

PERTEMUAN 5

TURUNAN FUNGSI ALJABAR

Informatika

Universitas Ahmad Dahlan

DEFINISI TURUNAN

Turunan fungsi f pada bilangan a didefinisikan sebagai:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Bila $x = a + h$ maka $h = x - a$ dan h mendekati 0 jika x mendekati a sehingga persamaan turunannya

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

CONTOH

Hitung turunan dari $f(x) = x^3 + x + 13$

Jawab :

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h) + 13 - (x^3 + x + 13)}{h}$
- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x + h + 13 - x^3 - x - 13}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + h}{h}$
- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 + 1 = 3x^2 + 1$

NOTASI TURUNAN

- $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$
- $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a}$ atau $\frac{dy}{dx} \Big]_{x=a}$

ATURAN PANGKAT

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Contoh

- $f(x) = x^4$
- $f'(x) = 4x^3$
- $f(x) = x^8$
- $f'(x) = 8x^7$

ATURAN PERKALIAN DENGAN KONSTAN

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

Contoh

- $\frac{d}{dx} cx^n = cnx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} 7x^5 = 7 \cdot 5x^4 = 35x^4$

ATURAN PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

Contoh

- $y = x^4 + 12x$
- $y' = 4x^3 + 12$
- $y = x^4 + 2x^2 + 2$
- $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x$

ATURAN PERKALIAN

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$d(uv) = u \, dv + v \, du$$

Contoh:

- $\frac{d}{dx}[(x^2 + 3)(2x^3 + 5x)] = (x^2 + 3)(6x^2 + 5) + (2x^3 + 5x)(2x)$
- $\frac{d}{dx}(2x^5 + 5x^3 + 6x^3 + 15x)$
- $\frac{d}{dx}(2x^5 + 11x^3 + 15x)$

ATURAN PEMBAGIAN

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{v \, du - u \, dv}{v^2}$$

Contoh

$$\bullet \frac{d}{dx} \left(\frac{2x^3 + 5x}{x^2 + 3} \right) = \frac{(x^2 + 3)(6x^2 + 5) - (2x^3 + 5x)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$$

ATURAN RANTAI

- Bila g differentiable di x dan f differentiable di $g(x)$ maka fungsi komposisi $F = f \circ g$ yang didefinisikan sebagai $F(x) = f(g(x))$ juga differentiable di x dan F' dirumuskan :

$$F'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

- Atau dituliskan

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

CONTOH

Hitung $F'(x)$ bila $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Kita misalkan $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ dimana

- $f(u) = \sqrt{u}$ dan $g(x) = u = x^2 + 1$

Sehingga

- $f'(u) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ dan $g'(x) = 2x$

Maka

- $F'(x) = f'(g(x)) g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

LATIHAN

Hitung turunan dari :

- $f(x) = 2$
- $f(x) = x^{1/2}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ untuk $x \neq 0$
- $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$
- $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$
- $f(x) = \sqrt{3x+1}$
- $f(x) = \sqrt{5x^2+5}$