INTEGRAL TERTENTU

Informatika

UAD

Universitas Ahmad Dahlan

INTEGRAL TERTENTU

Misalkan $a \leq x \leq b$ adalah rentang pada fungsi kontinyu $f(x)$

Maka integral tertentu fungsi $f(x)$ dengan x dari a sampai b

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Dengan a adalah batas bawah dan b adalah batas atas

Bila a $> b$ maka

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

INTEGRAL TERTENTU

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, a < c < b$$

INTEGRAL TERTENTU

Untuk $a < b$ berlaku :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \mathrm{F(x)}\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

Contoh :

$$\int_{1}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

CONTOH

$$\int_{1}^{3} 4\,dx = 4x\Big|_{1}^{3} = 4(3-1) = 8$$

$$\int_{0}^{2} 2x\,dx = x^2\Big|_{0}^{2} = (2)^2 - (0)^2 = 4$$

LATIHAN

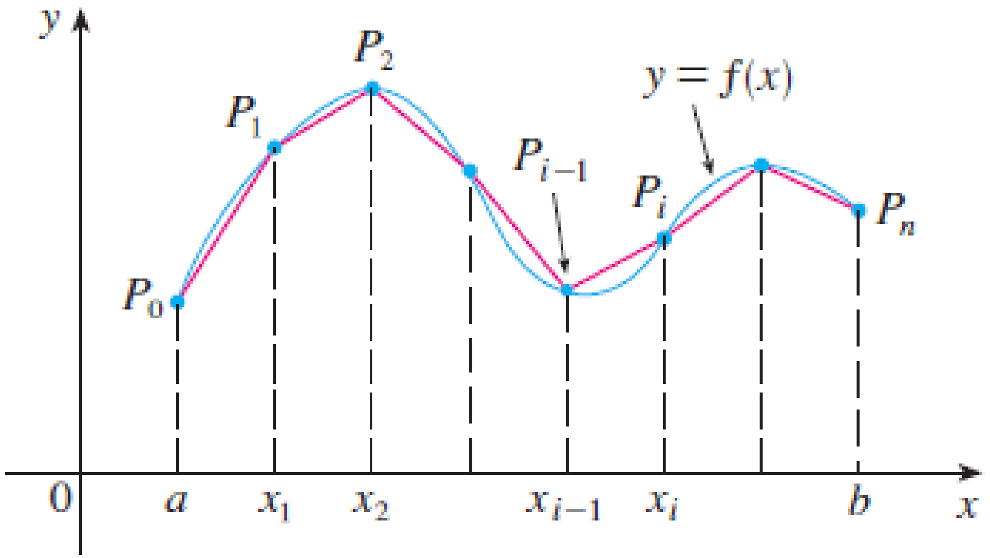
1. $\int_1^5 \left(\frac{1}{3x} - 5\right) dx$
2. $\int_1^5 \sqrt{3x - 2}\, dx$
3. $\int_1^2 5x\sqrt{(2x + 1)}\, dx$
4. $\int_1^5 \left(\frac{1}{5x} - \frac{2}{x+2}\right) dx$

PANJANG KURVA

Panjang kurva bisa didekati dengan polygon

Sehingga panjangnya bisa dihitung dengan menjumlahkan setiap garis pada segment polygon

Panjang kurva bisa diperkirakan dengan polygon menggunakan integral



PANJANG KURVA

Jika f' kontinu pada $[a, b]$ maka panjang kurva $y = f(x)$ untuk $a \leq x \leq b$:

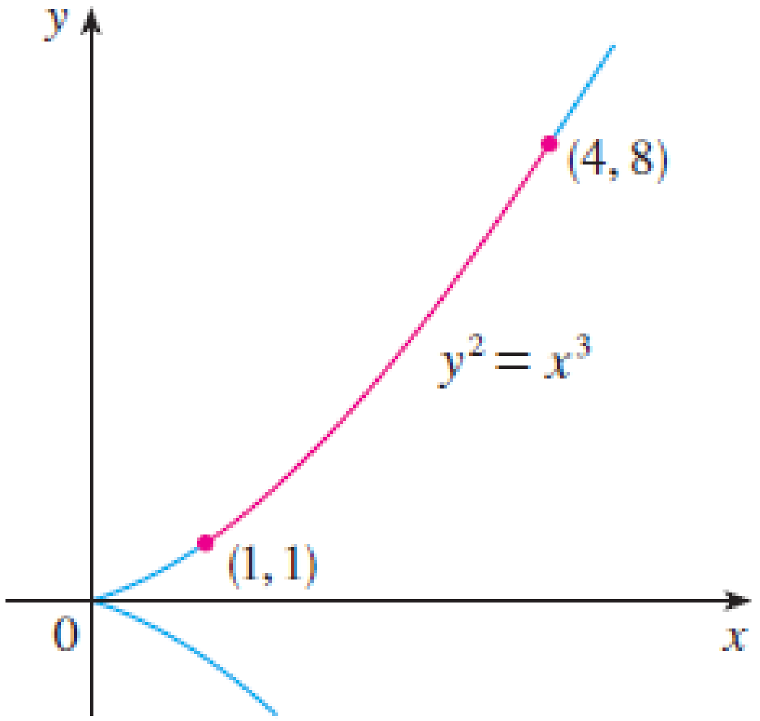
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Jika f' kontinu pada $[a, b]$ maka panjang kurva $x = f(y)$ untuk $a \leq y \leq b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

CONTOH

Hitung panjang kurva dari parabola $y^2 = x^3$ antara titik (1, 1) dan titik (4, 8)



CONTOH

Terhadap sumbu X

$$y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

Maka panjang kurvanya

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \Rightarrow du = \frac{9}{4}dx \Rightarrow dx = \frac{4}{9}du$$

$$L = \int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{9}\right) du = \left[\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$L = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}(4)\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}(1)\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{80}{27}\sqrt{10} - \frac{13}{27}\sqrt{13}$$

LUASAN DAERAH

Integral tertentu digunakan untuk menghitung luasan daerah yang dibatasi oleh kurva

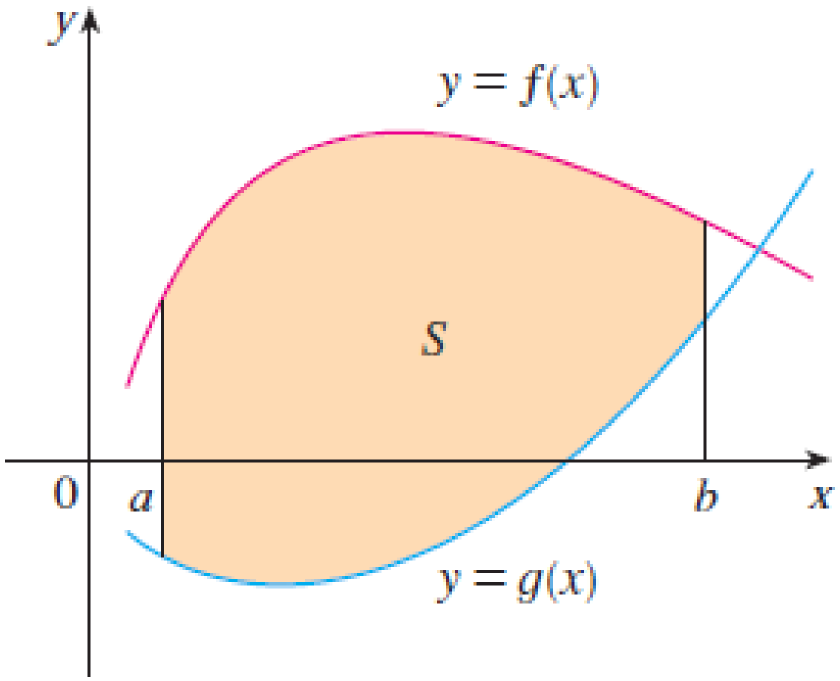
Syarat :

- Bila ada kurva $y = f(x)$ dan kurva $y = g(x)$ kontinu pada $a \leq x \leq b$
- Bila kurva $y = f(x)$ terletak diatas atau pada kurva $y = g(x)$
- Maka luas daerah S yang dibatasi kurva $y = f(x)$, kurva $y = g(x)$, $x = a$ dan $x = b$ adalah :

LUASAN DAERAH

$$\boldsymbol{L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

$$f(x) > g(x)$$



CARA MENGHITUNG LUASAN DAERAH

1. Tentukan daerah kurva dengan menggambar daerah yang diminta dari kurva dan batasan yang ditentukan
2. Tentukan batasan integrasinya dari daerah kurva yang digambar
3. Tentukan cara menghitung luasan yang mudah
   - Terhadap $x \Rightarrow L = \int f(x)\, dx$
   - Terhadap $y \Rightarrow L = \int f(y)\, dy$
4. Hitung nilai integral sebagai luasan daerahnya

CONTOH

Tentukan luasan daerah yang dibatasi oleh garis $y = -2x + 4$, sumbu Y dan sumbu X !

Langkah 1 : Gambar daerah nya

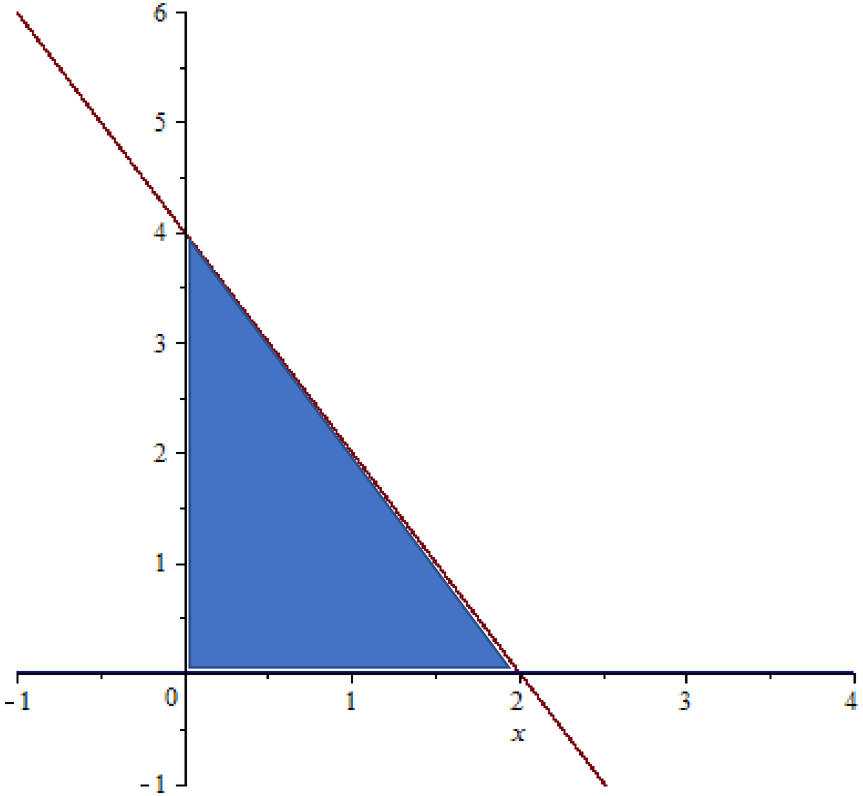
Langkah 2 : Tentukan batasannya

- Titik potong sumbu Y

  $y = -2(0) + 4 = 4 \Rightarrow (0,4)$

- Titik potong sumbu X

  $x = -\frac{1}{2}(0 - 4) = 2 \Rightarrow (2,0)$



Universitas Ahmad Dahlan

CONTOH

Langkah 3 : Tentukan bentuk integrasi yang mudah

- Bila batas 0 sampai 2 maka basis perhitungan integral terhadap X

$$L = \int_0^2 (-2x + 4)\, dx = -x^2 + 4x|_0^2 = 4 \text{ satuan luas}$$

- Bila batas 0 sampai 4 maka basis perhitungan integral terhadap Y

$$L = \int_0^4 \left(-\frac{y-4}{2}\right) dy = -\frac{1}{4}y^2 + 2y|_0^4 = 4 \text{ satuan luas}$$

CONTOH

Tentukan luasan daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 - 5x + 4$ dan sumbu X !

Langkah 1 : Gambar daerahnya !

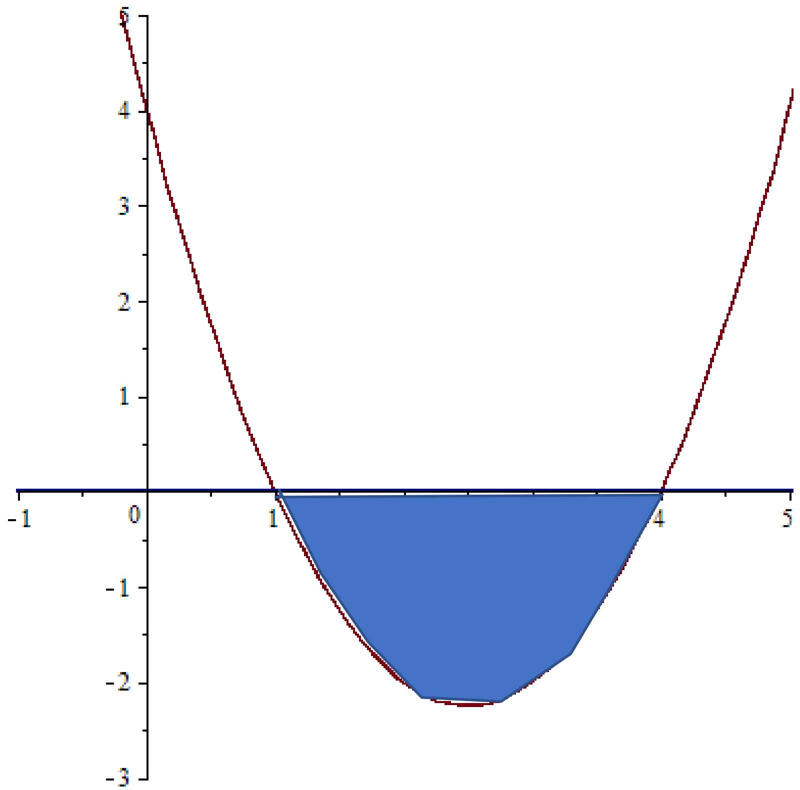
Langkah 2 : Tentukan batasannya !

- Titik potong sumbu Y

$$y = (0)^2 - 5(0) + 4 = 4 \Rightarrow (0,4)$$

- Titik potong sumbu X

$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$
$$x = 4 \Rightarrow (4,0)$$
$$x = 1 \Rightarrow (1,0)$$



CONTOH

Langkah 3 : Tentukan bentuk integrasi yang mudah

- Batas 1 sampai 4 maka basis perhitungan integral terhadap X

$$L = \int_1^4 [0 - (x^2 - 5x + 4)]\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \Big|_1^4$$

$$L = -\frac{1}{3}(4)^3 + \frac{5}{2}(4)^2 - 4(4) - \left(-\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{5}{2}(1)^2 - 4(1)\right)$$

$$= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = -21 + 40 - 16 - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

MENGHITUNG VOLUME

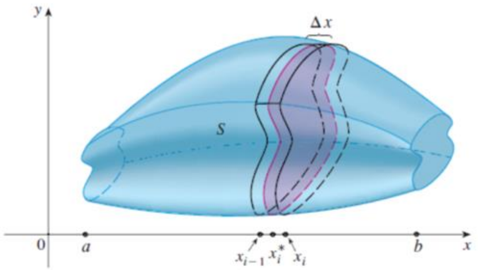
Bila diambil satu sampel potongan x_i^*

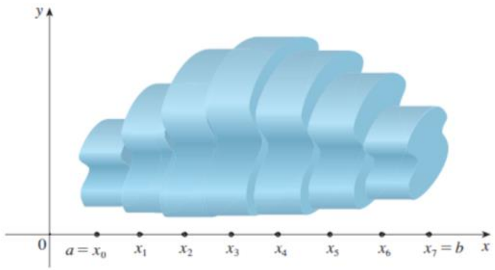
Luas penampang silinder $A(x_i^*)$

Tinggi / lebar silinder Δx

Maka volume potongan tersebut adalah

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$$





Sehingga total volume benda padat dapat dihitung dengan

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\, dx$$

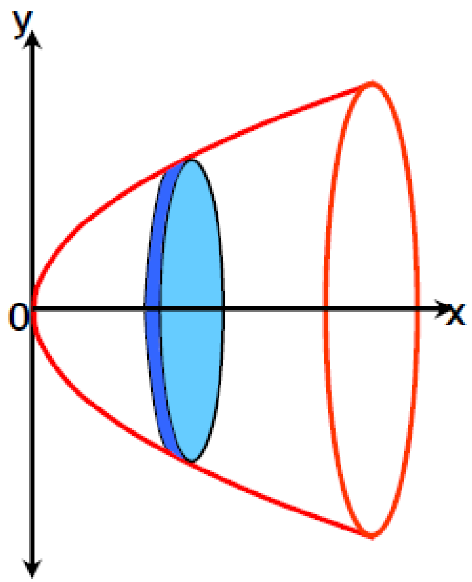
VOLUME BENDA PUTAR

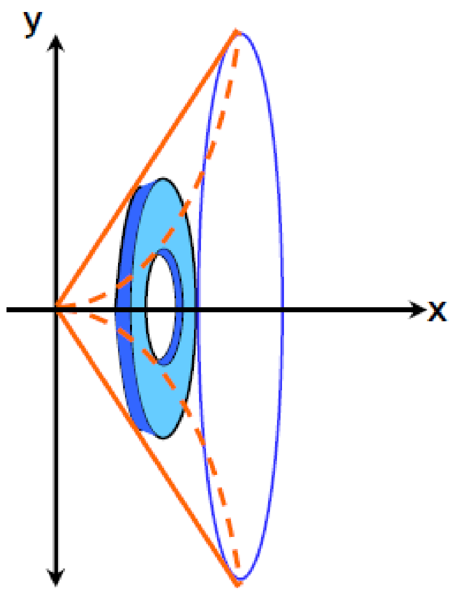
Dibuat dengan memutar bidang pada sebuah sumbu

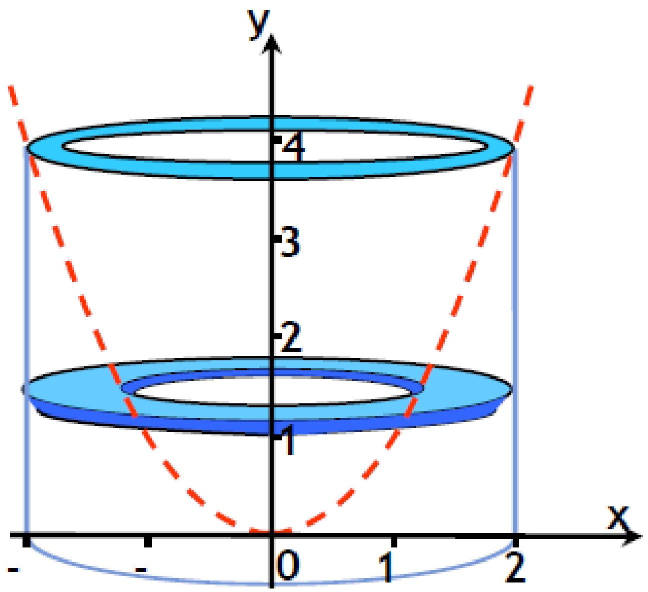
Untuk menghitung volume benda putar digunakan :

- Metode cakram
- Metode cincin
- Metode kulit tabung

CAKRAM CINCIN KULIT TABUNG







Metode Cakram

Metode cakram menggunakan volume tabung dalam memperkirakan volume bend padat

$$V = \pi r^2 t$$

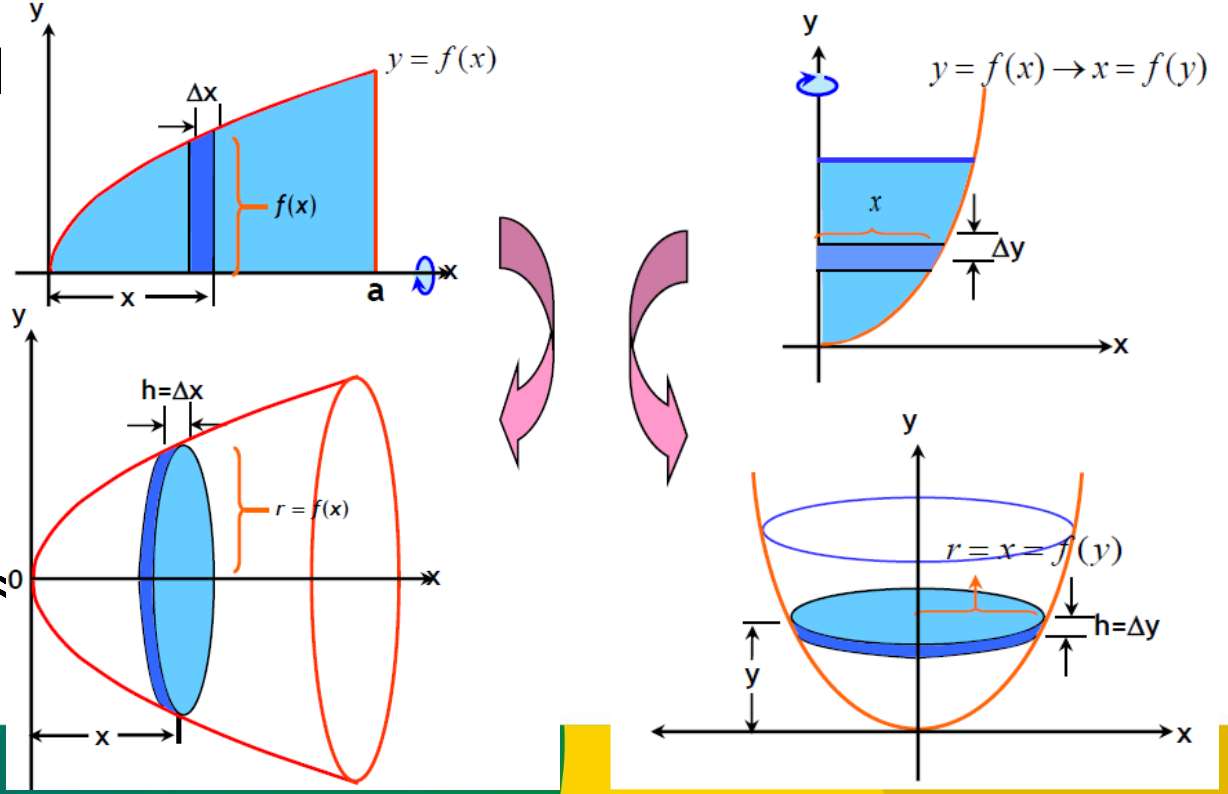
Jari-jari = $r = y = f(x)$

dan tinggi = $h = \Delta x$

Volume dihitung dengan : $V \approx \pi r^2 h \approx \pi f(x)^2 \Delta x$

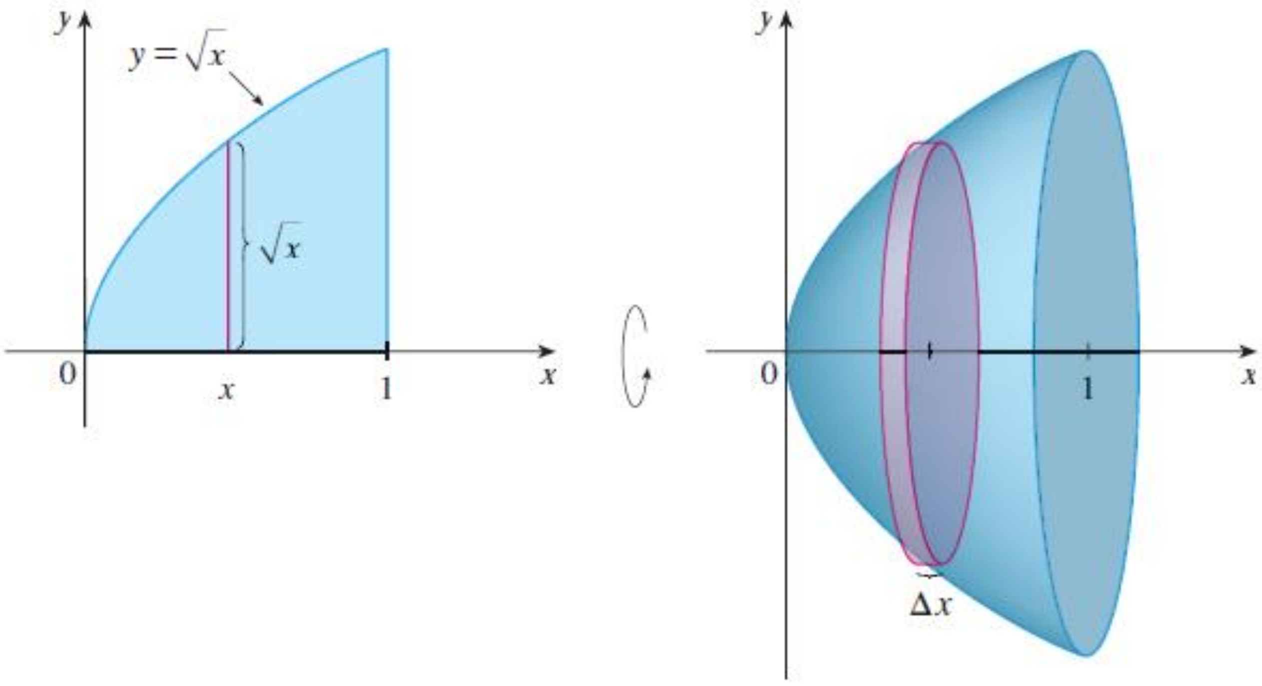
$$V \approx \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V \approx \pi \int_a^b x^2 dy$$



CONTOH

Tentukan volume benda padat hasil dari perputaran area yang dibatasi kurva $y = \sqrt{x}$ terhadap sumbu X dari 0 ke 1 !



(a) (b)

Jawab

Kita ketahui radiusnya $\sqrt{x}$ maka luas setiap potongannya :

$$A(x) = \pi y^2 = \pi r^2 = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

Jadi volume nya

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi y^2 dx = \int_0^1 \pi x\, dx = \left[\pi \frac{1}{2} x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

METODE CINCIN

Metode cincin menggunakan volume cincin dalam memperkirakan volume benda padat

R= cincin luar dan r= cincin dalam

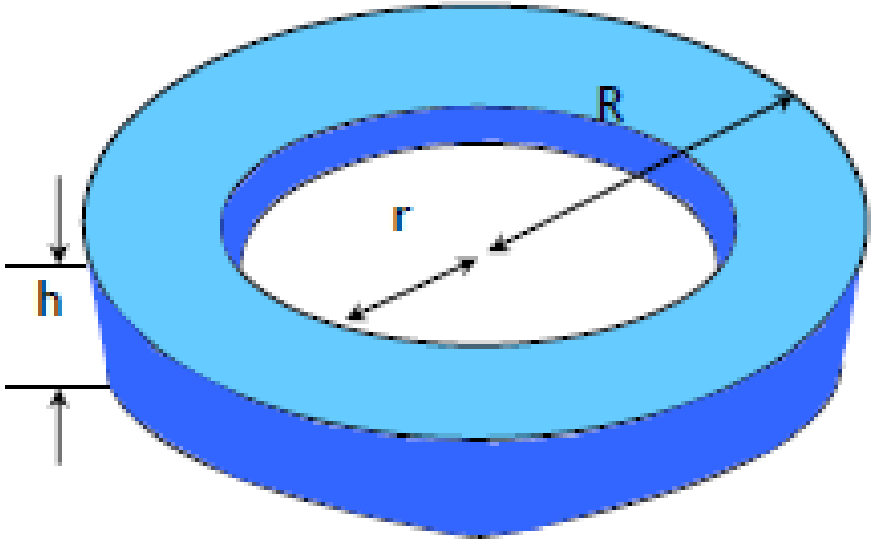
$$V = \pi(R^2 - r^2)h$$

Volume terhadap sumbu X

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx$$

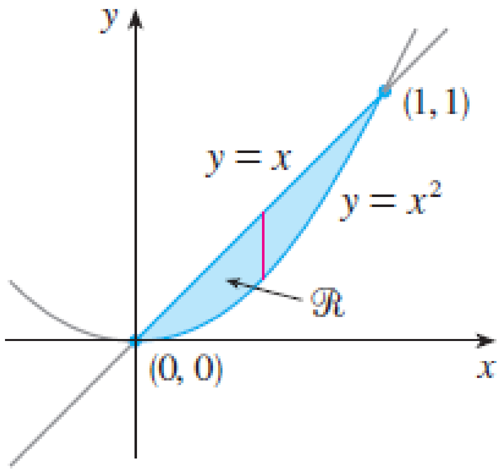
Volume terhadap sumbu Y

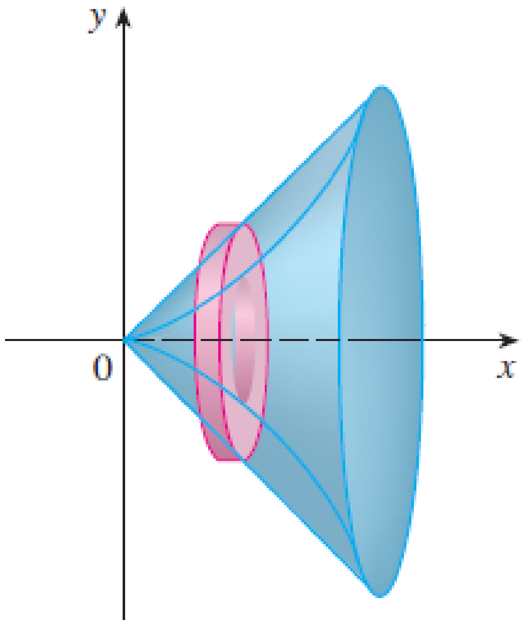
$$V = \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2)dy$$



Contoh

Tentukan volume benda padat hasil dari perputaran area yang dibatasi kurva $y = x$ dan $y = x^2$, terhadap sumbu X !





JAWAB

Kita ketahui radiusnya :

$R = y_1 = x$ dan $r = y_2 = x^2$

maka luas setiap potongannya :

$$A(x) = \pi(y_1^2 - y_2^2) = \pi(R^2 - r^2) = \pi(x^2 - (x^2)^2) = \pi(x^2 - x^4)$$

Batasnya : $x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0$

$x = 0$ dan $x = 1$

Jadi volume nya

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(y_1^2 - y_2^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\, dx = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

METODE KULIT TABUNG

Metode kulit tabung menggunakan volume kulit tabung dalam memperkirakan volume benda padat

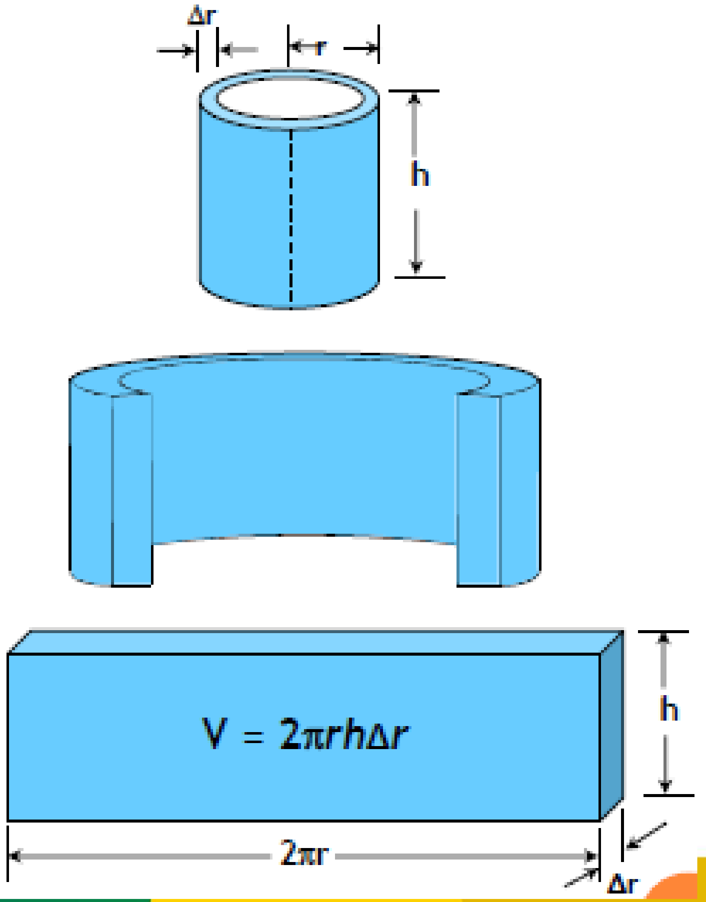
$$V = 2\pi r h \Delta r$$

Volume terhadap sumbu vertikal dihitung dengan :

$$V \approx 2\pi \int_a^b x\,[f(x)]\,dx$$

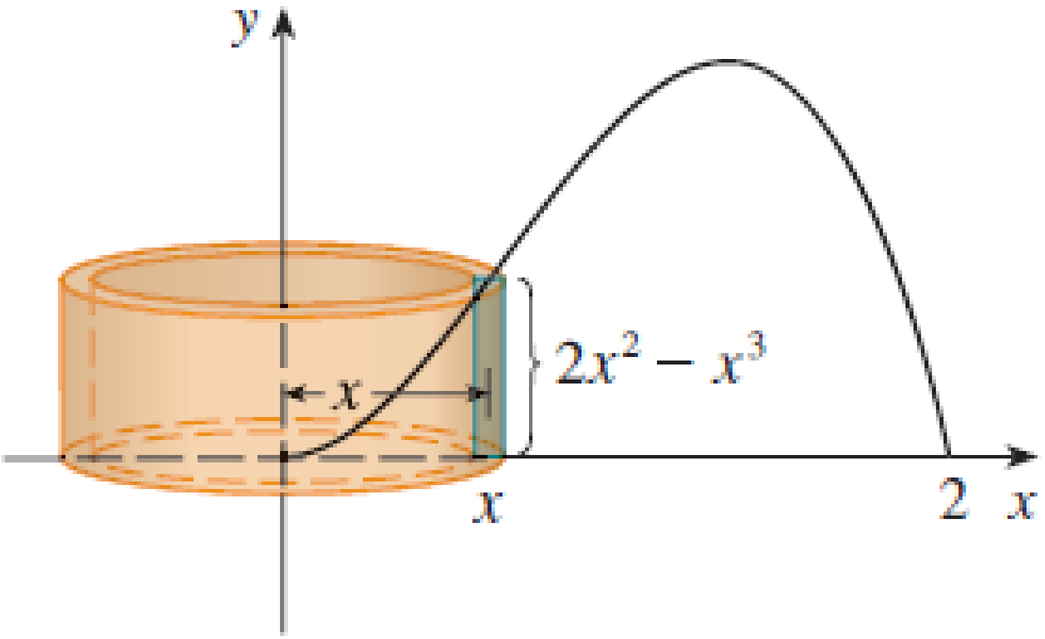
Volume terhadap sumbu horizontal dihitung dengan :

$$V \approx 2\pi \int_a^b y\,[f(y)]\,dy$$



CONTOH

Tentukan volume benda padat hasil dari perputaran area yang dibatasi kurva $y = 2x^2 - x^3$ dan $y = 0$, terhadap sumbu Y !



JAWAB

Kita ketahui radiusnya : $r = f(x) = y = 2x^2 - x^3$

Batasnya : $y = 2x^2 - x^3 \Rightarrow x^2(2 - x) = 0$

$x = 0$ dan $x = 2$

Jadi volume nya

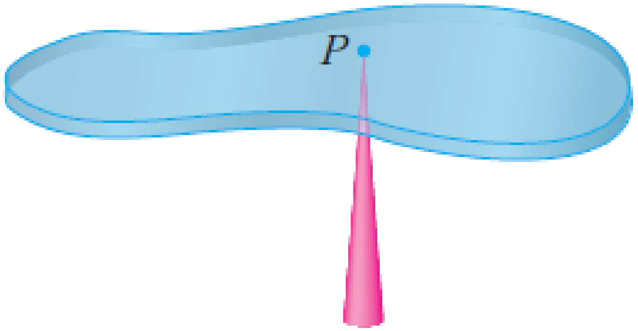
$$V = \int_0^2 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_0^2 x\,(2x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx = 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{16\pi}{5}$$

Tugas

- Hitung panjang kurva $y = x^3 + 2$ antara titik (1, 1) dan titik (2, 4)
- Tentukan luasan daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 - 7x + 10$ dan sumbu X !
- Tentukan volume benda padat hasil dari perputaran area yang dibatasi kurva $y = x^2 + 2$ terhadap sumbu X dari 0 ke 3 ! (Cakram)
- Tentukan volume benda padat hasil dari perputaran area yang dibatasi kurva $y = x + 4$ dan $y = x^2 + 2$, terhadap sumbu X ! (Cincin)
- Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh putaran daerah yang dibatasi oleh $x = e^{-y^2}$ dan sumbu-*y* ($0 \leq y \leq 1$) dengan sumbu-*x* sebagai sumbu putarnya. (Kulit Tabung)

MOMEN DAN TITIK PUSAT MASSA



Titik P yang membuat sebuah bidang sembarang seimbang disebut titik pusat massa

Untuk menghitung titik pusat massa pada daerah yang dibatasi kurva dan sumbu

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

Untuk menghitung titik pusat massa pada daerah yang dibatasi dua kurva

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$$

CONTOH

Tentukan titik pusat massa dari area yang dibatasi kurva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dan dibatasi sumbu X !

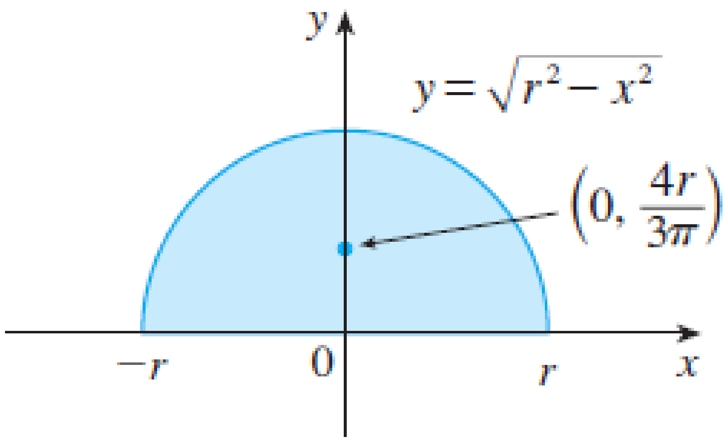
Diketahui batasannya :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 = 0$$

$$x^2 = r^2 \Rightarrow x = \pm r$$

$x = -r$ dan $x = r$

Luas areanya = Luas area setengah lingkaran = $\frac{1}{2}\pi r^2$



JAWAB

Titik pusat massanya :

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{a}^{b} x\, f(x)dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi r^2}\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}dx$$

Misal $u = r^2 - x^2 \Rightarrow du = -2x\, dx$

$$\Rightarrow dx = -\frac{1}{2x}du$$

$$\bar{x} = \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2x}\right)du$$

$$= \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} \sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du$$

$$\bar{x} = \frac{2}{\pi r^2}\left[-\frac{1}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-r}^{r} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{a}^{b} \frac{1}{2}[\, f(x)]^2 dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi r^2}\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - x^2)dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi r^2}\left[xr^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$

$$= \frac{1}{\pi r^2}\left[\frac{2}{3}r^3 - (-\frac{2}{3}r^3)\right] = \frac{4r}{3\pi}$$

Jadi pusat massa ada di $\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$