PERTEMUAN 04
INTERPOLASI

ADHI PRAHARA

Teknik Informatika. Fakultas Teknologi Industri

Universitas Ahmad Dahlan

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu:

- Menjelaskan tentang konsep interpolasi
- Jenis-jenis interpolasi (Nearest Neighbor, Linear, Cosine)
- Kurva polynomial dan Interpolasi Cubic
- Aplikasi interpolasi dan kurva

INTERPOLASI

Interpolasi digunakan untuk memberikan nilai sela diantara dua titik

Nilai sela yang diberikan tergantung dari fungsi interpolasi

Macam-macam interpolasi diantaranya:

- Interpolasi Nearest Neighbor
- Interpolasi Linear
- Interpolasi Bilinear
- Interpolasi Cosine
- Interpolasi Cubic
- Interpolasi Bicubic
- dsb

INTERPOLASI NEAREST NEIGHBOR

Menggunakan pengulangan data terdekat untuk interpolasi

Bila terdapat dua titik yang akan diinterpolasi yaitu:

$$(x_0, y_0) \text{ dan } (x_1, y_1)$$

Maka titik sela (x_i, y_i) dari dua titik tersebut adalah pengulangan data yang terdekat dengan titik sela tersebut

INTERPOLASI NEAREST NEIGHBOR

Hitung nilai interpolasi titik (1,1) sampai (11,5) dengan jumlah titik sela n = 5

Jawab:

Bila $n = 5$ maka jarak kenaikan x di setiap titik sela adalah $d = \frac{\Delta x}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Sehingga kenaikan nilai $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Untuk $x_0 = 1$, maka $y_0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$

Untuk $x_1 = 3$,

dicari dulu mana jarak yang paling dekat ke x_1 dari kedua ujung titik x_0 dan x_5

$\Delta x_{10} = x_1 - x_0 = 3 - 1 = 2$

$\Delta x_{51} = x_5 - x_1 = 11 - 3 = 8$

karena jarak terdekat ke x_0 adalah x_1 maka $y_1 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(3, 1)$

INTERPOLASI NEAREST NEIGHBOR

Untuk nilai x yang lain terapkan aturan yang sama:

Untuk $x_2 = 5$,

Karena x_2 lebih dekat ke x_0 maka $y_2 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(5, 1)$

Untuk $x_3 = 7$,

Karena x_3 lebih dekat ke x_5 maka $y_3 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 5)$

Untuk $x_4 = 9$,

Karena x_4 lebih dekat ke x_5 maka $y_4 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 5)$

$x_5 = 11$ maka $y_5 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI LINEAR

Menggunakan fungsi linear untuk melakukan interpolasi

Bila terdapat dua titik yang akan diinterpolasi yaitu:

$$(x_0, y_0) \text{ dan } (x_1, y_1)$$

Maka titik sela (x_i, y_i) dari dua titik tersebut:

$$\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_i = y_0 + (x_i - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

INTERPOLASI LINEAR

- Bila jarak (x_0, y_0) sampai (x_1, y_1) dimisalkan 1 (dinormalisasi)
- Diketahui jarak awal (x_0, y_0) sampai titik sela (x_i, y_i) adalah u maka:

$$y_i = y_0 \cdot (1 - u) + y_1 \cdot u$$

- Dimana $u = \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0}$

INTERPOLASI LINEAR

Hitung nilai interpolasi titik (1,1) sampai (11,5) dengan jumlah titik n = 5

Jawab:

Bila $n = 5$ maka jarak setiap titik sela $u = \frac{1}{5}$ sehingga kenaikan $u = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$

Bila $n = 5$ maka jarak setiap titik sela adalah $d = \frac{x_1 - x_0}{5} = \frac{11-1}{5} = \frac{10}{5} = 2$ sehingga kenaikan $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Menggunakan rumus interpolasi linear $y_i = y_0 \cdot (1 - u) + y_1 \cdot u$ maka titik sela dapat dihitung:

Untuk $x_0 = 1$, maka $y_0 = 1 \cdot (1 - 0) + 5 \cdot 0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$

Untuk $x_1 = 3$, maka $y_1 = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) + 5 \cdot \frac{1}{5} = 1\frac{4}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(3, 1.8)$

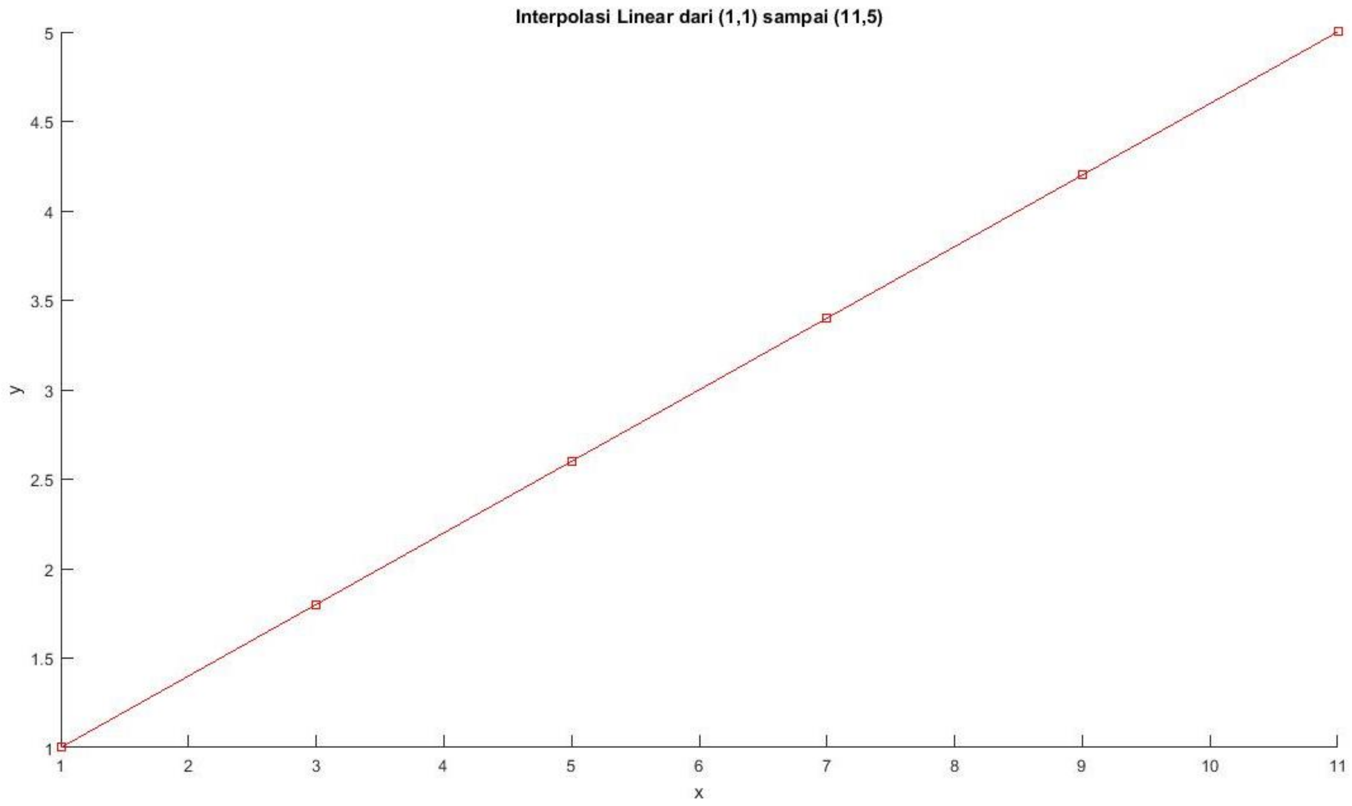
Untuk $x_2 = 5$, maka $y_2 = 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) + 5 \cdot \frac{2}{5} = 2\frac{3}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(5, 2.6)$

Untuk $x_3 = 7$, maka $y_3 = 1 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) + 5 \cdot \frac{3}{5} = 3\frac{2}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 3.4)$

Untuk $x_4 = 9$, maka $y_4 = 1 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + 5 \cdot \frac{4}{5} = 4\frac{1}{5} \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 4.2)$

Untuk $x_5 = 11$, maka $y_5 = 1 \cdot (1 - 1) + 5 \cdot 1 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI LINEAR



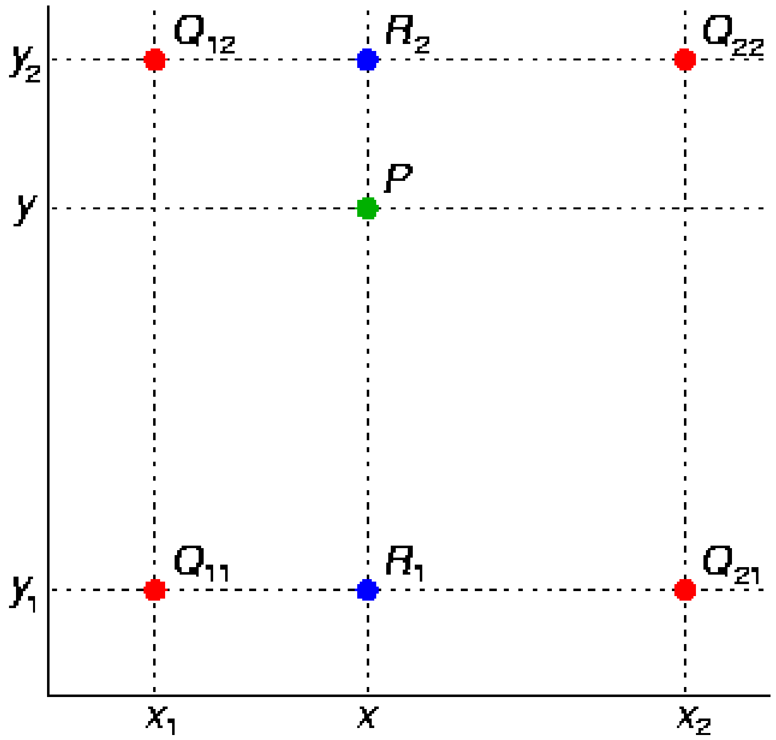
INTERPOLASI BILINEAR

Merupakan interpolasi linear pada data 2D

Dilakukan dengan cara interpolasi linear ke arah X kemudian interpolasi linear ke arah Y

Terdapat dua titik merah kemudian diinterpolasi linear terhadap X menghasilkan dua titik biru

Dua titik biru diinterpolasi linear terhadap Y menghasilkan titik hijau sebagai hasil interpolasi bilinear



INTERPOLASI BILINEAR

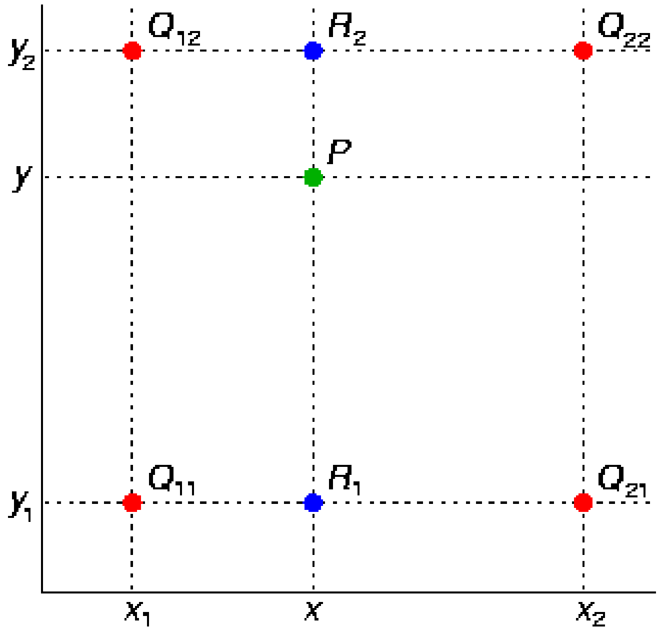
Interpolasikan terhadap sumbu X (titik biru)

$$f(x, y_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21})$$

$$f(x, y_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22})$$

Interpolasikan terhadap sumbu Y (titik hijau)

$$f(x, y) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2)$$



INTERPOLASI COSINE

Menggunakan fungsi cosine untuk melakukan interpolasi

Bila terdapat dua titik yang akan diinterpolasi yaitu:

$$(x_0, y_0) \text{ dan } (x_1, y_1)$$

Bila jarak tersebut dinormalisasi menjadi 1

Dan jarak titik sela (x_i, y_i) dengan titik awal adalah u maka:

$$y_i = y_0 \cdot \Big(1 - ((1 - \cos(u\pi))/2)\Big) + y_1 \cdot ((1 - \cos(u\pi))/2)$$

Dimana $u = \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0}$

INTERPOLASI COSINE

Hitung nilai interpolasi titik (1,1) sampai (11,5) dengan jumlah titik n = 5

Jawab:

Bila $n = 5$ maka jarak setiap titik sela $u = \frac{1}{5}$ sehingga kenaikan $u = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$

Bila $n = 5$ maka jarak setiap titik sela adalah $d = \frac{x_1 - x_0}{5} = \frac{11-1}{5} = \frac{10}{5} = 2$ sehingga kenaikan $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Menggunakan rumus interpolasi cosine $y_i = y_0 \cdot \left(1 - ((1 - \cos(u\pi))/2)\right) + y_1 \cdot ((1 - \cos(u\pi))/2)$

Untuk $x_0 = 1$, maka $y_0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$

Untuk $x_1 = 3$, maka $y_1 = 1{,}382 \Rightarrow$ koordinat titik $(3, 1.382)$

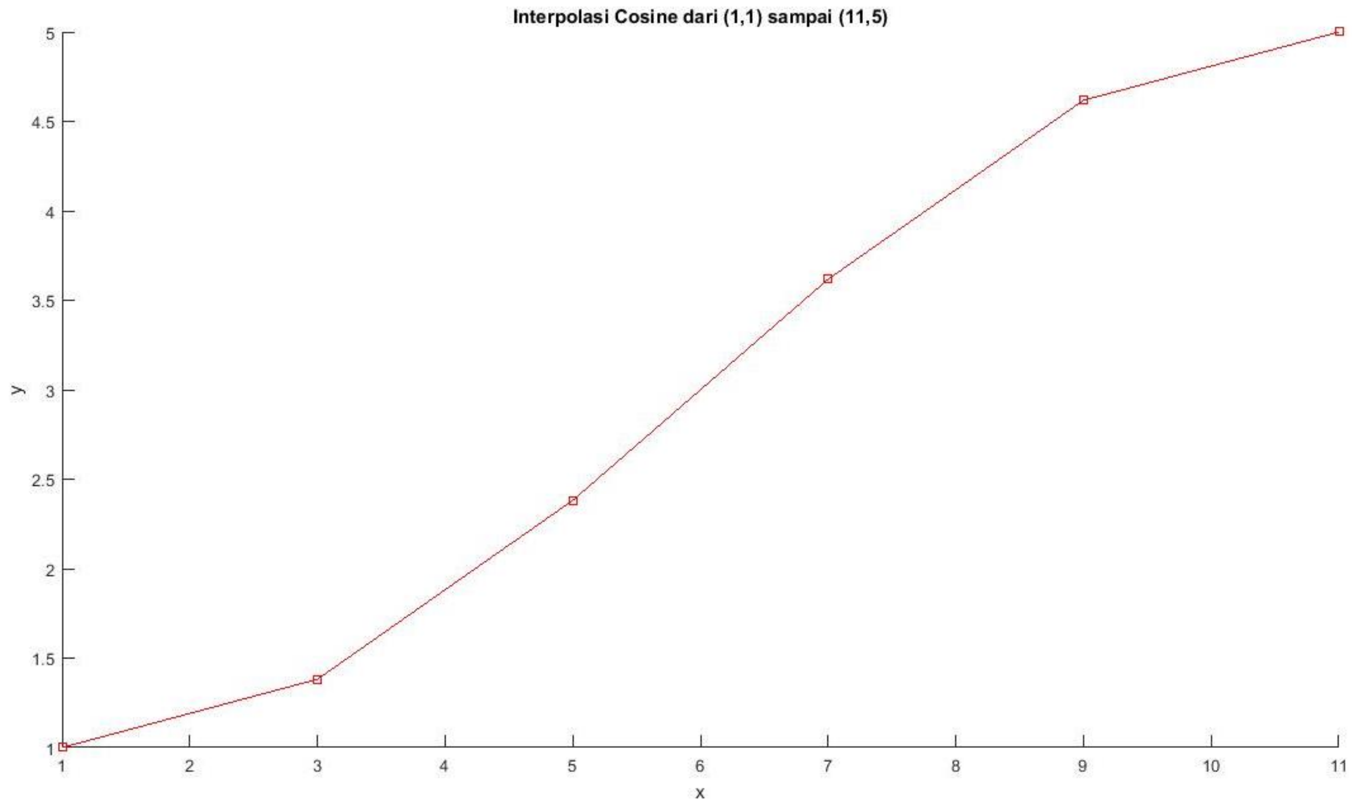
Untuk $x_2 = 5$, maka $y_2 = 2{,}382 \Rightarrow$ koordinat titik $(5, 2.382)$

Untuk $x_3 = 7$, maka $y_3 = 3{,}618 \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 3.618)$

Untuk $x_4 = 9$, maka $y_4 = 4{,}618 \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 4.618)$

Untuk $x_5 = 11$, maka $y_5 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI COSINE

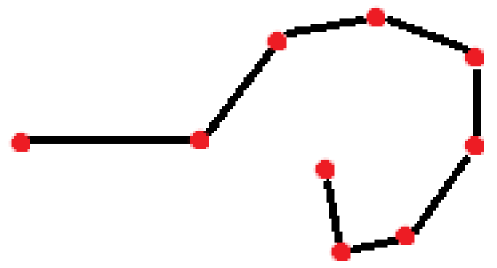


KONSEP KURVA

Dapat dimodelkan dengan :

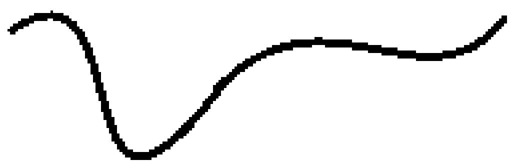
Polylines

- Rentetan titik yang terkoneksi oleh garis lurus
- Tidak terlalu halus bentuk kurvanya
- Semua kurva akan dikonversi ke bentuk polyline



Kurva

- Menggunakan fungsi
- Bentuknya halus / smooth
- Cukup sulit dalam pemodelannya



KONSEP KURVA

Kurva : Rentetan titik 1D yang berkelanjutan pada bidang 2D atau 3D

Kurva : Pemetaan sebuah interval pada bidang

Atribut Kurva : warna, ketebalan, pola, bentuk

Representasi kurva :

- Eksplisit
- Implisit
- Parametrik

REPRESENTASI EKSPLISIT

Dalam bidang x, y

Bila x variable bebas maka $y = f(x)$ atau kebalikannya $x = g(y)$

Pada bidang 3D

Bila x variable bebas maka $y = f(x)$ dan $z = g(x)$

Pada permukaan 2D

Dibutuhkan 2 variable bebas $z = f(x, y)$

Contoh:

Garis lurus : $y = mx + b$

Lingkaran : $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dan $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ untuk $0 \leq |x| \leq r$

REPRESENTASI IMPLISIT

Dalam bidang x, y, representasi implisitnya

- $f(x, y) = 0$

Pada bidang 3D, deskripsi permukaanya

- $f(x, y, z) = 0$

Contoh

- Garis lurus : $ax + by + c = 0$
- Lingkaran : $x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- Bola : $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

REPRESENTASI PARAMETRIK

Setiap variable titik pada kurva dinyatakan dengan variable bebas (parameter)

Dalam bidang 3D

- $x = x(u)$
- $y = y(u)$
- $z = z(u)$

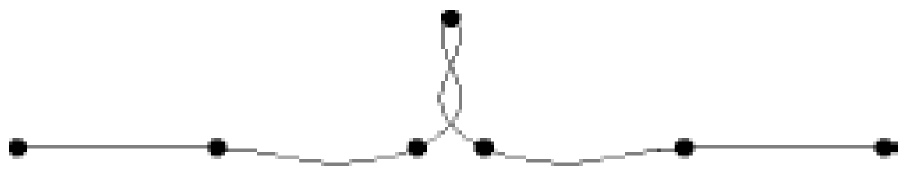
Pada permukaan membutuhkan 2 parameter

- $x = x(u, v)$
- $y = y(u, v)$
- $z = z(u, v)$

INTERPOLATION & APPROXIMATION

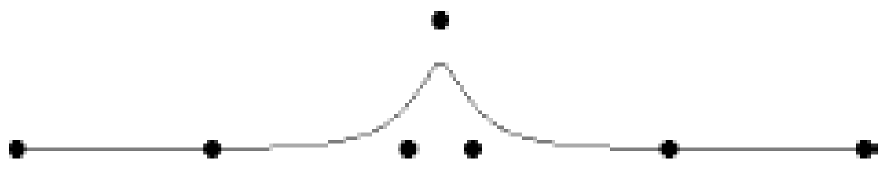
Interpolation :

- Garis akan melalui semua titik
- Tidak stabil



Approximation:

- Garis tidak selalu melalui semua titik
- Lebih stabil



KURVA POLINOMIAL

Kurva polynomial dengan derajat n didefinisikan :

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Derajat 2 = kuadrat,

Derajat 3 = kubik,

Derajat 4 = quadric,

dst

KURVA POLINOMIAL

Mendesain obyek diperlukan titik-titik yang mewakili bentuk obyek

Kurva akan dibentuk dari titik-titik tersebut (curve fitting)

Misalnya dengan polynomial kubik yang bentuk parametriknya :

$$x = a_{x0} + a_{x1}u + a_{x2}u^2 + a_{x3}u^3$$
$$\mathrm{y} = a_{y0} + a_{y1}u + a_{y2}u^2 + a_{y3}u^3$$

Dimana parameter $u = 0 \ldots 1$

Kurva kontinu yang dibentuk dari potongan kurva polynomial disebut kurva spline

INTERPOLASI KUBIK

Menggunakan fungsi pangkat tiga / kubik untuk melakukan interpolasi

Interpolasi kubik memerlukan 2 titik tambahan di ujung 2 titik utama untuk interpolasi

Bila terdapat 4 titik yang akan diinterpolasi yaitu:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ dan } (x_3, y_3)$$

Bila jarak tersebut dinormalisasi menjadi 1 dan jarak titik awal (x_0, y_0) sampai titik sela (x_i, y_i) adalah u

Dari dua titik tersebut maka persamaannya :

$$y_i = au^3 + bu^2 + cu + d$$

Alternatif koefisien yang bisa digunakan :

- $a = y_3 - y_2 - y_0 + y_1$
- $b = 2y_0 - 2y_1 - y_3 + y_2$
- $c = y_2 - y_0$
- $d = y_1$

INTERPOLASI KUBIK

Hitung nilai interpolasi titik (-5,5), **(1,1), (11,5),** dan (15,0) dengan jumlah titik n = 5

Jawab:

Bila $n = 5$ maka jarak setiap titik sela $u = \frac{1}{5}$ sehingga kenaikan $u = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$

Bila $n = 5$ maka jarak setiap titik sela adalah $d = \frac{x_1 - x_0}{5} = \frac{11-1}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Sehingga kenaikan $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

Menggunakan rumus interpolasi cubic $y_i = au^3 + bu^2 + cu + d$

Untuk $x_0 = 1$, maka $y_0 = 1 \Rightarrow$ koordinat titik $(1, 1)$

Untuk $x_1 = 3$, maka $y_1 = 1.448 \Rightarrow$ koordinat titik $(3, 1.448)$

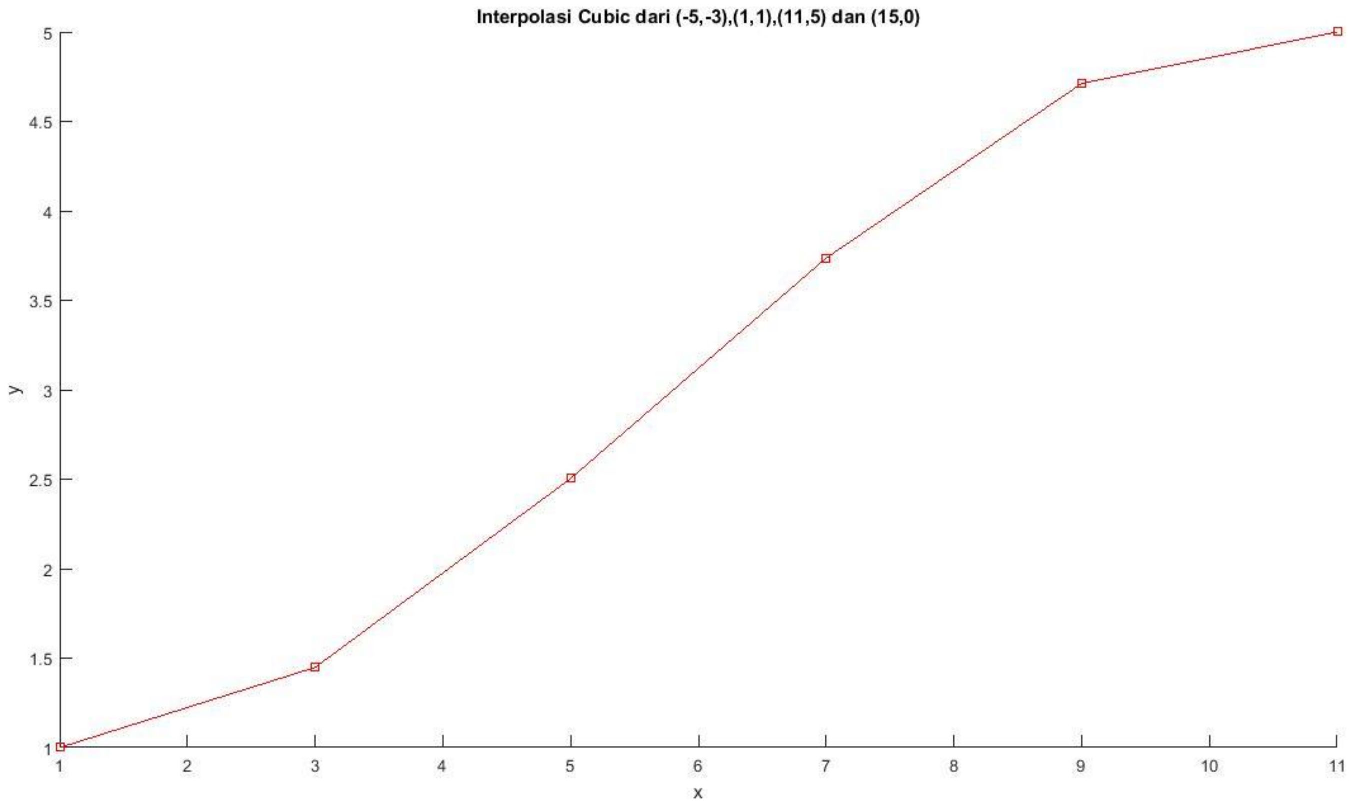
Untuk $x_2 = 5$, maka $y_2 = 2{,}504 \Rightarrow$ koordinat titik $(5, 2.504)$

Untuk $x_3 = 7$, maka $y_3 = 3{,}736 \Rightarrow$ koordinat titik $(7, 3.736)$

Untuk $x_4 = 9$, maka $y_4 = 4{,}712 \Rightarrow$ koordinat titik $(9, 4.712)$

Untuk $x_5 = 11$, maka $y_5 = 5 \Rightarrow$ koordinat titik $(11, 5)$

INTERPOLASI KUBIK



PENERAPAN INTERPOLASI

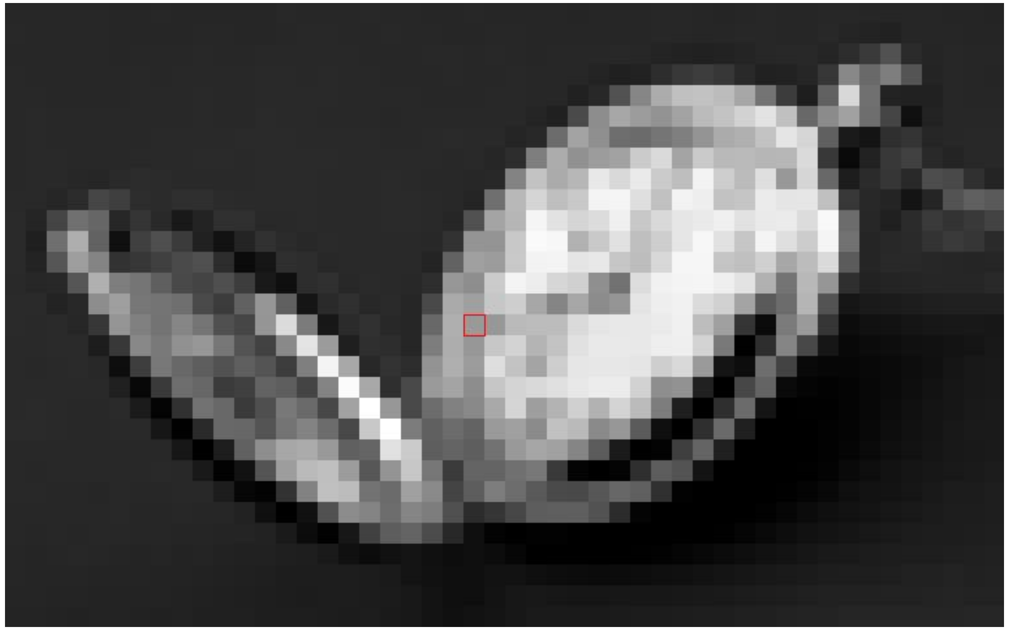
Dalam bidang pengolahan citra digunakan dalam perubahan ukuran citra dan zooming citra

Misalnya ada gambar :

Akan di zoom 16x menggunakan interpolasi

PENERAPAN INTERPOLASI

Nearest Neighbor



Linear

PENERAPAN INTERPOLASI

Bilinear

Bicubic