Persamaan differensial TAK homogen

Informatika

UAD

PD LINEAR ORDE PERTAMA

Persamaan differensial linear orde pertama bisa memiliki bentuk :

$$P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = G(x)$$

Atau

$$P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$

Bila $G(x) = 0$ disebut persamaan differensial linear homogen orde pertama

Bila $G(x) \neq 0$ disebut persamaan differensial linear tak homogen orde pertama

PD LINEAR TAK HOMOGEN ORDE PERTAMA

Persamaan differensial tak homogen orde pertama diselesaikan dengan melibatkan persamaan differensial homogen orde pertama

Misalnya :

- Persamaan 1 : $P(x)y' + Q(x)y = G(x)$
- Persamaan 2 : $P(x)y' + Q(x)y = 0$

Solusi umum dari PD tak homogen orde pertama yaitu :

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

Dimana y_p adalah solusi dari persamaan 1 (PD tak homogen) sedangkan y_c adalah solusi dari persamaan 2 (PD homogen)

SOLUSI PD LINEAR HOMOGEN ORDE PERTAMA

Bila ada bentuk PD :

- $y' \pm ky = 0$

Maka dapat diubah kedalam bentuk :

- $y' = \pm ky$

Maka penyelesaiannya

- $y = Ce^{\pm kx}$

PENYELESAIAN BILA G(x) = POLINOMIAL

Bila $G(x)$ adalah **polinomial** maka dimisalkan :

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$y'_p(x) = 2Ax + B$$

Dan penyelesaiannya menggunakan substitusi :

$$P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$
$$P(x)(2Ax + B) + Q(x)(Ax^2 + Bx + C) = G(x)$$

CONTOH

Selesaikan persamaan differensial $y - 2y' = 6x^2 - 5$

Jawab:

Langkah 1 : Tentukan persamaan differensial homogennya

- Persamaan 1 : $2y' - y = -6x^2 + 5$
- Persamaan 2 : $2y' - y = 0$

Langkah 2 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial homogennya

$$2y' - y = 0 \Rightarrow y' - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}y$$

Substitusikan kedalam $y = Ce^{kx}$

Maka penyelesaian persamaan 2 : $y_c = Ce^{\frac{1}{2}x}$

CONTOH

Langkah 3 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial tak homogennya

- $P(x)(2Ax + B) + Q(x)(Ax^2 + Bx + C) \ = G(x)$
- $2(2Ax + B) - (Ax^2 + Bx + C) = -6x^2 + 5$

Diurutkan sesuai derajat pangkatnya :

- $(-A)x^2 + (4A - B)x + (2B - C) = -6x^2 + 0x + 5$

Hitung nilai A dan B

- $-A = -6 \Rightarrow A = 6$
- $4A - B = 0 \Rightarrow 4(6) - B = 0 \Rightarrow 24 - B = 0 \Rightarrow B = 24$
- $2B - C = 5 \Rightarrow 2(24) - C = 5 \Rightarrow C = 43$

Maka solusi persamaan differensial tak homogennya :

- $y_p = Ax^2 + Bx + C = 6x^2 + 24x + 43$

Jadi solusi dari persamaan differensial $2y' - y = -6x + 5$ adalah

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x) = 6x^2 + 24x + 43 + Ce^{\frac{1}{2}x}$

PENYELESAIAN BILA $G(x) = Ce^{kx}$

Bila $G(x) = Ce^{kx}$ maka dimisalkan :

$$y_p(x) = Ae^{kx}$$
$$y'_p(x) = Ake^{kx}$$

Dan penyelesaiannya menggunakan substitusi :

$$P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$
$$P(x)(Ake^{kx}) + Q(x)(Ae^{kx}) = G(x)$$

Contoh

Selesaikan persamaan differensial $y' + 2y = 3e^{-5x}$

Jawab:

Langkah 1 : Tentukan persamaan differensial homogennya

- Persamaan 1 : $y' + 2y = 3e^{-5x}$
- Persamaan 2 : $y' + 2y = 0$

Langkah 2 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial homogennya

$$y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y$$

Substitusikan kedalam $y = Ce^{-kx}$

Maka penyelesaian persamaan 2 : $y_c = Ce^{-2x}$

CONTOH

Langkah 3 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial tak homogennya

- $P(x)(Ake^{kx}) + Q(x)(Ae^{kx}) = G(x)$
- $(-5Ae^{-5x}) + 2\ (Ae^{-5x}) = 3e^{-5x}$
- $-5Ae^{-5x} + 2Ae^{-5x} = 3e^{-5x} \Rightarrow -3Ae^{-5x} = 3e^{-5x}$

Hitung nilai A

- $-3A = 3 \Rightarrow A = -1$

Maka solusi persamaan differensial tak homogennya :

- $y_p = Ae^{-5x} = -e^{-5x}$

Jadi solusi dari persamaan differensial $y' + 2y = 3e^{-5x}$ adalah

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x) = -e^{-5x} + Ce^{-2x}$

PENYELESAIAN BILA $G(x) = C\cos kx$ atau $C\sin kx$

Bila $G(x) = C\cos kx$ atau $G(x) = C\sin kx$ maka dimisalkan :

$$y_p(x) = A\cos kx + B\sin kx$$
$$y'_p(x) = -Ak\sin kx + Bk\cos kx$$

Dan penyelesaiannya menggunakan substitusi :

$$P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$
$$P(x)(-Ak\sin kx + Bk\cos kx) + Q(x)(A\cos kx + B\sin kx) = G(x)$$

CONTOH

Selesaikan persamaan differensial $y' + 3y = \sin 2x$

Jawab:

Langkah 1 : Tentukan persamaan differensial homogennya

- Persamaan 1 : $y' + 3y = \sin 2x$
- Persamaan 2 : $y' + 3y = 0$

Langkah 2 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial homogennya

$$y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -3y$$

Substitusikan kedalam $y = Ce^{-kx}$

Maka penyelesaian persamaan 2 : $y_c = Ce^{-3x}$

CONTOH

Langkah 3 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial tak homogennya

- $P(x)(-Ak \sin kx + Bk \cos kx) + Q(x)(A \cos kx + B \sin kx) = G(x)$
- $(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + 3\ (A \cos 2x + B \sin 2x) = \sin 2x$
- $-2A \sin 2x + 2B \cos 2x + 3A \cos 2x + 3B \sin 2x = \sin 2x$
- $(3A + 2B) \cos 2x + (3B - 2A) \sin 2x = 0 + \sin 2x$

Hitung nilai A dan B

- $3A + 2B = 0 \Rightarrow A = -\frac{2}{3}B$
- $3B - 2A = 1 \Rightarrow 3B - 2\left(-\frac{2}{3}B\right) = 1 \Rightarrow \frac{13}{3}B = 1 \Rightarrow B = \frac{3}{13}$
- $A = -\frac{2}{3}B = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{13}\right) = -\frac{2}{13}$

CONTOH

Maka solusi persamaan differensial tak homogennya :

- $y_p = A\cos kx + B\sin kx = -\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x$

Jadi solusi dari persamaan differensial $y" + y' - 2y = \sin\ x$ adalah

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x) = -\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x + Ce^{-3x}$

PENYELESAIAN LAIN

Bila $G(x) = f(x) + g(x)$

Maka penyelesaiannya :

- $y(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_c(x)$

Dimana :

- $y_{p1}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
- $y_{p2}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = g(x)$
- $y_c(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = 0$

PENYELESAIAN LAIN

Bila $G(x) = f(x)g(x)$

Maka penyelesaiannya :

- $y(x) = y_{p1}(x) \cdot y_{p2}(x) + y_c(x)$

Dimana :

- $y_{p1}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
- $y_{p2}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = g(x)$
- $y_c(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = 0$

PENYELESAIAN LAIN

Bila $G(x) = f(x)$

Maka penyelesaiannya :

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$

Dimana :

- $y_p(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
- $y_c(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y' + Q(x)y = 0$

Tapi bila ternyata $y_p(x) = y_c(x)$ maka penyelesain untuk PD tak homogennya dikalikan x atau x^2 agar beda

- $y_p(x) = x \cdot y_p(x)$

Atau

- $y_p(x) = x^2 \cdot y_p(x)$

PD LINEAR ORDE KEDUA

Persamaan differensial linear orde kedua mempunyai bentuk dasar :

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

atau

$$P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

Dimana $P(x), Q(x), R(x), G(x)$ adalah fungsi variable x

- Bila $G(x) = 0$ disebut persamaan differensial homogen orde kedua
- Bila $G(x) \neq 0$ disebut persamaan differensial tak homogen orde kedua

PD LINEAR TAK HOMOGEN ORDE KEDUA

Persamaan differensial tak homogen orde kedua diselesaikan dengan melibatkan persamaan differensial homogen orde kedua

Misalnya :

- Persamaan 1 : $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$
- Persamaan 2 : $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$

Solusi umum dari PD tak homogen orde kedua :

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

Dimana y_p adalah solusi dari persamaan 1 (PD tak homogen) sedangkan y_c adalah solusi dari persamaan 2 (PD homogen)

PENYELESAIAN BILA G(x) = POLINOMIAL

Bila $G(x)$ adalah **polinomial** maka dimisalkan :

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$y'_p(x) = 2Ax + B$$
$$y''_p(x) = 2A$$

Dan penyelesaiannya menggunakan substitusi :

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$
$$P(x)(2A) + Q(x)(2Ax + B) + R(x)(Ax^2 + Bx + C) = G(x)$$

CONTOH

Selesaikan persamaan differensial $y'' + y' - 2y = x^2$

Jawab:

Langkah 1 : Tentukan persamaan differensial homogennya

- Persamaan 1 : $y'' + y' - 2y = x^2$
- Persamaan 2 : $y'' + y' - 2y = 0$

Langkah 2 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial homogennya

$$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0$$
$$(m+2)(m-1) \Rightarrow m_1 = -2, \qquad m_2 = 1$$

Maka penyelesaian persamaan 2 : $y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$

CONTOH

Langkah 3 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial tak homogennya

- $P(x)(2A) + Q(x)(2Ax + B) + R(x)(Ax^2 + Bx + C) = G(x)$
- $(2A) + \ (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$
- $2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2$

Diurutkan sesuai derajat pangkatnya :

- $(-2A)x^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2 + 0x + 0$

Hitung nilai A, B dan C

- $-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$
- $2A - 2B = 0 \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 2B = 0 \Rightarrow -1 - 2B = 0 \Rightarrow 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$
- $2A + B - 2C = 0 \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2C = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} - 2C = 0 \Rightarrow 2c = -\frac{3}{2} \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$

CONTOH

Maka solusi persamaan differensial tak homogennya :

- $y_p = Ax^2 + Bx + C = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

Jadi solusi dari persamaan differensial $y'' + y' - 2y = x^2$ adalah

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + C_1e^{-2x} + C_2e^x$

PENYELESAIAN BILA $G(x) = Ce^{kx}$

Bila $G(x) = Ce^{kx}$ maka dimisalkan :

$$y_p(x) = Ae^{kx}$$
$$y'_p(x) = Ake^{kx}$$
$$y''_p(x) = Ak^2e^{kx}$$

Dan penyelesaiannya menggunakan substitusi :

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$
$$P(x)(Ak^2e^{kx}) + Q(x)(Ake^{kx}) + R(x)(Ae^{kx}) = G(x)$$

Contoh

Selesaikan persamaan differensial $y'' + 4y = e^{3x}$

Jawab:

Langkah 1 : Tentukan persamaan differensial homogennya

- Persamaan 1 : $y'' + 4y = e^{3x}$
- Persamaan 2 : $y'' + 4y = 0$

Langkah 2 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial homogennya

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow m^2 + 4 = 0$$
$$m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i$$

Maka penyelesaian persamaan 2 : $y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

CONTOH

Langkah 3 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial tak homogennya

- $P(x)(Ak^2e^{kx}) + Q(x)(Ake^{kx}) + R(x)(Ae^{kx}) = G(x)$
- $((3)^2Ae^{3x}) + 4\ (Ae^{3x}) = e^{3x}$
- $9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow 13Ae^{3x} = e^{3x}$

Hitung nilai A

- $13A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{13}$

Maka solusi persamaan differensial tak homogennya :

- $y_p = Ae^{3x} = \frac{1}{13}e^{3x}$

Jadi solusi dari persamaan differensial $y" + 4y = e^{3x}$ adalah

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x) = \frac{1}{13}e^{3x} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

PENYELESAIAN BILA $G(x) = C \cos kx$ atau $C \sin kx$

Bila $G(x) = C \cos kx$ atau $G(x) = C \sin kx$ maka dimisalkan :

$$y_p(x) = A \cos kx + B \sin kx$$
$$y'_p(x) = -Ak \sin kx + Bk \cos kx$$
$$y''_p(x) = -Ak^2 \cos kx - Bk^2 \sin kx$$

Dan penyelesaiannya menggunakan substitusi :

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$
$$P(x)(-Ak^2 \cos kx - Bk^2 \sin kx) + Q(x)(-Ak \sin kx + Bk \cos kx) + R(x)(A \cos kx + B \sin kx) = G(x)$$

Contoh

Selesaikan persamaan differensial $y'' + y' - 2y = \sin\ x$

Jawab:

Langkah 1 : Tentukan persamaan differensial homogennya

- Persamaan 1 : $y'' + y' - 2y = \sin\ x$
- Persamaan 2 : $y'' + y' - 2y = 0$

Langkah 2 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial homogennya

$$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0$$
$$(m + 2)(m - 1) \Rightarrow m_1 = -2, \qquad m_2 = 1$$

Maka penyelesaian persamaan 2 : $y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

CONTOH

Langkah 3 : Hitung penyelesaian dari persamaan differensial tak homogennya

- $P(x)(-Ak^2 \cos kx - Bk^2 \sin kx) + Q(x)(-Ak \sin kx + Bk \cos kx) + R(x)(A \cos kx + B \sin kx) = G(x)$
- $(-A \cos x - B \sin x) + (-A \sin x + B \cos x) - 2\,(A \cos x + B \sin x) = \sin x$
- $-3A \cos x - 3B \sin x - A \sin x + B \cos x = \sin x$
- $(-3A + B) \cos x + (-3B - A) \sin x = 0 + \sin x$

Hitung nilai A dan B

- $-3A + B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}B$
- $-3B - A = 1 \Rightarrow -3B - \left(\frac{1}{3}B\right) = 1 \Rightarrow -\frac{10}{3}B = 1 \Rightarrow B = -\frac{3}{10}$
- $A = \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{1}{10}$

CONTOH

Maka solusi persamaan differensial tak homogennya :

- $y_p = A\cos kx + B\sin kx = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$

Jadi solusi dari persamaan differensial $y" + y' - 2y = \sin\ x$ adalah

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x) = -\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + C_1e^{-2x} + C_2e^x$

PENYELESAIAN LAIN

Bila $G(x) = f(x) + g(x)$

Maka penyelesaiannya :

- $y(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_c(x)$

Dimana :

- $y_{p1}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$
- $y_{p2}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = g(x)$
- $y_c(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$

PENYELESAIAN LAIN

Bila $G(x) = f(x)g(x)$

Maka penyelesaiannya :

- $y(x) = y_{p1}(x) \cdot y_{p2}(x) + y_c(x)$

Dimana :

- $y_{p1}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$
- $y_{p2}(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = g(x)$
- $y_c(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = 0$

PENYELESAIAN LAIN

Bila $G(x) = f(x)$

Maka penyelesaiannya :

- $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$

Dimana :

- $y_p(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$
- $y_c(x)$ adalah penyelesaian dari $P(x)y" + Q(x)y' + R(x)y = 0$

Tapi bila ternyata $y_p(x) = y_c(x)$ maka penyelesain untuk PD tak homogennya dikalikan x atau x^2 agar beda

- $y_p(x) = x \cdot y_p(x)$

Atau

- $y_p(x) = x^2 \cdot y_p(x)$