

PERTEMUAN 3

LIMIT FUNGSI ALJABAR

Informatika

Universitas Ahmad Dahlan

LIMIT FUNGSI

Bilangan L disebut limit fungsi $f(x)$ untuk mendekati suatu harga a , ditulis:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

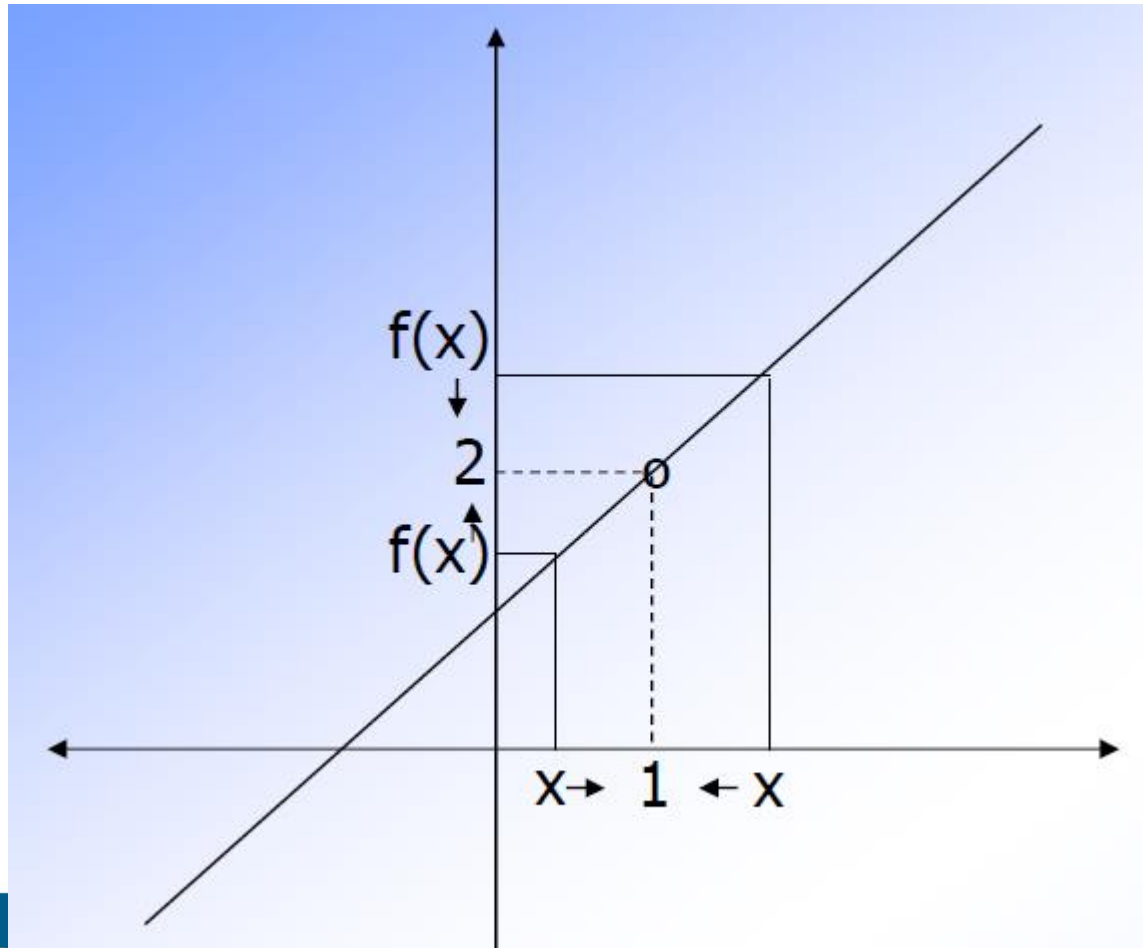
Jika untuk setiap bilangan positif ε yang diberikan (bagaimanapun kecilnya) dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua harga x dimana

$$0 < |x - a| < \delta \text{ berlaku } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limit Fungsi di Satu Titik

- Perhatikan fungsi
- $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- Fungsi diatas tidak terdefinisi di $x=1$, karena di titik tersebut $f(x)$ berbentuk $0/0$. Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai $f(x)$ jika x mendekati 1 Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai $f(x)$ bila x mendekati 1, seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	→ 1 ←	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	→ ? ←	2.0001	2.001	2.01	2.1



- Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa $f(x)$ mendekati 2 jika x mendekati 1 Secara matematis dapat dituliskan

- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

TEOREMA LIMIT

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$

- Contoh : 1. $\lim_{x \rightarrow c} 4 = 4$
2. $\lim_{x \rightarrow c} 7 = 7$

2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

- Contoh : 1. $\lim_{x \rightarrow 8} x = 8$
2. $\lim_{x \rightarrow -3} x = -3$

3. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

Contoh :

- $\lim_{x \rightarrow 5} (x + 9) = \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 9 = 5 + 9 = 14$

4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

Contoh :

- $\lim_{x \rightarrow -2} (x - 5) = \lim_{x \rightarrow -2} x - \lim_{x \rightarrow -2} 5$
• $= -2 - 5 = -7$

TEOREMA LIMIT

$$5. \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

contoh :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} [(8 - x)(x + 4)] &= \lim_{x \rightarrow 5} (8 - x) \cdot \lim_{x \rightarrow 5} (x) \\ &= (3)(9) = 27 \end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$$

contoh :

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x}{3 - x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -4} x}{\lim_{x \rightarrow -4} 3 - x} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow c} af(x) = a \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

contoh :

$$a) \lim_{x \rightarrow e} 9x = 9 \lim_{x \rightarrow e} x = 9e$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi} 3(4 - x) = 3 \lim_{x \rightarrow \pi} (4 - x) = 3(4 - \pi)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$$

contoh :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)^7 = \left[\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) \right]^7 = (-1)^7 = -1$$

$$9. \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$$

asalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ untuk n bilangan genap

(Dijelaskan Selanjutnya)

ATURAN AKAR

Andaikan n genap dan $f(x) \geq 0$ untuk x dekat c maka

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$$

Contoh

Hitung nilai limit berikut :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 4}{\sqrt{x^2 + 16} + 4} = \frac{x^2 + 16 - 16}{x^2(\sqrt{x^2 + 16} + 4)} \\ &= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 16} + 4)} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Penyelesaian Limit dengan Perhitungan

- Substitusi langsung

- $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + 3x + 1$
 - $2(1)^2 + 3(1) + 1 = 6$

- Pemfaktoran (bentuk 0/0)

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$
 - $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)$
 - $(2)^2 + 2(2) + 4 = 12$

- Dikali sekawan (bentuk akar)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}}$
 - $= \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}} \cdot \frac{2 + \sqrt{4 - x}}{2 + \sqrt{4 - x}}$
 - $= \frac{(x)(2 + \sqrt{4 - x})}{4 - 4 + x}$
 - $= 2 + \sqrt{4 - (0)}$
 - $= 4$

Contoh

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} 3x + 5 = 8$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x - 2}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 5$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+9} - 3} =$$

- $= \frac{x}{\sqrt{x+9}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}$

- $= \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2}$

- $= \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9}$

- $= \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9}$

- $= \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x}$

- $= \sqrt{x+9} + 3$

$$x \rightarrow 0, \sqrt{0+9} + 3 = 6$$

Latihan:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

LIMIT KIRI DAN LIMIT KANAN

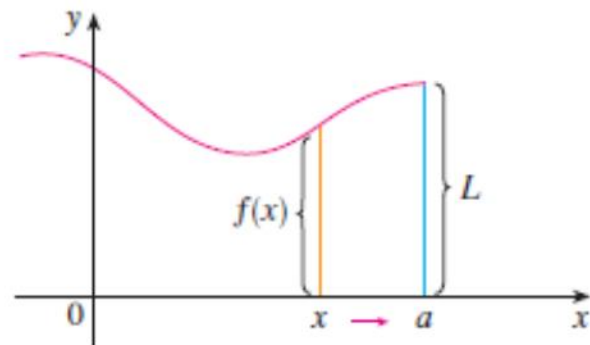
Limit kiri :

- apabila x mendekati a didekati dari kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari a)
- Notasinya
 - $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = L$

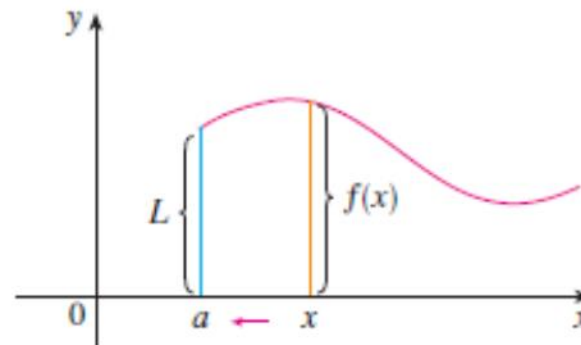
Limit kanan :

- apabila x mendekati a didekati dari kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari a)
- Notasinya
 - $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = L$

LIMIT KIRI DAN LIMIT KANAN



$$(a) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

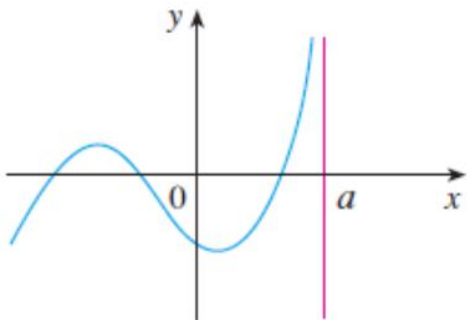


$$(b) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

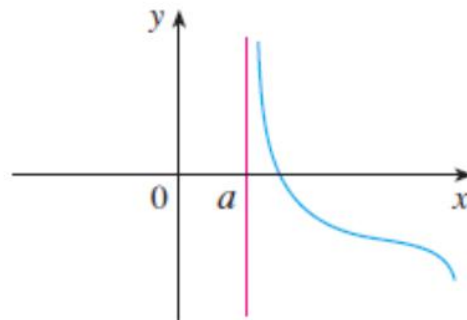
LIMIT DENGAN HASIL TAK HINGGA

- $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

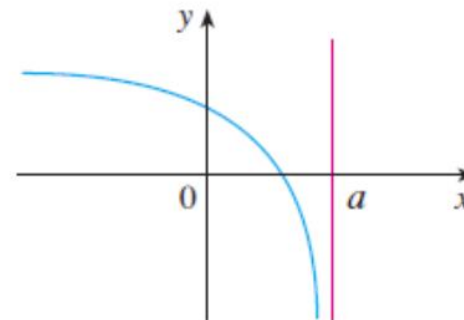
- $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$



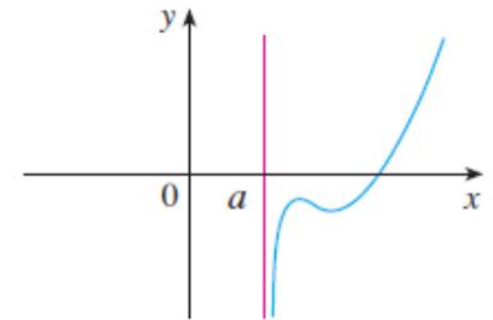
(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

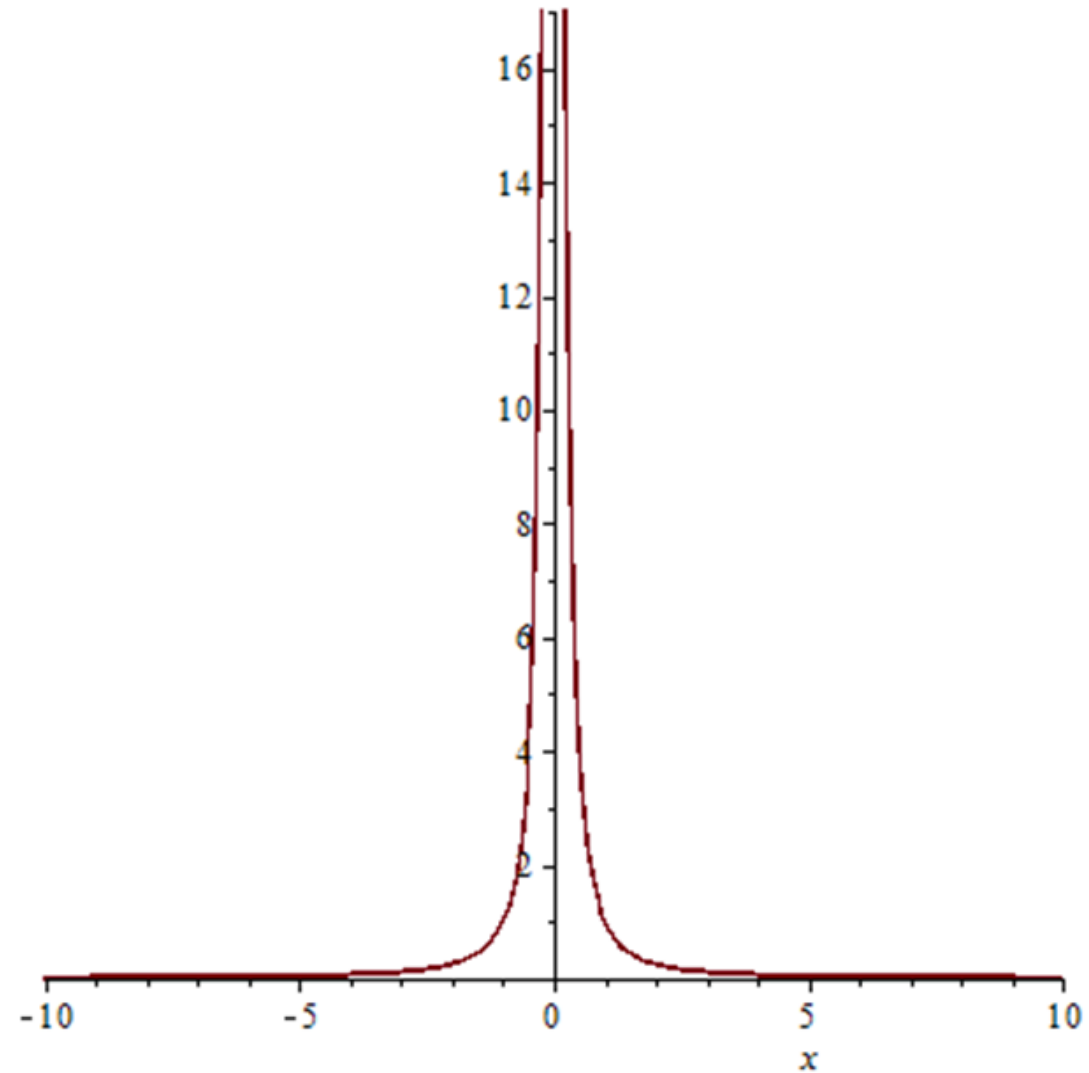


(d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

CONTOH

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000



LIMIT TAK HINGGA

Sama dengan definisi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^x = \pm\infty$

LIMIT TAK HINGGA FUNGSI RASIONAL

$f(x) = p(x)/q(x)$ merupakan fungsi rasional, $p(x), q(x)$ polinomial, maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{jika } \deg(p) < \deg(q) \\ L \neq 0 \text{ atau } \pm \infty, & \text{jika } \deg(p) = \deg(q) \\ \pm \infty, & \text{jika } \deg(p) > \deg(q) \end{cases}$$

Dimana \deg = derajat

- Jika bentuknya sudah pecahan: dibagi pangkat tertinggi
- Jika bentuknya belum pecahan: dikali sekawan, baru dibagi pangkat tertinggi

LATIHAN

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+13}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{13} + 5x^2 + 7}{x^{13} + 69x^2 + 6}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x+13x^2}{5x-27x^2}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-44x^2}{6-7x}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10-x^4}{3+x^6}$

Tugas

- Ganjil

- $\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2$

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x^2 - x + 3}$

- Genap

- $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^3$

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 3x}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 347x + 45}$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 5}{x^3 + 2x - 1}$