Integral Tak Tentu

Informatika

UAD

INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Fungsi rasional bila ada fungsi $\mathrm{F(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan polynomial

Fungsi polynomial $ax^2 + bx + c$ bisa disederhanakan

bila $b^2 - 4ac > 0$

Misal :

- $x^2 - x + 1$ tidak bisa disederhanakan lagi karena $(-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$
- $x^2 - x - 1$ bisa disederhanakan karena $(-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$
- $x^2 - x - 1 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

FUNGSI RASIONAL

- Pada fungsi rasional, derajat pangkat $f(x)$ sebaiknya lebih kecil dari $g(x)$
- Bila tidak maka dibuat lebih kecil dengan penjumlahan polynomial

$$\frac{f(x)}{g(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

- Misalnya:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

FUNGSI RASIONAL : KASUS 1

- Bila penyebut $g(x)$ merupakan perkalian faktor linear yang berbeda

$$g(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_nx + b_n)$$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots . + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$

- Dengan $A_1, A_2, \ldots A_n$ adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$
- **Langkah 1** : Cek derajat pangkat penyebut, karena sudah lebih besar dari pembilang maka tidak perlu dibagi
- **Langkah 2** : Faktorkan penyebut

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

- **Langkah 3** : Penyebut memiliki 3 faktor yang berbeda maka dibuat ke bentuk I

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

CONTOH

- **Langkah 4** : Cari nilai A, B, dan C

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$
$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

$$2A + B + 2C = 1$$
$$3A + 2B - C = 2$$
$$-2A = -1$$

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{1}{5}, \qquad C = -\frac{1}{10}$$

CONTOH

- **Langkah 5 :** Masukkan ke persamaan integralnya

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

FUNGSI RASIONAL : KASUS II

- Bila penyebut $g(x)$ merupakan perkalian faktor linear yang berulang

$$g(x) = (a_1x + b_1)^1(a_2x + b_2)^2 \ldots (a_nx + b_n)^n$$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)^2} + \cdots . + \frac{A_n}{(a_nx+b_n)^n}$

- Dengan $A_1, A_2, \ldots A_n$ adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$
- **Langkah 1** : Cek penyebut, karena derajat pangkat pembilang lebih besar maka perlu dibagi

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

- **Langkah 2** : Faktorkan penyebut

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)$$

$$=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1)$$

CONTOH

- **Langkah 3** : Karena ada faktor yang berulang maka jadikan ke bentuk II

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

- **Langkah 4** : Cari nilai A, B dan C dengan mengalikan penyebut

$$4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$
$$4x = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

$$A + C = 0$$
$$B - 2C = 4$$
$$-A + B + C = 0$$

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = -1$$

CONTOH

$$\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

- **Langkah 5** : Masukkan lagi ke persamaan integral

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

FUNGSI RASIONAL KASUS III

- Bila penyebut $g(x)$ memuat factor kuadrat yang tidak bisa disederhanakan dan tidak berulang
- $g(x)$ mempunyai factor $ax^2 + bx + c$
- dengan $b^2 - 4ac < 0$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

- Dengan A, B adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$
- **Langkah 1** : Cek penyebut, karena derajat pangkatnya sudah lebih besar maka tidak perlu dibagi
- **Langkah 2** : Penyebut tidak bisa difaktorkan lebih jauh

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

- **Langkah 3** : Karena ada persamaan kuadrat yang tidak bisa difaktorkan maka gunakan bentuk III

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

CONTOH

- **Langkah 4** : Cari nilai A, B dan C

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

$$A + B = 2$$
$$C = -1$$
$$4A = 4$$

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = -1$$

CONTOH

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

- **Langkah 5** : Selesaikan persamaan integralnya

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

FUNGSI RASIONAL KASUS IV

- Bila penyebut $g(x)$ memuat factor kuadrat yang tidak bisa disederhanakan dan berulang
- $g(x)$ mempunyai factor $(ax^2 + bx + c)^n$
- dengan $b^2 - 4ac < 0$

- Maka bentuk $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

- Dengan A, B adalah konstanta yang dicari

CONTOH

- $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$
- **Langkah 1 :** Cek penyebut, derajat pangkat penyebut sudah lebih besar dari pembilang
- **Langkah 2** : Penyebut tidak bisa difaktorkan lagi
- **Langkah 3** : Karena ada persamaan kuadrat yang berulang dan tidak bisa disederhanakan lagi maka gunakan bentuk IV

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

CONTOH

- **Langkah 4 :** Kalikan dengan penyebut

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx + C)x(x^2+1) + (Dx + E)x$$
$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$
$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

$$A + B = 0$$
$$C = -1$$
$$2A + B + D = 2$$
$$C + E = -1$$
$$A = 1$$

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = -1, \qquad D = 1, \qquad E = 0$$

CONTOH

- **Langkah 5** : Selesaikan persamaan integralnya

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$