INTEGRAL RANGKAP

Informatika

UAD

INTEGRAL RANGKAP DUA

Diketahui integral rangkap dua

$$\iint f(x,y)\,dA = \iint f(x,y)\,dy\,dx$$

Selesaikan seperti menyelesaikan turunan parsial

$$\int \left[\int f(x,y)\,dy \right] dx$$

Integral kan terhadap y, anggap x sebagai konstanta
Integral kan terhadap x, anggap y sebagai konstanta

CONTOH

$$\iint xy\, dy\, dx$$

Langkah 1 : Integral kan terhadap y, anggap x sebagai konstanta

$$\int \left[\int xy\, dy \right] dx = \int x \left(\frac{1}{2} y^2 \right) dx$$

Langkah 2 : Integral kan terhadap x, anggap y sebagai konstanta

$$\frac{1}{2} \int xy^2\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) y^2 + C = \frac{1}{4} x^2 y^2 + C$$

INTEGRAL TERTENTU RANGKAP DUA

Diketahui integral tertentu rangkap dua

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$$

Selesaikan seperti menyelesaikan turunan parsial

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx$$

Langkah:

1. Integral kan terhadap y, anggap x sebagai konstanta
2. Kemudian hitung nilainya terhadap y
3. Integral kan terhadap x kemudian hitung nilainya

CONTOH

$$\int_0^1 \int_2^3 (x+y)dy\, dx =$$

Langkah 1 : Integral kan terhadap y, anggap x sebagai konstanta

$$\int_0^1 \left[\int_2^3 (x+y)\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_2^3 x\, dy + \int_2^3 y\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right] \frac{3}{2}\, dx$$

Langkah 2 : Hitung nilai integral terhadap y

$$\int_0^1 \left[\left((3)x + \frac{1}{2}(3)^2\right) - \left((2)x + \frac{1}{2}(2)^2\right)\right] dx = \int_0^1 \left(x + \frac{5}{2}\right) dx$$

Langkah 3 : Integral kan terhadap x dan hitung nilainya

$$\int_0^1 \left(x + \frac{5}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}(1)^2 + \frac{5}{2}(1)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + \frac{5}{2}(0)\right) = 3$$

INTEGRAL RANGKAP TIGA

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV$$

merupakan integral rangkap tiga dari fungsi yang mempunyai tiga variabel independent pada daerah R yaitu (x, y, z) dari volume V yang mana fungsi nya merupakan fungsi tunggal dan kontinu dan merupakan pengembangan dari integral tunggal dan rangkap dua

Jika $f(x, y, z) = 1$ maka $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ merupakan fungsi untuk menghitung volume dari daerah R

INTEGRAL RANGKAP TIGA

Pada koordinat kotak (rectangular)

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

dst……

INTEGRAL RANGKAP TIGA

Pada koordinat silinder

$$\iiint_R f(r,\theta,z)\, dV = \iiint_R f(r,\theta,z) r\, dz\, dr\, d\theta$$

Pada koordinat bola

$$\iiint_R f(\rho,\phi,\theta)\, dV = \iiint_R f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

CONTOH

Diketahui integral rangkap tiga

$$\iiint xyz\, dz\, dy\, dx$$

Selesaikan seperti menyelesaikan turunan parsial

$$\int \left[\int \left(\int xyz\, dz \right) dy \right] dx$$

Integral kan terhadap z, anggap x dan y sebagai konstanta
Integral kan terhadap y, anggap x dan z sebagai konstanta
Integral kan terhadap x, anggap y dan z sebagai konstanta

CONTOH

$$\iiint xyz\,dz\,dy\,dx = \int\left[\int\left(\int xyz\,dz\right)dy\right]dx$$

Langkah 1 : Integral kan terhadap z, anggap x dan y sebagai konstanta

$$\int\left[\int\left(\int xyz\,dz\right)dy\right]dx = \int\left[\int xy\left(\frac{1}{2}z^2\right)dy\right]dx = \int\left[\frac{1}{2}\int xyz^2dy\right]dx$$

Langkah 2 : Integral kan terhadap y, anggap x dan z sebagai konstanta

$$\int\left[\frac{1}{2}\int xyz^2dy\right]dx = \int\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}y^2\right)z^2\,dx = \frac{1}{4}\int xy^2z^2\,dx$$

Langkah 3 : Integral kan terhadap x, anggap y dan z sebagai konstanta

$$\int\frac{1}{4}xy^2z^2\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)y^2z^2 + C = \frac{1}{8}x^2y^2z^2 + C$$

INTEGRAL TERTENTU RANGKAP TIGA

Diketahui integral tertentu rangkap tiga

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Selesaikan seperti menyelesaikan turunan parsial

$$\int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z)\, dz\right) dy\right] dx$$

Langkah:

1. Integral kan terhadap z, anggap x dan y sebagai konstanta
2. Kemudian hitung nilainya terhadap z
3. Integral kan terhadap y, anggap x sebagai konstanta
4. Kemudian hitung nilainya terhadap y
5. Integral kan terhadap x kemudian hitung nilainya

CONTOH

$$\int_0^1 \int_2^3 \int_1^2 (x + y + z) dz\, dy\, dx$$

Langkah 1 : Integral kan terhadap z, anggap x dan y sebagai konstanta

$$\int_0^1 \left[\int_2^3 \left(\int_1^2 (x + y + z)\, dz \right) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_2^3 \left(\int_1^2 x\, dz + \int_1^2 y\, dz + \int_1^2 z\, dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_2^3 \left(\left[xz + yz + \frac{1}{2} z^2 \right]_1^2 \right) dy \right] dx$$

Langkah 2 : Hitung nilai integral terhadap z

$$\int_0^1 \left[\int_2^3 \left[\left(x(2) + y(2) + \frac{1}{2}(2)^2 \right) - \left(x(1) + y(1) + \frac{1}{2}(1)^2 \right) \right] dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_2^3 \left(x + y + \frac{3}{2} \right) dy \right] dx$$

CONTOH

Langkah 3 : Integral kan terhadap y

$$\int_0^1 \left[\int_2^3 \left(x + y + \frac{3}{2}\right) dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_2^3 x\, dy + \int_2^3 y\, dy + \int_2^3 \frac{3}{2}\, dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\left[xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}y\right]_2^3\right) dx$$

Langkah 4 : Hitung nilai integral terhadap y

$$\int_0^1 \left[\left(x(3) + \frac{1}{2}(3)^2 + \frac{3}{2}(3)\right) - \left(x(2) + \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{3}{2}(2)\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) dx = \int_0^1 (x + 4) dx$$

CONTOH

Langkah 5 : Integral kan terhadap x

$$\int_0^1 (x+4)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 4\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^1$$

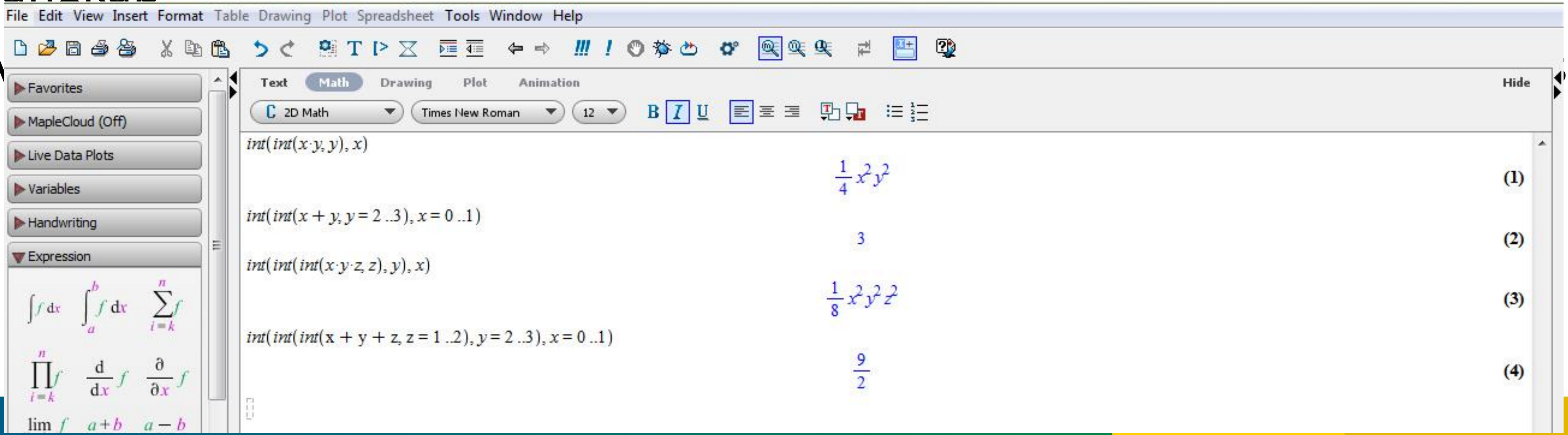
Langkah 6 : Hitung nilai integral terhadap x

$$\left(\frac{1}{2}(1)^2 + 4(1)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 4(0)\right) = \frac{9}{2}$$

COMMAND DALAM MAPLE

Untuk mengecek jawaban anda bisa menggunakan software seperti Maple atau Matlab

Buka Maple ketikkan perintah berikut untuk menghitung integral rangkap



LATIHAN

1. $\iint dy\,dx$
2. $\iint xe^{y} dy\,dx$
3. $\iint x\,dx\,dy$
4. $\iint \frac{x}{y} dx\,dy$
5. $\iint xy^2\,dy\,dx$

1. $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 - y^2) dy\,dx$
2. $\int_1^2 \int_1^2 (3x^2 + 3xy^2) dy\,dx$
3. $\int_2^1 \int_1^2 (2xy + 5y^2)\,dx\,dy$
4. $\int_2^3 \int_1^2 (y - y^3)\,dy\,dx$
5. $\int_0^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + y^2\right) dx\,dy$

LATIHAN

1. $\iiint dx\, dy\, dz$
2. $\iiint xz\, dx\, dy\, dz$
3. $\iiint \frac{xz}{y}\, dx\, dy\, dz$
4. $\iiint x^2 y^2 z\, dy\, dx\, dz$
5. $\iiint xe^y z\, dz\, dy\, dx$

1. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 (3x^2 + 3xy^2 - 3z)\, dy\, dx\, dz$
2. $\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (2xy + 5y^2 + e^z) dx\, dy\, dz$
3. $\int_2^3 \int_1^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - y^2 + z\right) dx\, dy\, dz$
4. $\int_1^2 \int_3^2 \int_1^2 (y + z^3) dy\, dz\, dx$
5. $\int_3^4 \int_2^1 \int_0^1 (x^2 - y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$