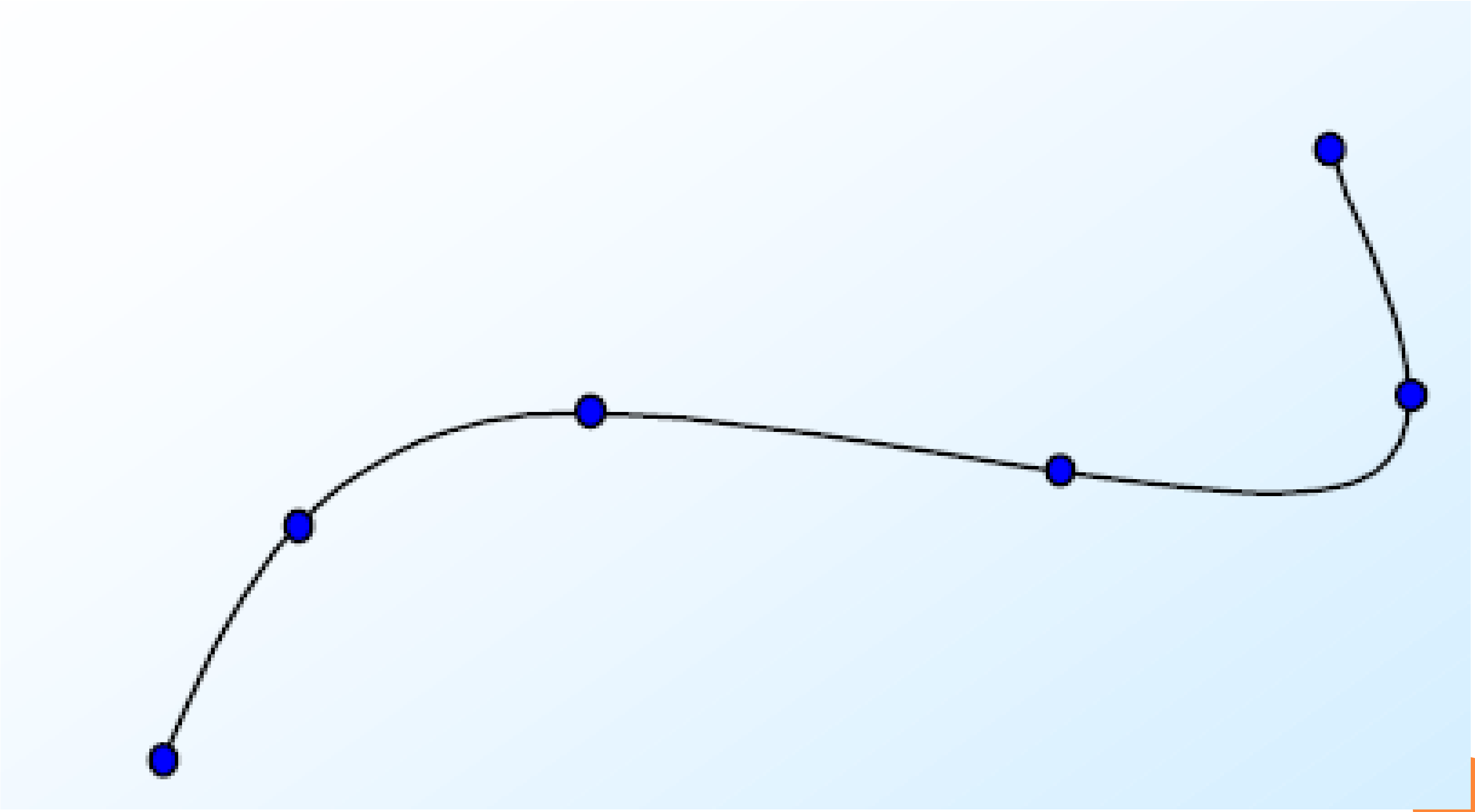
SPLINES

- Spline mempunyai sejarah yang panjang dalam grafika komputer sebelum dikenal dalam teknik gambar.
- Secara alamiah spline kubik merupakan model matematis untuk sejenis *thin strip,* yang mana melalui semua titik control yang dapat meminimalkan energi dasar.
- Spline kubik alami (natural cubic spline) mempunyai kontinuitas C^2 (terdiri C^1, C^0) dan lebih halus jika dibandingkan dengan kurva Hermite ataupun Bezier.

Interpolasi Spline

- Modern splines merupakan kurva yang lembut(smooth) yang didefiniskan dari suatu himpunan titik-titik yang seringkali dinamakan dengan *knot*.
- Dalam satu kelas utama spline (main class of splines), kurva harus melalui tiap titik dalam himpunan tersebut.
- Ini dinamakan dengan interpolasi spline

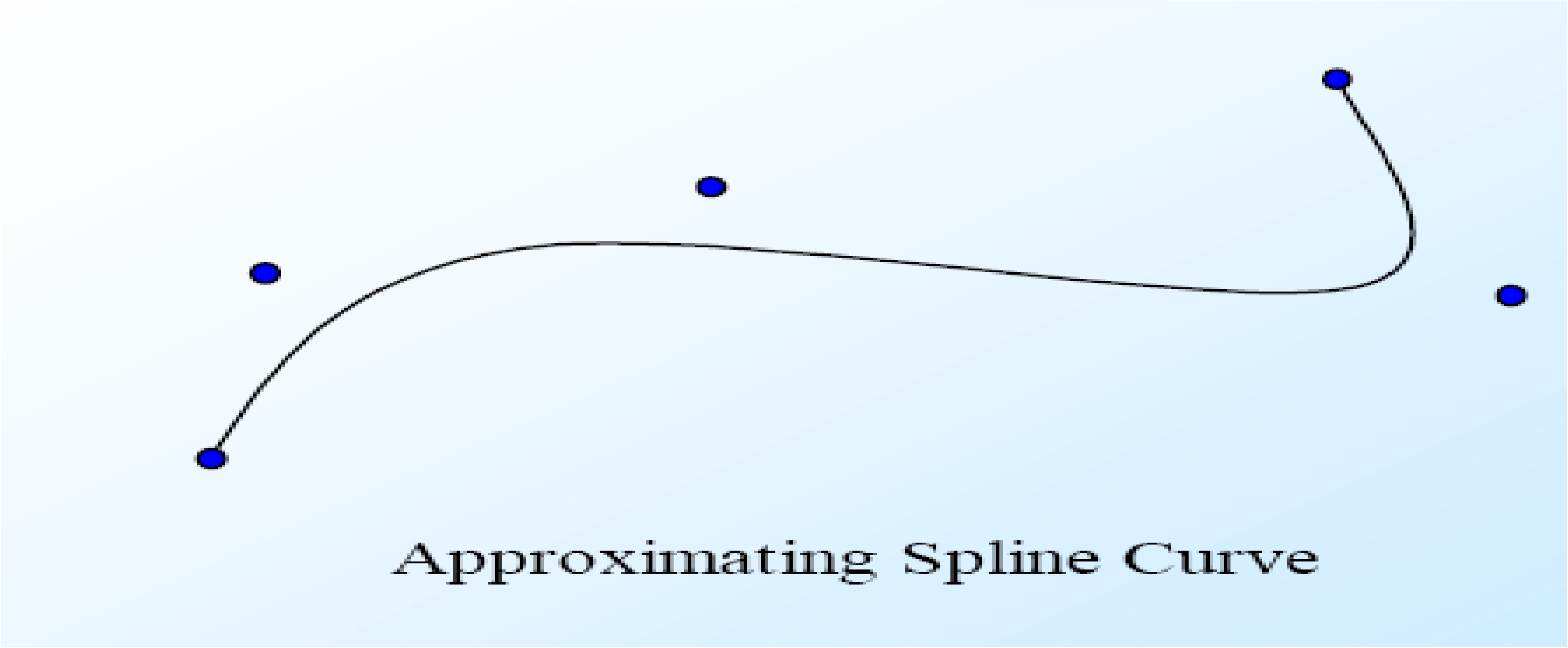
Kurva Interpolasi Spline



PENDEKATAN SPLINE (*APPROXIMATING SPLINE*)

- Dalam kasus lainnya kurva tidak bisa melalui titik-titik
- Titik-titik dianggap sebagai titik kontrol (control points) yang mana user dapat memindahkan untuk membuat kurva atau bentuk yang interaktif sesuai dengan yang diinginkan.

PENDEKATAN SPLINE (*APPROXIMATING SPLINE*)



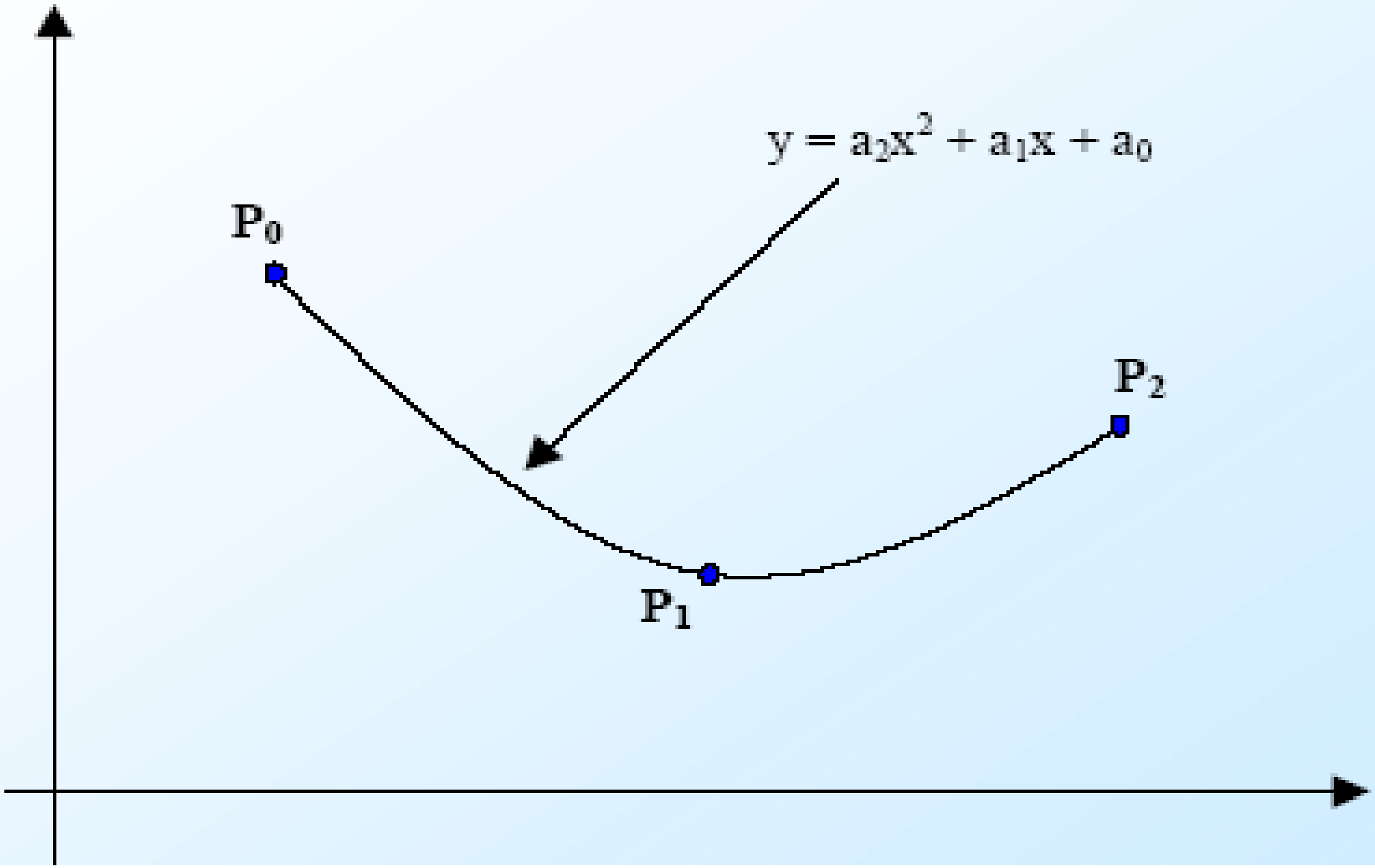
Non Parametric Spline

- Spline paling sederhana merupakan persamaan dalam x dan y (untuk 2D)
- Bentuk umumnya adalah polynomial spline:

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

- Di sini terdapat 3 titik yang dapat dihitung a_2, a_1, dan a_0

non parametric (parabolic spline)



Kontrol Non-parametrik spline

- Di sini tidak ada kontrol menggunakan non parametrik spline
- Di sini hanya terdapat satu kurva (parabola) yang cocok untuk data.

Parametrik Spline

- JIka kita tulis spline dalam suatu bentuk vektor, maka didapatkan:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_2\mu^2 + \mathbf{a}_1\,\mu + \mathbf{a}_0$$

- Dimana parameternya μ
  Nilainya antara 0 dan 1.

PENGHITUNGAN PARAMETRIK SPLINE SEDERHANA

- Untuk menyelesaikan konstanta vektor a_0,a_1, dan a^2 sebagai berikut :
- Misalkan awal kurva ada di P_0

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{a}_2\mu^2 + \mathbf{a}_1\,\mu + \mathbf{a}_0$$

dengan $\mu=0$ pada awal maka $\mathbf{P}_0 = \mathbf{a}_0$

Penghitungan Parametrik Spline Sederhana

- Misalkan diinginkan spline titik akhirnya di P_2. Maka kita punya akhir

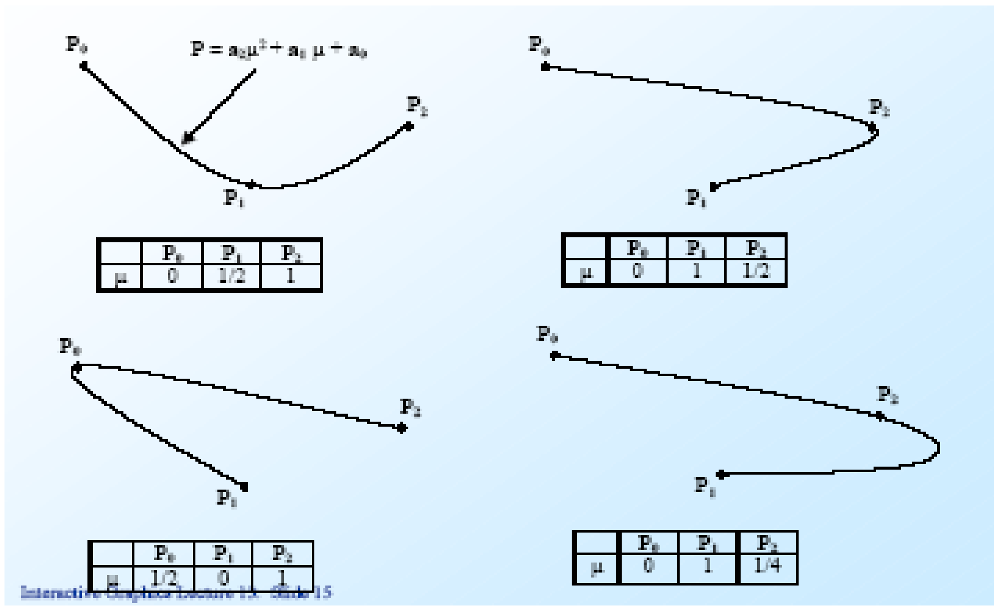
  Selanjutnya $\mu = 1$

$$
\begin{aligned}
P_2 &= a_2\mu^2 + a_1\,\mu + a_0 \\
&= a_2 + a_1 + a_0 \\
&= a_2 + a_1 + P_0
\end{aligned}
$$

Dan ditengah ($\mu = 1/2$) kita menginginkan ini melalui P_1

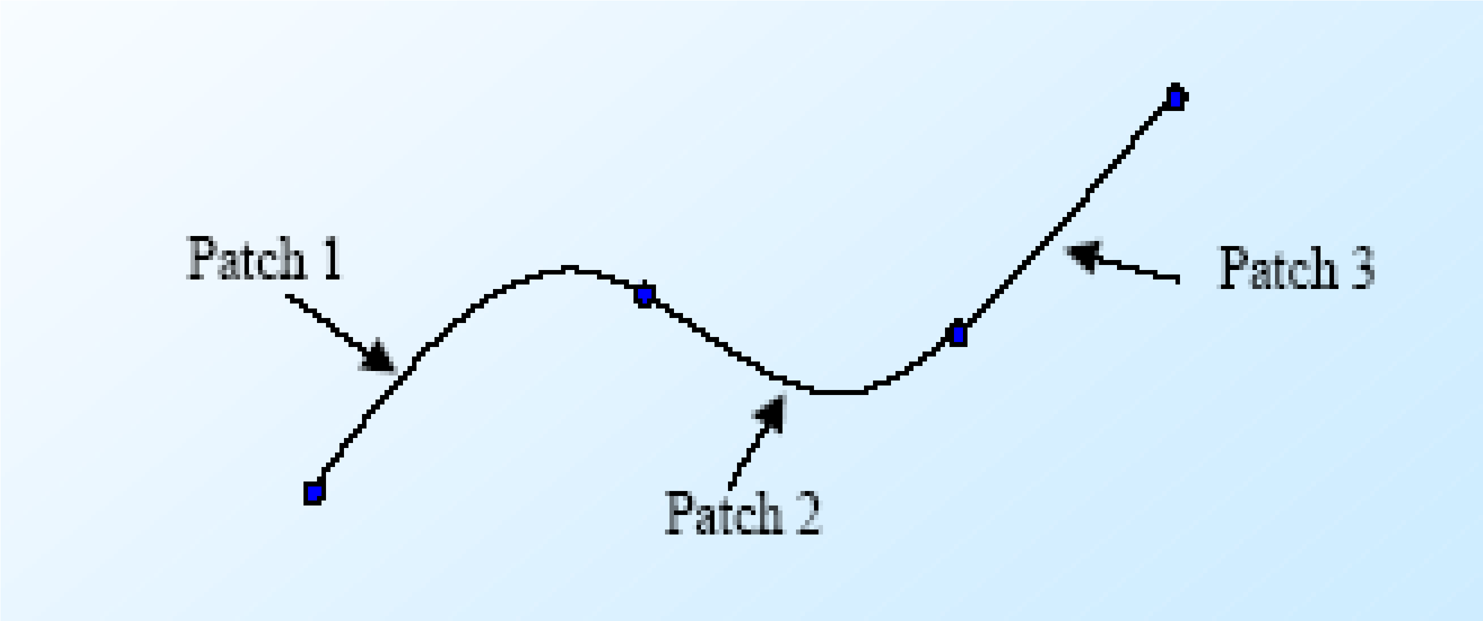
$$
\begin{aligned}
P_1 &= a_2\mu^2 + a_1\,\mu + a_0 \\
&= a_2/4 + a_1/2 + P_0
\end{aligned}
$$

Kemungkinan Menggunakan parametrik Spline



Patch Spline

- Tiap patch dapat dijadikan sebagai suatu parametrik spline.

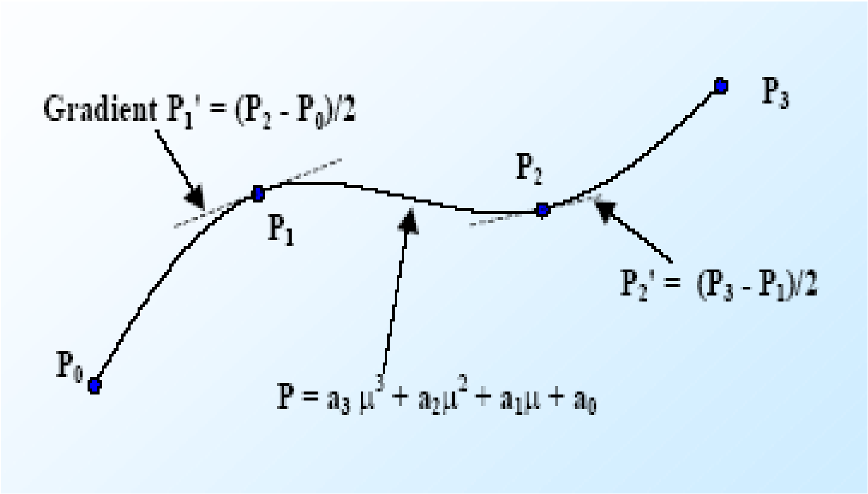


Patch Spline Kubik

- Cara paling mudah dan sederhana, dan efektif untuk menghitung patch parametrik spline adalah dengan menggunakan suatu polinomial kubik.

$$P = a_3 \mu^3 + a_2 \mu^2 + a_1 \mu + a_0$$

Pemilihan Gradient



Penghitungan pacth Spline Kubik

- Untuk suatu patch gabungan titik-titik P_i dan P_{i+1} dipunyai $\mu=0$ pada P_i dan $\mu=1$ pada P_{i+1}
- Dengan substitusi maka akan didapatkan:

$$\mathbf{P_i} = \mathbf{a_0}$$

$$\mathbf{P_{i+1}} = \mathbf{a_3} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_1} + \mathbf{a_0}$$

Penghitungan pacth Spline Kubik

- Dengan menurunkan $P = a_3\,\mu^3 + a_2\mu^2 + a_1\mu + a_0$ ka kita dapatkan $P' = 3a_3\,\mu^2 + 2a_2\mu + a_1$

  dengan subtitusi pada P_i dan P_{i+1}

$$P'_i = a_1$$

$$P'_{i+1} = 3a_3 + 2a_2 + a_1$$

Penghitungan pacth Spline Kubik

- Jika dituliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ P'_i \\ P_{i+1} \\ P'_{i+1} \end{bmatrix}$$

PENGHITUNGAN PACTH SPLINE KUBIK

- Dengan inversi matriks maka akan didapatkan :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P'}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ \mathbf{P'}_{i+1} \end{pmatrix}$$

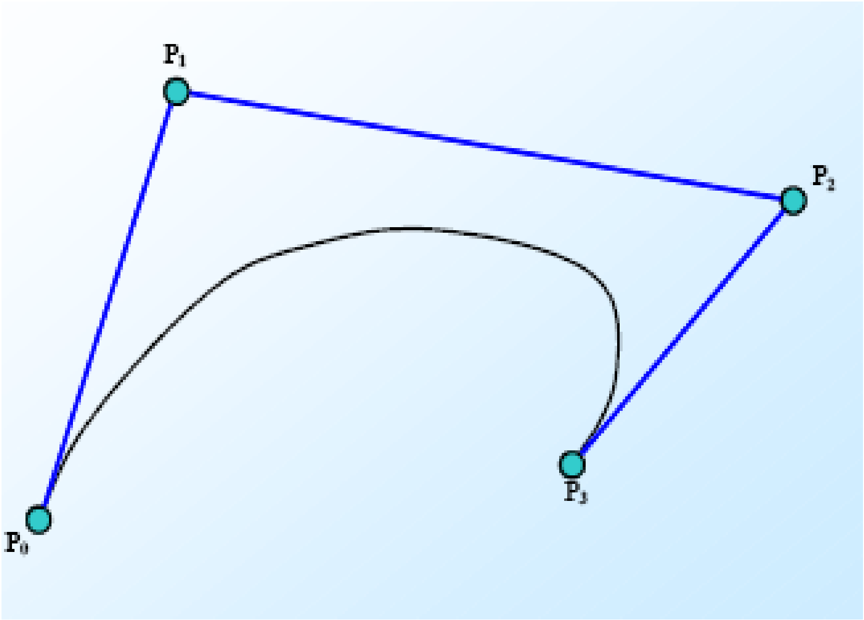
Kurva Bezier

- Kurva Bezier digunakan untuk Desain CAD.
- Karakteristik utama dari kurva Bezier adalah :

  - interpolasi pada titik akhir

  - slope pada akhir adalah sama dengan penggabungan garis titik akhir ke tetangganya.

Kurva Bezier

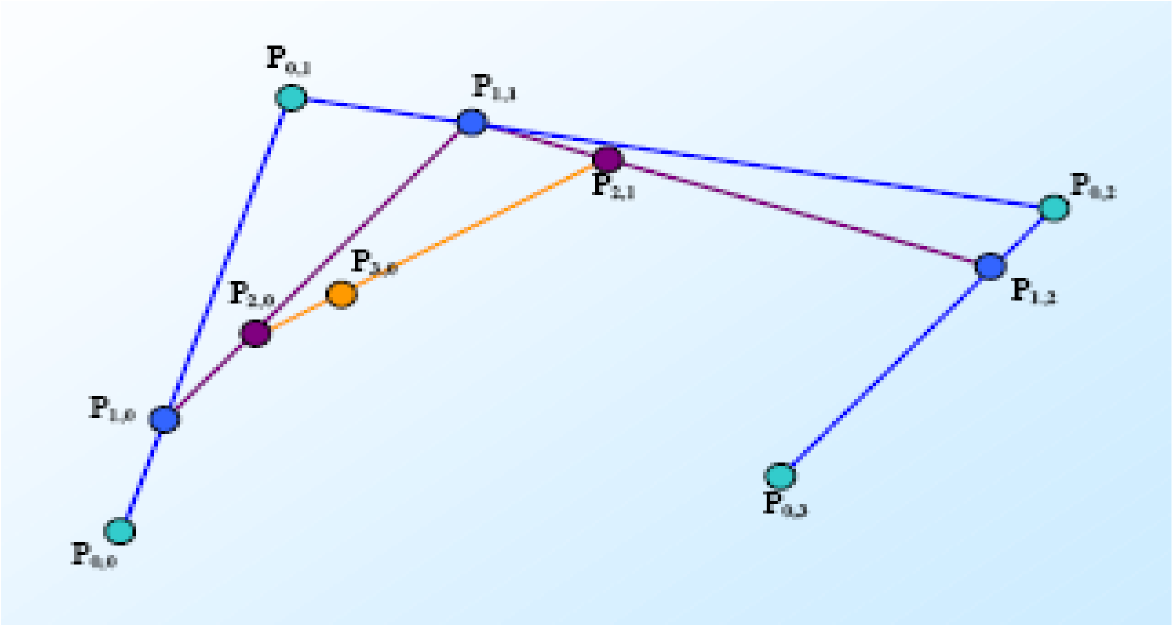


ALGORITMA CASTELJAU

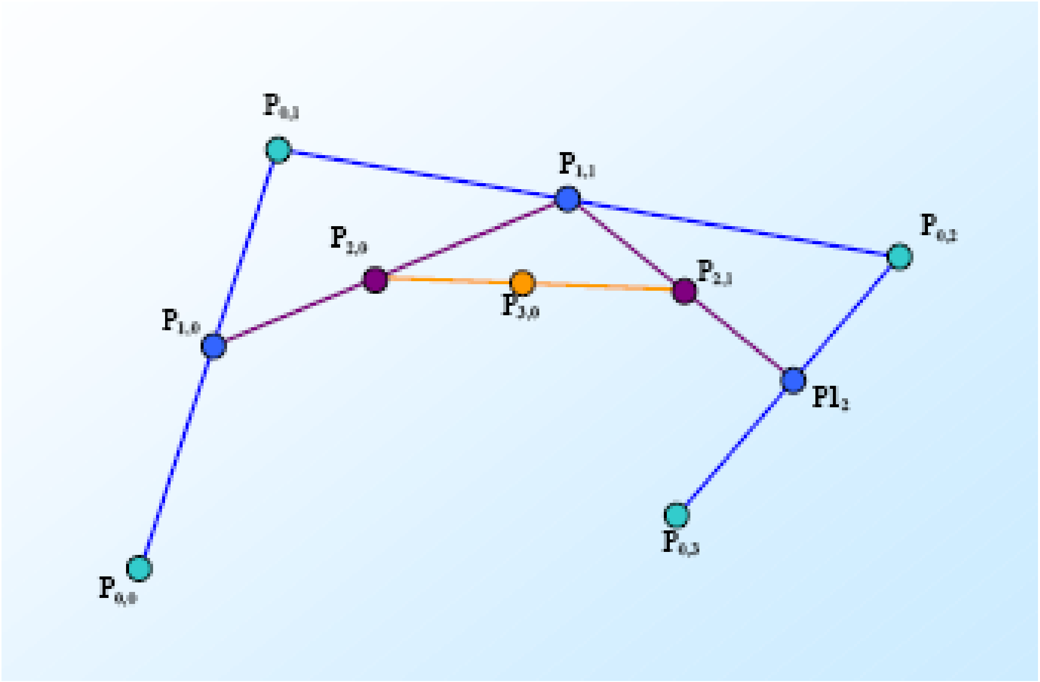
- Kurva Bezier dihitung dan divisualisasikan dengan menggunakan konstruksi geometri Casteljau sekitar 1900.
- Seperti patch kubik, disini dibutuhkan parameter yang pada awal nilainya 0 dan akhir nilainya 1. Koneksi dap μ dibuat untuk beberapa nilai

  μ

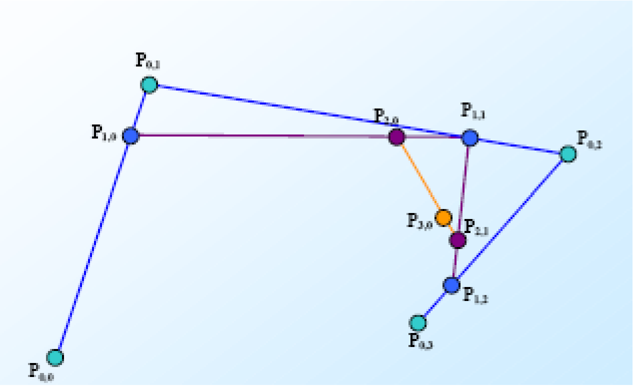
Casteljau's Construction $\mu = 0.25$



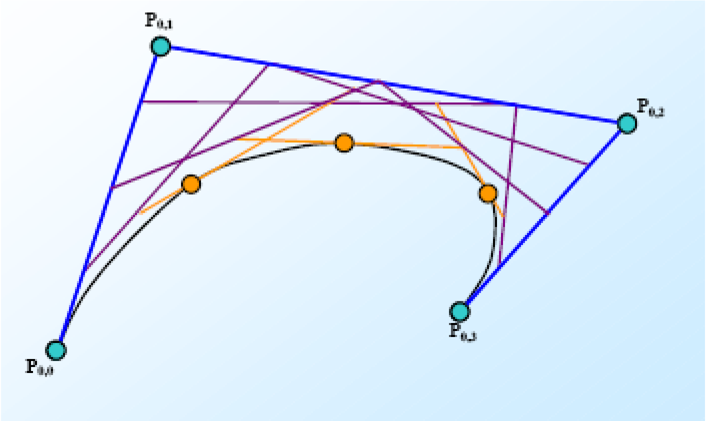
Casteljau's Construction $\mu = 0.5$



Casteljau's Construction $\mu = 0.75$



Casteljau's Construction of the Bezier Curve



Perluasan Persamaan Bezier

2 Point: $\mathbf{P_0}(1-\mu) + \mathbf{P_1}\mu$

3 Point: $\mathbf{P_0}(1-\mu)^2 + 2\mathbf{P_1}(1-\mu)\mu + \mathbf{P_2}\mu^2$

4 Point: $\mathbf{P_0}(1-\mu)^3 + 3\mathbf{P_1}(1-\mu)^2\mu + 3\mathbf{P_2}(1-\mu)\mu^2 + \mathbf{P_3}\mu^3$

etc

Perluasan persamaan 'campuran'

- Empat titik kurva Bezier adalah sama dengan patch-patch kubik yang melalui knot pertama dan terakhir(**P^0 dan P^3**)
- Kesamaan ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan dua cara:

$$\mathbf{P}(\mu) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P_i}\, W(3, i, \mu)$$

- Untuk kasus empat knot :

$$P(\mu) = P_0(1-\mu)^3 + 3P_1\,\mu(1-\mu)^2 + 3P_2\mu^2(1-\mu) + P_3\,\mu^3$$

Perkalian akan menghasilkan:

$$P(\mu) = \mathbf{a_3}\,\mu^3 + \mathbf{a_2}\,\mu^2 + \mathbf{a_1}\mu + \mathbf{a_0}$$

where

$$\mathbf{a_3} = \mathbf{P_3} - 3\mathbf{P_2} + 3\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0}$$

$$\mathbf{a_2} = 3\mathbf{P_2} - 6\mathbf{P_1} + 3\mathbf{P_0}$$

$$\mathbf{a_1} = 3\mathbf{P_1} - 3\mathbf{P_0}$$

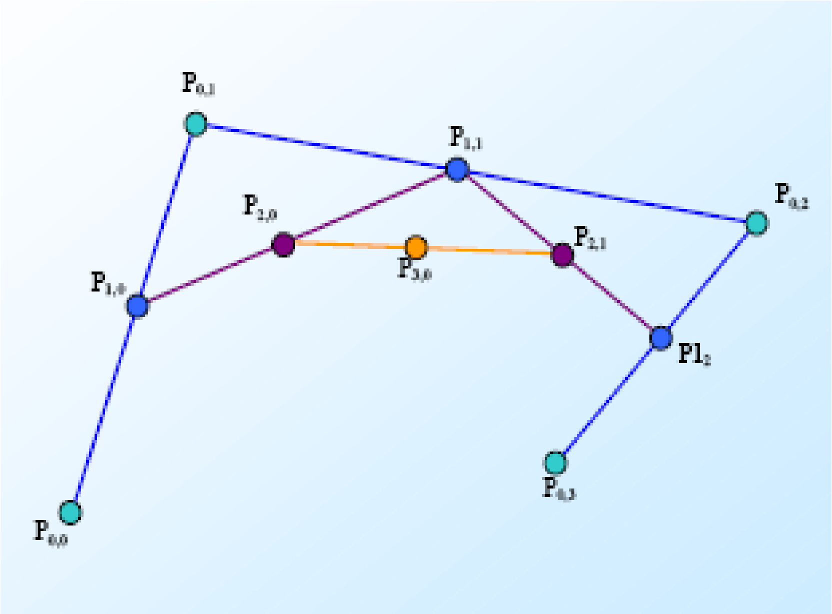
$$\mathbf{a_0} = \mathbf{P_0}$$

Algoritma Casteljau

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{3,0} &= \mu\, \mathbf{P}_{2,1} + (1-\mu)\, \mathbf{P}_{2,0} \\
&= \mu\, (\mu \mathbf{P}_{1,2} + (1-\mu)\mathbf{P}_{1,1}) + (1-\mu)\, (\mu \mathbf{P}_{1,1} + (1-\mu)\, \mathbf{P}_{1,0}) \\
&= \mu^2\, \mathbf{P}_{1,2} + 2\mu(1-\mu)\, \mathbf{P}_{1,1} + (1-\mu)^2\, \mathbf{P}_{1,0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu^2(\mu \mathbf{P}_{0,3} + (1-\mu)\mathbf{P}_{0,2}) + 2\mu(1-\mu)(\mu \mathbf{P}_{0,2} + (1-\mu)\, \mathbf{P}_{0,1}) \\
&\quad + (1-\mu)^2\, (\mu\, \mathbf{P}_{0,1} + (1-\mu)\, \mathbf{P}_{0,0})
\end{aligned}
$$

Casteljau's Construction $\mu = 0.5$



Lanjutan perluasan

- Kita dapat menghilangkan subscript pertama dan akan dihasilkan :

$$P(\mu) = \mu^2(\mu P_3 + (1-\mu)P_2) + 2\mu(1-\mu)(\mu P_2 + (1-\mu) P_1) + (1-\mu)^2(\mu P_1 + (1-\mu) P_0)$$

$$= P_0(1-\mu)^3 + 3 P_1 \mu (1-\mu)^2 + 3 P_2 \mu^2 (1-\mu) + P_3 \mu^3$$

Titik-titik Kontrol

- Dapat diambil kesimpulan bahwa empat titik kurva Bezier terdiri : 2 titik untuk interpolasi dan 2 titik sebagai titik kontrol
- Kurva dimulai pada titik P_0 dan berakhir pada titik P_3. serta bentuknya (shape) dapat ditentukan melalui pemindahan titik-titik kontrolnya (P_1 dan P_2).

Contoh

Contoh soal

Diketahui 3 buah titik kontrol dengan koordinat C1(1,2), C2(7,10), C3(15,4) , dengan menggunakan kenaikan t=0.02 maka tentukanlah:

1. Berapa titik yang digunakan untuk membangun kurva bezier?
2. Berapa nilai titik pada kurva pada saat t=0.8?

solusi

a. Dengan kenaikan sebanyak 0.02 maka jumlah titik yang diperlukan antara 0 dan 1 adalah

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{0.02} = 50\,titik$$

b. Karena terdiri dari 3 titik kontrol maka persamaan menjadi :

$(x+y)^{3-1} = (x+y)^2$

$x^2 + 2xy + y^2 = 0$

$x = (1-t)$ dan $y = t$

Maka persamaan tersebut menjadi :

$L(t) = (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2$

Solusi (lanjutan)

Titik untuk t=0.8

$x = (1-t)^2.x1 + 2(1-t)t.x2 + t^2.x3$

$y = (1-t)^2.y1 + 2(1-t)t.y2 + t^2.y3$

Catatan : x1, x2, x3, y1, y2 dan y3 diambil dari titik kontrol

$x = (1-0.8)^2.1 + 2(1-0.8)(0.8).7 + (0.8)^2.15$

$x = 0.04 + 2.24 + 9.6 = 11.88 \sim 12$

$y = (1-0.8)^2.2 + 2(1-0.8)(0.8).10 + (0.8)^2.4$

$y = 0.08 + 3.2 + 2.56 = 5.84 \sim 6$

Nilai titik pada kurva saat t = 0.8 adalah (12,6)

Soal (untuk 4 titik kontrol)

Diketahui 4 buah titik kontrol dengan koordinat C1(0,1), C2(1,2), C3(2,2), C4(3,1) dengan menggunakan kenaikan t=0.02 maka tentukanlah:

Berapa nilai titik pada kurva pada saat t=0.8?

CONTOH SOAL

1. A four knot, two dimensional Bezier curve is defined by the following table

	x	y
$\mathbf{P_0}$	0	0
$\mathbf{P_1}$	2	3
$\mathbf{P_2}$	3	-1
$\mathbf{P_3}$	0	0

Use Casteljau's construction to sketch the curve.

Calculate the coefficients $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ and $\mathbf{a_3}$ of the corresponding cubic spline patch:
$\mathbf{P}(\mu) = \mathbf{a_3}\mu^3 + \mathbf{a_2}\mu^2 + \mathbf{a_1}\mu + \mathbf{a_0}$

Differentiate the spline patch equation to find $\mathbf{P}'(\mu)$ and hence show that the gradient at $\mathbf{P_3}$ is the same as the gradient of the line joining $\mathbf{P_3}$ to $\mathbf{P_2}$.

2. A Coons surface patch is to be drawn using the following array of points:

		μ			
		-1	0	1	2
ν	-1	(0,0,0)	(0,10,5)	(0,20,10)	(0,30,20)
	0	(10,0,5)	(10,10,20)	(10,25,30)	(15,35,40)
	1	(20,0,10)	(20,12,40)	(20,30,50)	(25,40,30)
	2	(30,0,5)	(35,15,30)	(40,35,40)	(50,50,20)

We are interested in the patch constructed on the centre knots, P[0,0], P[0,1], P[1,0] and P[1,1].

a. Find the equations of the four cubic spline patches that bound the Coon's Patch $\mathbf{P}(\mu,0)$, $\mathbf{P}(\mu,1)$, $\mathbf{P}(0,\nu)$, $\mathbf{P}(1,$
These are each parametric cubic splines of the form:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a}_3\,\mu^3 + \mathbf{a}_2\mu^2 + \mathbf{a}_1\mu + \mathbf{a}_0$$

whose parameters are found using:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}'_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \\ \mathbf{P}'_{i+1} \end{pmatrix}$$

b. Find the point at the centre of the patch using the equation:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mu,\nu) = {} & \mathbf{P}(\mu,0)\,(1-\nu) + \mathbf{P}(\mu,1)\,\nu + \mathbf{P}(0,\nu)\,(1-\mu) + \mathbf{P}(1,\nu)\,\mu \\ & - \mathbf{P}(0,0)(1-\nu)(1-\mu) - \mathbf{P}(0,1)\nu(1-\mu) - \mathbf{P}(1,0)(1-\nu)\mu - \mathbf{P}(1,1)\,\nu\mu \end{aligned}$$

Soal

- Diketahui 3 titik kontrol dengan koordinatnya P0 = (1,2), P1(7,10) dan P2(15,4). Dengan nilai kenaikan u=0,02. Tentukan
- 1. berapa titik yang digunakan untuk membangun kurva bezier/
- 2. Berapa nilai titik pada kurva saat u=0.8.

PR

- Diketahui 4 titik kontrol dengan koordinatnya P0 = (0,1), P1(1,2),P2(2,2) dan P3(4,1). Dengan nilai kenaikan u=0,05. Tentukan
- 1. berapa titik yang digunakan untuk membangun kurva bezier/
- 2. Berapa nilai titik pada kurva saat u=0.5.