

PERTEMUAN 7

TURUNAN TINGKAT TINGGI

DAN TURUNAN PARSIAL

Informatika

Universitas Ahmad Dahlan

TURUNAN TINGKAT TINGGI

- $y' = \frac{dy}{dx}$ turunan pertama
- $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ turunan kedua
- $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$ turunan ketiga
- $y'''' = y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$ turunan keempat
- $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ turunan ke-n

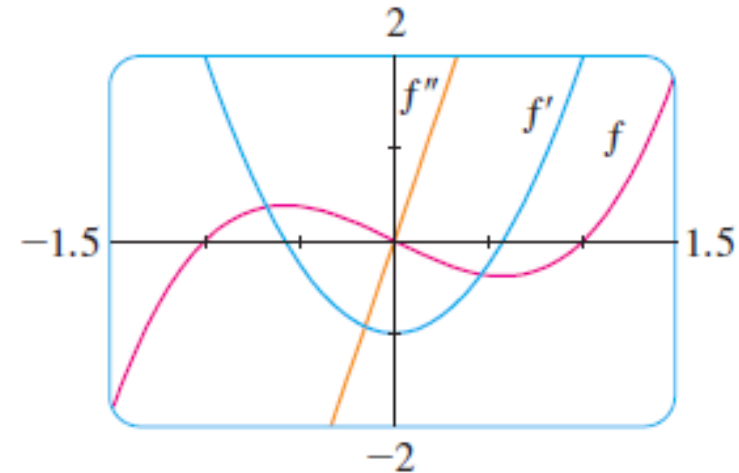
CONTOH

Hitung turunan kedua dari $f(x) = x^3 - x$

Turunan pertamanya $f'(x) = 3x^2 - 1$

Turunan keduanya

- $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$
- $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$
- $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$
- $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x$



TURUNAN IMPLISIT

Turunan implisit menggunakan dua variabel dalam turunannya

Turunan dengan satu variable misalnya:

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \text{ atau } y = x \sin x$$

Turunan dengan dua variable misalnya :

$$x^2 + y^2 = 25 \text{ atau } x^3 + y^3 = 6xy$$

Turunan dua variable dapat diselesaikan dengan aturan rantai

CONTOH (1)

Hitung $\frac{dy}{dx}$ bila $x^2 + y^2 = 25$!

Jawab

Langkah 1 diturunankan di kedua sisi :

- $\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} (25)$
- $\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (25)$
- $2x + \frac{d}{dx} (y^2) = 0$

Karena y adalah fungsi x maka untuk menyelesaikan $\frac{d}{dx} (y^2)$, digunakan chain rule :

$$\frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dy} (y^2) \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

Turunannya menjadi :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

Sehingga $\frac{dy}{dx}$ menjadi :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

CONTOH (2)

Hitung y' bila $x^3 + y^3 = 6xy$!

Hitung persamaan tangen dititik (3, 3)

Jawab

Turunannya :

- $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$
- $y'(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2$
- $y' = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$

Persamaan tangen nya dititik (3, 3)

- $m = \frac{2(3)-(3)^2}{(3)^2-2(3)} = -1$
- $y - y_1 = m(x - x_1)$
- $y - 3 = -1(x - 3)$
- $y + x = 6$

LATIHAN

Hitung turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dari :

- $x^2 + xy + y^2 = 3$
- $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
- $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$
- $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$
- $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

TURUNAN PARSIAL

Jika f merupakan fungsi dari dua variable maka turunan parsial dari f_x dan f_y :

Untuk mencari f_x : anggap y sebagai konstanta kemudian menghitung turunan $f(x, y)$ terhadap x

Untuk mencari f_y : anggap x sebagai konstanta kemudian menghitung turunan $f(x, y)$ terhadap y

Penulisan notasi turunan parsial

- $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D_x f$
- $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = D_y f$

CONTOH

Hitung $f_x(2,1)$ dan $f_y(2,1)$ bila diketahui $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

Jawab

Untuk menghitung f_x kita anggap y sebagai konstanta kemudian menghitung turunan $f(x,y)$ terhadap x :

- $f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$

Maka $f_x(2,1) = 3(2)^2 + 2(2)(1)^3 = 12 + 4 = 16$

Untuk menghitung f_y kita anggap x sebagai konstanta kemudian menghitung turunan $f(x,y)$ terhadap y :

- $f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$

Maka $f_y(2,1) = 3(2)^2(1)^2 - 4(1) = 12 - 4 = 8$

TURUNAN PARSIAL TINGKAT TINGGI

Jika f adalah fungsi dengan dua variable maka turunan parsialnya f_x dan f_y juga merupakan fungsi dengan dua variable
Maka turunan parsial tingkat dua dari f_x dan f_y yaitu $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ dan $(f_y)_y$

- $(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- $(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
- $(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
- $(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Jika f_{xy} dan f_{yx} kontinu maka

- $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$

CONTOH

Hitung turunan tingkat dua dari $x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

- $f_x = 3x^2 + 2xy^3$
- $f_y = 3x^2y^2 - 4y$

Maka

- $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$
- $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$
- $f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$
- $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$

LATIHAN

Hitung turunan parsial tingkat pertama-nya:

- $f(x, y) = y^5 + 3xy$
- $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$
- $f(x, y) = e^y \cos x$
- $f(x, y) = \sqrt{x} \ln y$
- $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

Hitung turunan parsial tingkat kedua dari persamaan diatas!