INTEGRAL
tak wajar dan Integral garis

Informatika

UAD

Integral Tak Wajar

Pada integral tertentu fungsi f didefinisikan pada rentang terbatas $[a, b]$ dan f kontinu

Apabila f pada rentang tak terbatas dan diskontinu diantara nilai $[a, b]$ maka disebut integral tak wajar

Integral Tak Wajar Tipe 1

Jika $\int_a^\infty f(x)\, dx$ itu ada untuk semua $t \geq a$ maka

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

Jika $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ itu ada untuk semua $t \leq b$ maka

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\, dx$$

Dengan syarat limitnya ada (konvergen)

Contoh

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx =$

Karena berupa integral tak wajar tipe 1 maka ubah ke bentuk limit

- $= \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$

Hitung limitnya

- $= \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{(t)} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] = 0 + 1 = 1$

Integral Tak Wajar Tipe 2

Jika f kontinu pada $[a, b)$ tapi diskontinu pada b maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Jika f kontinu pada $(a, b]$ tapi diskontinu pada a maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Dengan syarat limitnya ada (konvergen)

Contoh

- $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

Diketahui bahwa bila $x = 2$ maka integral menjadi tidak wajar

- $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx =$

Ubah ke bentuk limit

- $= \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 (x-2)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{t \to 2^+} \left[2\sqrt{x-2}\right]_t^5 =$

Hitung limitnya

- $= \lim_{t \to 2^+} \left[2\sqrt{(5)-2} - \left(2\sqrt{(t)-2}\right)\right] = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{3}$

Integral Garis

Terjadi bila interval $[a, b]$ digantikan dengan kurva C

Bila representasi parametrik kurva C:

$x = x(t)$

$y = y(t)$

dengan $a \leq t \leq b$

Jika f didefinisikan pada kurva C maka integral garis f sepanjang C

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Contoh

Diberikan integral garis $\int_C (x^3 + y)ds$

dengan persamaan parametric kurva C

- $x = 3t$ dan $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$

Maka

- $x = 3t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3$
- $y = t^3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2$
- $f(x, y) = x^3 + y \Rightarrow f(t) = (3t)^3 + (t^3) = 27t^3 + t^3 = 28t^3$

Contoh

Masukkan ke persamaan integral garis:

- $\int_C (x^3 + y)ds = \int_0^1 28t^3\sqrt{(3)^2 + (3t^2)^2}dt$
- $= \int_0^1 28t^3\sqrt{9 + 9t^4}dt = \int_0^1 28t^3\sqrt{9(1 + t^4)}dt$
- $= \int_0^1 28t^3 \cdot 3\sqrt{1 + t^4}dt = 84\int_0^1 t^3\sqrt{1 + t^4}dt$

Misal $u = 1 + t^4 \Rightarrow du = 4t^3dt \Rightarrow dt = \frac{1}{4t^3}du$

- $= 84\int_0^1 t^3u^{1/2}\frac{1}{4t^3}du = \frac{84}{4}\left[\frac{2}{3}(1 + t^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{42}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

Latihan : Integral Tak Wajar

- Integral tak wajar tipe 1
- $\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2} dx = \frac{1}{12}$
- $\int_{-\infty}^1 (5x+2) dx = -\infty$
- $\int_1^\infty \frac{x}{(5x^2-4)^2} dx = \frac{1}{10}$
- Integral tak wajar tipe 2
- $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = 2$
- $\int_3^5 \frac{2}{\sqrt{x-3}} dx = 4\sqrt{2}$
- $\int_{-1}^1 \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 0$

Diberikan integral garis $\int_C (x+y^2)\, ds$
dengan persamaan parametric kurva C
$x = 5t - 5$ dan $y = 5t - 3$, untuk $0 \le t \le 1$

Diberikan integral garis $\int_C xy\, ds$
dengan persamaan parametric kurva C
$x = t^2$ dan $y = 2t$, untuk $0 \le t \le 1$

Tugas

http://bit.ly/tugaskalkulusF

Latihan : Integral Garis

- Diberikan integral garis $\int_C (x + y^2)\, ds$
- dengan persamaan parametric kurva C
- $x = 5t - 5$ dan $y = 5t - 3$, untuk $0 \leq t \leq 1$

Latihan : Integral Garis

- Diberikan integral garis $\int_C \; xy\, ds$
- dengan persamaan parametric kurva C
- $x = t^2$ dan $y = 2t$, untuk $0 \leq t \leq 1$

Latihan : Integral Garis

- Diberikan integral garis $\int_C (2 + x^2 y)\, ds$
- dengan persamaan parametric kurva C
- $x = \cos t$ dan $y = \sin t$, untuk $0 \leq t \leq \pi$