INTEGRAL TAK TENTU

Informatika

UAD

DEFINISI

Jika $F(x)$ adalah sebuah **Fungsi** yang turunannya $F'(x) = f(x)$ di rentang tertentu pada sumbu x maka $F(x)$ disebut anti-derivatif atau integral tak tentu (indefinite integral) dari $f(x)$

Misalnya:

- $x^2,\ x^2+5,\ \ x^2-3$ merupakan integral tak tentu dari $f(x) = 2x$
- karena $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{d}{dx}(x^2-4) = 2x$ terangkum dalam bentuk $F(x) = x^2 + C$ dimana C adalah konstanta

Simbol $\int f(x)\,dx$ digunakan untuk mengindikasikan integral tak tentu

RUMUS DASAR INTEGRAL

- $\int k\, x^n\, dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + C$ dengan syarat $n \neq -1$
- $\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$
- $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
- $\int k\, dx = kx + C$

INTEGRAL TRIGONOMETRI

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C$
- $\int \cot x \, dx = -\ln|\csc x| + C$
- $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$
- $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$
- $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$
- $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \sin^m x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x \, dx$
- $\int \cos^m x \, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x \, dx$
- $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C$

INTEGRAL EKSPONENSIAL DAN LOGARITMA

- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0$

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- $\int \ln x \, dx = x \ln |x| - x + C$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, a > 0, a \neq 1$

CONTOH

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$$

$$= -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

CONTOH

$$\int (2x + 3x^2)\, dx = \int 2x\, dx + \int 3x^2\, dx$$

$$= 2\int x\, dx + 3\int x^2\, dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) + C$$

$$= x^2 + x^3 + C$$

CONTOH

$$\int \left(\frac{2x^2+5}{4x}\right) dx = \int \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}x^{-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{5}{4}(\ln x) + C$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}\ln x + C$$

INTEGRAL SUBSTITUSI

Substitusi x dengan variable u berguna dalam menyelesaikan persamaan integral $\int f(x)\,dx$

Persamaannya menjadi :

$$\int f(x)\,dx = \int \big(g(u)\big)g'(u)\,du$$

CONTOH

$$\int (2x+2)^{10}\,dx$$

- Langkah 1 : Dimisalkan $u = 2x + 2$
- Langkah 2 : Hitung $du = 2\,dx$ => $dx = \frac{1}{2}du$
- Langkah 3 : Masukkan ke dalam bentuk rumus diatas

$$\int (2x+2)^{10} = \frac{1}{2}\int u^{10}\;du$$

- Langkah 4 : Kembalikan lagi u ke nilai semula

$$\int (2x+2)^{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}\right)u^{11} + C = \frac{1}{22}(2x+2)^{11} + C$$

CONTOH

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$$

- Langkah 1 : Dimisalkan $u = \ln x$
- Langkah 2 : Hitung $du = \frac{1}{x} dx$
- Langkah 3 : Masukkan ke dalam bentuk rumus diatas

$$\int \frac{1}{x} (\ln x)^2 = \int u^2 \, du$$

- Langkah 4 : Kembalikan lagi u ke nilai semula

$$\int \frac{1}{x} (\ln x)^2 = \frac{1}{3} (u)^3 + C = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$$

CONTOH

$$\int 3x^4\,(2x^5+10)^3 dx$$

- Langkah 1 : Dimisalkan $u = 2x^5 + 10$
- Langkah 2 : Hitung $du = 10x^4 dx, \quad dx = \frac{1}{10x^4} du$
- Langkah 3 : Masukkan ke dalam bentuk rumus diatas

$$\int 3x^4\,(2x^5+10)^3 dx = \int \frac{3x^4}{10x^4} u^3\, du$$

- Langkah 4 : Kembalikan lagi u ke nilai semula

$$\int 3x^4\,(2x^5+10)^3 dx = \frac{3}{10}\frac{1}{4}(u)^4 + C = \frac{3}{40}(2x^5+10)^4 + C$$

INTEGRAL PARSIAL

$$d(uv) = \ du\, v + u\, dv$$
$$u\, dv = d(uv) - v\, du$$

$$\boldsymbol{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

Aturan umum :

- Pilih u yang mudah diselesaikan
- Bagian yang dipilih untuk dv harus bisa diintegralkan
- $\int v\, du$ harus lebih sederhana dari $\int u\, dv$

Perbedaan integral parsial dan integral subtitusi

- Jika turunannya ada hubungannya dengan bagian yang lain maka pakai integral Substitusi. Jika turunannya tidak ada hubungannya dengan bagian yang lain (biasanya ada x yang belum bisa diubah dalam u) maka pakai integral Parsial.
- Subtitusi:
  - $\int 8x\,(4x^2+6)^3 dx$
- Parsial
  - $\int 6x\,(3x+7)^8 dx$

CONTOH

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

- Langkah 1 : Dimisalkan $u = \ln x$ dan $dv = x^2 dx$
- Langkah 2 : Hitung $du = \frac{1}{x} dx$ dan $v = \frac{1}{3} x^3$
- Langkah 3 : Masukkan ke dalam bentuk rumus diatas

$$\int x^2 \ln x \, dx = \ln x \left(\frac{1}{3} x^3\right) - \int \left(\frac{1}{3} x^3\right) \frac{1}{x} \, dx$$

- Langkah 4 : Selesaikan persamaannya

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

CONTOH

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx$$

- Langkah 1 : Dimisalkan $u = x$ dan $dv = \sqrt{1+x}\,dx$
- Langkah 2 : Hitung $du = dx$ dan $v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$
- Langkah 3 : Masukkan ke dalam bentuk rumus diatas

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = x\left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

- Langkah 4 : Selesaikan persamaannya

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}}\ + C$$

CONTOH

$$\int x^3\, e^{x^2} dx$$

- Langkah 1 : Dimisalkan $u = x^2$ dan $dv = xe^{x^2} dx$
- Langkah 2 : Hitung $du = 2x\ dx$ dan $v = \frac{1}{2} e^{x^2}$
- Langkah 3 : Masukkan ke dalam bentuk rumus diatas

$$\int x^3 e^{x^2} dx = x^2 \left(\frac{1}{2} e^{x^2}\right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{x^2}\right) 2x\ dx$$

- Langkah 4 : Selesaikan persamaannya

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

LATIHAN (Silahkan dituliskan caranya)

1. $\int (x^5+4)^2(5x^4)dx = \frac{1}{3}x^{15} + 4x^{10} + 16x^5 + C$
2. $\int (x^4+2)^{\frac{1}{2}}x^3 dx = \frac{1}{6}(x^4+2)^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\int \frac{2x^2}{(x^3+4)^3}dx = -\frac{1}{3(x^3+4)^2} + C$
4. $\int 3x^2(x^3+5)^2\,dx = \frac{1}{3}x^9 + 5x^6 + 25x^3 + C$
5. $\int 2x\sqrt{1-5x^2}dx = -\frac{2}{15}(-5x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

1. $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C$
2. $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{105}(1+x)^{\frac{3}{2}}(15x^2 - 12x + 8) + C$
3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15}(1+x)^{\frac{1}{2}}(3x^2 - 4x + 8) + C$
4. $\int 2x\sin x\,dx = 2\sin x - 2x\cos x + C$
5. $\int 2x\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{4}{15}(2+3x)(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$

Stop

LATIHAN

1. $\int (x^5+4)^2(5x^4)dx = \frac{1}{3}x^{15} + 4x^{10} + 16x^5 + C$
2. $\int (x^4+2)^{\frac{1}{2}}x^3 dx = \frac{1}{6}(x^4+2)^{\frac{3}{2}} + C$
3. $\int \frac{2x^2}{(x^3+4)^3}dx = -\frac{1}{3(x^3+4)^2} + C$
4. $\int 3x^2(x^3+5)^2\,dx = \frac{1}{3}x^9 + 5x^6 + 25x^3 + C$
5. $\int 2x\sqrt{1-5x^2}dx = -\frac{2}{15}(-5x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

LATIHAN

1. $\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + C$
2. $\int x^2\sqrt{1+x} \, dx = \frac{2}{105}(1+x)^{\frac{3}{2}}(15x^2 - 12x + 8) + C$
3. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15}(1+x)^{\frac{1}{2}}(3x^2 - 4x + 8) + C$
4. $\int 2x \sin x \, dx = 2 \sin x - 2x \cos x + C$
5. $\int 2x\sqrt{1-x} \, dx = -\frac{4}{15}(2+3x)(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$

INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Fungsi rasional bila ada fungsi $\mathrm{F(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan polynomial

Fungsi polynomial $ax^2 + bx + c$ bisa disederhanakan

bila $b^2 - 4ac > 0$

Misal :

- $x^2 - x + 1$ tidak bisa disederhanakan lagi karena $(-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$
- $x^2 - x - 1$ bisa disederhanakan karena $(-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$
- $x^2 - x - 1 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

FUNGSI RASIONAL

- Pada fungsi rasional, derajat pangkat $f(x)$ sebaiknya lebih kecil dari $g(x)$
- Bila tidak maka dibuat lebih kecil dengan penjumlahan polynomial

$$\frac{f(x)}{g(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

- Misalnya:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

FUNGSI RASIONAL : KASUS 1

- Bila penyebut $g(x)$ merupakan perkalian faktor linear yang berbeda

$$g(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n)$$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots . + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$

- Dengan $A_1, A_2, \dots A_n$ adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$
- **Langkah 1** : Cek derajat pangkat penyebut, karena sudah lebih besar dari pembilang maka tidak perlu dibagi
- **Langkah 2** : Faktorkan penyebut

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

- **Langkah 3** : Penyebut memiliki 3 faktor yang berbeda maka dibuat ke bentuk I

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

CONTOH

- **Langkah 4** : Cari nilai A, B, dan C

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$
$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

$$2A + B + 2C = 1$$
$$3A + 2B - C = 2$$
$$-2A = -1$$

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{1}{5}, \qquad C = -\frac{1}{10}$$

CONTOH

- **Langkah 5 :** Masukkan ke persamaan integralnya

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

FUNGSI RASIONAL : KASUS II

- Bila penyebut $g(x)$ merupakan perkalian faktor linear yang berulang

$$g(x) = (a_1x + b_1)^1(a_2x + b_2)^2 \dots (a_nx + b_n)^n$$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)^2} + \cdots . + \frac{A_n}{(a_nx+b_n)^n}$

- Dengan $A_1, A_2, \dots A_n$ adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$
- **Langkah 1** : Cek penyebut, karena derajat pangkat pembilang lebih besar maka perlu dibagi

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

- **Langkah 2** : Faktorkan penyebut

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)$$

CONTOH

- **Langkah 3** : Karena ada faktor yang berulang maka jadikan ke bentuk II

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

- **Langkah 4** : Cari nilai A, B dan C dengan mengalikan penyebut

$$4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$
$$4x = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

$$A + C = 0$$
$$B - 2C = 4$$
$$-A + B + C = 0$$

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = -1$$

CONTOH

$$\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

- **Langkah 5** : Masukkan lagi ke persamaan integral

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

FUNGSI RASIONAL KASUS III

- Bila penyebut $g(x)$ memuat factor kuadrat yang tidak bisa disederhanakan dan tidak berulang
- $g(x)$ mempunyai factor $ax^2 + bx + c$
- dengan $b^2 - 4ac < 0$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

- Dengan A, B adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$
- **Langkah 1** : Cek penyebut, karena derajat pangkatnya sudah lebih besar maka tidak perlu dibagi
- **Langkah 2** : Penyebut tidak bisa difaktorkan lebih jauh

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

- **Langkah 3** : Karena ada persamaan kuadrat yang tidak bisa difaktorkan maka gunakan bentuk III

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

CONTOH

- **Langkah 4** : Cari nilai A, B dan C

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

$$A + B = 2$$
$$C = -1$$
$$4A = 4$$

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = -1$$

CONTOH

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

- **Langkah 5** : Selesaikan persamaan integralnya

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

FUNGSI RASIONAL KASUS IV

- Bila penyebut $g(x)$ memuat factor kuadrat yang tidak bisa disederhanakan dan berulang
- $g(x)$ mempunyai factor $(ax^2 + bx + c)^n$
- dengan $b^2 - 4ac < 0$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

- Dengan A, B adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$
- **Langkah 1 :** Cek penyebut, derajat pangkat penyebut sudah lebih besar dari pembilang
- **Langkah 2** : Penyebut tidak bisa difaktorkan lagi
- **Langkah 3** : Karena ada persamaan kuadrat yang berulang dan tidak bisa disederhanakan lagi maka gunakan bentuk IV

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

CONTOH

- **Langkah 4 :** Kalikan dengan penyebut

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx + C)x(x^2+1) + (Dx + E)x$$
$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$
$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

$$A + B = 0$$
$$C = -1$$
$$2A + B + D = 2$$
$$C + E = -1$$
$$A = 1$$

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = -1, \qquad D = 1, \qquad E = 0$$

CONTOH

- **Langkah 5** : Selesaikan persamaan integralnya

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$