ISBN:

BUKU AJAR

MATA KULIAH

KALKULUS INFORMATIKA

PENYUSUN:

MURINTO

ADHI PRAHARA

NAMA PENERBIT

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayahnya yang tiada terkira kepada kita semua sebagai umat-Nya, sholawat dan salam tak lupa selalu terucap pada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, karena keteladanan dan akhlaknya dan setiap gerak langkahnya kita dapat menjadi umat terbaik di sisi Allah SWT.

Pembuatan Diktat Kalkulus Informatika ini tentunya tidak luput dari banyak hambatan, namun demikian Atas kuasa Allah SWT lewat orang-orang disekitar kita, modul ini dapat terwujud. Maka lewat kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih pada temen-temen dosen di Teknik Informatika atas saran, serta diskusi-diskusinya. Dalam Diktat Kalkulus Informatika ini dibahas mengenai: Himpunan, Fungsi, Limit Fungsi, Turunan Fungsi, Turunan Tingkat Tinggi dan Turunan Parsial, Integral Tak Tentu, Integral Tertentu, Integral Rangkap Dua dan Tiga, Integral Wajar dan Integral Garis, Persamaan Diffrential (PD) Homogen dan Tak Homogen, Latihan Soal dan Uji Kasus Kalkulus.

Dalam penulisan Diktat Kalkulus Informatika ini tentunya banyak kekurangan-kekurangannya. Maka dari itu banyak harapan dari kami kritik dan saran yang membangun, untuk lebih menyempurnakannya.

Yogyakarta, Agustus 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1. HIMPUNAN

1.1. Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang konsep dasar himpunan yang terdiri dari sistem bilangan dan sistem koordinat,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan sistem bilangan dan koordinat

B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiwa diharapkan mengetahui dan memahami tentang himpunan yang meliputi sistem bilangan dan tentang macam-macam sistem koordinat.

1.2 Himpunan

Pada setiap membicarakan himpunan maka tidak akan terlepas dari pendefinisian mengenai semesta pembicaraan yakni keseluruhan objek yang berada dalam pembicaraan tersebut. Contoh semesta pembicaraan tersebut adalah mahasiswa dari fakultas baru bisa disebutkan: Himpunan mahasiswa Program Studi Teknik Informatika, Himpunan mahasiswa Program Studi Teknik Kimia, dll.

Himpunan adalah kumpulan elemen-elemen yang memenuhi syarat keanggotaan tertentu. Elemen di dalamnya dinamakan anggota himpunan. Penyajian himpunan dituliskan dalam bentuk {..}. Himpunan secara umum dituliskan dengan huruf besar seperti: A, B, C, …, sedangkan anggotaya dituliskan dalam huruf kecil: a, b, c…. Apabila suatu elemen x menjadi anggota himpunan A, maka dapat dituliskan sebagai $x \in A$, dan apabila bukan anggota himpunan dari A maka dapat dituliskan sebagai $x \notin A$.

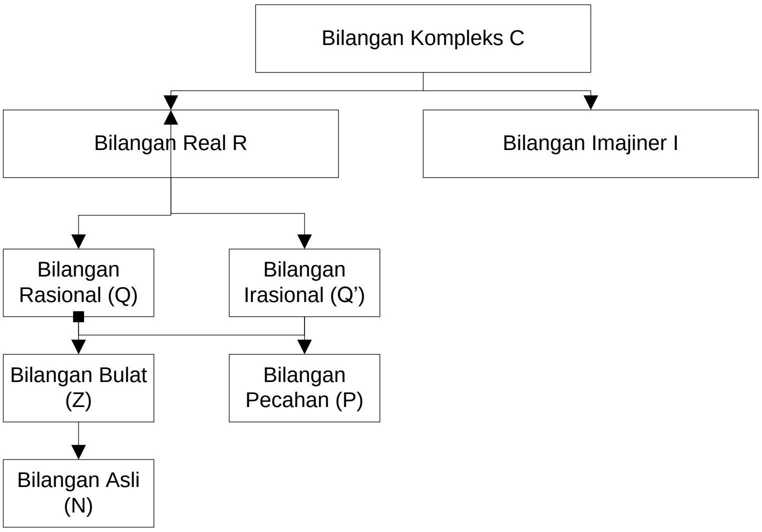
Suatu himpunan dapat disajikan dalam dua aturan yakni dengan mendaftar semua anggota dari himpunan tersebut dan dengan mengikutsertakan syarat keanggotaan dari himpunan tersebut.

Contoh:

1. $N = \{1,2,3,..\}$ adalah himpunan dari semua bilangan asli.
2. $N = \{x | x\ adalah\ bilangan\ asli\}$

1.3 Sistem Bilangan Real

Dalam matematika pembicaraanya tidak akan lepas dari bilangan. Taksonomi bilangan dapat dituliskan dalam Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Taksonomi Bilangan

Dengan memperhatikan Gambar 1.1 maka tampaklah bahwa himpunan asli termuat dalam bilangan bulat yaitu $N \in Z$. Sistem bilangan real R terdiri dari unsur bilangan real dan dua operasi yang disebut sebagai penjumlahan dan pengurangan. Adapun contoh dari bilangan kompleks C, bilangan real R, bilangan imajiner I, bilangan rasional Q, bilangan irasional Q', bilangan bulat Z, bilangan pecahan P dan bilangan asli I adalah sebagai berikut:

1. **Bilangan kompleks**

   Bilangan kompleks dapat dituliskan sebagai bilangan yang berbentuk $a + bi$, dimana a dan b adalah bilangan riil yang dinamakan bagian riil dan bagian imajiner, $i = \sqrt{-1}$ atau $i^2 = -1$, i dinamakan satuan imajiner. Harga mutlak dari $a + bi$ didefinisikan sebagai $\left| a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \right|$, sedangkan kojugat kompleks dari $a+bi$ didefinisikan sebagai $a-bi$. Contoh himpunan bilangan kompleks $C = \{1 \pm 2i, 2 \pm \sqrt{2}i, \ldots\}$

2. **Bilangan Real (R)**

   Contoh himpunan bilangan real $C = \{0, \pm 1, \pm 3\sqrt{2}, \ldots\}$

3. **Bilangan Rasional (Q)**

   $Q = \left\{ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \,\middle|\, \mathrm{m, n \text{ bilangan real dan } n \neq 0} \right\}$

   Contoh bilangan irasional $C = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{5}{6} \ldots\}$

4. **Bilangan Irrasional (Q')**

   Contoh bilangan rasional $C = \{\pm\sqrt{3}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}, \ldots\}$

5. **Bilangan Pecahan (P)**

   Contoh bilangan pecahan $C = \{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{4} \ldots\}$

6. **Bilangan Asli (I)**

   Contoh bilangan asli $C = \{1,2,3,4,5, \ldots\}$

7. **Bilangan Bulat (Z)**

   Contoh bilangan bulat $C = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

Himpunan bilangan R dari suatu bilangan riil, maka akan berlaku sifat-sifat:

1. a + b dan ab adalah elemen dari R	Hukum ketertutupan
2. a + b = b + a	Hukum komutatif penjumlahan
3. a + (b + c) = (a + b) + c	Hukum asosiatif penambahan
4. ab = ba	Hukun Komutatif perkalian
5. a(bc) = (ab)c	Hukum asosiatif perkalian
6. a (b + c) = ab + ac	Hukum distributif

7. a + 0 = 0 + a = a, 1. a = a. 1 =a

   0 dinamakan dengan elemen satuan terhadap penambahan, 1 dinamakan elemen satuan terhadap perkalian.

1.4. Harga Mutlak

Nilai mutlak dari suatu bilangan real x ditulis $|x|$ didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Misalkan: $|3| = 3$, $|-5| = -(-5) = 5$

SIFAT-SIFAT. Nilai mutlak berperilaku manis dalam perkalian dan pembagian, tetapi tidak begitu baik dalam penambahan dan pengurangan.

Sifat-sifat nilai mutlak

1. |ab| = |a| |b|
2. |a| / |b| = |a| |b|
3. |a + b| ≤|a| + |b| (ketaksamaan segitiga)
4. |a - b| ≥ ||a| - |b||

<u>Teorema 1.1</u>

$|x| \geq 0$

<u>Bukti:</u>

Dari definisi, untuk $x < 0$ berlaku $|x| = -x > 0$ dan untuk $x \geq 0$ berlaku $|x| = x \geq 0$.

Jadi $|x| \geq 0$

<u>Teorema 1.2</u>

$|-x| = |x|$

<u>Bukti</u>

Dari definisi nilai mutlak, maka diperoleh

$$|-x| = \begin{cases} -(-x) & , -x < 0 \\ -x & , -x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & , x > 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$= |x|$

Jadi $|-x| = |x|$

1.5 Persamaan dan Pertidaksamaan

Jika $a - b$ adalah suatu bilangan yang tak negatif, maka dapat dikatakan bahwa a lebih besar dari atau sama dengan b atau b lebih kecil dari atau sama dengan a. Secara berturut-turut dapat dituliskan sebagai $a \geq b$ atau $b \leq a$. Jika tidak ada kemungkinan bahwa $a = b$, maka bisa dituliskan $a > b$ atau $b < a$.

Contoh. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $|3x + 2| = 5$

Jawab. Persamaan akan dipenuhi, jika kedua hal berikut berlaku:

$3x + 2 = 5$ atau $3x + 2 = -5$

Penyelesaian persamaan pertama memberikan hasil $x = 1$ dan penyelesaian persamaan kedua memberikan hasil $x = -7/3$

Jadi HP = {-7/3, 1}

Contoh. Tentukan semua nilai x yang memenuhi persamaan $|2x - 1| = |4x + 3|$

Jawab. Persamaan ini akan dipenuhi oleh x yang memenuhi

$2x - 1 = 4x + 3$ atau $2x - 1 = -(4x + 3)$

Penyelesaian persamaan pertama memberikan hasil $x = -2$ dan penyelesaian persamaan kedua memberikan hasil $x = -1/3$

Jadi HP = {- 2, -1/3}

Teorema 1.3

Misalkan a ≥ 0, maka $|x| \leq$ a jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$

Bukti

$(\Rightarrow)$ Oleh karena a ≥ 0 maka -a ≤ 0.

Jika $0 \le x$ maka $|x| = x$ dan $-a \le 0 \le x \le a$ sehingga $-a \le x \le a$.

Jika $x < 0$ maka $|x| = -x$ dan $-a \le 0 \le -x \le a$ sehingga $-a \le -x \le a$ atau ekivalen dengan $-a \le x \le a$.

$(\Leftarrow)$ Jika $0 \le x$ maka $|x| = x \le a$ sehingga $|x| \le a$.

Jika $x \le 0$, maka $|x| = -x$

Dan oleh karena $-a \le x$ maka $-x \le a$ atau $|x| \le a$.

Jadi untuk setiap x, $-a \le x \le a \Rightarrow |x| \le a$.

Contoh Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $|x-5| < 4$

Jawab. $|x-5| < 4$.

Berdasarkan teorema di atas, maka diperoleh

$$-4 < x - 5 < 4$$

Semua ruas dijumlahkan dengan 5, diperoleh $1 < x < 9$

Jadi HP = $\{x \,/\, 1 < x < 9\} = (1, 9)$

Contoh . Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $|x^2 + x - 1| \le 1$

Jawab

$|x^2 + x - 1| \le 1 \Rightarrow -1 \le x^2 + x - 1 \le 1$

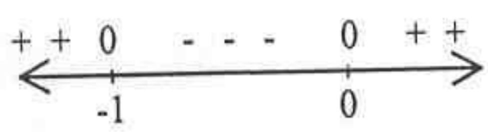
$-1 \le x^2 + x - 1$ dan $x^2 + x - 1 \le 1$

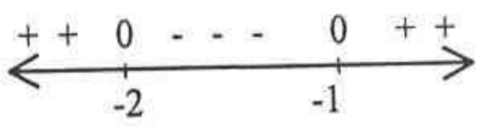
Dari ketaksamaan pertama diperoleh $0 \le x^2 + x$ dan Dari ketaksamaan kedua diperoleh $x^2 + x - 1 \le 1$

$0 \le x(x+1)$

$x^2 + x - 2 \le 0$

$(x-1)(x+2) \le 0$





$HP_1 = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$HP_2 = [-2, 1]$

Jadi HP = $HP_1 \cap HP_2 = [-2,-1] \cup [0,1]$

Contoh . Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $\left|x+\frac{1}{x}\right|$ >2

Jawab :

$x+\frac{1}{x}>2$ atau $x+\frac{1}{x}<-2$

$x+\frac{1}{x}-2>0$

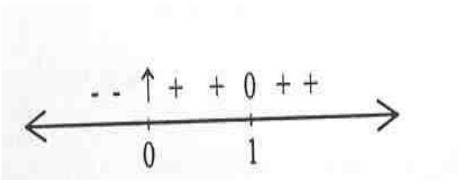
$x+\frac{1}{x}+2<0$

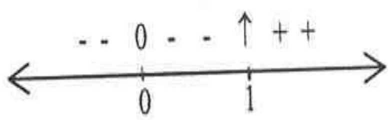
$\frac{x^2-2x+1}{x}>0$

$\frac{x^2+2x+1}{x}<0$

$\frac{(x-1)^2}{x}>0$

$\frac{(x+1)^2}{x}<0$





$HP_1 = (0,1) \cup (1,\infty)$ $HP_2 = (-\infty,-1) \cup (-1,0)$

Jadi HP = $HP_1 \cup HP_2 = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$

Teorema 1.4 $|x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2$

Bukti

$|x| \leq |y| \Rightarrow |x||x| \leq |x||y| \leq |y||y|$

$\Rightarrow |x|^2 \leq |y|^2$

maka diperoleh

$x^2 \leq y^2$

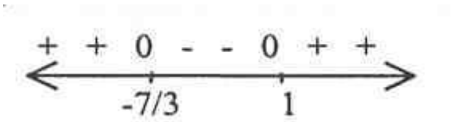
Contoh. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $|2x + 3| < |x + 4|$

Jawab. Dengan menggunakan Teorema 1.4 diperoleh

$(2x + 3)^2 < (x + 4)^2$

$[(2x + 3) + (x + 4)]\,[(2x + 3) - (x + 4)] < 0$

$(3x + 7)\,(x - 1) < 0$



Jadi HP = (-7/3, 1)

Teorema 1.5 $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ (ketaksamaan segitiga)

Bukti.

Dari teorema di atas diperoleh $-|x| \leq x \leq |x|$ dan $-|y| \leq y \leq |y|$

sehingga

$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$

Dari Teorema di atas, diperoleh

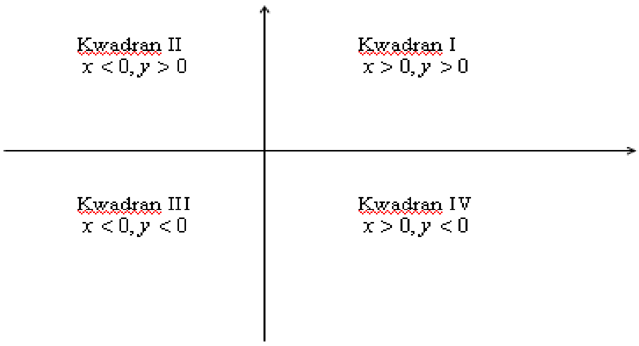
$|x + y| \leq |x| + |y|$

1.6 Sistem Koordinat

Sistem koordinat adalah suatu cara/metode untuk menentukan letak suatu titik. Jenis sistem koordinat antara lain: Sistem Koordinat Cartesius, Sistem Koordinat Kutub, Sistem Koordinat Tabung, dan Sistem Koordinat Bola

A. Sistem Koordinat Cartesius

Pada pembicaraan himpunan terbatas pada himpunan titik-titik pada suatu sumbu atau garis bilangan yang mempunyai dimensi satu atau disingkat sebagai R. Apabila kita menuliskan dalam R^2 yakni titik-titik tersebut digambarkan dalam ruang dimensi dua, maka terdapat metode untuk menuliskannya yang pertama kali dikenalkan oleh Rene Descartes (1596 – 1650). Diperhatikan 2 garis lurus, satu mendatar (horizontal) dan yang lain tegak (vertical). Selanjutnya, garis mendatar ini disebut *sumbu-x* sedangkan garis yang tegak disebut *sumbu-y*. Perpotongan kedua sumbu tersebut dinamakan *titik asal* (*origin*) dan diberi tanda *O*. Bidang datar (bidang koordinat) terbagi menjadi 4 daerah (kwadran), yaitu kwadran I, kwadran II, kwadran III, dan kwadran IV, seperti terlihat dalam Gambar 1.2.

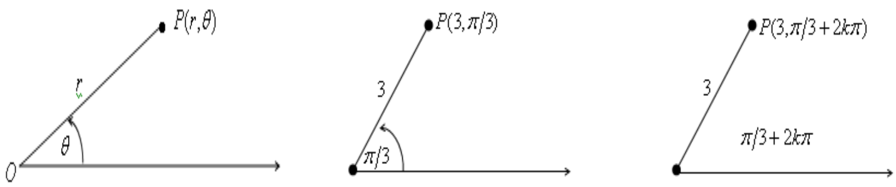


Gambar 1.2 Sistem Koordinat Cartesius

Letak sebarang titik pada bidang dinyatakan dengan pasangan berurutan (x,y). Titik P(x,y) mempunyai arti bahwa jarak titik *P* ke sumbu-*x* dan sumbu-*y* masing-masing adalah |x| dan |y|. Apabila x<0 (y<0) maka titik *P* berada di sebelah kiri (atau sebelah bawah) titik asal *O* . Apabila x>0 (y>0) maka titik *P* terletak di sebelah kanan (atau sebelah atas) titik asal *O*. Dalam hal ini, *x* disebut *absis* titik *P* sedangkan *y* disebut *ordinat* titik *P*.

B. Sistem Koordinat Kutub

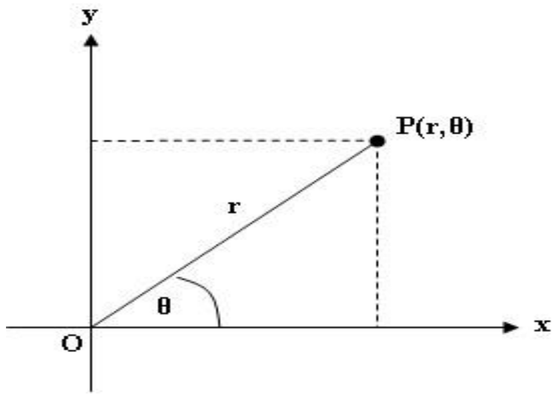
Sistem koordinat kutub, letak sebarang titik *P* pada bidang dinyatakan dengan pasangan bilangan real (r, θ), dengan *r* menyatakan jarak titik *P* ke titik *O* (disebut *kutub*) sedangkan θ adalah sudut antara sinar yang memancar dari titik *O* melewati titik *P* dengan sumbu-*x* positif (disebut *sumbu kutub*). Contoh koordint kutub diperlihatkan dalam Gambar 1.3.



Gambar 1.3 Contoh Koordinat Kutub

C. Hubungan Koordinat kartesius dan Koordinat Kutub

Suatu titik *P* berkoordinat (x,y) dalam sistem koordinat Cartesius dan(r, θ) dalam sistem koordinat kutub. Apabila kutub dan titik asal diimpitkan, demikian pula sumbu kutub dan sumbu-*x* positif juga diimpitkan, maka gambarnya seprti ditunjukkan dalam Gambar 1.4.



Gambar 1.4 Koordinat Kutub dan Koordinat Cartesius

Dimana r adalah jarak titik P terhadap O, θ adalah sudut antara OP dengan sumbu x positip. Dari Gambar 1.4 terdapat hubungan antara sistem koordinat Cartesius dengan sistem koordinat kutub yaitu:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r},$$

1.7 Latihan Soal

Tentukan semua nilai x yang memenuhi:

1. $2x - 7 = |x + 1|$
2. $2x - 7 < 4x - 2$
3. $|x^2 + x - 1| \le 1$
4. $|3x + 2| = 1$

5. $\left|x+\frac{1}{x}\right|>1$

6. $|2x-1|=|4x+3|$

7. $|6x-7|=|3+2x|$

8. $|x+3|<|x-8|$

9. $\left|\frac{x+5}{2-x}\right|=6$

10. $\left|\frac{x-1/2}{x+1/2}\right|<1$

11. $\left|\frac{3-2x}{1+x}\right|\leq 4$

12. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $(2x-5)^2-3|2x-5|<10$

13. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $(x-1)|x+1|<|x-1|$

14. Gambarkan grafik r=2

15. Gambarkan grafik $r=2a\ Cos\theta$

16. Nyatakan ke dalam sistem koordinat Cartesius

    a. $A(4,\frac{2\pi}{3})$ b. $A(-5,\frac{\pi}{4})$ c. $C(-3,\frac{5\pi}{6})$

BAB 2. FUNGSI

2.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

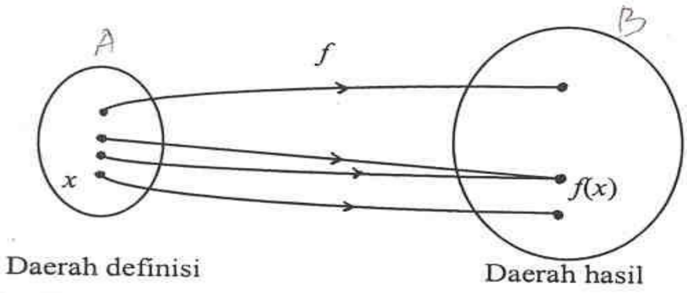
Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang konsep fungsi,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan fungsi dan jenis-jenis fungsi dalam matematika

B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mengetahui dan memahami tentang fungsi dan jenis-jenis fungsi dalam matematika.

2.2 Fungsi

Diberikan himpunan pasangan terurut (x,y) di mana $x \in A$ dan $y \in B$, maka himpunan $\{(x, y)|x \in A \; dan \; y \in B\}$ dan dinotasikan sebagai xRy. Selanjutnya himpunan A disebut daerah asal *(domain)* dan himpunan B disebut *daerah kawan (codomain)*, sedangkan himpuna bagian dari B yang mempunyai sifat xRy disebut range atau daerh hasil. Apabila x tidak berelasi dengan Y makan dituliskan sebagai $x \not{R} y$.Selanjutnya himpunan A disebut daerah asal D_f, dan himpunan B disebut *daerah hasil (codomain)* atau *daerah nilai* ditulis R_f. Dalam Gambar 2.1 adalah contoh fungsi, karena setiap unsur dalam daerah definisi terkait tepat satu dan hanya satu pada daerah hasilnya.



Gambar 2.1. Contoh Fungsi

Dengan kata lain, secara matematis suatu *f* dikatakan fungsi $f : D \to R$, jika :

$\forall x \in D \; \exists! \; y \in R \Rightarrow y = f(x)$

Daerah definisi : $D_f = \{x \in R \mid f(x) \in R_f\}$

Daerah hasil : $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$

Contoh : 1. $f(x) = 2x$. Daerah definisi *f* adalah $D_f = R$ dan daerah hasil *f* adalah $R_f = R$

2. $g(x) = |x|$. Daerah definisi *g* adalah $D_g = R$ dan daerah hasil *g* adalah $R_g = [0, \infty)$

Fungsi *f* dikatakan sama dengan fungsi g jika dan hanya jika memenuhi kedua sifat berikut :

i. $D_f = D_g$

ii. Aturan fungsi *f* sama dengan aturan fungsi *g*, yakni atau $f(a) = g(a)$, setiap $a \in D_f$.

Contoh 2.1

Tentukan daerah definisi dan daerah hasil dari fungsi $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + 1$

Jawab

Untuk menentukan daerah definisinya, syaratnya *f*(x) harus terdefinisi, sehingga

$$1 - x^2 \geq 0$$

$$(1 - x)(1 + x) \geq 0$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Jadi $D_f = [-1,1]$

$= \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\}$

Sedangkan daerah hasilnya, dengan mengambil *x* sebagai daerah definisi diperoleh :

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

$$0 \geq -x^2 \geq -1$$

$$1 \geq 1 - x^2 \geq 0$$

$$1 \geq \sqrt{1-x^2} \geq 0$$

$$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

$$1 \leq \sqrt{1-x^2} + 1 \leq 2$$

$$1 \leq f(x) \leq 2$$

Jadi $R_f = [1,2]$

2.3. Grafik Fungsi

Bilamana daerah definisi dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan bilangan real, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat. Dan *grafik fungsi f* adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

Contoh 2.2

Buatlah sketsa grafik fungsi

a. $g(x) = x^2 - 2$

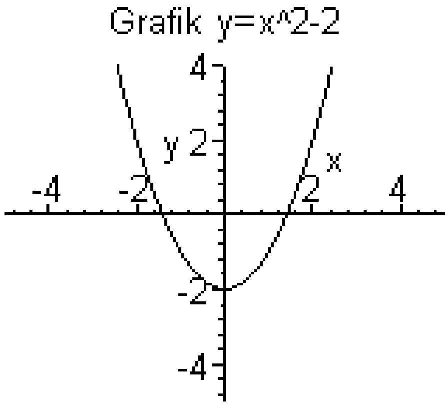
b. $h(x) = \sqrt{x-1}$

Jawab

a. Daerah hasil dari *g* adalah semua bilangan real R. Dengan membuat sebuah tabel nilai dan memplot titik-titik yang berpadanan lalu menghubungkan titik-titik itu dengan sebuah kurva mulus, kita peroleh grafik fungsi $g(x) = x^2 - 2$ seperti dalam Gambar 2.3.

Tabel 2.1 Nilai fungsi g(x)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=g(x)	7	2	-1	-2	-1	2	7



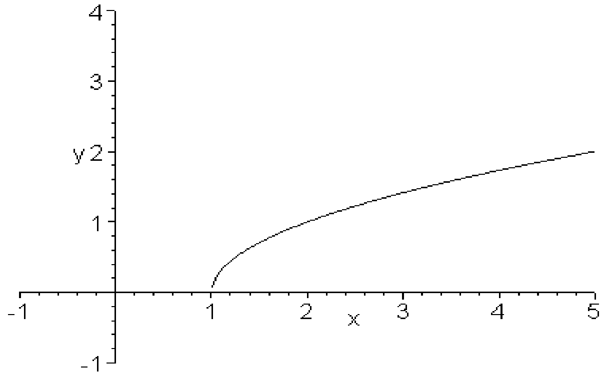
Gambar 2.3 Gambar Grafik Fungsi g(x)

b. Daerah definisi dari *h* adalah semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan 1 atau ditulis $D_h = [1, \infty)$. Dengan cara yang sama seperti (a) didapat grafik $h(x) = \sqrt{x-1}$

seperti dalam Gambar 2.4.

Tabel 2.1 Nilai fungsi h(x)

x	1	2	3	4	5	6	7
y=h(x)	0	1	1.41	1.73	2	2.24	2.45



Gambar 2.3 Gambar Grafik Fungsi h(x)

<u>Contoh 2.3</u>

Buatlah sketsa grafik fungsi pada contoh 2.1.

<u>Jawab</u>

Misalkan $f(x) = y$, sehingga

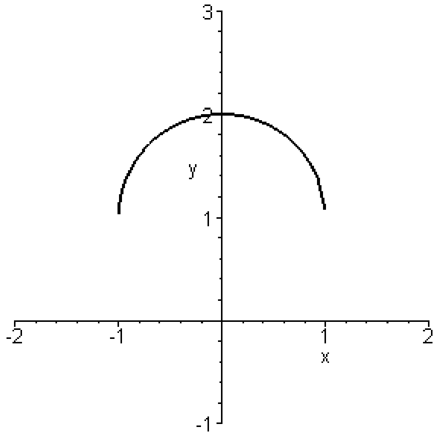
$$y = \sqrt{1 - x^2} + 1$$

$$y - 1 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(y-1)^2 = 1 - x^2$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

adalah persamaan sebuah lingkaran dengan pusat (0,1) dan jari-jari 1 satuan. Namun perlu diperhatikan bahwa $1 \le f(x) \le 2$, sehingga grafik fungsi tersebut adalah setengah lingkaran bagian atas (Gambar 2.4).



Gambar 2.3 Gambar Grafik Fungsi f(x)

2.4 Operasi pada Fungsi

Diberikan fungsi-fungsi *f* dan *g*, jumlah *f* +*g*, selisih *f* - *g*, hasil kali *f.g* dan hasil bagi *f/g*, didefinisikan sebagai

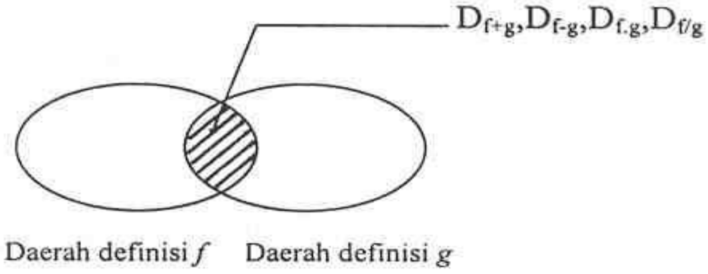
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ untuk setiap x

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ untuk setiap x

$(f.g)(x) = f(x).\ g(x)$ untuk setiap x

$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

Untuk fungsi-fungsi $f + g$, $f - g$ dan $f.g$ mempunyai daerah definisi $D_f \cap D_g$ yaitu daerah yang terarsir, dalam Gambar 2.5, dan untuk f/g daerah asalnya adalah $D_f \cap D_g$ kecuali $g(x) = 0$



Gambar 2.5 Gambar Operasi Fungsi

<u>Contoh 2.4</u>

Diberikan f dan g adalah fungsi-fungsi dimana $f(x) = \sqrt{5-x}$ dan $g(x) = \sqrt{x-3}$. Tentukan daerah-daerah definisi dari $f + g$, $f - g$, $f.g$ dan f/g.

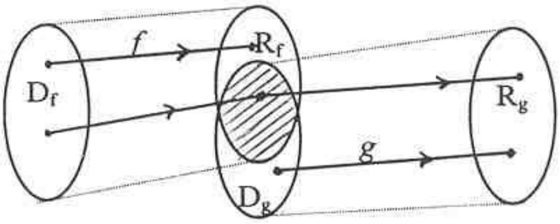
<u>Jawab</u>

Karena daerah definisi dari f adalah $(-\infty, 5]$ dan daerah definisi g adalah $[3, \infty)$**,** maka dipunyai berikut :

Operasi	Rumus	Daerah definisi
$(f+g)(x)$	$\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}$	[3,5]
$(f-g)(x)$	$\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}$	[3,5]
$(f.g)(x)$	$\sqrt{5-x}\ \sqrt{x-3}$	[3,5]
$(f/g)(x)$	$\sqrt{5-x} / \sqrt{x-3}$	(3,5]

Fungsi Komposisi

Diketahui dua buah fungsi f dan g, fungsi komposisi dari g dan f ditulis $g \circ f$ didefinisikan sebagai $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dengan daerah definisi dari $g \circ f$ adalah semua nilai x pada daerah definisi f yang memenuhi $f(x)$ pada daerah definisi g.



Gambar 2.6 Komposisi Fungsi

Perhatikan Gambar 2.6 di atas. Agar ada unsur $x \in D_f$ yang dapat dikaitkan ke R_g maka haruslah ada R_f yang juga merupakan anggota D_g

Jadi fungsi komposisi $g \circ f$ terdefinisi jika

$R_f \cap D_g \neq \varnothing$

Daerah definisi fungsi $g \circ f$ adalah

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

sedang daerah hasil fungsi $g \circ f$

$R_{g \circ f} = \{g(x) \in R_g \mid x \in D_g \cap R_f\}$

<u>Contoh 2.5</u>

Diketahui dua buah fungsi f dan g yang didefinisikan $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Tentukan $F(x)$ jika $F = g \circ f$ dan daerah definisi dari F.

<u>Jawab</u>

$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(2x-3)$

$= \sqrt{2x-3}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = [0, \infty)$

Jadi daerah definisi dari F adalah himpunan semua bilangan real x dengan $f(x) = 2x - 3 \geq 0$, sehingga daerah definisi F adalah

$D_F = \{x \,/\, 2x\text{-}3 \geq 0\}$

$= [3/2, \infty)$

Contoh 2.6

Diberikan $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukan $f_o g$ dan $g_o f$ serta daerah definisi masing-masing.

Jawab

$(f_o g)(x) = f[g(x)]$

$= f(x^2\text{-}1)$

$= \sqrt{x^2 - 1}$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$= \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\}$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$(g_o f)(x) = g[f(x)]$

$= g[\sqrt{x}\,]$

$= x - 1$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$= \{x \mid \sqrt{x} \in R\}$

$= [0, \infty)$

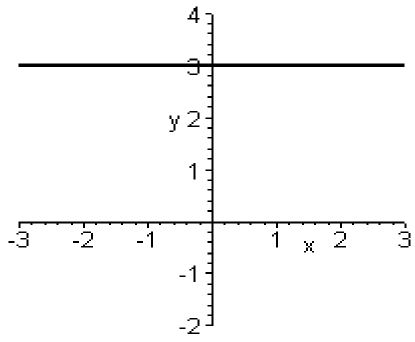
2.5 Jenis-jenis Fungsi dan Fungsi-fungsi Khusus

2.5.1. Jenis-jenis fungsi

1. **Fungsi konstan**

   f(x) = c, dengan c suatu bilangan real disebut *fungsi konstan* dengan nilai c.

Grafik fungsi konstan berupa garis lurus yang sejajar dengan sumbu x. Misal f(x) = 3. Grafik fungsi f(x) = 3 seperti pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Fungsi Konstan

2. **Fungsi Polinomial**

Fungsi polinomial atau *fungsi polinom* berderajat n dengan n bilangan asli, didefinisikan oleh persamaan

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

dimana a_0, a_1, . . . , a_n bilangan-bilangan real dan $a_0 \neq 0$.

Contoh : a. $f(x) = 2x - 1$ disebut polinom berderajat 1 atau disebut *fungsi linier*.

b. $g(x) = x^2 - 3x + 2$ disebut polinom berderajat 2 atau disebut *fungsi kuadrat*.

c. $h(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$ disebut polinom berderajat 5.

3. **Fungsi rasional**

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ jika } q(x) \neq 0$$

Fungsi *f* disebut *fungsi rasional* jika *f* dinyatakan sebagai pembagian dua fungsi polinom.

Contoh :

a. $f(x)=\dfrac{x^5-2x^3+1}{x^2-4}$

b. $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

c. $h(x)=\dfrac{1}{x^5}$

4. **Fungsi Aljabar**

   Fungsi aljabar adalah fungsi yang merupakan hasil operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, pemangkatan dan penarikan akar) terhadap fungsi satuan dan fungsi konstan.

   Contoh :

   a. $f(x)=\dfrac{(x^2-3x+1)^3}{\sqrt{x^4+1}}$

   b. $g(x)=x^{2/3}$

5. **Fungsi Transenden**

   Fungsi transenden adalah fungsi yang bukan merupakan fungsi aljabar.

Contoh: $a.\ f(x)=2\log(x+1)$

$b.\ g(x)=\sin(2x+1)$

$c.\ h(x)\ =\ 3\exp(x^2)$

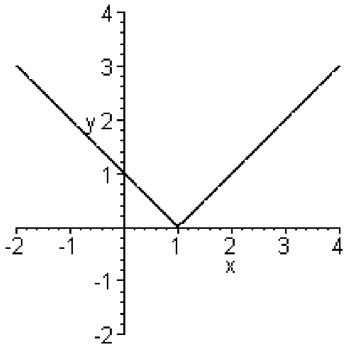
2.5.2 Fungsi-fungsi Khusus

Dalam sub bab ini diberikan beberapa fungsi yang mempunyai aturan khusus, diantaranya:

1. **Fungsi Mutlak**

   Fungsi mutlak adalah fungsi yang dinyatakan dalam bentuk nilai mutlak $|..|$

Contoh : $f(x) = |x - 1|$. Grafik fungsi ini terletak di atas sumbu x atau menyinggung sumbu *x* karena $f(x) = |x - 1|$. Gambar 2.8 adalah merupakan sketsa grafik fungsi : $f(x) = |x - 1|$



Gambar 2.8 Fungsi Mutlak

<u>Contoh 2.7</u>

Diketahui fungsi $f(x) = |x| - |x - 1|$. Tulislah fungsi *f* dalam bentuk yang tidak mengandung nilai mutlak dan sketsa grafiknya.

<u>Jawab</u>

Sesuai dengan definisi nilai mutlak, diperoleh :

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$|x - 1| = \begin{cases} 1 - x, & x - 1 < 0 \\ x - 1, & x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

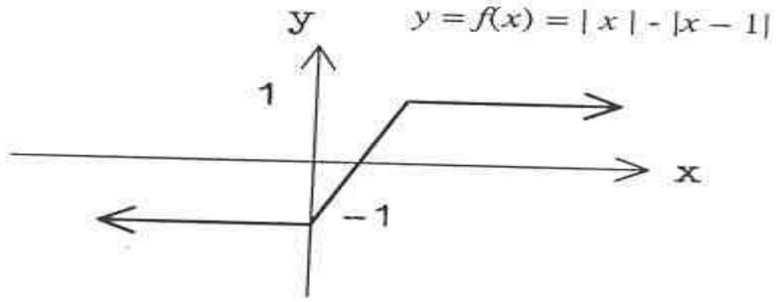
$$= \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (**)$$

Sehingga, dari (*) dan (**) diperoleh untuk *f*

$$f(x) = \begin{cases} -x - (1 - x), & x < 0 \\ x - (1 - x), & 0 \leq x < 1 \\ x - (x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 2x - 1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Sketsa grafik fungsi $f(x) = |x| - |x - 1|$seperti pada Gambar 2.9 di bawah ini :



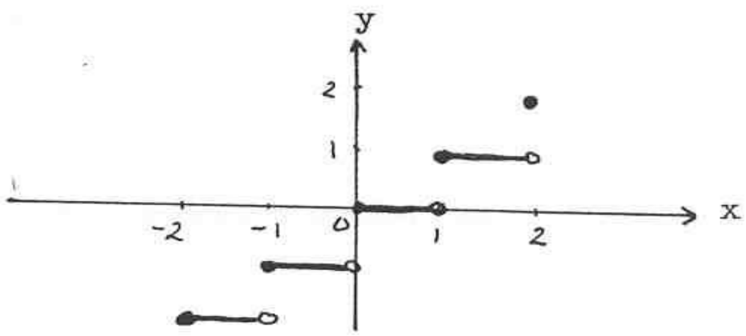
Gambar 2.9 Fungsi Mutlak f(x)

2. Fungsi bilangan bulat terbesar

$\|x\|$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x.

= n jika $n \leq x < n + 1, n \in Z\ (bilangan\ bulat)$

Grafik $f(x) = \|x\|$dengan D_f = [-2, 2] adalah seperti terlihat dalam Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Fungsi bilangan bulat terbesar

<u>**Contoh 2.8**</u>

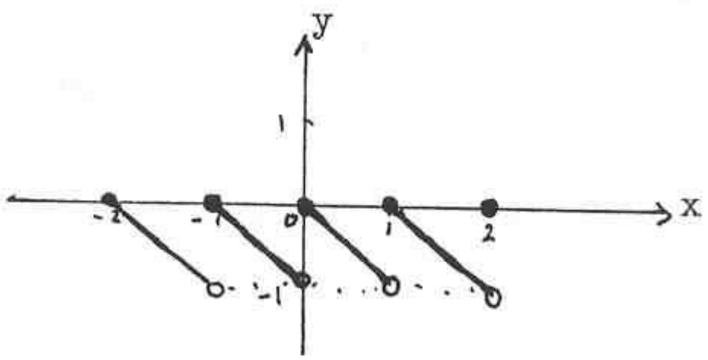
Jika $g(x) = \|x\| - x$ untuk $-2 \leq x \leq 2$, tuliskan fungsi g tanpa menggunakan $\|x\|$dan sketsa grafik fungsi g.

Jawab

$$\|x\| = \begin{cases} -2, & -2 \le x < -1 \\ -1, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$\|x\| - x = \begin{cases} -2 - x, & -2 \le x < -1 \\ -1 - x, & -1 \le x < 0 \\ -x, & 0 \le x < 1 \\ 1 - x, & 1 \le x < 2 \\ 2 - x, & x = 2 \end{cases}$$

Sketsa grafik fungsi $g(x)$ terlihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Fungsi bilangan bulat terbesar g(x)

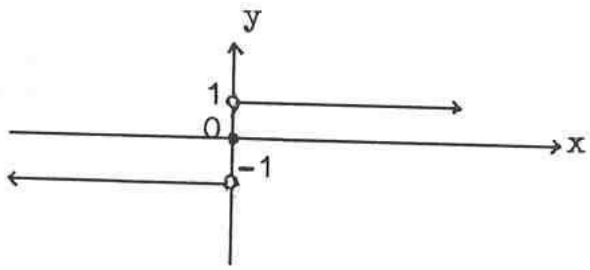
3. **Fungsi tanda (sign function)**

Fungsi tanda ditulis dengan Sgn *x*, didefinisikan sebagai:

$$Sgn\, x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Sgn *x* dibaca "signum dari *x*"

Grafik fungsi *f*(x) = Sgn *x* seperti dalam Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Fungsi tanda (sign function)

2.6 Latihan Soal

1. Diketahui $g(x) = \sqrt{x(x-2)}$. Tentukan daerah definisi *g* (Dg), daerah hasil (Rg) dan sketsa grafiknya.
2. Diketahui fungsi $f(x) = x(2 + |x|)$. Tulislah fungsi *f* tanpa menggunakan bentuk yang mengandung nilai mutlak dan sketsa grafik f.
3. Jika $f(x) = \|x^2\|$, untuk x = [-1, 2], tuliskan fungsi *f* tanpa menggunakan $\|.\|$dan sketsa grafik fungsi *f*.

   Pada soal nomor 4 sampai dengan 6 berikut diberikan bentuk fungsi *f* dan *g*. Untuk setiap soal tentukan *f* +*g*, *f*-*g*, *f*.*g*, *f*/*g*, *f*∘*g*, *g*∘*f* dan tentukan pula daerah-daerah asal hasil operasi tersebut.
4. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$
6. $f(x) = |x|$, $g(x) = |x-3|$
7. Diketahui *g* fungsi yang didefinisikan sebagai : $g(x) = x^2$.

. Tentukan fungsi *f* sedemikian hingga (*f*∘*g*)(*x*) = *x* , jika : a. $x \geq 0$ b. $x < 0$

8. Untuk setiap fungsi yang diberikan di bawah ini, tentukan daerah definisinya dan daerah hasilnya serta sketsa grafiknya.

   a. *f*(*x*) = Sgn(*x*+1) - Sgn(*x*-1)

   b. *g*(*x*) = Sgn x^2 - Sgn *x*

   c. $f(x) = |x||x-1|$

   d. $g(x) = |x| + \|x\|$

   e. $h(x) = \frac{\|x\|}{x}$

BAB 3. LIMIT FUNGSI

3.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang konsep limt fungsi,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan limit fungsi dan jenis-jenis limit fungsi dalam matematika

B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mengetahui dan memahami tentang limit fungsi dan jenis-jenis limit fungsi dalam matematika.

3.2 Limit Fungsi

Limit fungsi merupakan konsep dasar dalam mempelajari matematika. Limit fungsi berhubungan dengan fungsi matematika, Bilangan L disebut limit fungsi f(x) untuk x mendekati suatu harga a. Limit seringkali dituliskan sebagai Lim.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan positip ϵ yang diberikan betapapun kecilnya, dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua harga x dimana

$0 < |x - a| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \in$

<u>Contoh 3.1</u>

Dengan menggunakan definisi dari limit fungsi tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} x^2 + 3x + 1 = 1$

<u>Jawab</u>

Diberikan sembarang $\in > 0$, maka harus ditemukan bilangan $\delta > 0$, sedmikina hingga untuk $0 < |x - 0| < \delta$ berlaku $|(x^2 + 3x + 1) - 1| < \in$

Selanjutnya

$|(x^2 + 3x + 1) - 1| = |x^2 + 3x|$

$\leq |x^2| + 3|x|$

$(x^2 + 3x + 1) \leq \delta^2 + 3\delta$

$\leq \delta + 3\delta = 4\delta$. Dengan mengambil $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, maka soal **terbukti benar.**

Hukum-hukum Limit Fungsi

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = A$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = B$ maka berlaku hukum limit sebagai berikut:

1. $\lim_{x \to a} c\, f(x) = cA$, dimana c merupakan suatu konstanta
2. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$
3. $\lim_{x \to a} (f(x).\, g(x)) = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x) = A.B$
4. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$

<u>Contoh 3.2</u>

Carilah nilai limit dari fungsi berikut ini:

1. $\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1)$
2. $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2}$
3. $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x+4}$
4. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$
5. $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

<u>Jawab</u>

1. $\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1) = 1^2 - 2(1) + 1 = -2$
2. $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim_{x \to 3} x-2}{\lim_{x \to 3} x+2} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$
3. $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x+4} = \frac{4-4}{4+4} = \frac{0}{8}$

4. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3x+9)}{(x+3)}=\frac{3^2+3(3)+9}{3+3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

5. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$

3.3 Limit Kiri dan Limit Kanan Fungsi

Limit kiri f(x) untuk x mendekati a (harga a didekati oleh x dari kiri), dituliskan sebagai:

$$\lim_{x\uparrow a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Definisi: Limit Kiri

Bilangan L disebut limit kiri dari fungsi f(x) untuk x mendekati a, jika untuk setiap bilangan positip ϵ yang diberikan betapapun kecilnya, dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua harga x dimana $a-\delta < x < a$, berlaku $|f(x)-L| <\in$

Limit kanan f(x) untuk x mendakati a (harga a didekati oleh x kanan, dituliskan sebagai:

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

<u>Contoh 3.3</u>

Jika diberikan $f(x)=\frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$, maka hitunglah nilai limit berikut ini

1. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
2. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

<u>Jawab</u>

1. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = +\sim$
2. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = -\sim$

3.4 Limit Fungsi Mendekati Tak Hingga

Bilangan L disebut limit fungsi f(x) untuk x mendekati suatu harga tak hingga positip, maka Limit tersebut seringkali dituliskan:

$\lim_{x\to +\sim} f(x) = L$ atau $\lim_{x\to\sim} f(x) = L$

Sedangkan jika bilangan L disebut limit fungsi f(x) untuk x mendekati suatu harga tak hingga negatip, maka Limit tersebut seringkali dituliskan:

$$\lim_{x \to -\sim} f(x) = L$$

Contoh 3.4

Hitunglah nilai limit dari fungsi berikut ini

1. $\lim_{x \to \sim} \frac{3x-2}{9x+10}$
2. $\lim_{x \to \sim} \frac{x^2+2}{x+10}$
3. $\lim_{x \to \sim} \frac{x^2}{4x^3+10}$
4. $\lim_{x \to \sim} (x - \sqrt{x^2 + 4x - 1})$

Jawab

1. $\lim_{x \to \sim} \frac{3x-2}{9x+10} = \lim_{x \to \sim} \frac{3-2/x}{9+10/x} = 1/3$
2. $\lim_{x \to \sim} \frac{x^2+2}{x+10} = \lim_{x \to \sim} \frac{1+2/x}{\frac{1}{x}+10/x} = \frac{1}{0} = \sim$
3. $\lim_{x \to \sim} \frac{x^2}{4x^3+10} = \lim_{x \to \sim} \frac{1/x}{4+10/x} = 0/4 = 0$

3.5 Limit Fungsi Trigonometri

Beberapa rumus trigonometri antara lain:

1. $\sin(x + y) = \sin x. \cos y + \cos x. \sin y$
2. $\sin(x - y) = \sin x. \cos y - \cos x. \sin y$
3. $\cos(x + y) = \cos x. \cos y - \sin x. \sin y$
4. $\cos(x - y) = \cos x. \cos y + \sin x. \sin y$
5. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\ \tan y}$
6. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x.\ \tan y}$
7. $\sin 2x = 2 \sin x. \cos x$
8. $\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x = 2cos^2 x - 1 = 1 - 2sin^2 x$

9. $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-tan^2 x}$

Adapun rumus-rumus limit fungsi trigonometri adalah sebagai berikut:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{arc}\tan x}{x} = 1$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{arc}\tan x}{x} = 1$

Contoh 3.5

Hitunglah nilai limit dari fungsi berikut ini

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{arc\sin x}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

Jawab

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{arc\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{arc\sin x} = 1.1 = 1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}.\ \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}.1 = \frac{2}{3}$

3.6 Kontinuitas Fungsi

Fungsi f(x) disebut kontinu di titik x=a, jika untuk setiap bilangan positip $\epsilon > 0$ yang diberikan betapapun kecilnya, dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua harga x dimana $|x-a| < \delta$, berlaku $|f(x) - f(a)| <\in$.

Fungsi f(x) disebut kontinu di x=a, jika:

1. f(a) ada berhingga
2. $\lim_{x \to a} f(a) = ada$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Dapat dikatakan juga bahwa fungsi f(x0 kontinu di titik x=a apabila titik x=a tersebut mempunyi harga limit kiri dan limit kanan dan nilainya berhingga (finite). Sebaliknya fungsi f(x) dikatakan diskontinu di titik x=a, apabila salah satu syarat untuk f(x) kontinu di titik x=a tidak terpenuhi.

Contoh 3.6.

Apakah fungsi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2 \\ 4, \quad x = 2 \end{cases}$ kontinu di x=2?

Jawab

Tanpa mensketsa grafik fungsi *f*, kita dapat menentukan apakah *f* kontinu atau tidak kontinu di x = 2. Diperiksa terlebih dahulu syarat-syarat kekontinuannya :

1. *f*(2) = 4 ada (syarat pertama kekontinuan dipenuhi)
2. $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x+2)$ = 2 + 2 = 4

   (syarat kedua kekontinuan dipenuhi)
3. $\lim_{x \to 2} f(x)$ = 4 = *f*(2) (syarat ketiga kekontinuan dipenuhi)

Karena ketiga syarat kekontinuan fungsi terpenuhi, maka *f*(*x*) kontinu di *x* = 2.

3.7 Latihan Soal

1. Hitunglah nilai $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{x(2-x)}$
2. Hitunglah nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$
3. Apakah fungsi $f(x) = \begin{cases} x, \quad x \leq 2 \\ x-2, \quad x > 2 \end{cases}$ kontinu di x=2?

BAB 4. TURUNAN FUNGSI

4.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang konsep turunan fungsi,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan fungsi dan jenis-jenis fungsi dalam matematika

B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mengetahui dan memahami tentang turunan fungsi dan jenis-jenis turunan fungsi dalam matematika.

4.2 Turunan Fungsi

Definisi : Jika $y = f(x)$ adalah suatu fungsi variabel *x*, dan bila $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ atau $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada dan terbatas, maka limit tersebut dinamakan turunan atau derivative dari *y* terhadap *x* dan *f(x)* dikatakan fungsi dari *x* yang dapat diturunkan (*differentiable*).

Contoh 4.1.

Carilah turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^2 + 1$

Jawab:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{(x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2) + 1}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\{x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 1\} - (x^2) - 1}{\Delta x} \right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{(2x.\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

4.2.1 Turunan fungsi aljabar

Fungsi aljabar dalam ini diandaikan sebagai bentuk u,v dan w yang merupakan fungsi-fungsi x yang dapat diturunkan. Adapaun rumus-rumus umumnya dapat dituliskan sebagai berikut:

1 $\frac{d}{dx}(c) = 0$, c sembarang konstanta

2 . $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3 $\frac{d}{dx}(u + v + ...) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + ...$

4 $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$

5 $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$

6 $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{d}{dx}(w) + uw\frac{d}{dx}(v) + vw\frac{d}{dx}(u)$

7 $\frac{d}{dx}(\frac{u}{c}) = \frac{1}{c}.\frac{d}{dx}(u), c \neq 0$

8 $\frac{d}{dx}(\frac{c}{u}) = c\frac{d}{dx}(\frac{1}{u}) = -\frac{c}{u^2}.\frac{d}{dx}(u), u \neq 0$

9 $\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}, v \neq 0$

10 $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$

11 $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$

$\frac{dy}{dx}$ dikatakan sebagai turunan pertama dari $y = f(x)$. Jika $\frac{dy}{dx}$ diturunkan maka akan diperoleh $\frac{d}{dx}.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ dikatakan sebagai turunan kedua, dan seterusnya sampai $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Contoh 4.2.

Tentukan turuna pertama $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi-fungsi berikut ini:

1. y= $f(x) = 3x^2 + 2x + 12$

2. y= $f(x) = (4x^2 - 1)(7x^3 + 1)$

3. y= $f(x) = \dfrac{5x + x^2}{x^3 + 2}$

Jawab:

1. $\frac{dy}{dx} = 6x + 2$
2. $\frac{dy}{dx} = (4x^2 - 1)\frac{d}{dx}(7x^2 + 1) + (7x^2 + 1)\frac{d}{dx}(4x^2 - 1)$

$$= (4x^2 - 1)(14x) + (7x^2 + 1)(8x) = (56x^3 - 14x) + (56x^3 + 8x)$$
$$= 112x^3 - 6x$$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3+2).\frac{d}{dx}(5x+x^2) - (5x+x^2).\frac{d}{dx}(x^3+2)}{(x^3+2)^2} = \frac{(x^3+2).(5+2x) - (5x+x^2).(3x^2)}{(x^3+2)^2}$

$$= \frac{-x^4 - 10x^3 + 4x + 10}{(x^3+2)^2}$$

4.2.1 Turunan Fungsi Implisit

Bentuk-bentuk fungsi y=f(x) dinamakan sebagai fungsi eksplisit, sedangkan bentuk fungsi f(x,y)=0 dinamakan sebagai fungsi implisit. Suatu persamaan f(x,y) = 0, pada jangkau terbatas dari variabel-variabel tertentu, dikatakan mendefinisikan y sebagai fungsi x secara implisit.

Contoh 4.3.

Carilah turunan pertama dari Fungsi Implisit $x^2y + xy^2 = 6$

Jawab:

$x^2y + xy^2 - 6 = 0$

$2xy + \frac{dy}{dx}.x + 1.y^2 + 2y\frac{dy}{dx}.x = 0$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y) = -2xy - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{= -2xy - y^2}{x+2y}$$

4.3 Turunan Fungsi Trigonometrik

Untuk mencari turunan dari fungsi *f*(x) = sin x, kita masih berpedoman pada definisi turunan. Apabila *f*(x) = sin x, maka *f'*(x) adalah:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\ \cos h + \cos x\ \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\sin x\frac{1-\cos h}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\right) = (-\sin x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right] + (\cos x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right]$$

$$= (-\sin x)\,.\,0 + (\cos x)\,.\,1 = \cos x$$

Jadi $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$. Begitu juga untuk fungsi yang lain.

Dari turunan fungsi -fungsi tersebut, kita dapat mencari turunan fungsi-fungsi trigonometri yang lain dengan tetap berpedoman pada teorema-teorema yang telah diberikan.

Aturan-aturan turunan. Misalkan u adalah fungsi x yang dapat diturunkan, maka

1. $\frac{d}{dx}(\sin\ u) = \cos u\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(\cos\ u) = -\sin u\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(tg\ u) = \sec^2\ u\frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(\cot g\ u) = -\operatorname{cos}ec^2\ u \frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(\sec\ u) = \sec u\ tg\ u \frac{du}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cos}ec\ u) = -\operatorname{cos}ec\, u \quad \cot g\ u \frac{du}{dx}$

4.4 Turunan Fungsi Invers Trigonometrik (Fungsi Siklometri)

Misalkan u adalah fungsi x yang dapat diturunkan, maka:

1. $\frac{d}{dx}(arc \sin\ u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

2. $\frac{d}{dx}(arc \cos\ u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}(arc\, tg\ u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}(arc \cot g\ u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}(arc \sec\ u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}(arc \operatorname{cos}ec\ u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

4.5 Turunan Fungsi Logaritma dan Eksponensial

Suatu fungsi logaritma $y = {}^a\log u$, dengan a > 0 dan $a \neq 0$ dan u suatu fungsi dari x, maka turunan pertamanya adalah : $\frac{1}{u \ln a} . \frac{du}{dx}$, dan khusus apabila diambil a = e, maka akan diperoleh y = ln u dan turunan pertamanya adalah : $\frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$, sedangkan fungsi eksponensial $y = a^u$, dengan u adalah fungsi dari x, maka $u = {}^a\log y$, dan turunan pertamanya adalah : $a^u \ln a . \frac{du}{dx}$, dan apabila khusus diambil a = e, maka akan diperoleh $y = e^u$, sehingga diperoleh turunan pertamanya adalah

: $e^u . \dfrac{du}{dx}$

4.6 Latihan Soal

Tentukan turunan pertama $\frac{dy}{dx}$dari fungsi Aljabar berikut ini:

1. $f(x) = 5x^2 + x + 3$
2. $f(x) = 9(x^2 - 1)^2$
3. $f(x) = x\sqrt{x^2 + x}$
4. $f(x) = (x+1)(x^3 - 5)^{-2}$
5. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 + 4}$
6. $f(x) = (3x^4 + 6x^2 + 1)^7$
7. Fungsi Implisit $x^3 + xy + y^3 = 0$
8. Fungsi Implisit $x^3 + 2x^2 y + 4xy^2 + 8y^3 = 40$

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut ini

1. $f(x) = tg\ x$.
2. $f(x) = \sec x$.
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
4. $f(x) = \sin 4x + \cos 2x$
5. $f(x) = arc\ \sin 2x$
6. $f(x) = arc\ \cos(x^2 - 5)$

Carilah nilai turunan pertama dari fungsi trigonometri dan fungsi invers trigonometri berikut ini:

1. $y = \sin 4x + \cos 2x$
2. $y = 2\ tg(x^3 + 1)$
3. $y = ctg(2 - 4x^3)$
4. $y = tg^3(x^2 - 2)$
5. $y = \sec^2 \sqrt[3]{x}$
6. $y = \operatorname{cosec} x.\ ctg(2x - 3)$
7. $y = \dfrac{1}{(\sec 2x - 1)^{2/3}}$
8. $y = arc\ ctg \dfrac{1 + x}{1 - x}$
9. $y = (9 + x^2)\ arc\ tg(\tfrac{1}{3}x) - 3x$
10. $y = \dfrac{1}{5} arc\ tg(\dfrac{3}{5}\ tg\ x)$

Carilah nilai turunan pertama dari fungsi berikut ini:

1. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
2. $y = e^{\sin x}$
3. $y = 10^{\sin x}$
4. $y = e^x \ln x$
5. $y = (x^2 + 2)^3 (1 - x^3)^4$
6. $y = e^{-2x} (\sin 2x + \cos 2x)$
7. $y = a^{arctg\, 3x^2}$

BAB 5. PENGUNAAN TURUNAN

5.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang turunan dan penggunaannya,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan turunan dalam matematika

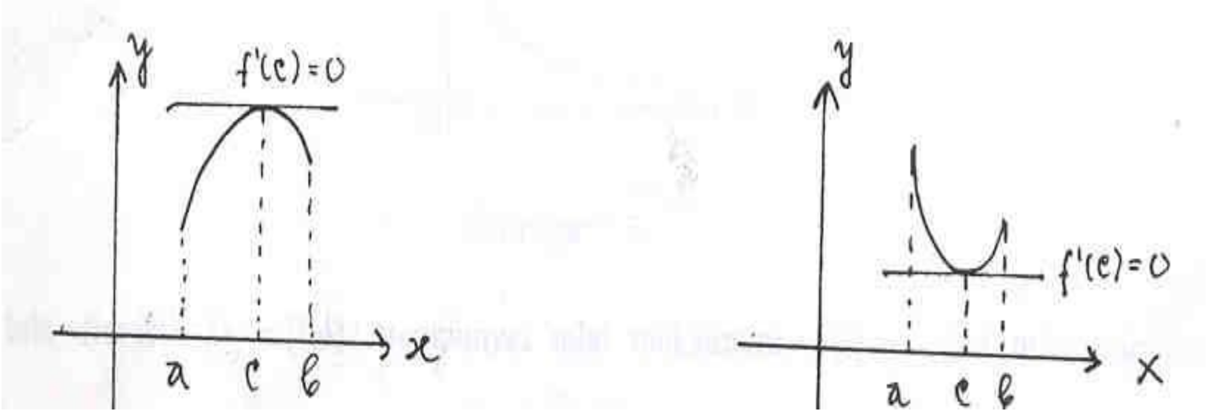
B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiwa diharapkan mengetahui dan memahami tentang penggunaan turunan dalam matematika.

5.2 Ekstrem Suatu Fungsi

Definisi:

1. Fungsi f(x) dikatakan mempunyai maksimum relatif di titik x = a , jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f(x) \leq f(a)$ untuk $|x-a| < \delta$
2. Fungsi f(x) dikatakan mempunyai minimum relatif di titik x = a , jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f(x) \geq f(a)$ untuk $|x-a| < \delta$
3. Apabila f(x) terdefinisikan pada selang (a,b) sedemikian hingga f'(x) = 0 atau f'(x) tidak ada, maka x disebut nilai kritis (nilai stasioner)



(a) (b)

Gambar 5.1 (a). Nilai Maksimum f(c) , (b) Nilai Minimum f (c)

Nilai Ekstrim

Nilai maksimum atau minimum relatif dari fungsi *f* dinamakan *nilai ekstrim relatif* dan titiknya dinamakan *titik ekstrim relatif*. Nilai-nilai ekstrim sebuah fungsi yang didefinisikan pada selang tutup seringkali terjadi pada titik-titik ujung.Jika c sebuah titik pada Df dimana f'(c)=0,maka titik c sebagai *titik stasioner*. Jika c adalah titik dalam dari *f* di mana *f* ' tidak ada, kita sebut titik c sebagai *titik singular*

Definisi : Diberikan fungsi *f* yang terdefinisi pada suatu selang dan diberikan x_1 dan x_2 adalah titik-titik dalam selang itu.

i. *f* disebut naik pada selang jika $f(x_1) < f(x_2)$ untuk setiap $x_1 < x_2$.

ii. *f* disebut turun pada selang jika $f(x_1) > f(x_2)$ untuk setiap $x_1 < x_2$

iii. *f* disebut konstan pada selang jika $f(x_1) = f(x_2)$ untuk setiap titik x_1 dan x_2

<u>Teorema:</u> Diberikan *f* adalah fungsi yang kontinu pada selang tutup [a, b] dan terdiferensial pada selang buka (a, b).

i. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka fungsi *f* adalah monoton naik pada selang tutup [a, b].

ii. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka fungsi *f* adalah monoton turun pada selang tutup [a, b].

iii. Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka fungsi *f* adalah konstan pada selang tutup [a,b].

Contoh 5.1.

1. Diberikan $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$, tentukan

a. Harga-harga dimana f(x) positip, nol, atau negatip
b. Harga-harga dimana f(x) naik, dan turun
c. Harga-harga dimana f(x) mencapai ekstrem dan harga ekstrem
d. Plot grafiknya

2. Diberikan fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$. Tentukan :

a. Harga-harga x dimana f(x) positip, nol, dan negatif.

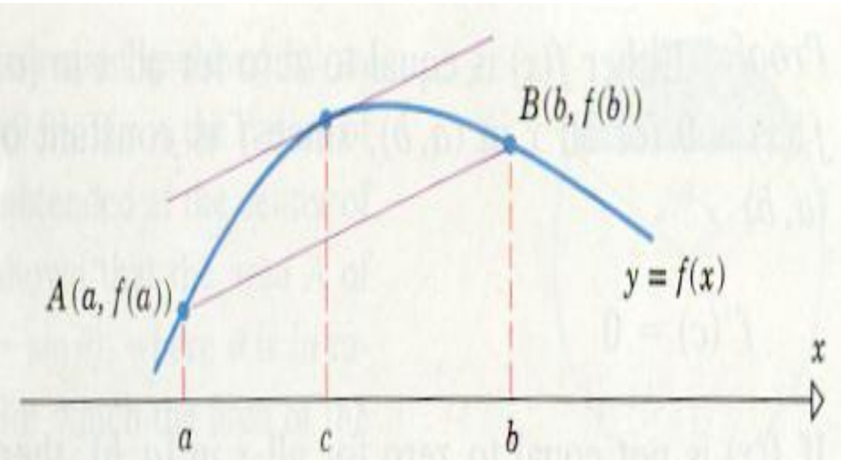
b. Harga-harga x dimana f(x) naik, turun.

c. Harga-harga x dimana f(x) mencapai ekstrem dan tentukan nilai titik ekstermnya.

d. Plot grafik fungsi tersebut.

Teorema Harga Menengah

Teorema nilai rata-rata merupakan perluasan dari Teorema Rolle. Teorema ini menyatakan bahwa pada fungsi *f* yang kontinu pada selang tutup [a, b] dan mempunyai turunan pada selang bukanya, terdapat suatu titik c yang mana garis singgung pada grafik fungsi di titik itu sejajar dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik (a, *f*(a)) dan (b, *f*(b)).



Gambar 5.2 Ilustrasi Teorema Harga Menengah

Teorema :

Misalkan *f* adalah suatu fungsi yang memenuhi syarat

1. *f* kontinu pada selang tutup [a, b]
2. *f* mempunyai turunan pada selang buka (a, b)

Maka ada suatu $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Contoh 5.2

Diketahui fungsi $f(x) = 3x - x^3$. Tentukan nilai c sehingga gradien garis singgung kurva fungsi *f* di titik c sejajar dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik (-2,2) dan (0,0) pada kurva tersebut.

Jawab :

Terlihat jelas bahwa fungsi f kontinu dan mempunyai turunan pada R dengan nilai turunan pertamanya adalah $f'(x) = 3 - 3x^2$. Agar gradien kurva f di titik c sejajar dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik (-2,2) dan (0,0) maka haruslah :

$$f'(c) = \frac{f(-2) - f(0)}{-2 - 0}$$

$$3 - 3c^2 = \frac{2 - 0}{-2}$$

$$3c^2 = 4$$

$$c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

5.3 Kemonotonan dan Uji Turunan Pertama

Definisi: Jika fungsi f terdefinisi pada suatu selang dan diberikan x1 dan x2 adalah titik selang tersebut maka:

1. f naik pada selang jika $f(x_1) < f(x_2)$ untuk setiap $x_1<x_2$
2. f turun pada selang jika $f(x_1) > f(x_2)$ untuk setiap $x_1<x_2$
3. f konstan pada selang jika $f(x_1) = f(x_2)$ untuk setiap titik-titik pada x_1 and x_2

Uji Turunan Pertama

Fakta: jika *f* kontinu pada selang [a,b] dan differentiable dalam (a,b) maka

1. *f* naik pada selang [a,b] jika $f'(x)>0$ untuk semua x in (a,b)
2. *f* turun on [a,b] jika $f'(x)<0$ untuksemua x in (a,b)
3. *f* konstan pada selang [a,b] jika $f'(x)=0$ untuk semua x dalam (a,b)

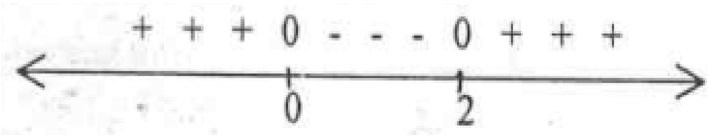
Contoh 5.3

Jika $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, maka tentukan selang di mana fungsi f naik dan turun

Jawab:

Turunan pertama dari fungsi f adalah $f('x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Tanda-tanda dari fungsi f'(x) pada R adalah sebagi berikut:



Dari tanda-tanda di atas maka dapat dilihat bahwa:

Pada x < 0 maka f'(x) > 0

0 < x < 2 maka f'(x) < 0

X > 2 maka f'(x) > 0

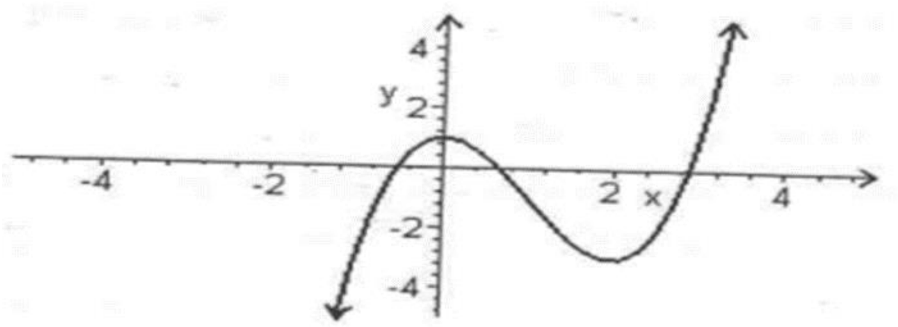
Karena f kontinu pada x = 0 dan x=2, sehingga

f naik pada selang (−~,0]

f turun pada selang [0,2]

f naik pada selang [2, ~],

Adapun grafik fungsinya terlihat seperti Gambar 5.3.



Gambar 5.3 Grafik Fungsi f(x)

Convex dan Concav

Definisi : Apabila dalam suatu interval (a,b) titik-titik dalam grafik fungsi f(x) berada di atas garis singgung di titik tersebut maka grafik fungi f(x) pada (a,b) disebut cembung ke bawah (convex) dan apabila grafik f(x) berada di bawah garis singgung di titik tersebut maka grafik fungsi pada (a,b) cekung ke bawah (concav).

Teorema:

Dibentuk f(x) yang mempunyai turunan kedua pada (a,b), maka :

1. Apabila f''(x)>0 pada (a,b) mana f(x) cembung ke bawah pada (a,b).
2. Apabila f''(x)<0 pada (a,b) mana f(x) cekung ke bawah pada (a,b).

Teorema:

Apabila f(x) diferensible pada interval (a,b) dan (c,f (c)) merupakan suatu titik belok dan f(x) dengan c anggota (a,b) maka f'' (c) = 0

Asimtot

Terdapat tiga macam asimtot suatu kurva yaitu : Asimtot tegak, asimtot datar, asimtot miring.

Asimtot Tegak.

Perhatika grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Maka untuk $x \to 2^+$, maka $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\sim$ dan untuk $x \to 2^-$, maka $\lim_{x\to -} \frac{1}{x-2} = -\sim$

Selanjutnya dikatakan bahwa garis x =2 disebut asimtot tegak grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Karena x tidak boleh sama dengan 2 maka grafik tidak pernah menyentuh asimtot tegak x=2.

Maka dapat disimpulkan bahwa garis x=a akan menjadi asimtot tegak dari f(x) apabila

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Asimtot Datar

Dari fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ maka garis y=b disebut asimtot mendatar dari grafik fungsi f(x) apabila $\lim_{x\to\sim} f(x) = b$

Asimtot Miring

Misalkan bahwa persamaan asimtot miring kurva f(x) adalah y=mx+n maka akan dicari harga m dan n garis tersebut yang kemudian dinamakan dengan asimtot miring.

$m = \lim_{x\to\sim} \frac{f(x)}{x}$ dan $n = \lim_{x\to\sim} [f(x) - m]$

5.4 Latihan Soal

Diberikan suatu fungsi

1. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-a)}$**, a > 0.**

3. $f(x) = (3x^2 - 5)x^3$

4. $f(x) = (x-2)^2(x-5)$

Dari soal no.1 -4 carilah nilai-nilai dari:

a. Harga –harga x dimana f(x) positip, nol, dan negatif.

b. Harga-harga x dimana f(x) naik-turun, mencapai ekstrem dan harga ekstrem.

c. Harga-harga x dimana f(x) cembung ke bawah, cekung ke bawah sera titik beloknya jika ada.

d. Asimtot

e. Gambar grafiknya.

5. Sebuah kapal berhenti di P pada jarak 9 Km dari pantai yaitu di Q. Seorang awak kapal tersebut menuju suatu tempat dipantai yang terletak 15 Km dari Q. Dimanakah dia harus mendarat agar supaya waktu yang diperlukan secepat mungkin, bila diketahui bahwa kecepatan dengan menggunakan sampan kecil adalah 4 Km per Jam dan kecepatan berjalan di darat 5 Km per Jam.
6. Tentukan tinggi sebuah tabung lingkaran tegak dengan isi maksimum yan gdapat dibuat di dalam suatu bola yan gberjari-jari R.

BAB 6. INTEGRAL FUNGSI

6.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang konsep integral fungsi yang meliputi integral tak tentu dan integral tertentu,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan integral fungsi dan jenis-jenis integral fungsi dalam matematika

B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiwa diharapkan mengetahui dan memahami tentang integral fungsi dan jenis-jenis integral fungsi dalam matematika.

6.2 Integral Tak Tentu

Jika F(x) adalah suatu fungsi yang mempunyai turunan F'(x) = f(x) pada selang tertentu dari sumbu x, maka F(x) disebut anti turunan atau integral tak tentu dari f(x). Sehingga turunannya :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Simbol $\int f(x)\,dx$ digunakan untuk menyatakan suatu integral tak tentu.

Contoh : $y = F(x) = x^3$

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = 3x^2 \rightarrow f(x) = 3x^2$

Jadi $x^3 = \int 3x^2 dx \rightarrow F(x) = \int f(x)dx$

Bentuk Umum Integral Tak Tentu :

Bila $y = F(x) + C,$ C merupakan suatu konstanta sembarang dan $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$,maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[F(x)+C]}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + 0 = f(x)$$

$$\rightarrow f(x)dx = d[F(x)+C]$$

jadi $\int f(x)dx = \int d[F(x)+C] = F(x)+C,$ dimana C adalah konstanta integral

6.2.1 Rumus Dasar Integral

Berikut ini diberikan rumus-rumus dasar integral :

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x)+C$
2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
3. $\int au\,dx = a\int u\,dx,$ a suatu konstanta
4. $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1}+C,\ m \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C$
6. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a}+C,\ a>0, a\neq 1$
7. $\int e^u\,du = e^u + C$
8. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
10. $\int tg\,u\,du = \ln|\sec u| + C$
11. $\int ctg\,u\,du = \ln|\sin u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + tg\,u| + C$
13. $\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - ctg\,u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = tg\,u + C$
15. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -ctg\,u + C$
16. $\int \sec u\,tg\,u\,du = \sec u + C$
17. $\int \operatorname{cosec} u\,ctg\,u\,du = -\operatorname{cosec} u + C$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc\sin\frac{u}{a}+C$
19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arc\,tg\frac{u}{a}+C$

20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc\ \sec \frac{u}{a} + C$

21. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

22. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$

24. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$

25. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \tfrac{1}{2} u\sqrt{a^2 - u^2} + \tfrac{1}{2} a^2 arc\ \sin \frac{u}{a} + C$

26. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \tfrac{1}{2} u\sqrt{u^2 + a^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C$

27. $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \tfrac{1}{2} u\sqrt{u^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$

6.2.2 Metode Subtitusi

Subtitusi suatu variabel baru diadakan, sehingga diperoleh bentuk integrasi dalam variabel baru yang dapat dituliskan ke dalam rumus integral dasar :

Misalkan ingin dicari nilai dari $\int f(x)\, dx$ =?

Untuk menyelesaikan integral tak tentu diatas maka diselesaikan dengan :

Subtitusi $x = \phi(x) \Rightarrow dx = \phi'(u)\, du$

$$f(x) = f[\phi(u)]$$

$$\int f(x)\, dx = \int f[\phi(u)]\, \phi'(u)\, du$$

Contoh 6.1:

1. Hitunglah $\int \frac{dx}{(2-3x)^{3/2}}$

   Penyelesaian :

   Subtitusi $u = (2-3x) \Rightarrow du = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{3} du$

   $$\int \frac{dx}{(2-3x)^{3/2}} = \int \frac{1}{u^{3/2}} (-\frac{1}{3} du) = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u^{3/2}}$$

$$= -1/3\int u^{-3/2} du = (-1/3)(\frac{1}{-\frac{1}{2}})u^{-1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}u^{-1/2} + C = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2-3x}} + C$$

2. Hitunglah $\int \sin\ 5x\ dx$

   Penyelesaian:

   Subtitusi: $u = 5x \Rightarrow du = 5\ dx \Rightarrow dx = \frac{1}{5}du$

$$\int \sin\ 5x\ dx = \int (\sin\ u).\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \sin\ u\ du$$

$$= -\frac{1}{5}\cos\ u + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

6.2.3 Integral Parsial

Jika u dan v adalah suatu fungsi x yang dapat diturunkan:

$$d(uv) = u\ dv + v\ du$$
$$u\ dv = d(uv) - v\ du$$
$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Dua aturan umum dapat ditulis :

a). Bagian yang dipilih sebagai dv harus dapat diintegrasi

b). $\int v\ du$ tidak boleh lebih sulit darpada $\int u\ dv$

Contoh 6.2:

1. Hitunglah $\int x^3 e^{x^2} dx$

   Penyelesaian:

   Ambil $u = x^2$ dan $dv = e^{x^2} x\ dx$

   $du = 2x\ dx$ dan $v = \frac{1}{2}e^{x^2}$

   dengan memakai aturan seperti di atas maka akan didapatkan :

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

2. Hitunglah $\int \ln x \, dx$

Penyelesaian:

Ambil $u = x$ dan $v = \ln x$, maka

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d(\ln x)$$

$$= x \ln x - \int x . \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

6.2.4. Rumus Reduksi

Menghitung suatu integral dapat digunakan rumus reduksi. Pada umumnya rumus reduksi menghasilkan integral baru dengan bentuk yang sama dengan aslinya tetapi dengan eksponen yang bertambah atau berkurang. Suatu rumus reduksi berhasil bila pada akhirnya dapat dihasilkan suatu integral yang dapat dihitung. Rumus – rumus reduksi tersebut adalah :

1. $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^m} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{u}{(2m-2)(a^2 \pm u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{m-1}} \right\}, m \neq 1$

2. $\int (a^2 \pm u^2)^m \, du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1} \int (a^2 \pm u^2)^{m-1} \, du, \quad m \neq -\frac{1}{2}$

3. $\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{u}{(2m-2)(u^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{m-1}} \right\}, m \neq 1$

4. $\int (u^2 - a^2)^m \, du = \frac{u(u^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1} \int (u^2 - a^2)^{m-1} \, du, \quad m \neq -\frac{1}{2}$

5. $\int u^{me^{au}} \, du = \frac{1}{a} u^m e^{au} - \frac{m}{a} \int u^{m-1} e^{au} \, du$

6. $\int \sin^m u \, du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} u \, du$

7. $\int \cos^m u \, du = -\frac{\cos^{m-1} u \sin u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} u \, du$

8. $\int u^m \sin bu \, du = -\frac{u^m}{b} \cos bu + \frac{m}{b} \int u^{m-1} \cos bu \, du$

9. $\int u^m \cos bu \, du = \frac{u^m}{b} \sin bu - \frac{m}{b} \int u^{m-1} bu \, du$

10. $$\int \sin^m u \cos^m u\, du = \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m u \cos^{m-2} u\, du$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} u \cos^n u\, du,\ m \neq -n$$

Contoh 6.3:

1. Hitunglah $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$

   Penyelesaian:

   Dengan menggunakan rumus reduksi diatas maka diperoleh :

   $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

2. Hitunglah $\int (9+x^2)^{3/2}\, dx$

   Penyelesaian:

   Dengan menggunakan rumus reduksi diatas maka diperoleh :

   $$\int (9+x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4}\int (9+x^2)^{1/2} dx$$

   $$= \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{8}\{x(9+x^2)^{1/2} + 9\ln(x\sqrt{9+x^2})\} + C$$

3. Hitunglah $\int \frac{1}{(1-x^2)^3}\, dx$

   Penyelesaian:

   Dengan menggunakan rumus reduksi diatas maka diperoleh:

   $$\int \frac{1}{(1-x^2)^3} dx = \frac{x(5-3x^2)}{8(1-x^2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

6.3. Integral Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus dasar hubungan-hubungan yang biasa digunakan dalam mencari integral trigonometri.

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot g^2 x = \cos ec^2 x$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

6. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

7. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)]$

8. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$

9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$

10. $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$

11. $1+\cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$

12. $1 \pm \sin x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

Contoh 6.4:

1. $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

2. $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

3. $\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx$

$= \int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx$

$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

4. $\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

5. $\int tg^4 x\, dx = \int (tg^2 x)^2 dx = \int tg^2 x\, tg^2 x\, dx$

$= \int tg^2 x(\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \int tg^2 x \sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, dx$

$= \int tg^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \frac{1}{3}tg^3 x - tg\ x + x + C$

6. $\int \cos ec^6 x\, dx = \int \cos ec^2 (1+\cot g^2 x)^2 dx$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + 2\int \cot g^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \cot g^4 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$$

$$= -\cot gx - \tfrac{2}{3}\cot g^3\, x - \tfrac{1}{5}\cot g^5 x + C$$

7. $\int \cot g^3\, 2x\, dx = \int \cot g\, 2x(\operatorname{cosec}^2 2x - 1)\, dx$

$$= -\tfrac{1}{4}\cot g^2\, 2x + \tfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{cosec} 2x\right| + C$$

6.3.1 Subtitusi Trigonometrik

Suatu integran yang terdiri-dari salah satu bentuk $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$, atau $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ tetapi bukan faktor irrasional lain, dapat diubah ke dalam bentuk lain yang menyangkut fungsi trigonometrik peubah baru seperti dalam Tabel 6.1.

Tabel 6.1 Subtitusi Fungsi Trigonometrik

Fungsi	Subtitusi	Hasil
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \dfrac{a}{b}\sin z$	$a\sqrt{1-\sin^2 z} = a\cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \dfrac{a}{b}\tan z$	$a\sqrt{1+\tan^2 z} = a\sec z$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \dfrac{a}{b}\sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\tan z$

Untuk tiap bentuk tersebut, integrasi menghasilkan pernyataan dalam peubah z. Pernyataan yang bersangkutan dalam peubah semula dapat diperoleh segitiga sikiu-siku.

Contoh 6.5:

1. Tentukan nilai integral $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

   Penyelesaia:

   Subtitusi: $x = 2\, tg\, z$, maka $dx = 2\sec^2 z\, dz$

   serta $\sqrt{4+x^2} = 2\sec z$

   Maka $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \dfrac{2\sec^2 z\, dz}{(4\, tg^2 z)(2\sec z)}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{tg^2 z}\, dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} z \cos z\, dz$$

$$= -\frac{1}{4\sin z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

2. Tentukan nilai integral $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$

Subtitusi: $x = 2\sec z$, maka $dx = 2\sec z\; tg\; z\; dz$

serta $\sqrt{x^2-4} = 2\; tg\; z$

Maka $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{4\sec^2 z}{2\; tg\; z}(2\sec z\; tg\; z\; dz)$

$$= 4\int \sec^3 z\; dz$$

$$= 2\sec z\; tg\; z + 2\ln\left|\sec z + tg\; z\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$$

3. Tentukan nilai integral $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

Subtitusi: $x - 1 = \sin z$, maka $dx = \cos z\; dz$

serta $\sqrt{2x-x^2} = \cos z$

Maka $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{(1+\sin z)^2 z}{\cos z}\; dz$

$$= \int (\frac{3}{2} + 2\sin z - \frac{1}{2}\cos 2z)\; dz$$

$$= \frac{3}{2}z - 2\cos z - \frac{1}{4}\sin 2z + C$$

$$= \frac{3}{2}arc\;\sin(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C$$

$$= \frac{3}{2}arc\;\sin(x-1) - \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + C$$

6.4. Integral Fungsi Hiperbolik

Rumus-rumus pada integral fungsi hiperbolik

1. $\int \sinh u \; du = -\cosh u + C$
2. $\int \cosh u \; du = \sinh u + C$
3. $\int tgh u \; du = \ln \cosh u + C$
4. $\int ctgh u \; du = \ln|\sinh u| + C$
5. $\int \sec h u \; du = \tanh u + C$
6. $\int \cos ech u \; du = -ctgh u + C$
7. $\int \sec h\, u \tanh u \; du = -\sec h\, u + C$
8. $\int \cos ech\, u \cot gh\, u \; du = -\cos ech\, u + C$
9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$
11. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u^2 < a^2$
12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \cot gh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u^2 > a^2$

Contoh 6.6:

1. $\int \sinh \tfrac{1}{2} x \; dx = 2 \cosh \tfrac{1}{2} x + C$
2. $\int \cosh 2x \; dx = \tfrac{1}{2} \sinh 2x + C$
3. $\int \sec h\, x \; dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx$

$$= \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} dx$$

$$= \text{arc tg } (\sinh x) + C$$

4. $\int \sinh^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x - 1) dx$

$= \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{1}{2}x + C$

5. $\int e^x \cosh x\, dx = \int e^x (\frac{e^x + e^{-x}}{2})\, dx$

$= \frac{1}{2}\int (e^{2x} + 1) dx$

$= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + C$

6. $\int x \sinh x\, dx = \int x(\frac{e^x - e^{-x}}{2})\, dx$

$= \frac{1}{2}\int xe^x dx - \frac{1}{2}\int xe^{-x} dx$

$= \frac{1}{2}(xe^x - e^x) - \frac{1}{2}(-xe^x - e^{-x}) + C$

$= x(\frac{e^x + e^{-x}}{2}) - \frac{e^x - e^{-x}}{2}) + C$

$= x \cosh x - \sinh x + C$

6.5 Integral Fungsi Rasional

Suatu integral rasional yang berbentuk $\frac{f(x)}{g(x)}$ dapat diselesaikan dengan terlebih dahulu memecah fungsi tersebut menjadi bentuk fungsi pecahan yang sederhana, sehingga dapat dibawa ke bentuk rumus integral yang sudah dikenal. Bila derajat f(x) sama atau lebih besar dari derajat g(x) maka terlebih dahulu diadakan pembagian, sedemikian hingga memberikan bentuk sisa yang derajatnya lebih kecil dari derajat g(x).

Fungsi rasional $\frac{f(x)}{g(x)}$ terlebih dahulu diuraikan menjadi fungsi pecahan yang lebih sederhana. Adapun caranya adalah sebagai berikut :

1. Fungsi pecahan g(x) diuraikan menjadi faktor perkalian, dimana g(x) akan memberikan kemungkinan hasilnya adalah sebagai berikut:
   (i). Akar-akar riil dan berlainan
   (ii). Akar-akar riil dan sama

(iii). Akar-akar tidak riil dan berlainan

(iv). Akar-akar riil dan tak berlainan

Adapun cara penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

(i). Misalkan $g(x)=(x-a_1)\,(x-a_2)(x-a_3)....(x-a_m)$ untuk $a_{i,}$ i=1,2, 3…m adalah bilangan-bilangan riil positip dan berlainan.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{(x-a_1)}+\frac{B}{(x-a_2)}+\frac{C}{(x-a_3)}+....+\frac{M}{(x-a_m)}\ .$$

Dengan menyamakan koefisien, maka A,B,C,….M dapat ditentukan harganya.

Contoh 6.7:

1). Tentukan nilai integral dari $\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$

Penyelesaian:

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

$$\frac{x+5}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$$

$$x+5\equiv A(x-3)+B(x+1)$$

$$x+5\equiv Ax-3A+Bx+B$$

$$\equiv (A+B)x+(-3A+B)$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien tersebut, maka diperoleh :

$$\left.\begin{aligned}A+B&=1\\-3A+B&=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=-1\quad dan\ B=2$$

Sehingga $\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$

$$=-\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=-\ln(x+1)+2\ln(x-3)+\ln C$$

$$=\ln\frac{C(x-3)^2}{(x+1)}$$

(ii). Misalkan $g(x)=(x-a_1)^2\,(x-a_2)^2(x-a_3)^3,\quad a_1,a_2,a_3$ berlainan.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{(x-a_1)}+\frac{B}{(x-a_1)^2}+\frac{C}{(x-a_2)}+\frac{D}{(x-a_2)^2}+\frac{E}{(x-a_3)}+\frac{F}{(x-a_3)^2}+\frac{G}{(x-a_3)^3}\ .$$

Dengan menyamakan koefisien, maka A,B,C,D,E,F,G dapat diperoleh nilainya

Contoh 6.8:

Tentukan nilai integral dari $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Penyelesaian:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

$$x \equiv (A+B)x^2 + (2A+C)x + A - B - C$$

Maka akan diperoleh:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+C=1 \\ A-B-C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{4}; C = \frac{1}{2}$$

Sehingga $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C$$

(iii). Misalkan $g(x) = (x-a_1)(x+a_2^2)(x^2+a_3x+a_4)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+a_2^2)} + \frac{Dx+E}{(x^2+a_3x+a_4)}$$

Contoh 6.9:

Tentukan nilai integral $\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$

Penyelesaian:

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} 4-2x &\equiv (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1) \\ &\equiv (A+C)x^3 - (2A-B+C-D)x^2 + (A-2B+C)x + B-C+D \end{aligned}$$

sehingga akan diperoleh : A= 2; B=1 ; C=-2; D=1.

$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \ln(x^2+1) arc\ tgx - 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

$$= \ln \frac{x^2+1}{x-1} + arc\ tgx - \frac{1}{(x-1)} + C$$

(iv). Misalkan $g(x) = (x-a_1)^2 (x^2+a_2^2)^2 (x^2+a_3x+a_4)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{(x-a_1)} + \frac{B}{(x-a_1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+a_2{}^2)} + \frac{Ex+F}{(x^2+a_2{}^2)^2} + \frac{Gx+H}{x^2+a_3x+a_4)}$$

Contoh 6.10:

Tentukan nilai integral $\int \frac{16x+32}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$

Penyelesaian :

$$\frac{16x+32}{x^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

$$16x+32 \equiv Ax(x^2+4)^2 + B(x^2+4)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+4) + (Ex+F)x^2$$

$$\begin{aligned} 16x+32 \equiv\ & (A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (8A+4C+E)x^3 + (8B+4D+F)x^2 + \\ & 16Ax + 16B \end{aligned}$$

Dengan menyamakan koefisien, didapatkan :

A=1; B=2; C=-1; D= -2; E= -4; F= -8

Jadi $\int \frac{16x+32}{x^2(x^2+4)^2}\,dx$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2}{x^2}\,dx + \int \frac{-x-2}{x^2+4}\,dx + \int \frac{-4x-8}{(x^2+4)^2}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+4} - 2\int \frac{dx}{x^2+4} - 4\int \frac{xdx}{(x^2+4)^2} - 8\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - arc\ tg\ \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2+4} - \frac{1}{2}arc\ tg\ \frac{x}{2} - \frac{x}{x^2+4} + C$$

6.5.1 Integral dalam bentuk: ax^2+bx+c

$$f(x) = ax^2+bx+c, \quad a \neq 0$$

$$ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

subtitusi $\left.\begin{aligned} u &= x+\frac{b}{2a} \\ B &= \frac{4ac-b^2}{4a^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = a(u^2+B)$

Jadi bentuk $\sqrt{f(x)'} = \sqrt{a(u^2+B)}$ terdiri dari 2 macam :

a). Bila a positip

b). Bila a dan B keduanya negatif

Kasus (a). $\sqrt{a(u^2+B)} = \sqrt{a}\sqrt{a^2+B)}$ memberikan bentuk integral yang sudah dikenal.

Kasus (b). $\sqrt{a(u^2+B)} = \sqrt{-a(-B-u^2)} = \sqrt{-a}\sqrt{-B-u^2}, \quad \text{dim}\,ana \quad -a>0, -B>0$

Dengan menyamakan –B = A^2, maka bentuk (b) memberikan juga integral yang telah dikenal.

Contoh 6.11:

Tentukan nilai integral $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}$

Penyelesaian:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}$$

$$= \int \frac{dx}{3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{24-4}{12}} = \int \frac{dx}{3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{3}}$$

Subtitusi $u = x - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow du = dx$

$$I = \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2} = \int \frac{dx}{3u^2 + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 + 5/9}$$

Subtitusi $v = \frac{3}{\sqrt{5}} u \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{5/3}dv}{5/9(v^2 + 1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dv}{v^2 + 1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} arc\, tg\; v + c$$

Jadi $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} arc\, tg\; (\frac{3x-1}{\sqrt{5}}) + c$

6.5.3 Integal Bentuk Khusus

Integral khusus adalah suatu integral yang dituliskan dalam bentuk :

a). $\int \frac{(ax + b)\; dx}{(x^2 + px + q)^k}$,

dikarenakan: $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$, maka dengan menggunakan subtitusi

$u = x + \frac{p}{2} \Rightarrow du = dx$,

$x = u - \frac{p}{2}, \quad c^2 = q - \frac{p^2}{4}$, sehinngga pada akhirnya diperoleh:

$ax + b = a(u - \frac{p}{2}) + b = au + B$

dan $B = b - \frac{ap}{2}$

$$\int \frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$= \int \frac{(au+B)\,du}{(u^2+c^2)^k}$$

$$= \frac{a}{2}\underbrace{\int \frac{2u\,du}{(u^2+c^2)^k}}_{(A)} + B\underbrace{\int \frac{du}{(u^2+c^2)^k}}_{(B)}$$

Penyelesaian (A) dapat dibawa ke bentuk integral yang sudah dikenal sebelumnya dengan mengadakan sustitusi $z = u^2 + c^2$, sedangkan (B) dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus reduksi.

b). $\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{x^2+px+q}}$, dengan menggunakan subtitusi $u = \frac{1}{x-a}$, maka juga akan memberikan bentuk integral yang telah dikenal.

Contoh 6.12:

Tentukan nilai integral $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+8}}$

Penyelesaian:

Subtitusi $u = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x-2 = \frac{1}{u}$

$$x^2-4x+8 = (x-2)^2+4 = \frac{4u^2+1}{u^2}$$

$$dx = -\frac{du}{u^2}$$

sehingga : $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+8}}$

$$= -\int -\frac{u}{\sqrt{\frac{4u^2+1}{u^2}}} \cdot \frac{du}{u^2}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{4u^2+1}}$$

merupakan suatu bentuk integral yang sudah dikenal dan akan memberikan suatu nilai penyelesaian.

Jadi: $\int \frac{dx}{(x-2)\ \sqrt{x^2-4x+8}}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{2+\sqrt{x^2-4x+8}}\right| + C$$

6.5.4 Bentuk-bentuk Subtitusi

Berikut ini diberikan bentuk-bentuk subtitusi yang biasa dipakai apabila dijumpai integral-integral dalam fungsi tertentu, yaitu:

1. **Fungsi Trigonometri**

   Subtitusi $x = tg\,\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\ arctg\ z$, maka $dx = \frac{2\ dz}{1+z^2}$

   $$\sin x = \frac{2\ tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{1}{2}x} = \frac{2z}{1+z^2}$$

   $$\cos x = \frac{1-tg^2\,\frac{1}{2}x}{1+tg^2\,\frac{1}{2}x} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

   $$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2z}{1-z^2}$$

2. **Fungsi Rasioanl R dengan bentuk:**

   $$\int R[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{p1/q1},(\frac{ax+b}{cx+d})^{p2/q2},.......]dx$$

   dimana p_1, q_1, p_2, q_2 merupakan bilangan-bilangan bulat.

   Disini digunakan suatu subtitusi $\frac{ax+b}{cx+d} = u^n$, dengan n merupakan suatu kelipatan persekutuan terkecil dari q_1, q_2, ...

3. **Bentuk** $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$**,** dengan m, n, p adalah bilangan-bilangan rasional.

   Terdapat 3 macam bentuk subtitusi, yaitu :

(a). Apabila $\frac{m+1}{n}$ merupakan bilangan bulat, maka subtitusi $a+bx^n = u^s$, dimana s adalah penyebut dari pecahan p.

(b). Apabila $\frac{m+1}{n}+p$ merupakan bilangan bulat, maka subtitusi $ax^{-n}+b=u^s$, dimana s adalah penyebut dari pecahan p.

(c). Apabila p bilangan bulat, maka subtitusi $x=u^s$.

Contoh 6.12:

Hitung $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx$

Penyelesaian:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx = \int x^{1/2}(1+x^{1/4})^{-1}dx$$

p = -1 merupakan bilangan bulat

Subtitusi $x=u^4, dx=4u^3\ du$

Maka : $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx = \int \frac{u^2.4u^3}{1+u}\, du$

$$= 4\int (u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1})\, du$$

$$= 4[\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1|] + C$$

dimana $u=\sqrt[4]{x}$

Subtitusi Fungsi Trigonometri atau Hiperbolik untuk Bentuk Integral.

$\int R(x, ax^2 + bx + c)\ dx$ **,** dimana R adalah fungsi rasional.

Dengan mengubah bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ menjadi jumlah atau pengurangan dari dua suku kuadratis, maka bentuk integral diatas menjadi salah satu bentuk berikut ini :

i). $R(z, \sqrt{m^2 - z^2})\ dz$

dengan subtitusi $z = m \sin u$ atau $z = m\ tgh\ u$

ii). $R(z, \sqrt{m^2 + z^2})\ dz$

dengan subtitusi $z = m\ tg\ u$ atau $z = m \sinh u$

iii). $R(z, \sqrt{z^2 - m^2})\ dz$

dengan subtitusi $z = m \sec u$ atau $z = m \cosh u$

4. **Bentuk Integral yang Memuat:**

i). $\sqrt{(x+a)\ (x+b)}$ dapat menggunakan subtitusi

$\sqrt{(x+a)\ (x+b)} = (x+a)\ u$ atau

$\sqrt{(x+a)\ (x+b)} = (x+b)\ u$

ii). $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ dapat menggunakan subtitusi

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + u$ atau

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xu + \sqrt{c}$

5. **Bentuk Integral yang diberikan dalam bentuk:**

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\ dx$$

$P_n(x)$ merupakan suatu polinomial dengan derajatnya n.

Integral tersebut dapat diselesaikan sebagai berikut :

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx}+k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

dimana $Q_{n-1}(x)$ merupakan suatu polinomial brderajat (n-1) dengan koefisien-koefisiennya yang belum diketahui. K merupakan suatu konstanta. Koefisien-koefisien dari $Q_{n-1}(x)$ dam konstanta k dapat diperoleh melalui pendefferensialan integral di atas terhadap x, sehingga diperoleh hubungan:

$$\frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}[Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}] + \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Contoh 6.13:

Bentuk-bentuk Subtitusi

1. Tentukan nilai integral $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

   Penyelesaian:

   Melalui subtitusi $1+\cos x = 1+\frac{1-z^2}{1+z^2} = \frac{2}{1+z^2}$

   $$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1+z^2}{2}.\frac{2\,dz}{1+z^2}$$

   $$= \int dz$$

   $$= z + C = tg\frac{x}{2}+C$$

2. Tentukan nilai integral $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

   Penyelesaian:

   $$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{1+z^2}{2+2z^2+2z}.\frac{2\,dz}{1+z^2}$$

   $$= \int \frac{2dz}{1++z+z^2}$$

   $$= \int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Melalui subtitusi $u = z + \frac{1}{2}$, $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, sehingga

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{a} arc\ tg \frac{u}{a} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\, tg \frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\, tg \frac{1+2\ tg\, x/2}{\sqrt{3}} + C$$

3. Tentukan nilai integral $\int \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}\ dx$

Penyelesaian:

Subtitusi $\dfrac{1+x}{1-x} = u^2 \Rightarrow x = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$

$$dx = \frac{4u\ du}{(u^2+1)^2}$$

Maka $\int \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}\ dx = \int \dfrac{4u\ du}{(u^2+1)^2}$

Subtitusi $u = tg\ \theta \rightarrow du = \sec^2 \theta\ d\theta$

serta $(1+u^2) = \sec^2 \theta$

sehingga $\int \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}\ dx = \int \dfrac{4u\ du}{(u^2+1)^2}$

$$= \int \frac{4tg^2\theta \sec^2\theta}{\sec^4\theta} d\theta$$

$$= 4\int \sin^2\theta\ d\theta = 2(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}) + C$$

4. Tentukan nilai integral $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

Penyelesaian :

Karena m = -1/2 , n = ¼ , serta p = 1/3, maka

$\frac{m+1}{n} = \frac{(-1/2)+1}{1/3} = 2$, merupakan suatu bilangan bulat

Dengan menggunakan subtitusi $1 + x^{1/4} = u^3 \Rightarrow x = (u^3 - 1)^4$

$$dx = 12u^2(u^3 - 1)^3$$

dari sini akan diperoleh $\int x^{-1/2}(1 + x^{1/2})^{1/3} dx$

$$= 12\int \frac{u^3(u^3-1)^3}{(u^3-1)^2} du$$

$$= 12\int (u^6 - u^3) du$$

$$= \frac{12}{7}u^7 - 3u^4 + C$$

6.6 Integral Tertentu

Misalkan y = f(x) merupakan suatu fungsi x yang kontinu dalam selang tertutup [a, b]. Interval tersebut dibagi menjadi n bagian yang sama dengan titik-titik :

$$a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_{n-1}, x_n, = b$$

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = (x_1 - x_0) = (x_3 - x_2) = ... = (x_i - x_{i-1}) = ... = (b - x_{n-1})$$

melalui titik-titik x_i dibuat garis-garis tegak lurus pada sumbu x, maka akan terdapat lajur-lajur luasan.

Apabila S adalah luas daerah dari daerah yang dibatasi oleh grafik y = f(x) , x = a, sumbu x dan x = b, maka luas S terbagi menjadi n lajur-lajur luasan. Luas bagian lajur yang ke i dinamakan ΔS_i. Selanjutnya akan diperoleh bahwa:

$$S = \sum_{1}^{n} \Delta S_i$$

Dari sini didapatkan bahwa ΔS_1 akan mempunyai luas yang besarnya dibatasi oleh dua segi empat dengan luasan masing-masing adalah:

$f(x_0).\Delta x$ dan $f(x_1).\Delta x$, dengan i = 1,2 ,3, …,n.

Misalkan c_i merupakan titik yang terletak diantara x_{i-1} dan x_i, dengan i = 1,2 ,3, …,n. n → tak terbatas besarnya atau Δx → 0. Dari pengeritan limit, maka S dapat dituliskan dalam bentuk :

$$S = \lim_{n \to \sim} \sum_{1}^{n} f(c_i).\Delta_x \quad \text{atau biasanya sama dengan} \int_a^b f(x)\, dx$$

Simbol $\int_a^b f(x)\, dx$ dibaca ‘ integral tertentu dari f(x), terhadap x, dari x = a sampai x = b’. Fungsi f(x) disebut integran, sedang a dan b masing-masing disebut integran, sedang a dan b masing-masing disebut batas bawah dan batas atas (batas-batas integrasi).

Sifat-sifat Integral Tertentu

1. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
2. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
3. Apabila $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ adalah fungsi-fungsi yang dapat diintegralkan, maka:
   $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$
4. Bila c merupakan suatu konstanta, maka:
   $\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$
5. Apabila $|f(x)|$ merupakan suatu harga mutlak dari f(x), maka akan didapatkan:
   $\left|\int_a^b f(x)\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$

Teorema Dasar Kalkulus

Jika f(x) kontinu dalam selang $a \le x \le b$, sedangkan F(x) merupakan integral tak tentu dari f(x), maka :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh 6.14:

1. $f(x) = x$ dan $F(x) = \frac{1}{2}x^2$; maka $\int_0^5 x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$
2. $f(x) = x^3$ dan $F(x) = \frac{1}{4}x^4$; maka $\int_1^3 x^3\, dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$

Beberapa hal yang perlu diperhatikan pada integal tertentu.

a). Apabila f(x) adalah negatif dalam selang [a, b], maka tiap suku dalam jumlah $\sum f(c_i)\,\Delta x_i$ adalah negatif, sehingga limit jumlah adalah negatif atau: $\int_a^b f(x)\,dx$ adalah negatif.

b). Untuk menghindari perhitungan luas daerah memberikan hasil negatif, maka luas daerah disajikan dengan integral tertentu selalu diambil harga mutlaknya.

c). Apabila $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, maka integral tertentu f(x) dari a ke b adalah:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) + C\Big|_a^b$$

$$= [F(b) + C] - F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

Contoh 6.15:

Selesaikan integral tertentu berikut:

1. $\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)\,dx$

Penyelesaian:

$$\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1} = (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$$

2. $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})\,dx$

Penyelesaian:

$$\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})\,dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\Bigg|_{-3}^{-1} = (1 + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{18}) = \frac{10}{9}$$

3. $\int_{-6}^{-10} \frac{dx}{x+2}$

Penyelesaian:

$$\int_{-6}^{-10} \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\ \Big|_{-6}^{-10} = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$$

4. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2 - 9}$

Penyelesaian:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| \Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{6} (\ln \frac{1}{5} - \ln 2) = \frac{1}{6} \ln 0.1$$

5. $\int_{1}^{e} \ln x \, dx$

Penyelesaian:

$$\int_{1}^{e} \ln x \, dx = x \ln x - x \Big|_{1}^{e} = (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$$

6. $\int_{-5}^{-3} \sqrt{x^2 - 4} \, dx$

Penyelesaian:

$$\int_{-5}^{-3} \sqrt{x^2 - 4} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 4} \right| \Bigg|_{-5}^{-3}$$

$$= \frac{5}{2} \sqrt{21} - \frac{3}{2} \sqrt{5} - 2 \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{21}}$$

6.6.2 Teorema Harga Menengah Untuk Luas

Teorema 6.1.

Apabila f merupakan suatu fungsi kontinu dan non-negatif pada selang interval tertutup [a, b]. Sedangkan S_a^b menyatakan suatu luas daerah di bawah grafik pada interval tersebut. Maka paling sedikit ada satu bilangan c antara a dan b sedemikian hingga :

$$S_a^b = f(c).(b - a)$$

Bukti :

Misalkan m dan M masing – masing merupakan harga minimum dan maksimum dari f interval [a,b], maka :

$$m.(b - a) \le S_a^b \le M(b - a)$$

jadi $m \le \dfrac{S_a^b}{(b-a)} \le M$ dan berarti $\dfrac{S_a^b}{(b-a)}$ terletak antara harga minimum dan harga maksimum dari fungsi f(x) dalam interval [a, b]. Menurut sifat kontinuitas dari fungsi f, maka terdapat paling sedikit satu bilangan c diantara a dan b, sehingga:

$f(c) = \dfrac{S_a^b}{(b-a)}$ yang berarti $S_a^b = f(c).(b-a)$

6.7 Latihan Soal

Tentukan nilai integral tak tentu berikut ini :

6.7.1. Penggunaan Rumus-rumus Integrasi Dasar

1. $\int x^5 \, dx$
2. $\int (x^2 - 5x + 3) \, dx$
3. $\int (1-x)\sqrt{x} \, dx$
4. $\int (3x+4)^2 \, dx$
5. $\int \sqrt[3]{1-x^2}.x \, dx$
6. $\int \sqrt{x^2 - 2x^4} \, dx$
7. $\int \dfrac{dx}{x} \, dx$
8. $\int \dfrac{dx}{2x-3} \, dx$
9. $\int \dfrac{x \, dx}{x^2 - 1} \, dx$
10. $\int e^{-x} dx$
11. $\int a^{2x} dx$
12. $\int (e^x + 1)^3 e^{3x} dx$
13. $\int \sin \tfrac{1}{2} x \, dx$
14. $\int \cos 3x \, dx$
15. $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

6.7.2 Penggunaan Metode Subtitusi, Integrasi Parsial dan Rumus Reduksi

1. $\int x \sin x \, dx$
2. $\int x \cos x \, dx$
3. $\int x \, e^x \, dx$
4. $\int x^2 \ln x \, dx$
5. $\int arc \sin x \, dx$
6. $\int \sin^2 x \, dx$
7. $\int \sec^3 x \, dx$
8. $\int x^2 \sin x \, dx$
9. $\int \dfrac{dx}{(1-x^2)^3}$
10. $\int (4-x^2)^{3/2} dx$
11. $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$
12. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$
13. $\int e^{3x}(2\sin 4x - 5\cos 4x) \, dx$
14. $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$
15. $\int e^{3x} \, x^2 \sin x \, dx$

6.7.3 Integral Trigonometrik

1. $\int \cos^2 x \, dx$
2. $\int \sin^2 2x \, dx$
3. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$
4. $\int \cos^6 \tfrac{1}{2} x \, dx$
5. $\int \sin^7 x \, dx$
6. $\int \sec^3 x \, dx$

7. $\int \cos ec^5 x\ dx$

8. $\int \sin^3 x \cos^2 x\ dx$

9. $\int \sin^4 x \cos^4 x\ dx$

10. $\int \sin 2x \cos 4x\ dx$

11. $\int \sin 5x \sin x\ dx$

12. $\int tg^3 x\ dx$

13. $\int \cot g^3 x\ dx$

14. $\int \cot g^3 x \cos ec^4 x\ dx$

15. $\int x(\cos^3 x^2 - \sin^3 x^2)\ dx$

6.7.4 Subtitusi Trigonometrik

1. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

3. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

4. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

5. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$

6. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}$

7. $\int \sqrt{x^2+4}\ dx$

8. $\int \sqrt{x^2-4}\ dx$

9. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\ dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx$

6.7.5 Integral Fungsi Hiperbolik

1. $\int \sinh 3x \, dx$
2. $\int \cosh \frac{1}{4} x \, dx$
3. $\int \cot gh \, \frac{2}{3} x \, dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \, dx$
5. $\int \sinh x \ln \cosh^2 x \, dx$
6. $\int \sinh^3 x \, dx$
7. $\int e^x \sinh x \, dx$
8. $\int e^{2x} \cosh x \, dx$
9. $\int x \cosh x \, dx$
10. $\int x^2 \sinh x \, dx$
11. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$
12. $\int \frac{dx}{16x^2-9}$
13. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+5}$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

BAB 7. PENGUNAAN INTEGRAL

7.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang integral dan penggunaannya,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan integral dalam matematika

B. Tujuan Instruksional Khusus

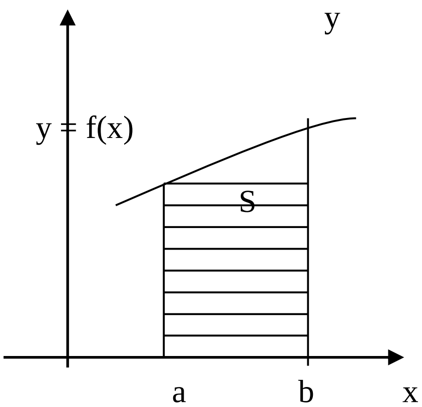
Pada akhir perkuliahan mahasiwa diharapkan mengetahui dan memahami tentang penggunaan integral dalam matematika.

7.2 Menghitung Luas Bidang Datar

Turunan dapat digunakan untuk menghitung luas bidang datar. Adapun jenis luas daerah tersebut antara lain:

(i). Luas daerah yang terletak diantara grafik y = f(x) dan sumbu x dari x = a ke x = b adalah S yang dinyatakan dengan harga mutlak integral tertentu f(x) terhadap x .

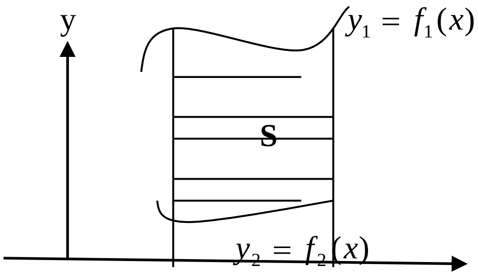
$$S = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$



Gambar 7.1 Luas Daerah S diantara Grafik dan Sumbu x

(ii). Luas daerah yang dibatasi oleh dua grafik $y_1 = f_1(x)$ dan $y_2 = f_2(x)$ dengan batas bawah x = a dan batas atas x = b adalah:

$$S = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$
$$= \left|\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx\right|$$



Gambar 7.2 Luas Daerah S diantara Dua Grafik

(iii). Sedangkan luas daerah yang dibatasi oleh tiga grafik $y_1 = f_1(x)$ dan $y_2 = f_2(x)$, $y_3 = f_3(x)$ adalah S. Misalkan absis titik potong grafik y_1 dan y_2, yaitu x = a , grafik y_1 dan y_3 yaitu x = b, dan absis titik potong grafik y_2 dan y_3 yaitu x = c. Maka harga S dapat diperoleh sebagai berikut :

$$S = \left|\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\right| dx] + \left|\int_b^c [f_3(x) - f_2(x)]\right| dx$$

Contoh 7.1:

1. Hitunglah luas daerah diantara kedua grafik $y = 2 - x^2$ dan $y^3 = x^2$.

Penyelesaian:

Maka titik –titik potong kedua grafik (diperoleh dari):

$y = 2 - y^3$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y-1)(y^2 + y + 2) = 0$

maka diperoleh:

y=1 → 1= 2 – x^2

x^2=1 → $x = \pm 1$

$y^2 + y - 2 = 0$ memberikan akar kompleks dan diabaikan.

Jadi:

$$S = \int_{-1}^{0}(y_1 - y_2)dx + \int_{0}^{1}(y_1 - y_2)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(2 - x^2 - x^{2/3})dx + \int_{0}^{1}(2 - x^2 - x^{2/3})dx$$

$$= (2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{5}x^{5/3}) \Big|_{-1}^{0} + (2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{5}x^{5/3}) \Big|_{-1}^{0} = \frac{32}{15}$$

2. Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik $y = x^3 - 4$ dan sumbu x.

Penyelesaian:

Grafik $y = x^3 - 4 = x(x^2 4)$ memotong sumbu x di x = 0, 2, -2.

$$S = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4)dx + \left|\int_{0}^{2}(x^3 - 4)\right|$$

$$= (\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2) \Big|_{-2}^{0} + (\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2) \Big|_{0}^{2}$$

= 0 – (4 - 8) + |(4 – 8) – 0 | = 4 + 4 = 8

7.3 Panjang Tali Busur

Panjang Tali busur AB dirumuskan sebagai:

$$L_{AB} = \lim_{n \to \sim} \sum_{1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$L_{AB} = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx$$

- Misalkan grafik dinyatakan dalam persamaan parameter:

  $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, yang masing-masing adalah fungsi kontinu dan mempunyai turunan kontinu untuk t_a ke t_b.

  Maka:

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ dan rumus (2) menjadi:

  $$L_{AB} = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2 + (\frac{dy}{dt})}\ dt \ \ldots\ldots (3)$$

- Karena $dx = \frac{dx}{dt}dt$ atau $(dx)^2 = (\frac{dx}{dt}dt)^2 = (\frac{dx}{dt})^2.(dt)^2$, maka $dy = \frac{dy}{dt}dt$ atau $(dy)^2 = (\frac{dy}{dt}dt)^2 = (\frac{dy}{dt})^2.(dt)^2$,

  Persamaan (3) dapat dituliskan sebagai:

  $L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$

- Bila ds dipandang sebagai diferensial dari panjang busur, maka:

  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

- Bila grafik dinyatakan dalam persamaan *x = g(y)*, maka panjang tali busur untuk y = c sampai y = d, dapat diperoleh dengan rumus:

  $L_{CD} = \int_c^d \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}\, dy$

Contoh 7.2:

1. Cari panjang busur kurva $y = x^{3/2}$ dari x = 0 sampai x = 5.

   Penyelesaian:

   $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$ dan $L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}\ dx$

   $L_{AB} = \int_0^5 \sqrt{1 + (\frac{9}{4})x}\ dx$

   $= \frac{8}{27}(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27}$ satuan

2. Cari panjang busur kurva $x = 3y^{3/2} - 1$ dari y = 0 sampai y = 4.

   Penyelesaian:

   $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}y^{1/2}$ dan $L = \int_c^d \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}\ dy$

   $L = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{81}{4})y}\ dy$

   $= \frac{8}{243}(82\sqrt{82} - 1)$ satuan

Apabila dituliskan dengan koordinat kutub

$$r = f(\theta)$$

$$x = r\cos(\theta) \Rightarrow dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$y = r\sin(\theta) \Rightarrow dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = d\theta\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}$$

Jadi panjang tali busur L untuk θ dari θ_1 sampai θ_2 ialah

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2}\, d\theta$$

Contoh 7.3:

Hitung panjang busur dari cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ yang terletak diatas sumbu x.

Penyelesaian:

$$\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$

$$\sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

$$L = \int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\, d(\frac{\theta}{2}) = 4a\sin\frac{\vartheta}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a$$

7.4 Menghitung Volume Benda

(i). Jika benda dibatasi oleh dua bidang datar masing-masing tegak lurus pada sumbu x di titik x = a dan x = b. Volume benda = V. dan harga pendekatannya:

$$V = \lim_{\Delta x -> 0}\sum_a^b S(x)\,.x \text{ dan } V = \int_a^b S(x)\, dx$$

(ii). Volume Benda Putar.

Bila grafik y = f(x) yang dibatasi oleh x = a dan x = b, diputar mengelilingi sumbu x dan sumbu x tersebut merupakan poros, maka isi benda putar yang terjadi dinamakan V_x. Penampang keratan yang diambil tegak lurus sumbu x merupakan suatu lingkaran, maka luas penampang = $\pi\, r^2$. Dimana r merupakan jarak titik x diantara x = a dan x = b terhadap grafik, maka :

$$S(x) = \pi\, r^2 = \pi\, y^2 = \pi[f(x)]^2,\ a \le x \le b$$

jadi $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

(iii). Bila luasan yang dibatasi oleh dua grafik $y_1 = f_1(x)$ dan $y_2 = f_2(x)$, x= a dan x = b diputar keliling sumbu x, maka volumenya:

$$V_x = \pi \int_a^b [f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2 dx$$

(iv). Jika dibatasi oleh y = f(x), x = a dan x = b diputar keliling sumbu y, maka isi benda putar yang terjadi dinamakan V_y dengan nilainya sebagai berikut:

$$V = \lim_{\Delta x -> 0} \sum_a^b 2\pi\, x.\Delta x.y = \lim_{\Delta x -> 0} \sum_a^b 2\pi\, x.\Delta x..f(x)$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b [x.f(x)]\ dx$$

Jika luasan yang dibatasi oleh dua grafik $y_1 = f_1(x)$ dan $y_2 = f_2(x)$ diputar keliling sumbu y, maka volume yang terjadi adalah:

$$V_y = 2\pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)].x\ dx$$

Dan jika grafik x = g(y) yang dibatasi oleh y = c dan y = d diputar keliling sumbu x, maka isi benda yang terjadi adalah:

$$V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2\ dy$$

Contoh 7.4:

Hitunglah volume benda, bila lingkaran $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. Dikarenakan lingkaran simetris terhadap sumbu x, maka :

$$\tfrac{1}{2}\pi V_y = 2\pi \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx^2$$

Subtitusi $x^2 = u$, maka batas $\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = a \Rightarrow u = a^2 \end{array}$

Jadi:

$$V_y = 2\,\pi \int_0^{a^2} \sqrt{a^2 - u}\ du = 2\pi(-\frac{2}{3})(a^2 - u)^{\frac{2}{3}}\ \Big|_0^{a^2} = \frac{4}{3}\pi\ a^3$$

atau dengan cara lain:

$$x^2 = a^2 - y^2$$

$$V_y = \pi \int_{-a}^a x^2\ dy = \pi \int_{-a}^a (a^2 - y^2) dy = \pi\ (a^2 y - \frac{1}{3} y^3)\ \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3}\pi\, a^3$$

7.5 Titik Berat dan Momen Inersia

7.5.1 Titik Berat

Momen pertama ML suatu luasan bidang terhadap suatu garis L merupakan hasil kali luas dengan jarak langsung titik berat ke garis tersebut. Momen luasan gabungan terhadap suatu garis merupakan jumlah momen masing-masing luasan terhadap garis tersebut.

Adapun momen suatu luasan bidang dapat dicari melalui cara sebagai berikut :

1). Gambarlah daerah yang dimaksud, tunjukkan pita wakil dan persegi panjang yang didekati.

2). Bentuklah hasil kali luas persegi panjang dan jarak titik berat dari sumbu koordinat dan jumlahkan untuk semua persegi panjang

Sedangkan untuk luasan bidang A yang mempunyai titik berat $(\bar{x}, \bar{y})$ dan momen-momennya M_x, M_y terhadap sumbu x dan sumbu y.

$$A\bar{x} = M_y \text{ dan } A\bar{y} = M_x$$

Momen pertama suatu benda yang mempunyai volume V, terbentuk oleh perputaran suatu daerah keliling sumbu koordinat, terhadap bidang yang melalui titik asal dan tegak lurus pada sumbu itu, didaptkan sebagai berikut:

1). Gambarkan daerahnya, tunjukkan pita wakikl dan persegi panjang yang didekati.

2). Bentuklah hasil kali volume, cakran atau rumah siput, yang terbentuk oleh perputaran persegi panjang sekeliling sumbu koordinat dan jarak titik berat persegi panjang dari bidang itu, dan jumlahkan untuk semua persegipanjang.

Apabila daerahnya diputar sekeliling sumbu x, titik berat $(\bar{x}, \bar{y})$ terletak pada sumbu putar. Jika Myz merupakan momen benda terhadap bidang yang melalui titik asal dan tegak lurus sumbu x, maka:

$$V\bar{x} = M_{yz}, \quad \bar{y} = 0$$

Adapun dengan cara yang sama, jika diputar sekeliling sumbu y, titik berat $(\bar{x}, \bar{y})$ terletak pada sumbu putar. Jika M_{xz} merupakan momen benda terhadap bidang yang melalui titik asal dan tagk lurus sumbu y, maka:

$$V\bar{y} = M_{xz}, \quad \bar{x} = 0$$

Teorama PAPPUS Pertama

Jika suatu daerah diputar sekeliling sumbu putar dan tidak memotong daerahnya, maka volume benda yang terjadi sama dengan hasil kali luas daerah itu dengan panajng lintasan titik berat daerah itu.

7.5.2 Momen Inersia

Momen Inersia IL suatu luasan bidang terhadap suatu garis L pada bidangnya didapatkan sebagai berikut:

1). Gambarlah daerah yang dimaksud, tunjukkan pita wakil sejajar dengan garis dan persegi panjang yang didekati.

2). Bentuklah hasil kali luas persegi panjang dan kuadrat jarak titik berat dari garis dan jumlahkan untuk semua persegi panjang

3). Andaikan banyaknya persegi panjang menuju tak berhingga dan gunakan teorema dasar.

Momen Inersia I_L benda yang mempunayi volume V, terbentuk oleh perputaran suatu daerah sekeliling garis L pada bidangnya, terhadap garis itu (sumbu putar benda) didapatkan sebagai berikut :

1). Gambarlah daerah yang dimaksud yang menunjukkan pita wakil sejajar sumbu putar dan persegi panjang yang didekati.

2). Bentuklah hasil kali volume yang terbentuk oleh perputaran persegi panjang sekeliling sumbu putar dan kuadrat jarak titik berat persegi panjang dan sumbu putar, dan jumlahkan untuk semua persegi panjang

3). Andaikan banyaknya persegi panjang menuju tak berhingga dan gunakan teorema dasar.

Jari-jari Girasi

Bilangan positip R dengan persamaan $I_L = AR^2$ untuk suatu luasan bidang A dan $I_L = VR^2$ untuk benda putar, disebut jari-jari girasi dari luas atau volume itu terhadap garis L

Teorema Garis Sejajar

Momen inersia suatu luas, panjang busur, atau volume terhadap setiap sumbu sama dengan momen inersia terhadap garis yang sejajar sumbu, melalui titik berat ditambah hasil kali luas, panjang busur, atau volume dengan kuadrat jarak kedua garis sejajar itu.

7.5 Soal Latihan

A. Menghitung Luas Bidang Datar

1. Cari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, sumbu x dan ordinat x =1 dan x = 3.
2. Cari luas daerah S yang dibatasi oleh $y = x^2 + 1$ dan $y = 3x + 1$
3. Cari luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 6x - x^2$ dan $y = x^2 - 2x$
4. Cari luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 6x - x^2$ dan $y = x^2 - 2x$
5. Cari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $x = 3 + \cos\theta$ dan $y = 4\sin\theta$

B. Panjang Tali Busur

1. Cari panjang busur kurva $24xy = x^4 + 48$ dari x = 2 sampai x = 4.
2. Cari panjang busur astorid:
$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$
3. Cari panjang busur dari grafik $y = \ln \sec x$, dari x = 0 sampai x = $\frac{\pi}{6}$.
4. Cari panjang busur kurva $x = t^2$ dan $y = t^3$ dari t = 0 sampai t = 4.
5. Cari panjang busur sikloida $x = \theta - \sin\theta$ dan $y = 1 - \cos\theta$

C. Menghitung Volume Benda

1. Hitunglah volume benda yang terjadi bila lingkaran $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ diputar keliling sumbu x.
2. Hitunglah volume benda yang terjadi bila cardoida $r = 1 + \cos\theta$ antara radius vektor $\theta = 0$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$, diputar keliling sumbu x.
3. Hitunglah volume benda yang terbentuk karena perputaran daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 8x$ dan lactusrectumnya (x=2) sekeliling lactus rectum tersebut.

4. Hitunglah volume benda yang terbentuk karena perputaran daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 8x$ dan lactusrectumnya (x=2) sekeliling sumbu y
5. Hitunglah volume benda yang terjadi karena perputaran daerah perpotongan parabola $y = 4x - x^2$, dengan sumbu x, diputar keliling garis y = 6.

:

BAB 8. INTEGRAL TAK WAJAR DAN INTEGRAL GARIS

8.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang konsep integral tak wajar dan integral garis,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan integral tak wajar dan integral garis dalam matematika

B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mengetahui dan memahami tentang integral tak wajar dan integral garis

8.2 Integral Tak Wajar

Integral tak wajar adalah suatu integral fungsi yang berbentuk sebagai berikut :

(i). $\int_a^b f(x)\,dx$, dimana f(x) harga limitnya menjadi tak hingga untuk suatu harga x dalam interval [a, b] dan dinamakan integral tak wajar jenis pertama

(ii). $\int_a^{\sim} f(x)\,dx$ atau $\int_{-\sim}^{b} f(x)\,dx$ atau $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)\,dx$ dimana salah satu atau kedua nilai limit batas integralnya adalah tak terhingga. Bentuk ini dinamakan integral tak wajar jenis kedua.

Perhatikan integral $\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ maka $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ menjadi tak terhingga untuk x→ +1, jadi bentuk integral tersebut merupakan integral tak wajar jenis pertama.

Akan tetapi apabila diadakan suatu subtitusi : $z=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ → sehingga akan didapatkan : $x=\frac{z^2-1}{z^2+1}$ → $dx=\frac{4z\,dz}{(z^2+1)^2}$ batas *x* berjalan dari -1 ke +1, sedang batas z berjalan dari 0 ke ~. Jadi bentuk integral menjadi sebagai berikut:

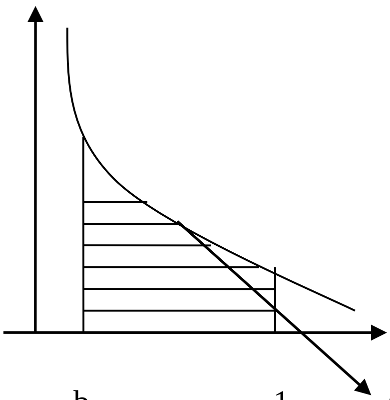
$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int_0^{\sim}\frac{4z^2\,dz}{(z^2+1)}$ yang terlihat bahwa ruas kanan adalah bentuk integral tak wajar jenis kedua.

Contoh 8.1:

Selesaikan integral tak wajar berikut ini: $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$.

Penyelesaian :

$f(x) = \frac{1}{x}$ menjadi tak terhingga pada x = 0.



Potonglah titik x = 0 dan batas integral diambil mulai x = b (b < 1), dan diperoleh :

$\int_b^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_b^1 = \ln 1 - \ln b = \ln \frac{1}{b}$

karena $\lim_{b \to 0^+} (\ln \frac{1}{b}) = +\sim$, maka $\int_b^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \to 0^+} \int_b^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \to 0^+} (\ln \frac{1}{b}) = +\sim$

jadi integral tersebut dari x = 0 ke x = 1 adalah divergen.

8.2 Integral Garis

Misalkan suatu kurva C pada bidang mulus. C diberikan secara parameter oleh

$$x = x(t), y = y(t), \qquad a \le t \le b$$

Dengan x' dan y' adalah kontinu dan tidak semuanya nol pada selang [a, b]

Andaikan C arahnya positip, titik pangkal C ada di (x(a), y(a)) dan titik ujungnya berada pada titik (x(b), y(b)), maka Partisi selang [a, b] menjadi:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Maka integral garis pada kurva C didefinisikan sebagai:

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{|p| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta S_i$$

Cara perhitungan yang lain adalah dengan menyajikan dalam bentuk parameter t.

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Contoh 8.2.

Hitung Integral garis $\int_C (x^3 + y)ds$, dengan C adalah kurva $x = 3t$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$

Jawab:

$x = 3t \rightarrow x' = 3$ dan $y = t^3 \rightarrow y' = 3t^2$

$f(x,y) = x^3 + y \leftrightarrow f(t) = 27t^2 + t^3 = 28t^3$, maka

$$\int_C (x^3 + y)ds = \int_0^1 28t^3\sqrt{9 + 9t^4}dt = 84\int_0^1 t^3\sqrt{1 + t^4}dt$$

$$= \frac{842}{43}(1 + t^4)^{3/2}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{42}{3}\left(2\sqrt{2} - 2\right)$$

8.4 Latihan Soal

1. Tentukan massa kawat yang kerapatnyan $\partial(x,y,z)$ jika kawat tersebut berbentuk helix C dengan parameterisasi $x = \cos t$, y= 3 $\sin t$, $z = 4t, 0 \leq t \leq \pi$.

BAB 9. PERSAMAAN DIFERENSIAL

9.1 Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Pada akhir perkuliahan mahasiswa diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat tentang konsep persamaan diferensial,serta dapat menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan persamaan diferensial dalam matematika

B. Tujuan Instruksional Khusus

Pada akhir perkuliahan mahasiwa diharapkan mengetahui dan memahami tentang persamaan diferensial

9.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) merupakan suatu persamaan diferensial di mana fungsi tidak diketahui merupakan fungsi variabel bebas tunggal. Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui adalah fungsi dari banyak variabel bebas, dan persamaan tersebut juga melibatkan turunan parsial. PD dapat digolongkan menjadi linier dan tak linier. PD disebut linier jika fungsi yang tidak diketahui tersebut turunannya muncul dalam pangkat satu. Dan jika tidak memenuhi syarat tersebut maka disebut tak linier.

Persamaan Diferensial Parsial merupakan suatu persamaan yang memuat diferensial parsial. Variabel bebas dinyatakan dalam x dan y sedangkan variabel tak beas dinyatakan dalam z atau u yang dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \ \ \frac{\partial u}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p, \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = s, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t$$

Order suatu persamaan differensial adalah tingkat turunan tertinggi persamaan differensial tersebut.

Contoh 9.1

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0$ adalah order ke-2

$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = 0$ adalah order ke-3

Derajat *(Degree)*

Derajat suatu persamaan differensial (PD) merupakan pangkat dari turunan tertinggi di dalam PD tersebut.

xy $\left(\frac{d^3\, y}{dx^3}\right)^2 + cosx \left(\frac{d^2\, y}{dx^2}\right) + 6xy\frac{dy}{dx} + y = 0$ mempunyai derajat 2.

Bentuk Umumnya adalah sebagai berikut:

$$y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y = kx$$

Penyelesaian persamaan diferensial artinya adalah mencapatkan suatu fungsi f(x) yang memenuhi persamaan diferensial tersebut (PD). Fungsi f(x) yang memenuhi satu PD lebih dari satu. Kumpulan fungsi-fungsi yang memenuhi suatu PD dinamakan dengan Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial (PU), Sedangkan satu fungsi di dalam kumpulan fungsi tersebut yang memenuhi PD dinamakan dengan penyelesaian khusus PD tersebut (PK).

Persamaan Diferensial Biasa Orde 1 terdiri dari berbagai macam yaitu: PD dengan variabel dapat dipisah, PD homogen, PD eksak, PD linier, PD Bernoulli dan PD bentuk $(ax + by + c)\, dx\; +\; (px\; + qy\; +\; r)\, dy\; = 0$.

1.PD dengan variabel dapat dipisah

Contoh: Carilah penyelesaian umum dari PD

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)(1 + y)$$

2. PD homogen

Contoh: Carilah penyelesaian umum dari PD

$$(x + y)dx + xdy = 0$$

3. PD eksak

Contoh: Carilah penyelesaian umum dari PD

$$(3x^2y - y)dx + (x^3 - x + 2y)dy = 0$$

4.PD linier

Contoh: Carilah penyelesaian umum dari PD

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x$$

5.PD Bernoulli

Contoh: Carilah penyelesaian umum dari PD

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = xy^2$$

6. PD bentuk $(ax + by + c)\ dx\ +\ (px\ + qy\ +\ r)\ dy\ = 0$.

Contoh: Carilah penyelesaian umum dari PD

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1) = 0$$

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Terdapat teorema mengenai PD Biasa Order n yaitu:

Teorema:

1.Jika y=f(x) merupakan penyelesaian dari PD linier homogen, maka y=Cf(x) juga merupakan penyelesaian PD tersebut.

2.Bila $y_1 = C_1 f_1(x)$, $y_2 = C_2 f_2(x)$,…, $y_n = C_n f_n(x)$,

merupakan penyelesaian-penyelesaian yang berlainan dari PD linier homogen, maka $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_n f_n(x)$ Juga merupakan penyelesaian PD tersebut.

9.3 Latihan Soal

Carilah penyelesaian umum dari PD

1. $(x - 2y_1)dx + (2x - y - 1)dy = 0$
2. $ydx + xdy = 0$
3. $y' - 2y = \cos 2x$

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Jr.F., 1964, *Theory and Problems of Differential and Integral Calculus*, *2^{nd}.ed.,* New York: Schaum Publ.Co.

Baisuni, H. 1986, *Kalkulus*, Penerbit Universitas Indonesia.

Hartanto, D.2014. Slide Persamaan Differensial Biasa. Teknik Kimia UNNES.

Muslich. 1992. Diktat Matematika Dasar I. UNS Press.

Murinto. 2010. Diktat Kalkulus 2. Teknik Informatika UAD.

Purcell, E. 1985, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Erlangga

Salusu, A. 2003. Teori dan Penyelesaian Kalkulus Lanjutan. Graha Ilmu.

LABORATORIUM
TEKNIK INFORMATIKA
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN

UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN