ISBN:

BUKU AJAR
MATA KULIAH

MATEMATIKA DISKRIT

PENYUSUN: NUR ROCHMAH DYAH P.A, S.T., M.Kom
LISNA ZAHROTUN, S.T, M.Cs
DEWI SOYUSIAWATY, S.T, M.T

NAMA PENERBIT

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur ditujukan kepada Allah SWT, hanya atas rahmat dan hidayah-Nya lah akhirnya diktat matematika diskrit ini dapat terselesaikan.

Cakupan materi Matematika diskrit cukup luas dan beragam, namun dalam modul ini hanya membahas sebagian saja. Hal ini mengingat bahwa sebagian materi telah dicover pada mata kuliah lain semisal aljabar liner dan matriks, struktur data dan analisis algoritma. Selain itu, perlu digarisbawahi bahwa diktat jangan digunakan satu-satuya acuan, sebaiknya mahasiswa membaca juga buku yang ada daftar referensi. Soal latihan dibuat beragam dan cukup banyak untuk memperkaya latihan dan memperdalam pemahaman.

Atas terselesaikannya modul ini, tidak lupa penulis mengucapkan terirna kasih kepada semua pihak yang telah membantu. Tentu saja modul ini masih jauh dari memuaskan, namun penulis berharap modul ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa dalam mengkaji dan mengembangkan ilmu matematika diskrit. Saran dan kritik sangatlah penulis harapkan

.

Yogyakarta, Februari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1. HIMPUNAN

1.1. Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Menerapkan/Memecahkan masalah berhubungan dengan set, dasar-dasar himpunan dan penerapan himpunan

B. Tujuan Instruksional Khusus

1. Memahami jenis-jenis bilangan
2. Memahami tentang set
3. Menyebutkan jenis-jenis himpunan
4. Memahami jenis-jenis himpunan (union, Intercestion, Cartsian)
5. Memahami Diagram venn
6. Menggambarkan jenis-jenis himpunan dalam bentuk diagram venn
7. Memahami hukum-hukum himpunan
8. Memahami prinsip inklusi-ekslusi

1.2. Pengantar Matematika Diskrit

Matematika Diskrit merupakan cabang matematika yang mempelajari objek-objek diskrit.

Sedangkan benda disebut diskrit jika terdiri dari sejumlah berhingga elemen yang berbeda, atau elemen-elemennya tidak berkelanjutan (*uncontinue*). Contohnya himpunan bilangan bulat (*integer*), graf, pohon. Lawan kata diskrit: kontinyu atau menerus (*continuous*). Contohnya himpunan bilangan riil (*real*)

Matematika diskrit penting untuk dipelajari karena :

1. Komputer digital bekerja secara diskrit. Informasi yang disimpan dan dimanipulasi oleh komputer adalah dalam bentuk diskrit.
2. Matematika diskrit merupakan ilmu fondasinya dalam pendidikan informatika.

Matematika diskrit memberikan fondasi matematis untuk kuliah-kuliah lanjut di informatika. Yaitu mata kuliah algoritma, struktur data, basis data, otomata dan teori bahasa formal, jaringan komputer, keamanan komputer, sistem operasi, teknik kompilasi, dsb.Matematika diskrit adalah matematika yang khas informatika. Beberapa contoh persoalan di dalam Matematika Diskrit adalah:

1. Berapa banyak account mail *yahoo* yang dapat dibuat?
2. Bagaimana menentukan jarak terpendek dari dua kota?
3. Buktikan bahwa perangko senilai n ($n \geq 8$) rupiah dapat menggunakan hanya perangko 3 rupiah dan 5 rupiah saja

4. Dapatkah kita melalui semua jalan di sebuah kompleks perumahan tepat hanya sekali dan kembali lagi ke tempat semula?
5. “Makanan murah tidak enak”, “makanan enak tidak murah”. Apakah kedua pernyataan tersebut menyatakan hal yang sama?
6. Mahasiswa informatika diharapkan mempunyai pemahaman yang kuat dalam Matematika Diskrit, agar tidak mendapat kesulitan dalam memahami kuliah-kuliah lanjutannya di informatika

1.3. Dasar-Dasar Teori Himpunan

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek yang berbeda Liu (1968 dalam buku Siang, 2009). Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**. HMTIF adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

Set atau Himpunan adalah bentuk dasar matematika yang paling banyak digunakan di teknik informatika. Salah satu topik yang diturunkan dari Himpunan adalah *Class* atau *collection* .

Notasi Himpunan

Himpunan dinyatakan dg huruf capital. Misal : A, B, G. Sedangkan elemennya dg huruf kecil a, b, c..,1,2,..

Beberapa simbol baku pada himpunan

N = himpunan bilangan alami (asli) = { 0,1, 2, 3,... }

Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Sedangkan U menyatakan himpunan semesta. Contoh: Misalkan U = {a, b, c, d, e} dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan A = {a, d, e}.

Penulisan Himpunan

1. Enumerasi

   Menyebutkan semua anggota dari himpunan tersebut.contoh : Himpunan tiga bilangan ganjil pertama: A = {1,3,5}.
2. Keanggotaan Himpuan

   $x \in A$:x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh

Misalkan: $A = \{1,3,5,8\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$, $K = \{\{\}\}$

maka $1 \in A$,

$\{a, b, c\} \in R$, *sedangkan* $c \notin R$,

$\{\} \in K$, *sedangkan* $\{\} \notin A$

3. Notasi Persyaratan

   A = {x | persyaratan x}

   contoh :

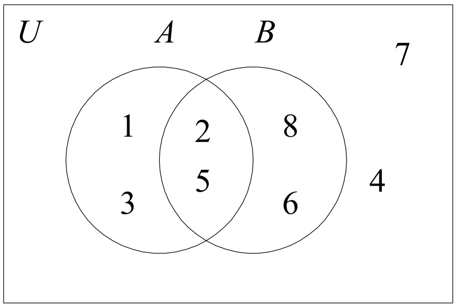
   A = {x | x bilangan bulat dengan x^2 -1 =0}

   B = {x | x merupakan huruf vokal}

Diagram Venn

Diagraf venn digunakan untuk menyatakan relasi antar himpunan

Misal U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}. maka notasi dalam diagram Venn:



Gambar 1.1.

1.3.1. Istilah Dalam Himpunan

1. Himpunan Berhingga (Finite Set)

a. Himpunan yang mempunyai anggota berhingga disebut himpunan berhingga (*finite set*).

b. Sembarang himpunan yang anggotanya tak berhingga disebut himpunan tak berhingga(*infinite set*)

   contoh A={a,b,c,d,e,f} adalah *finite set*, sedangkan Z adalah *infinite set*.

2. Kardinalitas

Kardinalitas menyatakan banyaknya anggota dari himpunan

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

contoh :

a. $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari $10\}$, atau $B = \{2, 3, 5, 7\}$ maka $|B| = 4$

b. $A = \{t, \{t\}, \{\{t\}\}, \{\{\{t\}\}\} \}$, maka $|A| = 4$

3. Himpunan Kosong (null set)

Himpunan yang tidak mempunyai anggota atau kardinalitasnya = 0.

Notasi himpunan kosong adalah {} atau Ø.

Contoh:

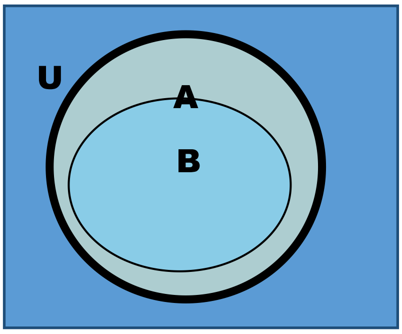
- A ={x|x bilangan bulat $x^2 + 1 = 0$} maka n(A)= 0.

4. Himpunan Bagian (Subset)

Himpunan A disebut himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

Notasi: $A \subseteq B$

Diagram Venn:



Gambar 1.2.

Catatan :

A dan AA, maka dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

Contoh: $A = \{a,b,c\}$, maka $\{a,b,c\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

Contoh

(i) $\{ 1,2,3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{ 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3 \}$

TEOREMA 1.

Untuk sembarang himpunan *A* berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) *A* adalah himpunan bagian dirinya sendiri (yaitu, *A* *A*).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan (dalam hal ini *A* (*A*)).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Catatan :

$A \subseteq B$ **tidak sama** dengan $A \subset B$

Pada :

$A \subset B$: *A* adalah himpunan bagian dari *B* tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari *B*.

Contoh: {a} dan {b,c} adalah *proper subset* dari {a,b,c}

sedangkan :

$A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa *A* adalah himpunan bagian (*subset*) dari *B* yang memungkinkan $A = B$.

5. **Himpunan yang Ekivalen**

   a. Himpunan *A* disebut ekivalen dengan himpunan *B* jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

   b. Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

      $A = \{ 1,2,3,4\}$ dan $B = \{ ali, budi, joko, tuti \}$, maka

      $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

6. Himpunan yang sama

a. $A = B$ jika dan hanya jika setiap anggota A merupakan anggota B dan sebaliknya setiap anggota B merupakan anggota A.. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

b. Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

7. Himpunan Kuasa

a. Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

b. Notasi :$P(A)$ atau 2^A

c. Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$

Contoh

Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ , \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

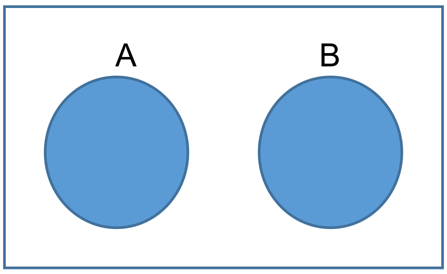
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

8. Himpunan Saling Lepas

a. Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki anggota yang sama.

b. Notasi :$A \,//\, B$

Diagram Venn:



Gambar 1.3.

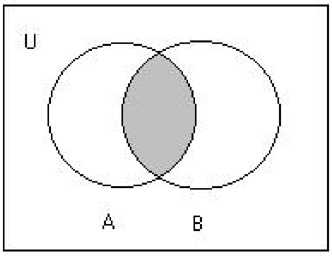
Contoh

Jika $A = \{ x \mid xP, x< 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$

1.3.2. Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (intersection)

Notasi : $A \cap B = \{ x | x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Gambar 1.4.

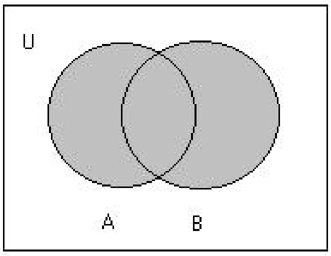
Contoh

(i) Jika $A = \{a,b,c,d,e\}$ dan $B = \{c,e,f,g\}$, maka $A \cap B = \{c,e\}$

(ii) Jika $A = \{ 1,2,3\}$ dan $B = \{ 4,5\}$, maka $AB =$. Artinya: A // B

2. Gabungan (union)

Notasi$A \cup B = \{ x | x \in A \text{ atau } x \in B \}$



Gambar 1.5

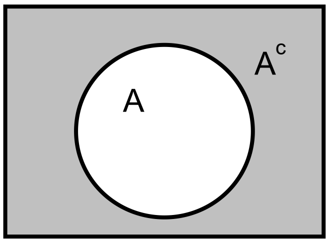
Contoh:

(i) Jika $A = \{ a, b, c\}$ dan $B = \{ b,c,d,e \}$, maka $AB = \{ a,b,c,d,e \}$

(ii) $A = A$

3. Komplemen (complement)

Notasi : $\overline{A}$ = { $x|x \in$ U, $x \notin A$ }



Gambar 1.6.

Contoh

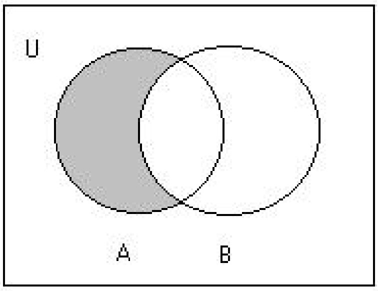
Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 7 },

(i) jika A = {1, 3, 4, 6}, maka $\overline{A}$ = {2, 5, 7}

(ii) m jika A = { x | x/2 P, x< 7 }, maka $\overline{A}$= { 1, 3, 5, 7, }

4. **Selisih (different)**

Notasi :$A - B$ = { $x|x \in A$ dan $x \notin B$ } = A $\cap \overline{B}$



Gambar 1.7.

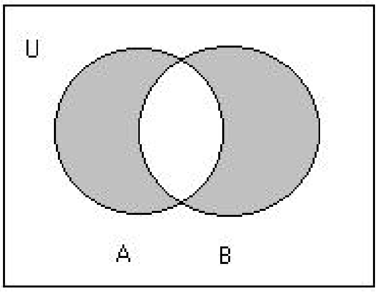
Contoh.

(i) Jika A = { a, b, c,d,e,f} dan B = { c,d,f}, maka $A - B$ = { a,b,e} dan $B - A$ =

(ii) {1, 3, 5} – {1, 2, 3} = {5}, tetapi {1, 2, 3} – {1, 3, 5} = {2}

5. **Beda Setangkup (Symmetric Difference)**

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Gambar 1.8.

Contoh.

Jika A = { 2, 4, 6 } dan B = { 2, 3, 5 }, maka AB = { 3, 4, 5, 6 }

***1.1.*TEOREMA 2.**

1.2.Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

Contoh (contoh untuk materi yang mana?diperjelas keterangan pengerjaannya.)

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" :$P \cap Q$

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" :$P \oplus Q$

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" :U – ($P \cup Q$)

6. **Perkalian Kartesian (cartesian product)**

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

Contoh.

(i) Misalkan C = { 1, 2, 3 }, dan D = { a, b }, maka

$C \times D$ = { (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) }

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:

   $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$.

2. $(a, b) \neq (b, a)$.

3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Contoh:

   $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,

   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$

   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

   Contoh:

   Misalkan

   A = himpunan mahasiswa = { i = *ihsan*, r = *ricco*, b = *biema*, e = eef}

   B = himpunan mata kuliah = { b = *basis data*, m = matematika diskrit }

   Berapa banyak kombinasi mahasiswa dan mata kuliah yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

   <u>Jawab</u>:

   $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 2 = 8$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(i, b), (i,m), (r,b), (r,m), (b,\mathrm{b}), (b, m), (e,b), (e,m)\}$.

1.3.3. Hukum-Hukum Himpuan

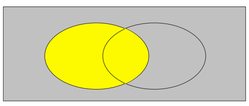
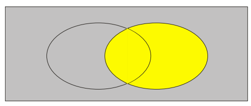
Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan

Disebut juga hukum aljabar himpunan.

Tabel 1.1. Hukum-hukum Himpunan

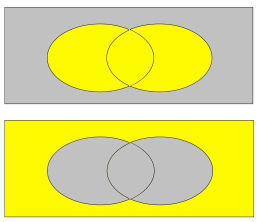
1. Hukum identitas: $A = A$ AU = A	2. Hukum *null*/dominasi: $A =$ AU = U
3. Hukum komplemen: $A\ \overline{A}$ = U $A\ \overline{A}$ =	4. Hukum idempoten: $AA = A$ $AA = A$
5. Hukum involusi: $\overline{(\overline{A})}$ = A	6. Hukum penyerapan (absorpsi): A (A B) = A A (A B) = A
7. Hukum komutatif: A B = B A A B = B A	8. Hukum asosiatif: A (B C) = (A B) C A (B C) = (A B) C
9. Hukum distributif: A (B C) = (A B) (A C) A (B C) = (A B) (A C)	10. Hukum De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing}$ = U $\overline{\text{U}} = \varnothing$	

Visual DeMorgan 1 dengan diagram venn :

A  B 

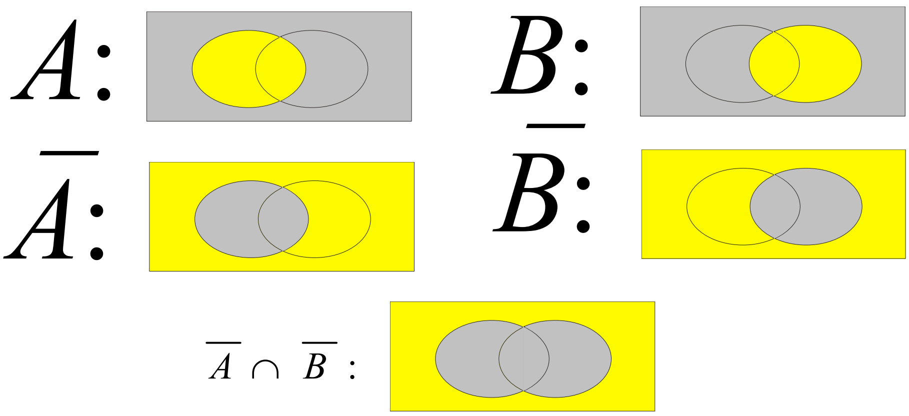
$A \cup B$

$\overline{A \cup B}$:



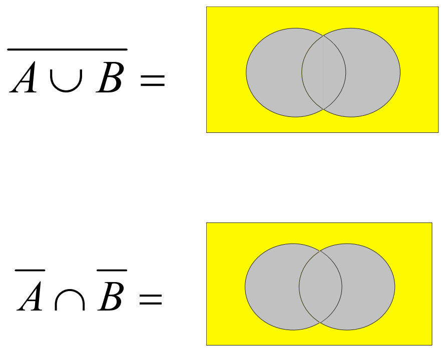
Gambar 1.9. Visual DeMorgan 1

Visual DeMorgan 2 dengan diagram venn :



Gambar 1.10. Visual DeMorgan 2

Visual DeMorgan 3 dengan diagram venn :



Gambar 1.11. Visual DeMorgan 3

1.3.4. Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas → dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh:

AS → kemudi mobil di kiri depan

Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Analisi prinsip dualitas :
Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti , , dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti

$\to$,

$\to$,

$\to$ U,

U $\to$,

Sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka

Tabel 1.2.

1. Hukum identitas: $A = A$	Dualnya: AU $= A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A =$	Dualnya: AU = U
3. Hukum komplemen: $A \overline{A}$ = U	Dualnya: $A \overline{A} =$
4. Hukum idempoten: $AA = A$	Dualnya: $AA = A$
5. Hukum penyerapan: $A (AB) = A$	Dualnya: $A (AB) = A$
6. Hukum komutatif: $AB = BA$	Dualnya: $AB = BA$
7. Hukum asosiatif:	Dualnya:

A (BC) = (AB) C	A (BC) = (AB) C
8. Hukum distributif: A (BC)=(AB) (AC)	Dualnya: A (B C) = (AB) (AC)
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A}\,\overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing}$= U	Dualnya: $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$

Contoh.

Dual dari (AB) ($A\overline{B}$) = A adalah (AB) ($A\overline{B}$) = A.

1.3.5. Perinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 1000 yang habis dibagi 5 atau 7?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 7,

$A \cap B$= himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5 dan 7 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 5 dan 7, yaitu 35),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200,$$

$$|B| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142,$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/35 \rfloor = 28$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 200 + 142 - 28 = 314$$

Jadi, ada 314 buah bilangan yang habis dibagi 5 atau 7.

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_r$, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

1.3.6 Partisi

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, …An dari A sedemikian sehingga:

(a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan

(b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$

Contoh.

Misalkan A = {1,2,3,4,5,6}, maka { {1}, {2,3,4}, {5,6}} adalah partisi A

1.3.7 Himpunan Ganda (multiset)

a. Himpunan yang anggotanya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

   Contohnya, {1,1,2,2,2,3}, {0,0,0}, {a,b,c}, {}.

b. Multiplisitas dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan anggota tersebut pada himpunan ganda. Contoh: K = { 1,2,2,2,1,1,1,2}, multiplisitas 1 adalah 4.

c. Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap anggotanya adalah 0 atau 1.

d. Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan anggota di dalam *multiset* semua berbeda.

1.3.8 Operasi Antara Dua Buah Multiset:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. PQ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas anggotanya sama dengan multiplisitas maksimum anggota tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ x, x, x, y, z, z \}$ dan $Q =\{ x, x, y, z, z \}$,

   $PQ = \{ x, x, x, y, z, z \}$

2. PQ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas anggotanya sama dengan multiplisitas minimum anggota tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ x, x, x, y, z, z \}$ dan $Q = \{ x, x, y, z \}$

   $PQ = \{ x, x, z \}$

3. P – Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas anggotanya sama dengan:

   multiplisitas anggota tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif

   0, jika selisihnya nol atau negatif.

   Contoh: $P = \{ v, v, v, v, w, w, x, y, z, z \}$ dan $Q = \{ v, v, w, w, w, x, x, y, y, z \}$

   maka $P – Q = \{v, v, z \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas anggotanya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas anggota tersebut pada P dan Q.

   Contoh: $P = \{ x, y,y, z,z, z \}$ dan $Q = \{ x, y, y, z \}$,

   $P + Q = \{ x, x, y, y, y, y, y,z, z, z,\mathrm{z} \}$

1.4. Kesimpulan / Ringkasan

1.5. Latihan dan Evaluasi

1. Tentukan mana diantara pernyataan berikut ini yang benar:

   a. $2 \in \{1,2,3\}$

   b. $\{2\} \in \{ 1,2,3\}$

   c. $\{2\} \in \{ \{1\},\{2\}\}$

   d. $2 \subseteq \{1,2,3\}$

   e. $\{2\} \subseteq \{1,2,3\}$

   f. $\{1,2,3\}\subseteq \{1,2,3\}$

2. Diketahui A = himpunan bilangan genap; B ={x|x=2k untuk suatu bilangan bulat k} dan C = {x|x = 2p-1 untuk suatu bilangan bulat p}.
   Apakah A=B?; A=C?

3. Perhatikan himpunan universal U= {1,2,3…,8,9} dan himpunan-himpunan A={1,2,5,6}, B= {2,5,7}, C={1,3,5,7,9}. Tentukan :
   a. $A \cap B$ dan $A \cap C$
   b. A B dan B C
   c. A^c dan C^C
   d. A\B dan A\C

4. Misalkan A = {c,d,f,g}, B = {f,j}, dan C = {d,g}. tentukan apakah relasi-relasi berikut ini benarberikan alasannya?
   a. $B \subseteq A$
   b. $C \subseteq C$
   c. $C \subseteq A$

5. Misalkan $A = \{x \in R \mid 0 < x <= 2\}$ dan B $\{x \in R \mid 1 <= x < 4\}$
   Himpunan-himpunan apakah di bawah ini?
   a. A B
   b. $A \cap B$
   c. A^c
   d. B^c
   e. A^c B^c
   f. $A^c \cap B^c$

6. Diketahui:
   A= Himpunan semua mobil buatan dalam negeri
   B= Himpunan semua mobil import
   C= Himpunan semua mobil yang di buat sebelum tahun 1990
   D= Himpunan semua mobil yang nilai jualnya <Rp.100 juta
   E= Himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

Buat notasi untuk pernyataan di bawah ini!

a. Mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimport dari luar negeri

b. Semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang dinilai jualnya <Rp.100 juta

c. Semua mobil import buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual >Rp.100

7. Diketahui

   U= himpunan mahasiswa

   P= himpunan mhs yang nilai ujian UTS diatas 80

   Q= himpunan mhs yang nilai ujian UAS diatas 80

   Buat notasi untuk pernyataan di bawah ini!

   a. seorang Mhs mendapat nilai A jika UTS dan nilaiUAS keduanya diatas 80

   b. mendapat nilai B jika salah satu ujiandiatas 80

   c. mendapat nilai C jika kedua ujian dibawah 80

8. Diberikan multiset A = {a, a, b, b, b, b, c, c, d} dan B = {a, b, c, d, d, d, d, e, e}. Tentukan

   a. $A \cup B$

   b. $A \cap B$

   c. $A — B$

   d. $B — A$

   e. $A + B$

9. Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

10. Di antara bilangan bulat antara 301 – 1000 (termasuk 301 dan 1000 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang habis dibagi oleh 5 atau 6 ?

1.6. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

BAB 2. MATRIKS, RELASI DAN FUNGSI

2.1. Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa mampu memahami dan menerapkan terkait materi matriks, Relasi , Aljabar relational (Basis Data, Query) ,Fungsi (inverse, module, rekursif, factorial)

B. Tujuan Instruksional Khusus

1. Memahami konsep relasi
2. Menyebutkan jenis-jenis relasi
3. Merepresentasi relasi
4. Menyebutkan sifat relasi
5. Mmahami kombinasi relasi
6. Memahami komposisi relasi
7. Memahami pengertian aljabar relational
8. Memahami basis data
9. Memahami query yaitu operasi seleksi,
10. Memahami query operasi proyeksi,
11. Memahami query operasi join
12. Memahami definisi fungsi
13. Memahami komposisi fungsi
14. Memahami fungsi khusus
15. Memahami fungsi rekursif

2.2. Matriks dan Relasi

A. Matriks

Matriks adalah adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom. Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom (m x n) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran *n* x *n*. Dalam praktek, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi ringkas A = $[a_{ij}]$.

Contoh 1. Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3 x 4:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks simetri adalah matriks yang $a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j.

Contoh 2. Di bawah ini adalah contoh matriks simetri.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks zero-one (0/1) adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.

Contoh 3. Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B. Relasi

Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari A x B dengan notasi: R

$\subseteq$ (A x B).

a R b adalah notasi untuk (a, b) $\in$ R, yang artinya *a* dihubunganakan dengan *b* oleh R.

a R b adalah notasi untuk (a, b) $\notin$ R, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R.

Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari R, dan himpunan B disebut daerah (*range*) dari R

Contoh 3.

Misalkan *A* = {Amir, Budi, Cecep}, B = {IF221, IF251, IF342, IF323} , maka A x B = {(Amir, IF221). (Amir, IF251), (Amir, IF342), (Amir, IF323), (Budi, IF221), (Budi, IF251), (Budi, IF342), (Budi, IF323), (Cecep, IF221), (Cecep, IF251), (Cecep, IF342), (Cecep, IF323)}

Misalkan *R* adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa {Semester Ganjil, yaitu R = {(Amir, IF251), (Amir, IF323), (Budi, IF221), (Budi, IF251), (Ceceo, IF323) }

Dapat dilihat bahwa R $\subseteq$ (A x B), A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R, Misal

- (Amir, IF251) $\in$ R atau Amir R IF251

- (Amir, IF342) ∉ R atau Amir R IF342.

Contoh 4.

Misalkan P = {2, 3, 4} dan Q = {2, 4, 8, 9, 15). Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan (*p, q*) ∈ R jika p habis membagi q maka kita peroleh R = {(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (z (3, 9), (3, 15) }.

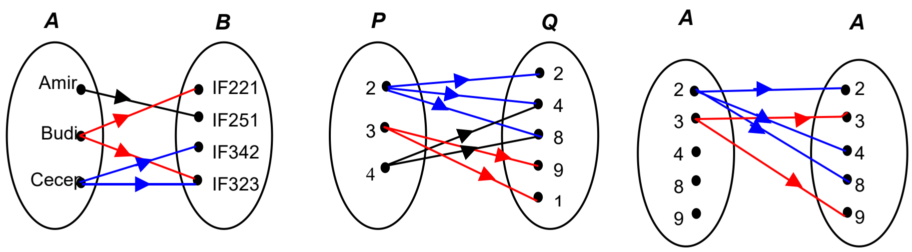
Relasi pada satu (sebuah) himpunan adalah relasi yang khusus. Relasi pada himpunan *A* adalah relasi dari A x A. Relasi pada hirnpunan A adalah himpunan bagian dari A x A.

Contoh 5.

Misalkan R adalah relasi pada A = {2, 3, 4, 8, 9) yang didefinisikan oleh (x, y) c R jika adalah faktor prima dari y. Maka R = {(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)).

1. Representasi Relasi

a. Representasi Relasi dengan Diagram Panah



Gambar 2.1

b. Representasi Relasi dengan Tabel

Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 2.1

A	*B*
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 2.2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 2.3

A	*A*
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

c. Representasi Relasi dengan Matriks

Misalkan R adalah relasi dari A = {a,, az, ..., am} dan B = {b_1, b_2, ..., b_n}.

Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$A = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{23} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{m3} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$M = \begin{cases} 1, & (a_i, a_j) \in R \\ 0, & (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 6.

Relasi R pada **Contoh 3** dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dalam hal ini, a_1 = Amir, a_2 = Budi, a_3 = Cecep, dan b_1, = IF221, b_2 = IF251, b_3 = IF342, dan b4 = IF323.

Relasi R pada **Contoh 4** dapat dinyatakan dengan matriks

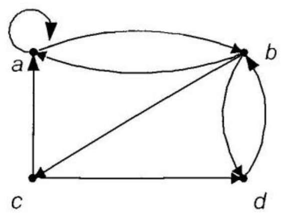
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b, = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$

d. Representasi Relasi dengan Graf Berarah

Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan graf berarah *(directed graph atau digraph)*. Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur *(arc)*. Jika (a, b) ∈ R, maka sebuah busur dibuat dari simpul *a* ke simpul *b*. Simpul *a* disebut simpul asal *(initial vertex)* dan simpul *b* disebut simpul tujuan *(terminal vertex)*. Pasangan terurut (*a*,*a*) dinyatakan dengan busur dari simpul *a* ke simpul *a* sendiri. Busur semacam itu disebut gelang atau kalang *(loop)*.

Contoh 7. Misalkan R = {(*a, a*), (*a, b*), (*b, a*), (*b, c*), (*b, d*), (*c, a*), (*c, d*), (*d, b*)} adalah relasi pada himpunan (a, b, c, d}. R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



2. Sifat-Sifat Relasi Biner

Relasi biner yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat.

a. Refleksif (reflexive)

Relasi R pada himpunan A disebut *refleksif* jika (*a*, *a*) ∈ R untuk setiap *a* ∈ A. Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada *a* ∈ A sedemikian sehingga (a, a) ∉ R.

Contoh 8. Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka :

(1.) Relasi R = {(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4) } bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), dan (4, 4).

(2.) Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4) } tidak bersifat refleksif karena (3, 3) $\notin$ R.

Contoh 9. Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga (a,a) $\in$ R untuk setiap a $\in$ A.

Contoh 10. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif N. R :x lebih besar dari y, S : $x + y = 5$, T : $3x + y = 10$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan (2, 2) bukan anggota R, S, maupun T.

Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk i = 1, 2, ..., n,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya

b. Menghantar (transitive)

Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in$ R, maka $(a, c) \in$ R, untuk a, b, c $\in$ A.

Contoh 11. Misalkan A = {1, 2, 3, 4}, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka R = {(2, 1), (3, 1), (3. 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3) } bersifat menghantar. Lihat tabel berikut:

Pasangan berbentuk	
(a, b)	(b, c) (a, c)
(3,2)	(2, 1) (3, 1)
(4, 2)	(2, 1) (4, 1)

(4, 3)	(3, 1) (4, 1)
(4, 3)	(3,2) (4,2)

(1.) R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak manghantar karena (2, 4) dan (4, 2) e R, tetapi (2,2) $\notin$ R, begitu juga (4, 2) dan (2, 3) $\in$ R, tetapi (4, 3) $\notin$ R.

(2.) Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) } jelas menghantar (Tunjukkan !)

(3.) Relasi R = {(1, 2), (3, 4)} menghantar karena tidak ada (a, b) E R dan (b, c) $\in$ R sedemikian sehingga (a, c) $\in$ R.

(4.) Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti R = {(4, 5)} selalu menghantar

Contoh 12. Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat menghantar. Misalkan bahwa *a* habis membagi *b* dan *b* habis membagi *c*. Maka terdapat bilangan positif *m* dan *n* sedemikian sehingga *b* = *ma* dan *c* = *nb*. Di sini *c* = *nma*, sehingga *a* habis membagi *c*. Jadi, relasi "habis membagi" bersifat menghantar.

Contoh 13. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif N. *R* :*x* lebih besar dari *y*, *S* : *x* + *y* = 6, T : 3*x* + *y* = 10

- R adalah relasi menghantar karena jika *x*>*y* dan *y*>*z* maka *x*>*z*.
- S tidak menghantar karena, misalkan (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota *S* tetapi (4, 4) $\notin$ S.
- T = {(1,7), (2, 4), (3 1)} menghantar.

Relasi yang bersifat menghantar tidak mempunyai ciri khusus pada matriks representasinya

Sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari *a* ke *b* dan dari *b* ke *c*, maka juga terdapat busur berarah dari *a* ke *c*

c. Setangkup (symmetric) dan tak-setangkup (antisymmetric)

Relasi *R* pada himpunan *A* disebut setangkup jika untuk semua *a*, *b*$\in$*A*, jika (*a*, *b*) $\in$*R*, maka (*b, a*) $\in$*R*

Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \in R$. Relasi R pada himpunan A disebut tolak-setangkup jika untuk semua a, b $\in$ A, $(a, b) \in$ R dan $(b, a) \in$ R hanya jika a = b.

Relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in$ R dan $(b, a) \in$ R.

Perhatikanlah bahwa istilah setangkup dan tolak-setangkup tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika is mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) yang mana a $\neq$ b.

Contoh 14. Misalkan A = {1, 2, 3, 4), dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4) } bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in$ R maka (b, a) juga $\in R$. Di sini (1, 2) dan (2, 1) $\in R$, begitu juga (2 4) dan (4, 2) $\in$ R.

(b) Relasi R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2) } tidak setangkup karena (2, 3) = R. tetapi (3, 2) $\in$ R.

(c) Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3) } tolak-setangkup karena 1 = 1 dan (1. 1)$\in$ R, 2 = 2 dan (2,2) $\in$ R, dan 3 = 3 dan (3, 3) $\in$ R. Perhatikan bahwa R juga setangkup.

(d) Relasi R = {(1, (1, 2), (2, 2), (2, 3) } tolak-setangkup karena (1, 1) $\in$ R dan 1 = 1 dan, (2,2) $\in$ R dan 2 = 2 dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.

(e) Relasi R = {(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2) } tidak tolak-setangkup karena 2 $\neq$ 4 tetapi (2, 4) dan (4, 2) anggota R. Relasi R pada (a) dan (b) di atas juga tidak tolak-setangkup.

(f) Relasi R = {(1, 2), (2, 3), (1, 3) } setangkup dan juga tolak-setangkup. dan R = {(1, 1), (1,2), (2, 2), (3, 3)) tidak setangkup tetapi tolak-setangkup.

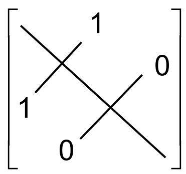
(g) Relasi R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)) tidak setangkup maupun tidak tolaksetangkup. R tidak setangkup karena (4, 2) E R tetapi (2, 4) E P. R tidak tolak-setangkup karena (2, 3) E R dan (3, 2) E R tetap 2 $\neq$ 3.

Contoh 15. Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif tidak setangkup karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika $a = b$. Sebagai contoh, 2 habis membagi 4, tetapi 4 tidak habis membagi 2. Karena itu, $(2, 4) \in$ R tetapi $(4, 2) \notin$ R. Relasi "habis membagi" tolak-setangkup karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka $a = b$. Sebagai contoh, 4 habis membagi 4. Karena itu, $(4, 4) \in$ R dan 4 = 4.

Contoh 16. Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif N. R :x lebih besar dari y, $S : x + y = 6$, T : $3x + y = 10$

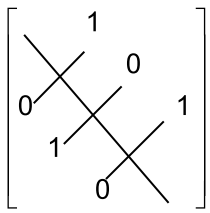
- R bukan relasi setangkup karena, misalkan 5 lebih besar dari 3 tetapi 3 tidak lebih besar dari 5.
- S relasi setangkup karena (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S.
- T tidak setangkup karena, misalkan (3, 1) adalah anggota T tetapi (1, 3) bukan anggota T.
- S bukan relasi tolak-setangkup karena, misalkan $(4, 2) \in$ S dan $(4, 2) \in$ S tetapi $4 \neq 2$.
- Relasi R dan T keduanya tolak-setangkup (tunjukkan!).

Relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ij} = 1$, untuk $i = 1$, 2, ... , n :



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh : jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ij} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ij} = 0$ bila $i \neq j$:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda

3. Relasi Inversi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Invers dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh R^{-1} = {(b, a) | (a, b) E R }

Contoh 17. Misalkan P = {2, 3, 4) dan Q = {2, 4, 8, 9, 15). Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q maka kita peroleh R = {(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2,8), (4; 8), (3, 9), (3,15) }. R^{-1} adalah *invers* dan relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan $(q,p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p maka kita peroleh R^{-1} = {(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8,4), (9, 3), (15, 3)}.

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan transpose terhadap matriks M,

$$N = M^{l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Mengkombinasi Relasi

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.

Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpuna A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 18. Misalkan $A = (a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$, maka

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c; c)\}$

$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah :

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \quad dan \quad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

Contoh 19. Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1 \vee R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1 \wedge R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **Komposisi Relasi**

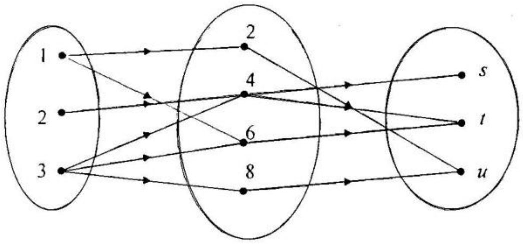
Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, C \in C$, dan untuk beberapa $b \in B$, $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S\}$.

Contoh 20. Misalkan R = {(1,2), (1,6), (2,4), (3,4), (3,6), (3,8)} adalah relasi dari himpunan {1,2,3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan S = {(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)} adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8) ke himpunan {s, t, u}.

Maka komposisi relasi R dan Sadalah S ○ R = {(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3,u)}

Komposisi relasi R dan S lebih jelas jika diperagakan dengan diagram panah:



Gambar 2.2.

Jika relasi R, dan R2 masing-masing dinyatakan dengan matriks MR, dan Mme, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

MRz o R, = MR, - IUaZ

yang dalam hal ini operator "." sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "A" dan tanda tambah dengan "v'".

Contoh 21. Misalkan bahwa relasi R, dan R2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks flab ?.

6. Relasi n-ary

Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan. Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi n-ary (baca: ener). Jika n = 2., maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi n -ary mempunyai terapan penting di dalam basisdata.Misalkan A, A2, ..., A„ adalah himpunan. Relasi n-ary R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari A, x A2 x ... x A„ atau dengan notasi R c A, Y A2 x ... X A„. Himpunan A„ Az, ..., A„ disebut daerah asal relasi dan n disebut derajat.

Contoh 22.

Misalkan NIM={13598011, 13598014, 13598015, 13598019, 13598021, 135980251 Nama = {Amir, Santi, Irwan, Ahmad, Cecep, Hamdan}, Il4atKul = {Matematika Diskrit, Algoritma, Struktur Data, Arsitektur Komputer), Nilai = {A, B, C, D, E}

Relasi MHS terdiri dari 4-tupel (NIM, Nama, MatKul, Nilai): MHS c NIM x Nama x MatKul x Nilai Satu contoh relasi yang bernama MHS adalahMHS = {(13598011, Amir, Matematika Diskrit, A), (13598011, Amir, Arsitektur Komputer, B), (13598014, Santi, Arsitektur Komputer, D), (13598015, Irwan, Algoritma, C), (13598015, Irwan, Struktur Data C), (13598015, Irwan, Arsitektur Komputer, B), (13598019, Ahmad, Algoritma, E), (13598021, Cecep, Algoritma, A), (13598021, Cecep, Arsitektur Komputer, B), (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B), (13598025, Hamdan, Algoritma, A, B), (13598025, Hamdan, Struktur Data, C), (13598025, Hamdan, Ars. Komputer, B)
}.

Relasi MHS di atas iuaa daoat ditulis dalam bentuk Tabel:

NIM	Nama	MatKul	NilBi
13598011	Am'r	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Invan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Basisdata (database) adalah kumpulan label. Salah satu model basisdata adalah model basisdata relasional (relational database). Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi n-ary. Pada basisdata relasional, satu label menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada label disebut atribut. Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada. Setiap label pada basisdata diimplementasikan secara fisik sebagai sebuah file. Satu baris data pada label menyatakan sebuah record, dan setiap atribut menyatakan sebuah field. Secara fisik basisdata adalah kumpulan file, sedangkan file adalah kumpulan record, setiap record terdiri alas sejumlah field.Atribut khusus pada label yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi-disebut kunci (key). Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut query.

Contoh query:
tampilkan semua mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit"
"tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598015"
"tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri alas NIM dan mata kuliah yang diambil"

Query terhadap basisdata relasional d apat dinyatakan s ecara abstrak d engan operasi pada relasi n-ary. Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join.

7. **Seleksi**

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu.

Operator: σ

Contoh 23. Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematik Diskrit. Operasi seleksinya adalah

$$\sigma_{\text{Matkul=”Matematika Diskrit”}}\text{ (MHS)}$$

Hasil: (13598011, Amir, Matematika Diskrit, A) dan (13598025, Hamdan, Matematika Diskrit, B)

8. Proyeksi

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali.

Operator: π

Contoh 24.

Operasi proyeksi$\pi_{\text{Nama, MatKul, Nilai}}$ (MHS)menghasilkan Tabel 3.5.

Sedangkan operasi proyeksi$\pi_{\text{NIM, Nama}}$ (MHS)menghasilkan Tabel 3.6.

Tabel 2.4

Nama	MatKul	Nilai
Amir	Matematika Diskrit	A
Amir	Arsitektur Komputer	B
Santi	Algoritma	D
Irwan	Algoritma	C
Irwan	Struktur Data	C
Irwan	Arsitektur Komputer	B
Ahmad	Algoritma	E
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B
Hamdan	Matematika Diskrit	B
Hamdan	Algoritma	A
Hamdan	Struktur Data	C
Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Tabel 2.5

NIM	Nama
13598011	Amir
13598014	Santi
13598015	Irwan
13598019	Ahmad
13598021	Cecep
13598025	Hamdan

9. Join

Operasi *join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama.

Operator: τ

Contoh 25.

Misalkan relasi *MHS1* dinyatakan dengan Tabel 3.7 dan relasi *MHS2* dinyatakan dengan Tabel 3.8.

Operasi *join*$\tau_{NIM,\ Nama}$(MHS1, MHS2) menghasilkan Tabel 3.9.

Tabel 2.6

NIM	Nama	JK
13598001	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 2.7

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statisitik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 2.8

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

C. Fungsi

Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan f : A -~ B yang artinya f memetakan A ke B. A disebut daerah asal (domain) dari f dan B disebut daerah hasil (codomain) d ari f.Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi. Kita menuliskan f(a) = b jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B. Jika f(a) = b, maka b dinamakan bayangan (image) dari a dan a dinamakan pra-bayangan (ore-image) dari b. Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut jelajah (range) dari f.

Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin proper subset) dari B.

Fungsi adalah relasi yang khusus:

1. Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.
2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika (a, b)f dan (a, c) c f, maka b = c.

   Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

   a. Himpunan pasangan terurut. Seperti pada relasi.
   b. Formula pengisian nilai (assignment).

      Contoh: f(x) = 2x + 10, f(x) = x2, dan f(x) = l 1x.
   c. Kata-kata

      Contoh: "f adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu string binF e".

Contoh 26. Relasi f = {(1, u). (2. v), (3, w)} dan A = {1, 2,-3} ke B = {u, v, w) adalah fungsi dari A ke B. Di sini f(1) = u, f(2) = v, dan f(3) = w. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari fadalah {u, v, w), yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh 27. Relasi f = {(1, u), (2, u), (3, v)} dari A = (1, 2, 3} ke B = {u, v, w} adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua e semen A. Daerah asal fungsi a dalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah {u, v}.

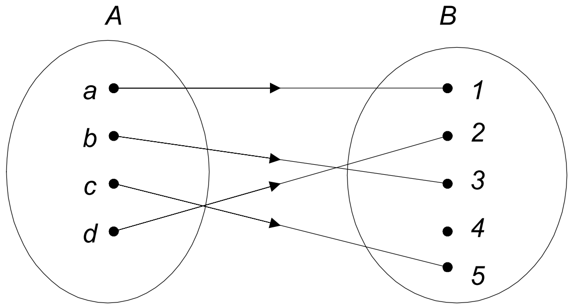
Contoh 28. Relasi f = {(1, u), (2, v), (3, w)} dari A = {1, 2, 3, 4} ke B = {u, v, w} bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B.

Contoh 29. Relasi f = {(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)} dari A = (1, 2, 3) ke B = {u, v, w} bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

Contoh 30. Misalkan f : Z ---> Z didefinisikan oleh f(x) = x2. Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan jelajah dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif

1. Fungsi Satu ke Satu

Fungsi f dikatakan satu-ke-satu (one-to-one) atau injektif (injective) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama.



Gambar 2.3

Contoh 31. Relasi f = {(1, w), (2, u), (3, v)} dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w, x) adalah fungsi satuke-satu, tetapi relasi f = {(1, u), (2, u), (3, v)} dari A = {1, 2, 3) ke B = {u, v, w} bukan fungsi satu-kesatu, karena f(1) = f(2) = u.

Contoh 32. Misalkan f : Z -> Z. Tentukan apakah f(x) = x2 + 1 dan f(x) = x - 1 merupakan fungsi satu-ke-satu?

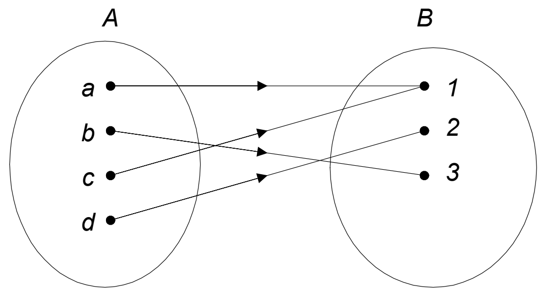
Penyelesaian:

(i) f(x) = x2 + 1 bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sarna tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya f(2) = f(-2) = 5 padahal -2 # 2.

(ii) f(x) = x - ?adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk a -,- b, a - 1 f b - 1. Misalnya untuk x = ? , f(2) = 1 dan untuk x = -2, f(-2) = -3.

2. Fungso Onto

Fungsi f dikatakan dipetakan pada (onto) atau surjektif (surjective) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.



Contoh 33. Relasi f = {(1, u), (2, u), (3, v)) dari A = {1, 2, 3) ke B = {u, v, w} bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f.

Relasi f = {(1, w), (2, u), (3, v)} dari A = {1, 2, 3) ke B = {u, v, wr} merupakan fungsi pada

semua anggota B merupakan jelajah dari f.

Contoh 34. Misalkan f : Z -> Z. Tentukan apakah f(x) = xz + 1 dan f(x) = x - 1 merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:

(i) f(x) = x2 + 1 bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f.

(ii) f(x) = x - 1 adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yangmemenuhi, yaitu y = x - 1 akan dipenuhi untuk x = y + 1

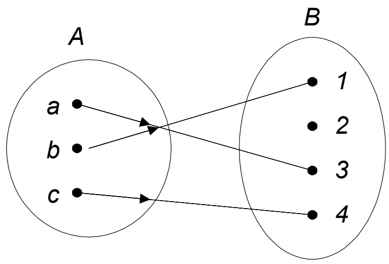
3. **Fungsi Koresponden satu-satu**

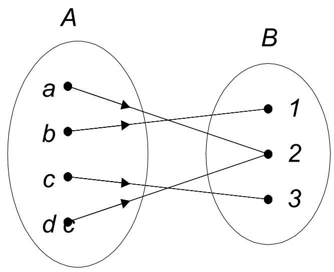
Fungsi f dikatakan berkoresponden satu-ke-satu atau bijeksi (bijection) jika ia fungsi satu-kesatu dan juga fungsi pada.

Contoh 35. Relasi f = {(1, u), (2, w), (3, v)} dari A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w} adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh 36. Fungsi .`(x) = x - 1 merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Fungsi satu-ke-satu, Fungsi pada,



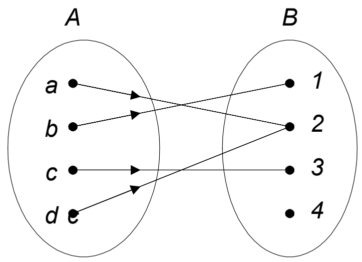


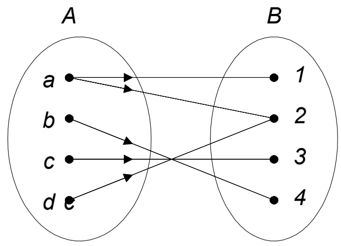
bukan pada

bukan satu-ke-satu

Buka fungsi satu-ke-satu

Bukan fungsi





maupun pada

Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan balikan (invers) dari f. Balikan fungsi dilambangkan dengan f. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka f "(b) = a jika f(a) = b. Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu Bering dinamakan juga fungsi yang invertible (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan not invertible (tidak dapat dibalikkan) jika is bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 37. Relasi f = {(1, u), (2, w), (3, v)} dari A = {1, 2, 3} ke t3 = {u, v, w} adalah fungsi yang berkoresponden s atu-ke-satu. Balikan f ungsi f adalah f ' _ {(u, 1), (w, 2), (v, 3)) J adi, f adalah fungsi invertible.

Contoh 38. Tentukan balikan fungsi f(x) = x - 1.

Penyelesaian:

Fungsi f(x) = x - 1 adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan furgsi tersebut ada. Misalkan f(x) = y, sehingga y = x - 1, maka x = y + 1. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah f 1 (Y)=Y+1.

4. Komposisi dari dua buah fungsi

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan f o g, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh (fo g)(a) = f(g(a))

Contoh 39. Diberikan fungsi g = {(1, u), (2, u), (3, v)} yang memetakan A = {1, 2, 3} ke B = {u, v, w}, dan fungsi f = {(u, y), (v, x), (w, z)} yang memetakan B = {u, v, w} ke C = {x, y, z}. Fungsi komposisi dari A ke C adalah f o g = {(1, y), (2, y), (3, x) }

Contoh 40. Diberikan fungsi f(x) = x - 1 dan g(x) = x2 + 1. Tentukan f o g dan g o f.

Penvelesaian:

(i) (f o g)(x) = f(g(x)) = f(x2 + 1) = x2 + 1 - 1 = xz.

(ii) (g 0 >7(x) = 9(f(x)) = g(x - 1) _ (x _1)2 + 1 =x2 -2x+2.

5. Beberapa Fungsi Khusus

a. Fungsi Floor dan Ceiling

Misalkan x adalah bilangan riii, berarti x berada di antara dua bilangan bulat.

Fungsi *floor* dari x:

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*

Fungsi *ceiling* dari *x*:

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*

Contoh 41.

Beberapa contoh nilai fungsi floor dan ceiling:

$\lfloor 3.8 \rfloor = 3$ $\lceil 3.2 \rceil = 4$

$\lfloor 0.2 \rfloor = 0$ $\lceil 0.4 \rceil = 1$

$\lfloor 4.2 \rfloor = 4$ $\lceil 4.9 \rceil = 5$

$\lfloor -0.1 \rfloor = -1$ $\lfloor -0.1 \rfloor = 0$

$\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ $\lceil -3.5 \rceil = -3$

Contoh 41. Di dalam komputer, data dikodekan dalam untaian byte, satu byte terdiri atas 8 bit. Jika panjang data 125 bit, maka jumlah byte yang diperlukan untuk merepresentasikan data adalah r125/8 ' = 16 bale. Perhatikaniah bahwa 16 X 8 = 128 bit, sehingga untuk byte yang terakhir perlu ditambahkan 3 bit ekstra agar satu byte tetap 8 bit (bit ekstra yang ditambahkan untuk menggena:; 8 bit disebut padding bits).

b. Fungsi Modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat clan m adalah bilanaan bulat positif. a mod m pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan, a mod m = r sedemikian sehingga a = mq + r, dengan 0 < r < m.

Contoh 42. Beberapa contoh fungsi modulo

25 mod 7 = 4

15mod4=0

c. Fungsi Faktorial

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

d. Fungsi Eksponensial

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

e. Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$

f. Fungsi Rekursif

Fungsi f dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri. Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(1) Basis

Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif

(2) Rekurens

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsimengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

Contoh definisi rekursif dari faktorial:

(a) basis:

$n! = 1$, jika $n = 0$

(b) rekurens:

$n! = n\times (n -1)!$, jika $n> 0$

5! dihitung dengan langkah berikut:

(1) $5! = 5 \times 4!$ (rekurens)

(2) $4! = 4 \times 3!$

(3) $3! = 3 \times 2!$

(4) $2! = 2 \times 1!$

(5) $1! = 1 \times 0!$

(6) $0! = 1$

(6’) $0! = 1$

(5’) $1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1$

(4’) $2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2$

(3’) $3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6$

(2’) $4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24$

(1’) $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

Jadi, $5! = 120$

2.3. Dinamika Belajar

Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

1. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
2. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
3. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

2.4. Kesimpulan / Ringkasan

2.5. Latihan dan Evaluasi

1. Tuliskan pasangan terurut pada relasi R dari .4 = {0,1,2,3,4} ke B = { 0, 1, 2. 3) yang dalam hal ini (a,b) E R jika dan hanya jika:

   a. a=b　　　　c. a > b

   b. a + b = 4　　d. FPB(a,b) = 1
2. Tuliskan semua pasangan terurut pada relasi R = {(a,b)l a faktor dari b } pada himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6)
3. Nyatakan relasi pada soal 2) dalam bentuk tabel, matriks dan graf berarah
4. Tentukaan apakah relasi (a,b) e R bersifat refleksif, simetris , atau transitif, jika hanya jika

   a. a lebih tinggi dari b

   b. a dan b lahir pada hari yang sama

c. a dan b mempunyai namo depan yang sama d. a don b mempunyai kakek yang sama

5. Diberikan relasi R ={(1,2), (1,3),(2,3), (2,4), (3,i)} dan S ={(2,1), (3,1), (3,2), (4,2), (4,3)}. Tentukan S o R dam R o S
6. Didefinisikan S, U dan D adalah fungsi bilangan bulat, dengan S(n) = n2, U(n)= n + 1, dan D(n) = n -1. Tentukan
   a. UoSoD
   b. SoUoD
   c. DoSoU
7. Nyatakan setiap relasi pada {1, 2, 3} berikut dengan sebuah matriks (setiap eler,,en diurutkan menaik)
   a. {(1, 1), (1, 2), (1, 3) }
   b. {(1 ,2),(2,1), (2, 2), 2), (2, 3), (3, 3)}
   c. {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2,3)}
   d. {(1, 3), (3, 1))
8. Tentukan mana fungsi yang merupakan fungsi satu ke satu dari Z ke Z berikut ini
   a. f(n)=n+2
   b. f(n) = n'
   c. f(n) = Fn/2
9. Tentukan apakah fungsi berikut satu ke satu
   a. Setiap orang di bumi memetakan jumlah usianya
   b. Setiap negara di dunia memetakan letak garis lintang dan garis bujuribukotanya
   c. Setiap buku yang ditulis oleh pengarangnya memetakan nama pengarangnya
   d. Setiap negara di dunia yang mempunyai seorang presiden memetakan nama presidennya
10. Jika g = {(1, h,), (2, c), (3, a), (4, b)} adalah fungsi dari A = {1, 2, 3} ke B = { a, b, c, d}dan f = {(a, x), (b, y), (c, w), (d, z)) adalah fungsi dari B ke C = { w, x, y, z}, maka
    a. Tuliskan f o g sebagai pasangan terurut

b. Apakah merupakan fungsi injektif, surjektif atau bijektif ? 14. Nyatakan a x b sebagai fungsi rekursif

BAB 3. TEORI BILANGAN BULAT

3.1. Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa mampu memahami dam menerapkan materi terkait Teori Bilangan (Basic Moduar Arithmetic) dan Aplikasi Basic Modular Aritmetic (ISBN, Fungsi Hash, Criptografi)

B. Tujuan Instruksional Khusus

1. Memahami konsep teori bilangan
2. Memahami bilangan bulat dan sifatnya
3. Memahami teorema euclidean
4. Memahami pembagi bersama terbesar
5. Memahami aritmatika modulo
6. Memahami bilangan prima
7. Menyebutkan aplikasi basic modular arithmetic
8. Memahami ISBN
9. Memahami Fungsi Hash
10. Memahami Criptografi

3.2. Paparan Materi (Judul setiap sub bab dari pokok bahasan)

3.2.1. Bilangan Bulat

Bilangan Bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 4, 30, 2006, -34, 0, sedangkan bilangan yang mempunyai titik desimal disebut bilangan rill, seperti 8.0, 34.25, 0.02.

A. Sifat Pembagi pada Bilangan Bulat

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan *s* yarat $a \neq 0$. Kita menyatakan bahwa *a* habis membagi *b* (*a* divides *b*) jika terdapat bilangan bulat *c* sedemikian sehingga b = ac. Disebut juga *a* adalah faktor dari *b* atau *b* adalah kelipatan dari *a*. Notasinya :$a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbf{Z}$ dan $a \neq 0$. ($\mathbf{Z}$ = himpunan bilangan bulat).

Contoh 1: Tentukan apakah 5 | 20 atau apakah 5 | 23 ?

Jawab : Karena 20 ÷ 5 = 4 (bilangan bulat) maka 5 | 20, sedangkan 23 ÷ 5 = 4.6 (bukan biiangan bulat).

Teorema 1 (Teorema Euclidean)

Misalkan *m* dan *n* adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat n > 0. Jika *m* dibagi dengan *n* maka terdapat dua buah bilangan bulat unik sebagai hasil bagi *(quotient)q* dan sisa (remainder) *r*, sedemikian sehingga $m = nq + r$ dengan 0 < r < n.

Contoh 2.

(i) 1987 dibagi dengan 97 memberikan basil bagi 20 dan sisa 47:1987 = 97–20 + 47

(ii) -22 dibagi dengan 3 memberikan hasil bagi -8 dan sisa 2 : -22 = 3(-8)+2 tetapi -22 = 3(-7) - 1 salah karena r = -1 tidak memenuhi syarat 0 s r < n.

3.2.2. Faktor Pembagi Terbesar (FPB)

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat tidak nol. Faktor pembagi terbesar (FPB *greatest common divisor* atau *gcd*) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar *d* sedemikian sehingga $d \mid a$ dan $d \mid b$. Dalam hal ini kita nyatakan bahwa FPB $(a, b) = d$.

Contoh 3.

Faktor pembagi 45 adalah 1, 3, 5, 9, 15, 45 dan

Faktor pembagi 36 adalah 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36;

Sehingga Faktor pembagi bersama dari 45 dan 36 adalah 1, 3, 9, sedangkan FPB(45, 36) = 9.

Teorema 2. Misalkan *m* dan *n* adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat n > 0 sedemikian sehingga

$m = nq + r \qquad 0 \leq n$ maka

FPB(m, n) = FPB(n, r).

Contoh 3:

Tentukan FPB dari 60 dan 48?

Jawab :

$m = 60$, $n = 18$,sedangkan 60 = 18 .3 + 12 maka FPB(60,18) = FPB(18,12) = 6.

Cara lain untuk menentukan FPB menggunakan faktorisasi prima pada bilangan bulat. Misal faktor prima dari bilangan bulat *a* dan *b* sebagai berikut :

$$a = p_1^{a1}\ p_2^{a2}\ \ldots\ P_n^{an},\ b = P_1^{b1}\ P_2^{b2} \ldots P_n^{bn}$$

maka FPB (a,b) = $p_1^{\min(a1,b1)}\ p_2^{\min(an,bn)}$

Contoh 4:

Tentukan FPB dari 120 dan 500?.

Jawab :

$500 = 2^3 . 3 . 5$ dan $120 = 2^2 . 5^3$,

maka **FPB(500,120) = $2^{min(3.3)}$. $3^{min(1,0)}$. $5^{min(1,3)}$ =2^2 . 3^o . 5^1 – 20**

Faktorisasi prima juga dapat digunakan untuk menentukan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK atau *Least Common Multipile* (LCM).

KPK bilangan bulat positif a dan b adalah bilangan bulat positif ferkecil yang dapat dibagi a dan b tersebut. Dari faktorisasi *a* dan *b* sebelumnya, maka

KPK(a,b) = $p_1^{max(a1,bt1)}$ $p_2^{max(a2,b2)}$ ...... $p_n^{max(an,bn)}$

Contoh 5:

Tentukan KPK dari 120 dan 500 ?

Jawab :

$500 = 2^3 . 3 . 5$ dan $120 = 2^2 . 5^3$, maka KPK (500.120) = $2^{max(3,2)} . 3^{max(1,0)} . 5^{max(1,3)} = 2^3$ $3^1 . 5^3 = 3000$

Jika *a* dan *b* bilangan bulat positif maka a . b = FPB(a,b) . KPK(a,b)

Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif m dan n (m ? n). Algoritma Euclidean berikut mencari FPB dari m dan n.

Algoritma Euclidean

1. Jika n = 0 maka m adalah FPB(m, n); stop
   tetapi jika n ≠ 0, lanjutkan ke langkah 2
2. Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya
3. Ganti nilai *m* dengan nilai *n* dan nilai n dengan nilai *r*, lalu ulang kembali ke langkah.

```
procedure Euclidean (input m, n integer, output FPB : integer)
(Mencari FPB (m,n) dengan syarat m dan n bilangan tak-negatif
dan m ≥ n
Masukan : m dan n, m ≥ n dan m, n ≥ 0 Keluaran : FPB (m,n)

Deklarasi
r : integer

Algoritma:
while n ≠ 0 do
r ← m mod n
m ← n
n ← r
endwhile
{ n = 0, maka FPB (m,n)= m
FPB← m
```

Contoh 4. m = 80, n = 12 dan d,penuhi syarat m ≥n

$$80 = 6 . 12 + 8$$

$$12 = 1 . 8 + 4$$

$$8 = 2 . 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka FPB(80,12) = 4.

FPB dua buah bilangan bulat a dan b dapat dinyatakan sebagai kombinasi lanjar *(linear combination)* a dan b dengan dengan koefisien-koefisennya.

Teorema 3. Misalkan *a* dan *b* adalah dua buah bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga FPB *(a, b)* = *ma* + *nb*.
Misalnya FPB(80, 12) = 4 , dan 4 = (-1) - 80 + 7 - 12.

Contoh 5.

Nyatakan FPB(60, 18) = 6 sebagai kombinasi lanjar dari 60 dan 18 ?.

Relatif PrimaDua buah bilangan bulat *a* dan *b* dikatakan relatif prima jika FPB(a, b) = 1.

Contoh 6.

20 dan 3 relatif prima sebab FPB(20, 3) = 1. Begitu juga 7 dan 11 relatif prima karena FPB(7, 11) = 1. Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima sebab FPB(20, 5) = 5 $\neq$ 1.

Jika *a* dan *b* relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $ma + nb = 1$

Contoh 7.

Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena FPB(20, 3) =1, atau dapat ditulis

2 . 20 + (-13) . 3 = 1

dengan $m = 2$ dan $n = -13$. Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena FPB(20, 5) = 5$\neq$ 1 sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam m. 20 + n.5 = 1

3.2.3. Aritmetika Modulo

Misalkan *a* adalah bilangan bulat dan *m* adalah bilangan bulat > 0. Operasi *a* mod *m* (dibaca *"a modulo m"*) memberikan sisa jika a dibagi dengan *m*.

Notasi :a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.

Bilangan m disebut modulus atau modulo, dan basil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan {0, 1, 2, ..., m - 1} (mengapa?).

Contoh 8. Beberapa basil operasi dengan operator modulo:

(i) 23 mod 5 = 3 (23=5.4+ 3)

(ii) 27 mod 3 = 0 (27 = 3 9 + 0)

(iii) 6 mod 8 = 6 (6=8- 0+6)

(iv) 0 mod 12 = 0 (0=120+0)

(v) - 41 mod 9 = 4 (-41 = 9 (-5) + 4)

(vi) - 39 mod 13 = 0 (-39 = 13(-3) + 0)

Penjelasan untuk (v) : Karena *a* negatif, bagi |*a*| dengan *m* mendapatkan sisa r'. Maka *a* mod *m* = m – r' bila r' $\neq$ 0. Jadi |- 41| mod 9 = 5, sehingga

- **Kongruen**

Misalnya 38 mod 5 = 3 dan 13 mod 5 = 3, maka kita katakan 38 = - 13 (mod 5) yang dibaca 38 kongruen dengan 13 dalam modulo 5.

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan > 0, maka a = b (mod m)
jika m habis membagi $a - b$.
Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m, maka ditulis a ≡ / b (mod m).

Contoh 9.

17 ≡ 2 (mod 3) (3 habis membagi 17 – 2 = 15)
-7 ≡ 15 (mod 11)(11 habis membagi – 7 – 15 = -22)
12 ≡ / 2 (mod 7) (7 tidak habis membagi 12 – 2 = 10)
-7 ≡ / 15 (mod 3)(3 tidak habis membagi – 7 – 15 = –22)

Kekongruenan a ≡ b (mod m) dapat pula dituliskan dalam hubungan $a = b + km$ yang dalam hal ini k adalah bilangan bulat.

Contoh 10.

17 ≡ 2 (mod 3) dapat ditulis sebagai 17 = 2 + 5 – 3
-7 ≡ 15 (mod 11) dapat ditulis sebagai -7 = 15 + (-2)11
Berdasarkan definisi aritmetika modulo, kita dapat menuliskan a mod m - r sebagai

$$a = - r \text{ (mod } m\text{)}$$

Contoh 11.

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo berikut:

(i)	23 mod 5	= 3	dapat ditulis sebagai 23 - 3 (mod 5)
(ii)	27 mod 3	= 0	dapat ditulis sebagai 27 = 0 (mod 3)
(iii)	6 mod 8	= 6	dapat ditulis sebagai 6 =- 6 (mod 8)
(iv)	0 mod 12	= 0	dapat ditulis sebagai 0 = 0 (mod 12)
(v)	-41 mod 9	= 4	dapat ditulis sebagai -41 = 4 (mod 9)

(vi) - 39 mod 13 = 0 dapat ditulis sebagai - 39 = 0 (mod 13)

Teorema 4. Misalkan *m* adalah bilangan bulat positif.

1. Jika $a \equiv - b \pmod{m}$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka

(i) $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

(ii) $ac \equiv bc \pmod{m}$

(iii) $a^p \equiv b^p \pmod{m}$ untuk suatu bilangan bulat talk negatif p.

2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

(i) $(a + c) \equiv\text{-}\ (b\ ;\text{-}\ d) \pmod{m}$

(ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$

Bukti (hanya untuk 1 (ii) dan 2(i) saja):

1(ii) $a \equiv b\ (mod\ m)$ berarti:

$\Leftrightarrow$ a = b + km

$\Leftrightarrow$ a – b = km

$\Leftrightarrow$ (a – b) c = ckm

$\Leftrightarrow$ ac = bc + km

$\Leftrightarrow$ ac ≡ bc (mod m)

2 (i) $a \equiv b \pmod{m}$ p $\Leftrightarrow$ $a = b + k_1m$

c-d(mod m) $\Leftrightarrow$ c = d + k_2m +

$\Leftrightarrow$ (a + c) = (b+d)+(k_1+k_2)m

$\Leftrightarrow$ (a + c) = (h+d)+km (k= k_1+k_2)

$\Leftrightarrow$ (a + c) = (b + d) (mud m)

Contoh 12.

Misalkan 17 ≡ 2 (mod 3) dan 10 ≡ 4 (mod 3), maka menurut Teorema 2,

17 + 5	= 2 + 5 (mod 3)	$\Leftrightarrow$	22	=	7 (mod 3)
17 . 5	= 5 .2 (mod 3)	$\Leftrightarrow$	85	=	10 (mod 3)
17 + 10	= 2 + 4 (mod 3)	$\Leftrightarrow$	27	=	6 (mod 3)
17 . 10	= 2 . 4 (mod 3)	$\Leftrightarrow$	170	=	8 (mod 3)

Perhatikanlah bahwa Teorema 4 tidak memasukkan operasi pembagian pada aritmetika modulo, karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi.

Misalnya :

(i) $10 \equiv 4 \pmod 3$ dapat dibagi dengan 2 karena $10/2 = 5$ dan $4/2 = 2$, dan $5 \equiv 2 \pmod 3$

(ii) $14 \equiv 8 \pmod 6$ tidak dapat dibagi dengan 2, karena $14/2 = 7$ dan $8/2 = 4$, tetapi $7 \not\equiv 4 \pmod 6$

3.2.4. Balikan Modulo (modulo rovers)

Jika a dan m relatif prima dan $m> 1$, maka kita dapat menemukan balikan (rovers) dari a modulo m. Balikan dari a modulo m adalah bilangan bulat $\bar{\alpha}$ sedemikian sehingga

$$a\bar{\alpha} \equiv 1 \pmod m$$

Bukti : Dari definisi relatif prima diketahui bahwa FPB(a, m) = 1, dan menurut persamaan (2) terdapat bilangan bulat p dan q sedemikian sehingga

$$pa + qm = 1$$

yang mengimplikasikan bahwa

$$pa + qm - 1 \ (mod\ m)$$

Karena $qm = 0 \pmod m$, maka

$$pa \equiv 1 \ (mod\ m)$$

Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa p adalah balikan dari a modulo m.Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari a modulo m, kita harus membuat kombinasi lanjar dari a dan m sama dengan 1. Koefisien a dari kombinasi lanjar tersebut merupakan balikan dari a modulo m.

Contoh 13. Tentukan balikan dari 4 (mod 9), 17 (mod 7), dan 18 (mod 10).

Jawab :

(a) Karena FPB(4,9) = 1, maka balikan dari 4 (mod 9) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa $9=2 . 4 + 1$

Susun persamaan di atas menjadi

$-2 . 4 + 1 . 9 = 1$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh -2 adalah balikan dari 4 modulo 9.

Periksalah bahwa :

$-2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 9$ (9 habis membagi $-2 \cdot 4 - 1 = -9$)

(b) Karena FPB(17,7) = 1, maka balikan dari 17 (mod 7) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh rangkaian pembagian berikut:

$17 = 2 \cdot 7 + 3$ (i)

$7 = 2 \cdot 3 + 1$ (ii)

$3 = 3 - 1 + 0$ (iii) (yang berarti : FPB(17,7) = 1))

Susun (ii) menjadi:

$1 = 7 - 2 \cdot 3$ (iv)

Susun (i) menjadi :

$3 = 17 - 2 \cdot 7$ (v)

Sulihkan (v) ke dalam (iv) :

$1 = 7 - 2 \cdot (17 - 2 \cdot 7) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$

atau

$-2 \cdot 17 + 5 \cdot 7 = 1$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh -2 adalah balikan dari 17 modulo 7.

$-2 \cdot 17 \equiv 1 \pmod 7$ (7 habis membagi -2 17 - 1 = -35)

(c) Karena FPB(18, 10) = 2 ≠ 1, maka balikan dari 18 (mod 10) tidak ada.

3.2.5. Kekongruenan Lanjar

Kekongruenan lanjar adalah kongruen yang berbentuk

$ax \equiv b \pmod m$

dengan *m* adalah bilangan bulat positif, *a* dan *b* sembarang bilangan bulat, dan *x* adalah peubah bilangan bulat.

Nilai-nilai *x* dicari sebagai berikut :

$ax = b + km$

yang dapat disusun menjadi :

$$x = \frac{b + km}{a}$$

dengan *k* adalah sembarang bilangan bulat. Cobakan untuk k = 0, 1, 2, ... dan k = -1, -2, ... yang menghasilkan *x* sebagai bilangan bulat.

Contoh 14. Tentukan solusi : 4x ≡ 3 (mod 9) dan 2x ≡ 3 (mod 4)

Jawab:

(i) 4x – 3 (mod 9)

$$x = \frac{3 + k\,.\,9}{4}$$

k = 0 → x = (3 + 0 . 9)/4 = 3/4 (bukan solusi)

k = 1 → x = (3 + 1 . 9)/4 = 3

k = 2 → x = (3 + 2 9)/4 = 21/4 (bukan solusi)

k = 3, k = 4 tidak menghasilkan solusi

k = 5 → x = (3 + 59) 14 = 12 ...

k = -1 → x = (3 – 1 . 9)/4 = - 6/4 (bukan solusi)

k = -2 → x = (3 – 2 . 9)/4 = -15/4 (bukan solusi)

k = -3 → x = (3 – 3 . 9)/4 = - 6

k = -6 → x = (3 – 6 . 9)/4 = -15 ...

Nilai-nilai x yang memenuhi : 3, 12, ... dan -6, -15, ...

(ii) 2x ≡ 3 (mod 4)

$$x = \frac{3 + k\,.\,4}{2}$$

Karena 4k genap dan 3 ganjil maka penjumlahannya menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan 2 tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai x yang memenuhi 2x - 3 (mod 5).

3.2.6. Chinese Remainder Problem

Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.

Pertanyaan Sun Tse dapat dirumuskan kedalam sistem kongruen lanjar:

$x \equiv 3 \pmod 5$

$x \equiv 5 \pmod 7$

$x \equiv 7 \pmod{11}$

Teorema 5. (Chinese Remainder Theorem) Misalkan m_1, m_2, ..., m_n adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga FPB(m_i, m_j) = 1 untuk $i \neq$ j. Maka sistem kongruen lanjar.

$$x \equiv ak \pmod{M_k}$$

mempunyai sebuah solusi unik modulo m = $m_1 - m_2 \ldots . m_n$

Contoh 15.

Tentukan solusi dari pertanyaan Sun Tse di atas.

Jawab:

Menurut persamaan (5.6), kongruen pertama, $x = 3 \pmod 5$, memberikan $x = 3 + 5k$, untuk beberapa nilai k. Sulihkan ini ke dalam kongruen kedua menjadi $3 + 5k, = 5 \pmod 7$, dari sini kita peroleh $k, = 6 \pmod 7$, atau $k, = 6 + 7k_2$ untuk beberapa nilai k_2. Jadi kita mendapatkan $x = 3 + 5k, = 3 + 5(6 + 7k_2) = 33 + 35k_2$ yang mana memenuhi dua kongruen pertama. Jika x memenuhi kongruen yang ketiga, kita harus mempunyai $33 + 35k_2 \equiv 7 \pmod{11}$, yang mengakibatkan $k_2 = 9 \pmod{11}$ atau $k_2 = 9 + 11\ k_3$. Sulihkan k_2 ini ke dalam kongruen yang ketiga menghasilkan $x = 33 + 35(9 + 11\ k_3) - 348 + 385k_3 \pmod{11}$. Dengan demikian, $x \equiv 348 \pmod{385}$ yang memenuhi ketiga konruen tersebut. Dengan kata lain, 348 adalah solusi unik modulo 385. Catatlah bahwa 385 = 5 .7 . 11.

Solusi unik ini mudah dibuktikan sebagai berikut. Solusi tersebut modulo m = m_1 . $m_2 - m_3$ = 5 .7 . 11 = 5 – 77 = 11 . 35. Karena 77 3 ≡ 1 (mod 5), 55 – 6 = - 1 (mod 7), dan 35 .6 ≡ 1 (mod 11), solusi unik dari sistem kongruen tersebut adalah

$$x \equiv 3 \cdot 77\ 3 + 5 \cdot 55\ 6 + 7 \cdot 35 \cdot\ 6 \pmod{385}$$
$$\equiv 3813 \pmod{385} - 348 \pmod{385}$$

3.2.7. Bilangan Prima

Bilangan bulat positif p (p > 1) disebut bilangan prima jika pembaginya hanya 1 dan *p*.

Contoh : 23 adalah bilangan prima karena ia hanya habis dibagi oleh 1 dan 23.

Karena bilangan prima harus lebih besar dari 1, maka barisan bilangan prima dimulai dari 2, yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Seluruh bilangan prima adalah bilangan ganjil, kecuali 2 yang merupakan bilangan genap.

Bilangan selain prima disebut bilangan komposit (composite). Misalnya 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, dan 10, selain 1 dan 20 sendiri. **Teorema 6.*(The Fundamental Theorem of Arithmetic)***. Setiap bilangan bulat positif besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Contoh 16.

9	=	3 x 3	(2 buah faktor prima)
100	=	2 x 2 x 5 x 5	(4 buah faktor prima)
13	=	13 (atau 1 x 13)	(1 buah faktor prima)

Untuk menguji apakah n merupakan bilangan prima atau komposit, kita cukup membagi *n* dengan sejumlah bilangan prima, mulai dari 2, 3, ... , bilangan prima $\leq \sqrt{n}$. Jika n habis dibagi dengan salah satu dari bilangan prima tersebut, maka *n* adalah bilangan komposit, tetapi jika *n* tidak habis dibagi oleh semua bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan prima.

Contoh 17.

Tunjukkan apakah (i) 171 dan (ii) 199 merupakan bilangan prima atau komposit.

Penyelesaian :

(i) $\sqrt{171}$ = 13.077. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{171}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.

(ii) $\sqrt{199}$ = 14.107. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{199}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 199 tidak habis dibagi 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

Terdapat metode lain yang dapat digunakan untuk menguji keprimaan suatu bilangan bulat, yang cerkenal dengan **Teorema Fermat**. Fermat (dibaca "Fair-ma") adalah seorang matematikawan Perancis pada tahun 1640.

Teorema 6(Teorema-Fermat) : Jika *p* adalah bilangan prima dan *a* adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan *p*, yaitu FPB(*a, p)* = 1, maka

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Contoh 18. Ujilah apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan ?

Jawab :

Di sini kita mengambil nilai a = 2 karena FPB(17, 2) = 1 dan FPB(21, 2) = 1.

Untuk 17,2^{17-1} = 65536 = 1 (mod 17) karena 17 habis membagi 65536 – 1 = 65535 (65535 =17 = 3855).

Untuk 21,2^{21-1} = 1048576 ≡\ 1 (mod 21) karena 21 tidak habis membagi 1048576 – 1 = 1048576

Kelemahan Teorema Fermat:

> Terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Bilangan bulat seperti itu disebut bilangan prima semu *(pseudoprimes).*

Misalnya komposit 341 (yaitu 341 = 11 . 31) adalah bilangan prima semu karena menurut teorema Fermat,

2^{340} – 1 (mod 341)

Untunglah bilangan prima semu refatif jarang terdapat.

Contoh 19. Periksalah bahwa (i) 3^{16} = 1 (mod 17) can (ii) 18^{6} - 1 (mod 49).

Jawab:

(i) Dengan mengetahui bahwa kongruen 33 ≡ 10 (mod 17), kuadratkan kongruen tersebut menghasilkan

$3^6 \equiv 100 \equiv -2 \pmod{17}$

Kuadratkan lagi untuk menghasilkan :

$3^{12} \equiv 4 \pmod{17}$

Dengan demikian, $3^{16} \equiv 3^{12} – 3^3 . 3 \equiv 4 . 10.3 \equiv 120 \equiv 1 \pmod{17}$

(ii) Caranya sama seperti penyelesaian (i) di atas:

$18^2 – 324 \equiv 30 \pmod{49}$

$18^4 \equiv 900 \equiv 18 \pmod{49}$

$18^6 \equiv 18^4 . 18^2 \equiv 18 . 30 = 540 = 1 \pmod{49}$

3.2.8. Kriptografi

Kriptografi : ilmu sekaligus seni untuk menjaga kerahasiaan pesan (data atau informasi) dengan cara menyamarkannya *(to crypt* artinya menyamar) menjadi bentuk yang tidak dapat dimengerti. Tujuan penyandian adalah agar isi pesan tidak dapat dimengerti oleh orang yang tidak berhak.

Kehidupan saat ini dikelilingi oleh kriptografi, mulai:

- ATM tempat mengambil uang,
- Telepon genggam (HP),
- Komputer di lab/kantor,
- Internet,
- Gedung-gedung bisnis,
- Sampai ke pangkalan militer

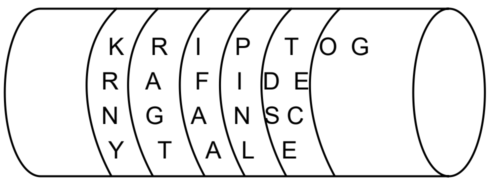
3.2.8.1. Sejarah Kriptografi

Kriptografi sudah lama digunakan oleh tentara Sparta di Yunani pada permulaan tahun 400 SM. *Scytale* : Pita panjang dari dun papyrus + sebatang silinder

Pesan ditulis horizontal (basis per basis).

Bila pita dilepaskan, maka huruf-huruf di dalamnya telah tersusun membentuk pesan rahasia.

Untuk membaca pesan, penerima melilitkan kembali silinder yang diameternvu soma dengan diameter silinder pengirim.



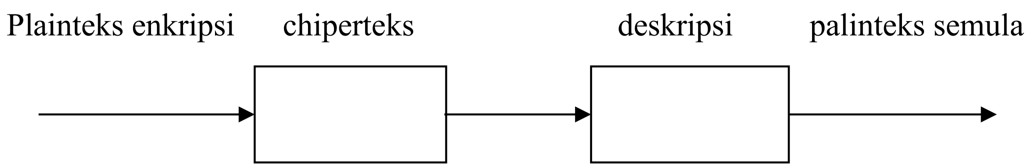
Beberapa terminologi dasar dalam kriptografi:

a. **Plaintext** *(plaintext* atau *cleartext*, artinya teks jelas yang dapat dimengerti): pesan yang dirahasiakan.

b. **Chiperteks** (*chipertext* atau *cryptogram*, artinya teks tersandi): pesan hasil penyandian.

c. **Enkripsi** (*encryption* atau *enchipering*): proses penyandian dari *plainteks* ke *chiperteks.*

d. **Dekripsi** (*decryption* atau *dechipering*): proses pembalikan dari chiperteks ke plainteks.



Contoh :

plainteks : uang disimpan di batik buku X

chiperteks : j&kloP(d$gkhtpuSn%6^klp..t@8^

e. **Algoritma Kriptografi** (atau chipper):
   - Aturan untuk *enchipering* dan *dechipering.*
   - Fungsi matematika yang digunakan untuk enkripsi dan dekripsi.

f. **Kriptografer** : orang menggunakan algoritma kriptografi untuk merahasiakan pesan dan mendekripsikannya kembali

g. **Kriptanalisis** (*cryptanalysis)* : ilmu dan seni untuk memecahkan *chiperteks*, berupa proses untuk memperoleh *plainteks* dari *chiperteks* tanpa mengetahui kunci yang diberikan. Pelakunya disebut **kriptanalis**

h. **Kriptologi** (*cryptology*) : studi mengenai kriptografi don kriptanalisis

Aplikasi kriptografi:

a. Pengiriman data melalui saluran komunikasi

b. Penyimpanan data di dalam disk storage.

Data ditransmisikan dalam bentuk chiperteks. Di tempat penerima *chiperteks* dikembalikan lagi menjadi plainteks.

Data di dalam media penyimpanan komputer (seperti hard •disk) disimpan dalam bentuk chiperteks. Untuk membacanya, hanya orang yang berhak yang dapat mengembalikan chiperteks menjadi plainteks.

3.2.8.2. Notasi Matematis

Misalkan:

C = chiperteks

P = plainteks dilambangkan

Fungsi enkripsi E memetakan P ke C, $E(P) = C$ sedangkan fungsi dekripsi D memetakan C ke P, $D(C) = P$

Karena proses enkripsi kemudian dekripsi mengembalikan pesan ke pesan asal, maka kesamaan berikut harus benar,

$$D(E(P)) = P$$

Pada sistem kriptografi modern, kekuatan kriptografinya terletak pada kunci, yang berupa deretan karakter atau bilangan bulat, dijaga kerahasiaannya.

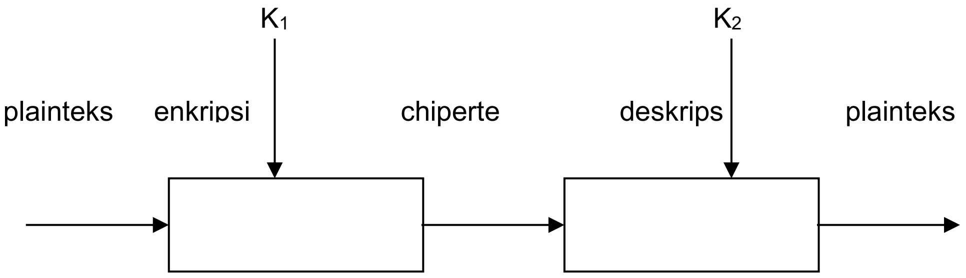
Dengan menggunakan kunci K, maka fungsi enkripsi dan dekripsi menjadi

$$E_{K1}(P) = C$$

$$D_{K2}(C) = P$$

dan kedua fungsi ini memenuhi

$$D_{K2}(E_{K1}(P)) = P$$



Jika $K_1 = K_2$, maka algoritma kriptografinya disebut **algoritma simetri, konvensional, secret key, atau one-key .**

Contoh: DES *(Data Encyption Standard).*

Jika $K1 \neq K2$, maka sistem kriptogafinya disebut **algoritma nirsimetri** atau **kunci publik**

Contoh: RSA *(Rivest-Shamir-Adleman*

3.2.8.3. Caesar Chiper

Ini adalah algoritma kriptografi yang mula-mula digunakan oleh kaisar Romawi, Julius Caesa(sehingga dinamakan juga caesar chiper), untuk menyandikan pesan yang ia kirim kepada para gubernurnya.

Caranya adalah dengan mengganti (menyulih atau mensubstitusi) setiap karakter dengan karakter lain dalam susunan abjad (alfabet).

Misalnya, tiap huruf disubstitusi dengan huruf ketiga berikutnya dari susunan abjad. Dalam hal ini kuncinya adalah jumlah pergeseran huruf (yaitu $k = 3$).

Tabel substitusi:

p_i : A B C D E F G H I J K L M O P Q R S T U V W X Y Z

p_i :**D E F G H I J K L M O P Q R S TU V W X Y Z A B C**

Contoh 20.

Pesan AWASI ASTERIX DAN TEMANNYA OBELIX

disamarkan (enskripsi) menjadi **DZDVL DVWHULA GDQ WHPDQQBA REHOLA**

Penerima pesan men-dekripsi *chiperteks* dengan menggunakan tabel substitusi, sehingga *chiperteks*

DZDVL DVWHULA GDQ WHPDQQBA REHOLA

dapat dikembalikan menjadi plainteks semula:

AWASI ASTERIX DAN TEMANNYA OBELIX

Dengan mengkodekan setiap huruf abjad dengan integer sebagai berikut: $A = 0$, $B = 1$, ..., Z = 25, maka secara matematis *caesar chiper* menyandikan plainteks p; menjadi c; dengan aturan:

$c_i = E(p_i) = (p_i + 3\ ) \bmod 26$ (1)

dan dekripsi chiperteks c_i menjadi p_i dengan aturan:

$p_i = D(c_i) = (c_i - 3) \bmod 26$ (2)

3.2.8.4. Algoritma RSA

a. Cara penyelesaian algoritma RSA

1. Pilih dua buah bilangan prima sembarang, sebut a dan b. Jaga kerahasiaan a dan b ini.
2. Hitung $n = a \times b$. Besaran n tidak dirahasiakan.
3. Hitung $m = (a - 1) \times (b - 1)$. Sekali m telah dihitung, a dan b dapat dihapus untuk mencegah diketahuinya oleh pihak lain.
4. Pilih sebuah bilangan bulat untuk kunci publik, sebut namanya e, yang relatif prima terhadap m.
5. Bangkitkan kunci dekripsi, d, dengan kekongruenan $ed \equiv 1 \pmod{m}$. Lakukan enkripsi terhadap isi pesan dengan persamaan $c_i = p_i^e \bmod n$,

yang dalam hal ini *p*; adalah blok plainteks, *c*, adalah *chiperteks* yang diperoleh, dan e adalah kunci enkripsi (kunci publik). Harus dipenuhi persyaratan bahwa nilai *p*; harus terletak dalam himpunan nilai 0, 1, 2, ... n - 1 untuk menjamin hasil perhitungan tidak berada di luar himpunan.

6. Proses dekripsi dilakukan dengan menggunakan persamaan $p_i = p_i^d\ d$ mod *n*, yang dalam hal ini *d* adalah kunci dekripsi.

Contoh 21. Misalkan *a* = 47 dan *b* = 71 (keduanya prima), maka dapat dihitung n = *a* x *b* = 3337 dan m = (a – 1) x (b – 1) = 3220.

Pilih kunci publik *e* = 79 (yang relatif prima dengan 3220 karena pembagi bersama terbesarnya adalah 1). Nilai *e* dan *m* dapat dipubiikasikan ke umum. Selanjutnya akan dihitung kunci dekripsi d seperti yang dituliskan pada langkah instruksi 4,
$e \times d \equiv 1 \pmod{m}$

Kunci dekripsi d sebagai berikut: :

$$d = \frac{1 + (k \text{ x } 3220)}{79}$$

Dengan mencoba nilai-nilai *k* = 1, 2, 3, ..., diperoleh nilai *d* yang bulat adalah 1019. Iniadalah kunci dekripsi.Misalkan plainteks

P = HARI INI

atau dalam desimal ASCII:

7265827332737873

Pecah P menjadi blok yang lebih kecil (misal 3 digit):

$p_1 = 726$ $p_4 = 273$

$p_2 = 582$ $p_5 = 787$

$p_3 = 733$ $p_6 = 003$

Blok pertama dienkripsikan sebagai 726^{79} mod 3337 = 215 = c_1

Blok kedua dienkripsikan sebagai 582^{79} mod 3337 = 776 = C_2.

Melakukan proses yang sama untuk sisa blok lainnya, dihasilkan chiperteks C = 215 775 1731 158.

Proses deskripsi dilakukan dengan menggunakan kunci rahasia d = 1019.

Blok c_1 dekripsikan sebagai 215^{1019} mod 3337 = 726 = p_1

Blok c_2 ekripsikan sebagai 776^{1019} mod 3337 = 582 = p_2.

Blok plainteks yang lain dikembalikan dengan cara yang serupa. Akhirnya kita memperoleh kembali plainteks semula *P* = 7265827332737873 yang karakternya adalah P = HARI INI

Perhitungan perpangkatan pada proses enkripsi ($c_i = p_i^e$ mod n) dan dekripsi (p_i^d *d* mod *n*) membutuhkan bilangan yang sangat besar. Untuk menghindari penggunaan bilangan yang besar, maka dapat digunakan penyederhanaan dengan persamaan berikut:

$$ab \bmod m = [(a \bmod m)(b \bmod m)] \bmod m$$

b. Kekuatan dan Keamanan RSA

Kekuatan algoritma RSA terletak pada tingkat kesulitan dalam memfaktorkan bilangan non anima menjadi faktor primanya, yang dalam hal ini $n = a$ x b.

Sekali *n* berhasil difaktorkan menjadi *a* dan *b*, maka $m = (a - 1)$x$(b - 1)$ dapat dihitung. Selanjutnya, karena kunci enkrispi *e* diumumkan (tidak rahasia), maka kunci deskripsi *d* dapat dihitung dari persamaan *e* x *d* = 1 (mod m). Ini berarti proses dekripsi dapat dilakukan oleh orang yang tidak berhak.

Penemu algoritma RSA menyarankan nilai *a* dan *b* panjangnya lebih dari 100 digit. Dengan demikian hasil kali $n = a$ x b akan berukuran lebih dari 200 digit. Bayangkanlah berapa besar usaha kerja yang diperlukan untuk memfaktorkan bilangan bulat 200 digit menjadi faktor primanya. Menurut Rivest dan kawan-kawan, uasaha untuk mencari faktor bilangan 200 digit membutuhkan waktu komputasi selama 4 milyar tahun! (dengan asumsi bahwa algoritma pemfaktoran yang digunakan adalah algoritma yang tercepat scat ini dan komputer yang dipakai mempunyai kecepatan 1 milidetik).

3.2.8.5. Fungsi Hash

$$h(k) = k \bmod m$$

- m adalah jumlah lokasi memori yang tersedia
- Fungsi h menempatkan record dengan kunci k pada lokasi memori yang beralamat h(k).

Contoh: m = 11 mempunyai sel-sel memori yang diberi indeks 0 sampai 10. Akan disimpan data record yang masing-masing mempunyai kunci 15, 558, 32, 132, 102, dan 5.

$h(15) = 15 \bmod 11 = 4$

$h(558) = 558 \bmod 11 = 8$

$h(32) = 32 \bmod 11 = 10$

$h(132) = 132 \bmod 11 = 0$

$h(102) = 102 \bmod 11 = 3$

$h(5) = 5 \bmod 11 = 5$

132			102	15	5			558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3.2.8.6. International Standard Book Number (ISBN)

Kode ISBN terdiri dari 10 karakter, biasanya dikelompokkan dengan spasi atau garis, misalnya 0-3015-4561-9.

ISBN terdiri atas empat bagian kode:

- kode yang mengidentifikasikan bahasa,
- kode penerbit,
- kode yang diberikan secara unik kepada buku tersebut,
- sebuah karakter uji (dapat berupa angka atau huruf X untuk merepresentasikan angka 10).

Karakter uji dipilih sedemikian sehingga

$$\sum_{i=i}^{10} ix_i \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\sum_{i=i}^{9} ix_i \bmod 11 = \text{karakter uji}$$

Untuk kode ISBN 0-3015-4561-8, 0 adalah kode kelompok negara berbahasa Inggris, 3015 adalah kode penerbit, 4561 adalah kode unik untuk buku yang diterbitkan oleh penerbit tersebut, dan 8 adalah karakter uji. Karakter uji ini didapatkan sebagai berikut:

1 . 0 + 2 . 3 + 3 . 0 + 4 . 1 + 5 . 5 + 6 . 4 + 7 . 5 + g . 6 + 9 . 1 = 151

Jadi, karakter ujinya adalah 151 mod 11 = 8. Catatlah bahwa untuk kode ISBN ini,

$$\sum_{i=i}^{10} ix_i = \sum_{i=i}^{9} ix_i + 10x_{10} = 151 + 10 . 8 = 231$$

dan 231 mod 11 = 0 atau 231 = 0 (mod 11).

3.3. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

4. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
5. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
6. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

3.4. Kesimpulan / Ringkasan

3.5. Latihan dan Evaluasi

1. Carilah bilangan bulat q dan r sehingga m = nq + r
   a) m = 45, n = 6
   b) m = 66, n = 11
   c) m = 106, n = 12
   d) M = O, N = 47

2. Hitunglah hasil pembagian modulo berikut
   a) -173 mod 21
   c) -340 mod 9
   b) 0 mod 34
   d) -9821 mod 45

3. Tentukan apakah bilangan bulat berikut prima ?
   a) 27
   c) 167
   b) 93
   d) 113

4. Tuliskan faktorisasi prima dari bilangan berikut :
   a) 828
   c) 1781
   b) 1666
   d) 107

5. Tentukan factor isasi prima dari 10!

6. Temukan FPB dari pasangan bilangan bulat *a* dan *b*berikut :
   a) 220, 1400
   c) 110, 273
   b) 315, 825
   d) 2475, 32670
7. Nyatakan FPB dari soal no 6 di atas dalam bentuk kombinasi lanjar $ma + nb$

8. Gunakan algoritma *Euclidean* untuk mendapatkan FPB dari 10223 dan 33341

9. Temukan KPK dari pasangan bilangan berikut :
   a) 12 dan 46
   c) 2^2 dan $2^3.5^2$
   b) 24 dan 128
   d) $2^2 . 3^3 . 5^2$ dan $2^3 . 3 . 7^2$

10. Tuliskan 5 bilangan bulat yang kongruen dengan 4 modulo 12

11. Selesaikan kongruenan lanjar berikut :
    a) $4x \equiv 5 \pmod 8$
    c) $5x \equiv 10 \pmod{12}$
    b) $2x \equiv 7 \pmod{17}$
12. Temukan balikan (*invers*) dari *a* modulo *m* berikut:
    a).a=34,m=5
    c).a=178,m=62
    b). a = -341, m = 17
11. Tunjukkan bahwa $2^{340} \pmod{11}$ dengan Teorema Fermat dan memperhatikan bahwa $2^{340} = (2^{10})^{34}$

13. Enkripsikan pesan HELLO WORLD dengan algoritma RSA dengan nilai-nilai a = 23, b = 31, dan e = 29
14. Sembilan angka pertama dari kode ISBN sebuah buku adalah 0-07-053965. Tentukan karakter uji untuk buku ini
15. Tentukan bagaimana sekumpulan data dengan kunci-kunci 714; 6 31, 2 6, 373, 7 75, 906, 509, 2032, 42, 4, 136 dan 1028 disimpan dalam memori dengan fungsi hash h(k) = k mod 17 ?

3.6. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

3.7. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

BAB 4. INDUKSI MATEMATIK DAN ALGORITHM REKURSIF

4.1. Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa mampumemahami dan memerapkan terkait materi induksi matematik

B. Tujuan Instruksional Khusus

1. Memahami definisi induksi matematika
2. Memahami prinsip induksi sederhana
3. Memahami prinsip induksi yang dirampatkan
4. Memahami prinsip induksi kuat

4.2. Dasar Teori

4.2.1 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan suatu Teknik yang dikembangkan untuk membuktikan pernyataan. Induksi matematika digunakan untuk mengecek hasil proses yang terjadi secara berulang sesuai dengan pola tertentu.

Contoh:

1. Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.
2. $p(n)$:"Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah$n(n + 1)/2$". Buktikan $p(n)$ benar!
3. Untuk membayar biaya pos n sen dolar ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar.
4. Di dalam sebuah pesta,di mana setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali maka jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n +1)/2$.
5. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n anggota adalah 2^n

Induksi matematik merupakan Teknik pembuktian yang bau di dalam matematika. Melalui induksi matematika kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

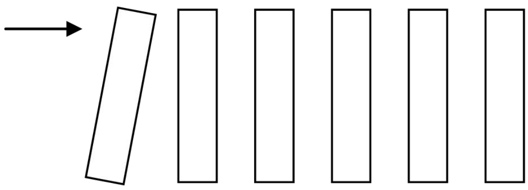
4.2.1.1 Prinsip Induksi Sederhana

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

Langkah 1 dinamakan **basil induksi,** sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi.**

Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menayatakan bahwa *p(n)* benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesisinduksi.**



Contoh 1. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^{2}.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi:* Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) *Langkah* induksi*:* Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$].

Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n +1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Juga benar. Caranya: ruas kiri kita manipulasi menjadi sama dengan ruas kanan

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1)$

$= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1)$

$= n^2 + (2n + 1)$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n + 1)^2$ (sama dg ruas kanan)

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

4.2.1.2 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

Contoh 2. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

$= 2^1 - 1$

$= 2 - 1$

$= 1$

(ii) *Langkah induksi*. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1}$

$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$ (hipotesis induksi)

$= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1$

$= (2 . 2^{n+1}) - 1$

$= 2^{n+2} - 1$

$= 2^{(n+1)+1} - 1$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Contoh 3. Buktikan dengan induksi matematik bahwa pada sebuah himpunan beranggotakan *n*anggota, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.

Contoh 4. Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq$ 8) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" benar.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk membayar biaya pos 8 sen dapat digunakan 1 buah perangko 3 sen dan 1 buah perangka 5 sen saja. Ini jelas benar.

(ii) *Langkah induksi*. Andaikan $p(n)$ benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) sen dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu untuk membayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen. Ada dua kemungkinan yang perlu diperiksa:

(a) Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai n sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai $n + 1$ sen.

(b) Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai n sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan 2 buah perangko 5 sen, akan dihasilkan nilai perangko $n + 1$ sen.

Contoh 5. Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang Rp 20.000,- dan Rp 50.000, -. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Dengan pecahan uang Rp. 20.000,- ATM dapat mengeluarkan uang untuk penarikan Rp. 20.000,-, Rp. 40.000,-, Rp. 60.000,-,..., sedangkan dengan pecahan uang Rp. 50.000,- ATM dapat mengeluarkan u ang untuk p enarikan R p. 5 0.000,-, Rp. 100.000,-, R p. 1 500.000,-,.... Dari kedua kombinasi pecahan tersebut kita dapat menyimpulkan bahwa ATM dapat mengeluarkan uang kelipatan Rp. 10.000,- atau dengan kata lain mengeluarkan uang senilai 10.000n rupiah untuk n>_4 (catatan : perhatikanlah bahwa kita tidak dapat menggunakan basis n = 2 karena is tidak dapat digunakan dalam langkah induksi).

Misalkan p(n) a dalah pernyataan bahwa ATM dapat m engeluarkan uang s enifai 10.000n rupiah dengn n?4 dengan pecahan Rp. 20.000,- dan Rp. 50.000,-. Kita akan buktikan p(n) benar dengan induksi matematika.

(i) Basis induksi. untuk n = 4 jelas benar karena ATM dapat mengeluarkan uang senilai Rp. 40.000, - dengan 2 buah pecahan Rp. 20.000,
(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa untuk n>_4 ATM dapat mengeluarkan uang senilai 10.000n rupiah dengan pecahan Rp. 20.000,- dan Rp. 50.000,- adalah benar. Kita harus menunjukkan bahwa ATM juga dapat mengeluarkan uang senilai 10.000(n+1) rupiah dengan menggunakan pecahan pecahan Rp. 20.000,- dan Rp. 50.000,-. Ada dua kemungkinan yang harus kita tinjau:
    1) Jika uang senilai 10.000n rupiah ATM menggunakan minimal 1 buah pecahan Rp. 50.000,maka dengan mengganti 1 pecahan Rp. 50.000,- dengan 3 pecahan Rp. 20.000,- maka ATM selalu dapat mengeluarkan uang senilai.10.000(n+1) rupiah.
    2) Jika uang senilai 10.000n rupiah ATM menggunakan minimal 1 buah pecahan Rp. 20.000,maka paling sedikit digunakan 2 buah pecahan Rp. 2 0.000,- (sebab n>_4). Dengan mengganti 2 pecahan Rp. 20.000,-

dengan 1 pecahan Rp. 50.000,- maka ATM selalu dapat mengeluarkan uang senilai 10.000(n+1) rupiah

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa ATM dapat mengeluarkan uang senilai 10.000n rupiah untuk n?4 dengan pecahan Rp. 20.000,- dan Rp. 50.000,

4.2.1.3 Prinsip Induksi Kuat

Misalkan *p(n)* adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa *p(n)* benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. jika $p(n_0), p(n_0+1), \ldots, p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,.

Contoh 6. Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

(ii) *Langkah induksi*. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, n dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai n + 1:

(a) Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

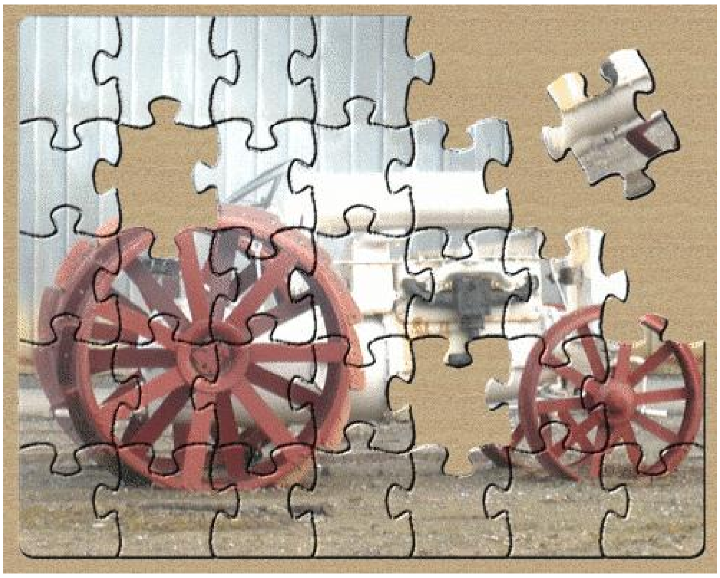
(b) Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1)/ a = b \quad \text{atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

Contoh 7. [LIU85] Teka-teki susun potongan gambar (*jigsaw puzzle*) terdiri dari sejumlah potongan (bagian) gambar (lihat Gambar). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar. Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar. Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk memecahkan teki-teki itu.



Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) *Langkah induksi*. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan (n = 1, 2, 3, …, k) diperlukan sejumlah n – 1 langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk n + 1 potongan diperlukan n langkah.

Bagilah n + 1 potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$. Untuk langkah terakhir yang memecahkan teka-teki ini, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan n_1 - 1 langkah untuk menyatukan blok yang satu dan n_2 – 1 langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah

$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1$ langkah terakhir $= (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n + 1 - 1 = n$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar maka terbukti bahwa suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teki-teki itu.

Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.

Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas**.**

4.2.2 Rekursif

Rekursif adalah objek yang memanggil dirinya sendiri. Kita dapat mendefinisikan rekursif dalam bentuk barisan (deret), fungsi atau himpunan.

Contoh 8. fungsi f didefinisiklan secara rekursif dengan f(0)= 3, f(n+1) = 2f(n) + 3. Tentukan f(1), f(2), f(3), dan f(4) ?

Penyelesaian:
Dari definisi rekursif dapat kita ikuti
f(1)=2f(O)+3=2.3+3=9
f(2)=2f(1)+3=2.9+3=21
f(3)=2f(2)+3=2.21+3=45
f(4)=2,f(3)+3=2.45+3=93

Cara menentukan fungsi rekursif
1. Tentukan nilai fungsi pada nol (nilai awal) ,
2. Berikan aturan (rule) untuk mendapatkan nilainya pada suatu bilangan bulat dari bilangan bulat yang lebih kecil

Contoh 9. Berikan definisi rekursif/induksi untuk fungsi faktorial F(n) = n!
Penyelesaian:
Kita dapat mendefinisikan fungsi faktorial dengan menentukan nilai awal F(0) = 1, dan rnemberi aturan untuk menemukan F(n+1) dari F(n). Ini diperoleh bahwa (n+1)! didapat dengan cara dihitung dari n! dengan mengalikan dengan (n+1). Oleh sebab itu, bentuk aturan yang diberikan adalah F(n+1) = (n+1).F(n).

Contoh 10. Berikan definisi rekursif/induksi untuk fungsi a" dimana a adalah bilangan real dan n bilangan bulat

Penyelesaian:

Definisikan rekursif terdiri dua bagian. Pertama kita tentukan nilai awal yakni a° = 1. K emudian aturan untuk mendapatkan a"" dari an yaitu a""= a. an, untuk n = 1, 2, 3, ...Kedua persamaan tersebut mendefinisikan an untuk semua bilangan bulat nonnegatif.

Suatu algoritma disebut rekursif Jika dia menyelesaikan masalah dengan mengurangi instant dari masalah yang sama dengan input yang lebih kecil

4.2.2.1 Rekursif vs Iteratif

Kita bisa bandingkan beberapa algoritma rekursif dengan versi iteratifnya.

Contoh 11 :

Diberikan algoritma rekursif untuk menghitung n faktorial procedure faktorial (n positifinteger) if n = 1 then faktorial (r.) = 1

else

factorial(n):= n * faktorial (n - 1)

Sedangkan versi iteratif untuk menghitung n faktorial diberikan di bawah ini

procedure iteratiffaktorial(n positif integer)

for i .= 1 to n

x .= i * x

{ x adalah n')

Contoh 12 :

Diberikan algoritma rekursif untuk menghitung bilangan fibonacci procedure fibonacci (nnonnegatif integer) if n = C then

fibonacci(0):= 0

else 1f ;. = 1 then

fibonacci (1) .= 1

```
else
fibor.acci(n) .= fibonacci (n-1)+ fibonacci (n-2)
```

Sedangkan versi iteratif untuk menghitung bilangan fibonacci diberikan di bawah ini

```
procedure iteratiffiboncci('n nonnegatif integer )
if n = 0 then y .= 0
else
x := C y := 1
for i:= 1 to n - 1 do
z .= x + y
x := Y Y := Z
{ y adalah bilangan fibonacci ke n}
```

4.3. Informasi Pendukung

Buku ajar diketik dengan komputer huruf Times New Roman (font 12) pada kertas ukuran A4 dengan jarak 1,5 spasi, beserta softcopy dalam CD. Jumlah halaman buku tidak kurang dari 200 halaman, tidak termasuk Prakata, Daftar Isi, dan Lampiran. Unsur buku yang harus ada: (1) Prakata, (2) Daftar Isi, (3) Batang tubuh yang terbagi dalam bab atau bagian, (4) Daftar Pustaka, (5) Glosarium, (6) Indeks (sebaiknya). Penulisan Buku Ajar termasuk dalam kegiatan melaksanakan pengajaran. Angka kredit 20 per buku. Batas Kepatutan Buku Ajar/Buku Teks adalah 1 Buku/Tahun.

Buku Ajar berusaha menimbulkan minat baca dan dirancang dan ditulis untuk mahasiswa. Menjelaskan tujuan instruksional. Dipergunakan oleh dosen dan mahasiswa dalam proses perkuliahan. Disusun berdasar pola belajar yg fleksibel, sistematis dan terstruktur berdasarkan kebutuhan mahasiswa dan kompetensi akhir yang ingin dicapai. Fokus pada pemberian kesempatan bagi mahasiswa untuk berlatih. Memberi rangkuman. Gaya penulisan komunikatif. Ada umpan balik. Mengakomodasi kesulitan belajar mahasiswa. Menjelaskan cara mempelajari bahan ajar.

Diktat adalah bahan ajar untuk suatu mata kuliah yang ditulis oleh pengajar mata kuliah tersebut. Mengikuti kaidah penulisan ilmiah dan disebarluaskan kepada peserta kuliah. Angka kredit maksimal adalah 5.

4.4. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

C. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
D. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
E. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

4.5. Kesimpulan / Ringkasan

Kesimpulan atau ringkasan atau rangkuman berisi rangkuman dari paparan materi diatas.

4.6. Latihan dan Evaluasi

1. Buktikan dengan induksi matematika bahwa
   a. 2+4+g+,,,+2n=n(n+1),untukn?1
   b. 1(2)+2(3)+...+n(n+1)=n(n+1)(n+2)l3,untukn?1
   c. 12+32+52+...+(2n-1)2=n(2n-1)(2n+1)/3,untukn>_1 d. 5+10+15+...+5n=5n(n+1)/2,untukn?1
   e. 12+22+32+..:+n2=n(n+1)(2n+1 }/6,untukn?1
   f. 1' +2 3 +3 ' + ... + n3 = nZ (n+1) 2, untuk n >_ 1
   g. 1+5+g+...+(4n-3)=n(2n-1),untukn?1
   h. 1: 1 (2)+1I2(3)+1/3(4)+...+1/n(n+1)=n/(n+1),untukn?1
   i. 1 +a+a2+_.,+a"=1-a"+'/(1-a),untukn?Odana#1
   j. 3 • 3 (5)+3 (52) + ... + 3 (5") = 3 (5"+' - 1) / 4, untuk n ? 0
   k. 1 r i!)+2(2!)+...+n(ni)=(n+1)!-1.untukn>_1 I. 1-2- <3",untukn?2
   m. 2> n 2+ n, untuk n> 4
   n. 2- > n 3, untuk n> 9
   o. 1 + 2 + 3 + ... + n < (2n + 1) 2 /8

2. Buktikan dengan induksi matematika bahwa n' - 4n2 habis dibagi 3 untuk semuabilangan bulat n ?

3. Carilah dan kemudian buktikan dengan induksi matematika suatu rumus umumberdasarkan pengamatan berikut 1~=1

   2"=3+5 3-=7+9+11

   4-= 13+15+17+19

4. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah pangkat tiga dari tiga buahbilangan bulat positif berturutan selalu habis dibagi 9

5. Buktikan dengan induksi matematika bahwa 5 merupakan membagi dengan tepatn3-n , dimana n bikangan bulat nonnegatif

6. Tentukan f(1), f(2) , f(3) dan f(4) jika f(n) didefinisikan secara rekursif dengan f(0) = 1dan untuk n = 0, 1, 2, , ...
   a. f(n+1) = f(n) + 2
   b. f(n+1) = 3f(n)
   c. f(n+1) = 24")
   d.f(n+1) = f(n)2 + f(n) + 1

7. Tentukan f(2), f(3) , f(4) dan f(5) jika f(n) didefinisikan secara rekursif dengan f(0) = f(1) = 1 dan untuk n = 0, 1, 2, , ...
   a. f(n+1) = f(n) - f(n -1)
   b. f(n+1) = f(n) f(n-1)
   c. f(n+1) = f(n)2 + f(n-1)3
   d. f(n+1) = f(n) /f(n-1)

8. Bila F adalah fungsi sedemikian hingga F(n) adalah jumlah dari n bilangan bulat positif pertama, berikan definisi rekursif untuk F(n)

9. Berikan definisi rekursif untuk Sm(n), jumlah bilangan bulat m dengan bilangan bulat nonnegatif n

4.7. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

4.8. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

BAB 5. KOMBINATORIAL

5.1. Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa mampu menerapkan dan memahami terkait materi Counting Argument, The Pigeonhole principle

B. Tujuan Instruksional Khusus

1. Memahami prinsip dasar counting
2. Memahami prinsip inklusi-ekslusi
3. Memahami prinsip pigeon hole
4. Memahami konsep dasar permutasi
5. Memahami contoh kasus penerapan permutasi
6. Memahami Memahami konsep dasar kombinasi
7. Memahami contoh penerapan kombinasi
8. Memahami komsep kombinasi dengan penrulangan
9. Memberikan contoh kombinasi dengan perulangan

5.2. DASAR TEORI

5.2.1 Kombinatorial

Sebuah *pin* panjangnya 6 angka. Berapa banyak kemungkinan *angka* yang dapat dibuat?

123456

111234

123445

…

233345

443235

…

????

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya

5.2.1.1 Kaidah Dasar Menghitung

b. Kaidah Perkalian (rule of product)

Misalkan

Percobaan 1: x hasil

Percobaan 2: *y* hasil

Percobaan 1 **dan** percobaan 2: x × *y* hasil

c. Kaidah Penjumlahan (rule of sum)

Misalkan

Percobaan 1: x hasil

Percobaan 2: y hasil rnaka,

Percobaan 1 atau percobaan 2: x + y hasil

Contoh 1.Ketua angkatan IF 2005 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria IF2005 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

Penyelesaian:

65 + 15 = 80 cara.

Contoh 2. Dua orang perwakilan IF2002 mendatangai Pak Rinaldi untuk protes nilai kuis. Wakii yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil terebut?

Penyelesaian:

65 x 15 = 975 cara

5.2.1.2 Perluasan Kaidah Dasar menghitung

Jika ada n percobaan, masing-masing dengan p_i hasil

a. Kaidah Perkalian (*rule of product)*

$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ hasil

b. Kaidah Penjumlahan (*rule of sum)*

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ hasil

Contoh 3. Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak string biner yang dapat dibentuk jika:

(a) panjang string 5 bit
(b) panjang string 8 bit (= 1 byte)

Penyelesaian:

(a) 2x2x2x2x2=25=32 buah
(b) 2^8 = 256 buah

Contoh 4. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda
(b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (1, 3, 5, 7, 9)
posisi ribuan: 8 kemungkinan angka
posisi ratusan: 8 kemungkinan angka
posisi puluhan: 7 kemungkinan angka
Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah

(b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)
posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(9)(10)(10) = 4500

Contoh 5. Lihat kembali contoh ilustrasi pada awal bab ini. Sandi-lewat (password) sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

Penyelesaian:

Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A-Z) dan banyak angka desimal adalah 10 (0-9), jadi seluruhnya 36 karakter.

a. Untuk sandi-lewat dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

   (36)(36)(36)(36)(36)(36) = 366 = 2.176.782.336

b. Dan untuk sandi-lewat dengan panjang 7 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

   (36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36' = 78.364.164.096

c. Dan untuk sandi-lewat dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

   (36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 368= 2.821-109.907.456

Jumlah seluruh sandi-lewat (kaidah penjumlahan) adalah
2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 =
2.901.650.833.888 buah.

Latihan:

1. (a.) Berapa banyak bilangan genap 3-angka?

   (b.) Berapa banyak bilangan ganjil 3-angka dengan setiap angka berbeda?

2. Dari 100.000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilangan yang mengandung tepat 1 buah angka 3, 1 buah angka 4, dan 1 buah angka 5?

3. Tersedia 6 huruf *a, b, c, d, e, f.* Berapa jumlah pengurutan 3 huruf jika :

   (a) Tidak ada huruf yang diulang;

   (b) Boleh ada huruf yang berulang;

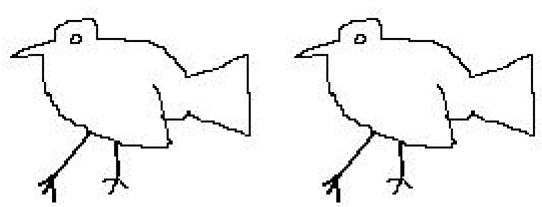
   (c) Tidak boleh ada huruf yang diulang, tetapi huruf *e* harus ada;

   (d) Boleh ada huruf yang berulang, huruf *e* harus ada.

4. Tentukan banyaknya cara pengaturan agar 5 orang mahasiswa Jurusan Teknik Informatika (TIF), 2 orang mahasiswa Teknik Kimia (TK), 3 orang mahasiswa Teknik Elektro (TE), 4 orang mahasiswa Teknik Elektro (TI) dapat duduk dalam satu baris sehingga mereka dari program studi yang sama duduk berdampingan?

5.2.1.3 Prinsip Pigeon Hole

Jika ada n+1 burung, yang harus masuk ke dalam n sangkar, maka ada sangkar yang berisi 2 atau lebih burung.



a. Contoh Prinsip Pigeon Hole

1. Diantara 367 367 orang pasti ada paling sedikit 2 orang bertanggal lahir sama (sebab hanya ada 365 kemungkinan tanggal lahir)
2. Diantara 27 orang pasti ada paling sedikit 2 orang yang huruf awalnya sama.
3. Berapa banyak siswa yang harus ada di kelas untuk menjamin bahwa paling sedikit dua siswa memperoleh nilai ujian sama?(nilai ujian 0 – 100).

   Jawab: karena ada 101 nilai yang mungkin pada ujian maka banyaknya siswa yg dipersyaratkan agar ada nilai ujian yg sama adalah 102.

b. Prinsip Pigeon Hole

Jika N objek ditempatkan ke k kotak, maka ada paling sedikit satu kotak berisi $\lceil N/k \rceil$ objek.

Khusus $N = n$+1and $k = n,$ menghasilkan paling sedikit $\lceil (n+1)/n \rceil = 2$ objekpada satu kotak.

P: Pandang Jogja mempunyai 7,000,000 penduduk dan kepala manusia memiliki paling banyak 500,000 rambut. Temukan jaminan banyaknya orang minimum di Jogja yang mempunyai jumlah rambut yg sama.

Jawab: $\lceil 7{,}000{,}000 / 500{,}001 \rceil = 14$

Contoh lain:

Diantara 100 mhs brp paling sedikit mhs yg lhr pd bulan yg sama?

Jawab:

$\lceil 100/ 12 \rceil = 9$.

5.2.1.4 Prinsip Inklusi – Eksklusi

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'?

Penyelesaian:

Misalkan:

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11',

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

maka

$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

$|A| = 2^6 = 64$, $|B| = 2^6 = 64$, $|A \cap B| = 2^4 = 16$

Maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= 2^6 + 2^6 - 16 \quad = 64 + 64 - 16 = 112.$$

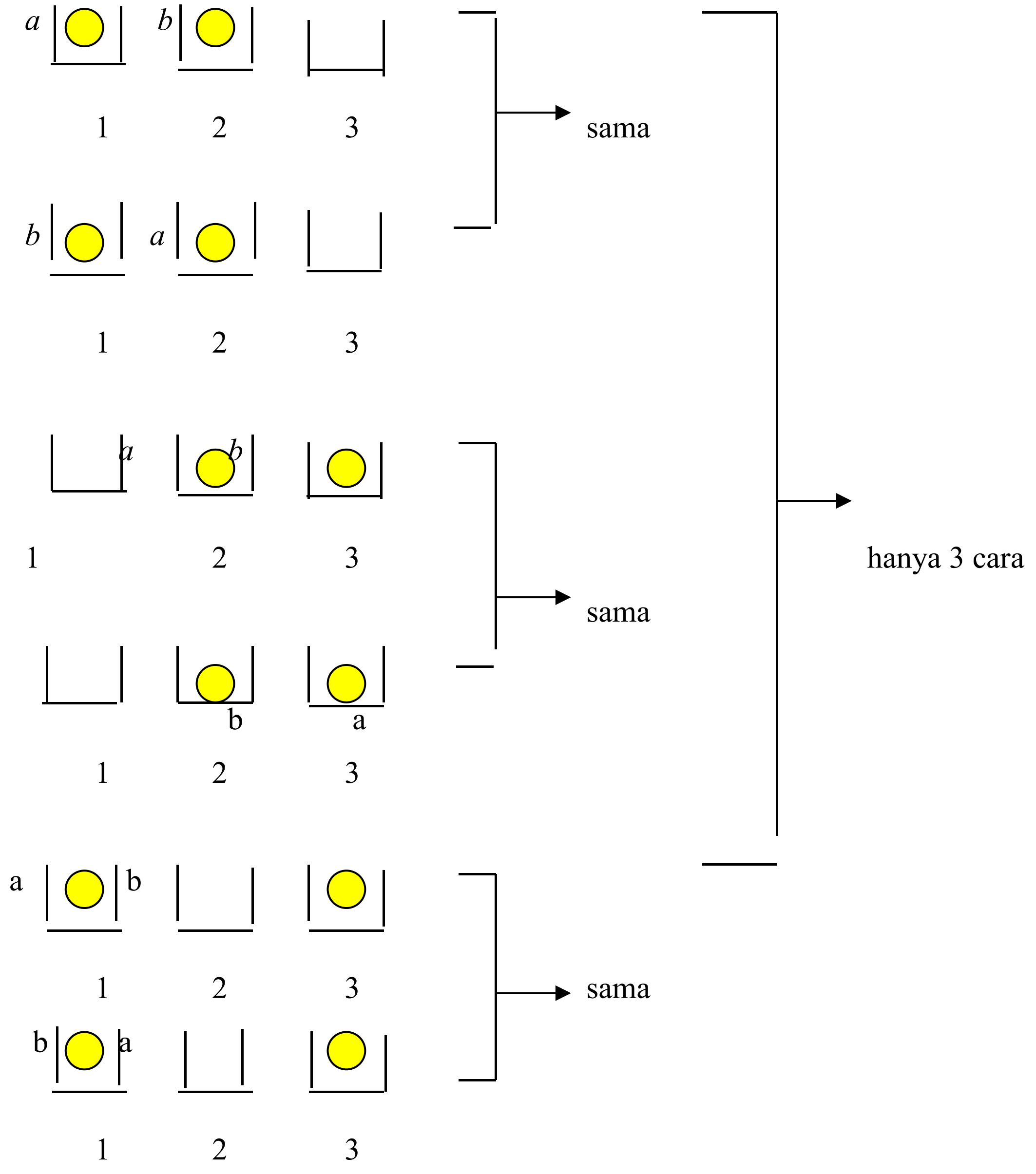
5.2.1.5 Kombinasi

Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak=

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$



Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

Karenan ada 3! Cara memasukkan bola yang warnanya sama.

Secara umum, jumlah cara memasukkan *r* buah bola yang berwarna sama ke dalam *n* buah kotak adalah

$$\boxed{\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r) \text{ atau } \binom{n}{r}}$$

C(n,r) sering dibaca "*n* diambil *r*", artinya *r* objek diambil dari *n* buah objek.

Definisi: Kombinasi *r* elemen dari *n* elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut *r* elemen yang diambil dari *n* buah elemen

a. Interprestasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari *r* elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan *n* elemen.

   Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$

   Jumlah himpunan bagian dengan 2 eleman:

   $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

   $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ 3 buah

   $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

   atau $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. $C(n, r)$ = cara memilih *r* buah elemen dari *n* buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

   Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

   Penyelesaian:

   Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh 9. Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 2002, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

(a) Mahasiswa bernama *A* selalu termasuk didalamnya;
(b) Mahasiswa bernama *A* tidak termasuk di dalamnya;
(c) Mahasiswa bernama *A* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak;
(d) Mahasiswa bernama *B* selalu termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak;
(e) Mahasiswa bernama *A* dan *B* termasuk di dalamnya;
(f) Setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama *A* atau *B* termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:

(a) $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* selalu termasuk di dalamnya.
(b) $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakn 5 orang sedemikian sehingga *A* tidak termasuk di dalamnya.
(c) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* termasuk di dalamnya, tetapi *B* tidak.
(d) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *B* termasuk di dalamnya, tetapi *A* tidak.
(e) $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga *A* dan *B* selalu termasuk di dalamnya.
(f) Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari *A* atau *B* termasuk di dalamnya

    = Jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *A* termasuk di dalamnya, *B* tidak + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga *B* termasuk di dalamnya, *A* tidak + jumlah cara membentuk perwakilan sehingga A dan B termasuk di dalamnya = 70 + 70 + 56 = 196.

Prinsip inklusi – eksklusi:

X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A

Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan B

$X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A dan B, maka

$|X| = C(9, 4) = 126$; $|Y| = C(9, 4) = 126$;

$|X \cap Y| = C(8, 3) = 56$;

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$

Latihan:

1. Kursi-kursi di sebuah bioskop disusun dalam baris-baris, satu baris berisi 10 buah kursi. Berapa banyak cara mendudukkan 6 orang penonton pada satu baris kursi:
   (a) Jika bioskop dalam keadaan terang
   (b) Jika bioskop dalam keadaan gelap

2. Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Informatika. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang jika:
   (a) Tidak ada batasan jurusan
   (b) Semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika
   (c) Semua anggota panitia harus dari jurusan Informatika
   (d) Semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama
   (e) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili

3. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?

5.2.2 Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama – *indistinguishable)*

n_1 bola diantaranya berwarna 1,

n_2 bola diantaranya berwarna 2,

$\vdots$

n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$,

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah:

$$\boldsymbol{P(n, n) = n!.}$$

Dari pengaturan n buah bola itu:

Ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

Ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

$\vdots$

Ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2, n_3) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!}$$

$$\ldots \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = C(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Contoh 10. Berapa banyak "kata" yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI?*

Penyelesaian:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$

huruf M = 1 buah (n_1)

huruf I = 4 buah (n_2)

huruf S = 4 buah (n_3)

huruf P = 2 buah (n_4)

$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah $= |S|$

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} . \frac{10!}{(4!)(6!)} . \frac{6!}{(4!)(2!)} . \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

$= 34650$ buah

Contoh 11. Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah manga.

Penyelesaian:

$n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh mangga = $\dfrac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$ cara

Contoh 12. 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:

$n = 18$; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, dan $n_4 = 6$ (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = $\dfrac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$ cara

Latihan:

1. 100 orang mahasiswa dikirim ke 5 negara, masing-masing negara 20 orang mahasiswa. Berapa banyak cara pengiriman mahasiswa?

2. Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk dari huruf-huruf kata "CONGRESS" sedemikian sehingga dua buah huruf "S" tidak terletak berdampingan?

3. Tentukan banyaknya cara agar 4 buku matematika, 3 buku sejarah, 3 buku kimia, dan 2 buku sosiologi dapat disusun dalam satu baris sedemikian sehingga (untuk masing-masing soal)
   (a) Semua buku yang topiknya sama letaknya bersebelahan,
   (b) Urutan buku dalam susunan bebas.

5.2.2.1 Kombinasi dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak.

(i) Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola. Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

(ii) Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$$

Contoh 13. Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:

- Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).
- Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya.
  Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)
  Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)
  Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)
  Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)
  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

  Ada C(4 + 12 – 1, 12) = C(15, 12) = 455 buah solusi

Contoh 14. 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)
Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,
Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15$$

Latihan:

1. Ada 10 soal di dalam ujian akhir *Matematika Diskrit*. Berapa banyak cara pemberian nilai (bilangan bulat) pada setiap soal jika jumlah nilai

keseluruhan soal adalah 100 dan setiap soal mempunyai nilai paling sedikit 5. (Khusus untuk soal ini, nyatakan jawaban akhir anda dalam $C(a, b)$ saja, tidak perlu dihitung nilainya)

2. Di perpustakaan Teknik Informatika terdapat 3 jenis buku: buku Algoritma dan Pemrograman, buku Matematika Diskrit, dan buku Basisdata. Perpustakaan memiliki paling sedikit 10 buah buku untuk masing-masing jenis. Berapa banyak cara memilih 10 buah buku?
3. Dari sejumlah besar koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, berapa banyak cara limakoin dapat diambil?

5.3. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

1. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
2. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
3. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

5.4. Kesimpulan / Ringkasan

Kesimpulan atau ringkasan atau rangkuman berisi rangkuman dari paparan materi diatas.

5.5. Latihan dan Evaluasi

1. Ada 18 jenis buku matematika dan 25 jenis teknik informatika di perpustakaan
   a. Berapa banyak cara untuk mengambil dua buku sedemikian hingga satu buku matematika dan satu buku informatika
   b. Berapa banyak cara untuk mengambil dua buku sedemikian hingga hanya salah satu jenis saja yang dipilih (buku matematika saja atau buku informatika saja)

2. Test pilihan ganda berisi 10 soal. Ada empat kemungkinan jawaban untuk tiap soalnya
   a. Berapa banyak cara seorang mahasiswa menjawab soal jika setiap soal dia jawab.

b. Berapa banyak cara seorang mahasiswa menjawab soal jika dia bisa meninggalkan jawaban kosong.

3. Ada empat rote kendaraan dari Jakarta ke Jogja dan ada enam rote dari Jogja KeBali. Berapa banyak rote kendaraan dari Jakarta ke Bali lewat Jogja ? Berapa rotekendaraan untuk pergi pulang Jakarta-Bali lewat Jogja.

4. Berapa banyak bit string yang panjangnya 8?

5. Berapa banyak bit string yang panjangnya n (bilangan bulat positif), dimulai dan diahir dengan 1?

6. Suatu variabel bahasa pemrograman harus berupa sebuah huruf atau sebuah huruf diiuti dengan sebuah angka. Berapa banyak nama variabel yang dapat dibuat bila huruf besar dan kecil dibedakan?

7. Berapa banyak plat nomor kendaraan di suatu daerah bila terdiri 4 angka diikuti tiga huruf?

8. Jika ada 13 orang ditempatkan pada suatu kamat, tunjukkan bahwa paling sedikit dua orang mempunyai tanggal lahir yang lama.

9. Tunjukkan bahwa jika ada 30 siswa di suatu kelas, maka paling sedikit dua mempunyai nama yang dimulai dengan huruf yang sama.

10. Tunjukkan bahwa jika tujuh warna digunakan untuk mencat 50 motor, maka paling sedikit 8 motor akan mempunyai warna sama.

11. Berapa banyak teman yang harus anda punyai agar menjamin paling sedikit lima dari mereka mempunyai hari lahir dengan bulan yang sama?

12. Ada 38 waktu berbeda yang dipunyai untuk perkuliahan yang dapat dijadwalkan. Jika ada 677 klas kuliah berbeda, berapa banyak ruangan berbeda yang dibutuhkan?

13. Di suatu kelas terdapat 80 siswa. 50 diantaranya pria
    a. Berapa banyak cara dapat dibentuk panitia 10 orang?
    b. ulangi soal a) bila banyaknya pria harus sama dengan banyaknya wanita?
    c. ulangi soal a) bila panitia harus terdiri dari enam pria dan empat wanita atau empat pria dan enam wanita?

14. Ada 5 orang akan duduk bersebelahan di suatu bangku panjang. Berapa banyak cara duduk yang dapat disusun bila
    a. seorang harus duduk di pinggir (bisa kir atau kanan)
    b. dua orang (misal a dan b) harus duduk berdampingan c. dua orang (misal a dan c) harus duduk tidak berdampingan Berapa cara dapat bersebelahan 6 pria dan 6 wanita bila a. tidak ada aturan
    c. pria dan wanita harus duduk berselang-seling

15. Suatu karakter tunggal disimpan dalam komputer menggunakan delapan bit ('0' dan '1'), yang disebut dengan bit pattern
    a. Berapa banyak bit pattern berbeda yang ada berapa karakter yang dapat disajikan?
    b. Berapa banyak bit pattern yang tepat terdiri 3 '1' ?
    c. Berapa hanyak bit pattern yang mempunyai '1' genap?

16. Suatu kotak berisi 15 bola, terdiri 8 bola merah dan 7 bola putih. Ada berapa carapemilihan 5 bola sedemikian hingga

    a. semua bola merah

    b. semua bola putih

    c. mesh dan 3 putih

    d. paling banyak 3 mesh

17. Berapa banyak cara yang ada untuk memilih 6 item dari 10 item yang berbeda bila
    a. item yang dipilih terurut dan pengulangan tidak diperbolehkan
    b. item yang dipilih terurut dan pengulangan diperbolehkan
    c. item yang dipilih tidak terurut dan pengulangan tidak diperbolehkan
    d. item yang dipilih tidak terurut dan pengulangan diperbolehkan

18. Berapa banyak bilangan bulat positif yang kurang dari 1000
    a. Mempunyai tepat tiga angka?
    b. Berupa bilangan ganjil?
    c. Mempunyai paling sedikit satu angka 9?
    d. Tidak mempunyai angka ganjil?

19. Berapa banyak cara yang ada untuk memilih satu lusin donut dari 20 jenis, bila
    a. tidak ada dua donut yang jenisnya sama
    b. semua donut jenisnya sama
    c. tidak ada batasan
    d. ada paling sedikit dua jenis
    e. harus ada paling sedikit enam yang berisi rasa coklat
    f. tidak boleh lebih dari enam yang berisi rasa coklat

20. Berapa cara penugasan yang bisa dibuat untuk 24 mahasiswa TA ke 5 dosen pembimbing

21. Dalam kejadian tabrak lari, korban bercerita ke polisi bahwa plat nomor mobil terdiri 4 digit diikuti dua huruf, dimulai dengan angka 5 dan diakhiri dengan huruf NE. Berapa banyak plat berbeda yang dapat ditelusuri pada kasus ini?

22. Temukan permutasi berikutnya sesuai urutan kamus setelah permutasi berikut
    a. 1432
    b. 45231
    c. 6714325
    d. 31528764

5.6. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

5.7. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

BAB 6. TEORI GRAF DAN APLIKASINYA

6.1. Tujuan Instruksional

A. Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa mampu memahami dan menerapkan Graf (Undirected graph, directed Graph, Wighted Graph, Aplikasi Graph, dan Spanning Tree

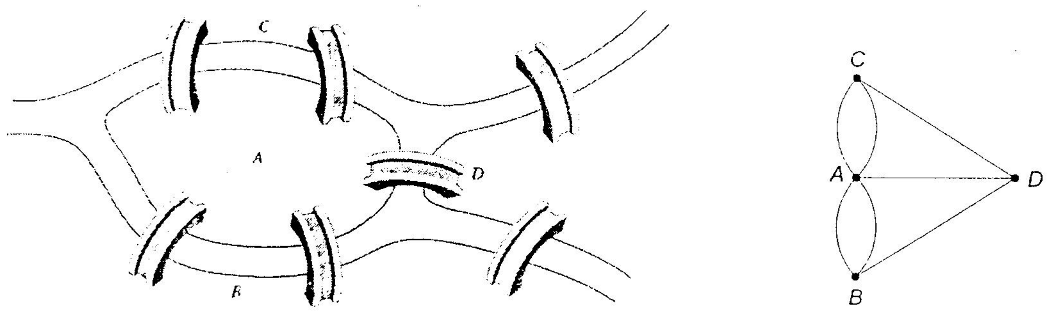
B. Tujuan Instruksional Khusus

1. Memahami pengertian graf
2. Memahami jenis-jenis graf
3. Memahami undirect graf
4. Memahami directed graf
5. Memahami pembobotan dalam graf
6. Menyebutkan contoh aplikasi graf
7. Memahami Lintasan terpendek (*shortest path*)
8. Memahami persoalan tukang pos Cina (*chinese postman problem*)
9. Memahami persoalan pedagang keliling (*travelling salesperson problem*)
10. Memahami pewarnaan graf (graph *colouring*)
11. Memahami definisi spanning tree
12. Memahami pohon merentang
13. Memahami algoritma pohon merentang minimum
14. Memahami aritmatika pohon merentang minimum
15. Mengerjakan contoh dan latihan

6.2. Dasar Teori

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objekobjek tersebut.Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.

Sejarah Graf: masalah jembatan Konigsberg (tahun 1736)



Gambar 1. Masalah Jembatan Königsberg

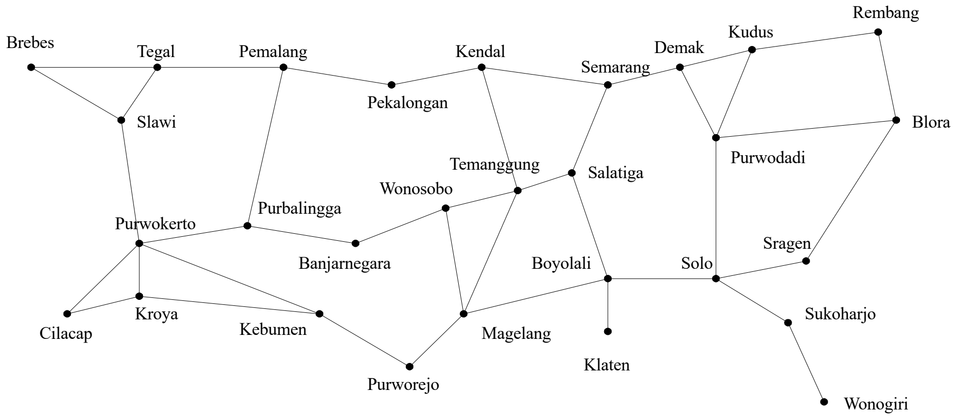
Graf yang merepresentasikan jembatan Konigsberg:

Simpul (vertex) = menyatakan daratan

Sisi (edge) = menyatakan jembatan

Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?
Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antaraobjek-objek tersebut?

Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.



Gambar 2. Peta Provinsi Jawa Tengah

1.4.5 Definisi Graf

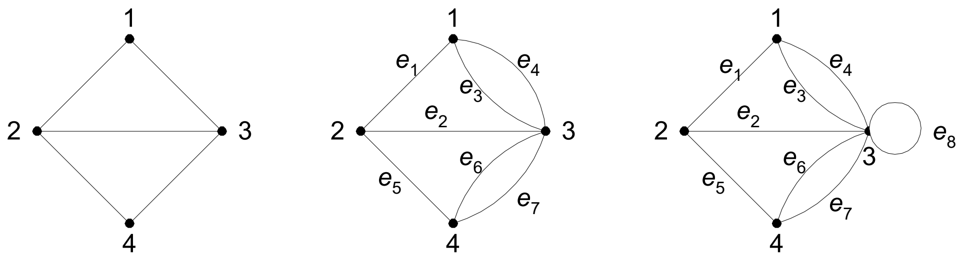
Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

$= \{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \}$

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

$= \{e_1 ,e_2 , \ldots , e_n \}$



G_1 G_2 G_3

Gambar 3. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Contoh 1. Pada Gambar 3.

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

G_2 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$

$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$

G_3 adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$

$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$

Pada G_2, sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

Pada G_3, sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada ....

1.4.6 Jenis-Jenis Graf

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1.4.6.1 Graf Sederhana (*simple graph)*

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. G_1 pada Gambar 2 adalah contoh graf sederhana.

1.4.6.2 Graf Tak-Sederhana (*unsimple graph*)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). G_2 dan G_3 pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1.4.6.3 Graf Berhingga(*limited graph)*

Jumlah simpulnya, n, berhingga.

1.4.6.4 Graf tak-berhingga (*unlimited graph)*

Jumlah tidak berhingga banyaknya.

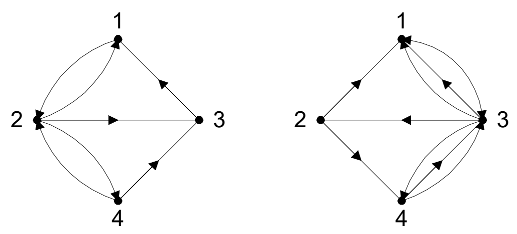
Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1.4.6.5 Graf tak-berarah (*undirected graph)*

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.

1.4.6.6 Graf Berarah (*directed graph* atau *digraph)*

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.



(a) G_4 (b) G_5

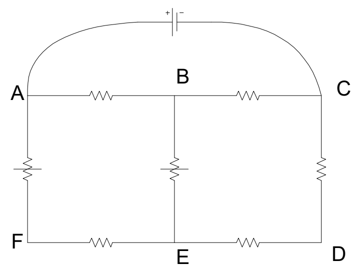
Gambar 3 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

Tabel 1 Jenis-jenis graf [ROS99]

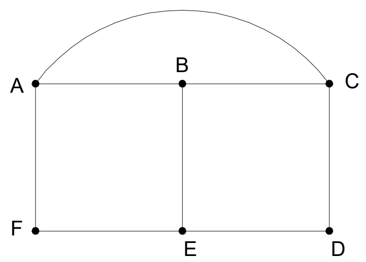
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

1.4.7 Contoh Terapan Graf

1. **Rangkaian Listrik**

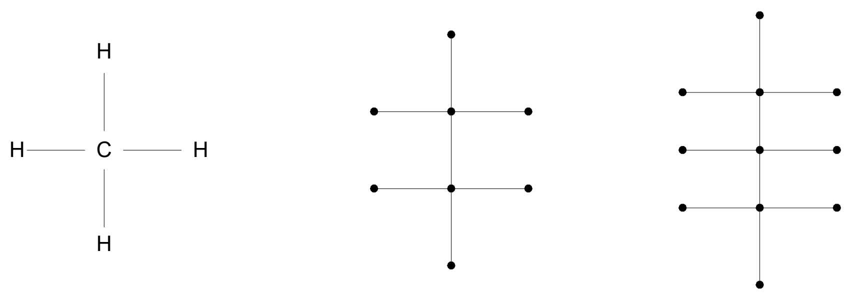


(a)



(b)

2. **Isomer senyawa kimia karbon**



metana (CH_4) etana (C_2H_6) propana (C_3H_8)

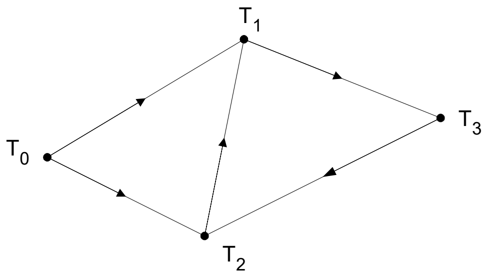
3. **Transaksi konkuren pada basis data terpusat**

Transaksi T_0menunggu transaksiT_1 dan T_2

Transaksi T_2 menunggu transaksi T_1

Transaksi T_1 menunggu transaksi T_3

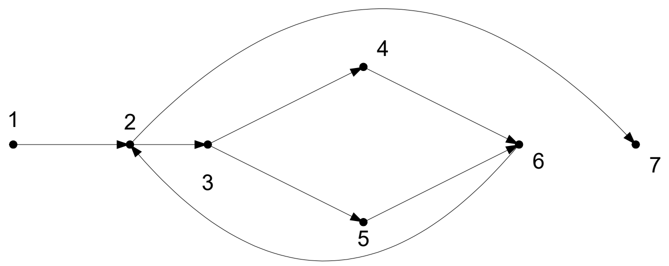
Transaksi T_3 menunggu transaksi T_2



Deadlock!

4. Pengujian program

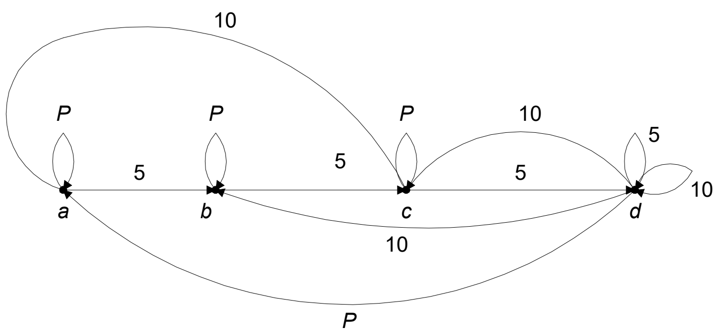
```
read(x);
while x <> 9999 do
begin
if x < 0 then
writeln('Masukan tidak boleh negatif')
else
     x:=x+10;
read(x);
end;
writeln(x);
```



Keterangan:	1 : read(x)	5 : x := x + 10
	2 : x <> 9999	6 : read(x)
	3 : x < 0	7 : writeln(x)

4 : writeln('Masukan tidak boleh negatif');

5. **Terapan graf pada teori otomatis [LIU85]**



Mesin jaja (*vending machine*)

Keterangan:

a : 0 sen dimasukkan

b : 5 sen dimasukkan

c : 10 sen dimasukkan

d : 15 sen atau lebih dimasukkan

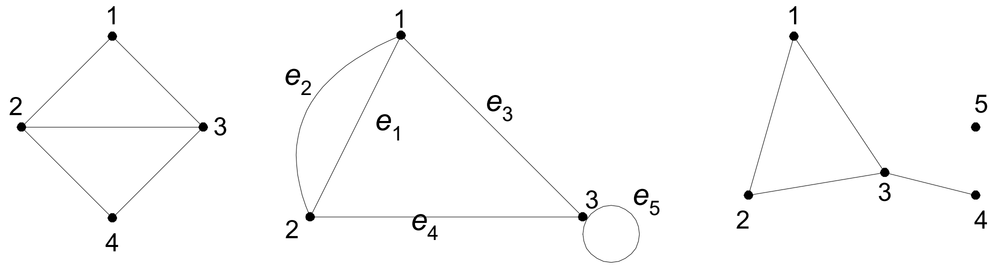
1.4.8 Terminologi Graf

1.4.8.1 Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graf G_1: simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,

simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



G_1 G_2 G_3

Gambar 4. Graf yang digunakan untuk menjelaskan terminologi pada graf.

Dua buah simpul dikatakan bartetangga bila keduanya terhubung langsung. Tinjau graf G1, simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3, simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

1.4.8.2 Bersisian (*Incidency)*

Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

e bersisian dengan simpul v_j , atau

e bersisian dengan simpul v_k

Tinjau graf G_1: sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,

sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,

tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.

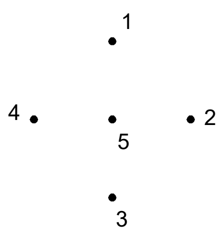
1.4.8.3 Simpul Terpencil (*Isolated Vertex)*

Simpul terkecil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjauan graf G_3: simpul 5 adalah simpul terpencil.

1.4.8.4 Graf Kosong *(null graph atau empty graph)*

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (N_n).



Graf N_5 :

1.4.8.5 Derajat (*Degree)*

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$

Tinjau graf G_1: $d(1) = d(4) = 2$

$d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf G_3: $d(5) = 0$ → simpul terpencil

$d(4) = 1$ → simpul anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graf G_2: $d(1) = 3$ → bersisian dengan sisi ganda

$d(2) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)

Pada graf berarah,

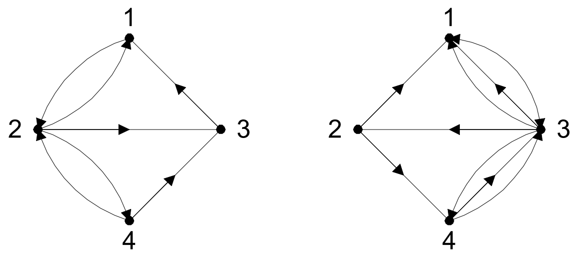
$d_{in}(v)$ = derajat-masuk (*in-degree)*

= jumlah busur yang masuk ke simpul v

$d_{out}(v)$ = derajat-keluar (*out-degree*)

= jumlah busur yang keluar dari simpul v

$d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$



G_4 G_5

Tinjau graf G_4:

$d_{in}(1) = 2$; $d_{out}(1) = 1$

$d_{in}(2) = 2$; $d_{out}(2) = 3$

$d_{in}(3) = 2$; $d_{out}(3) = 1$

$d_{in}(4) = 1$; $d_{out}(3) = 2$

- **Lemma Jabat Tangan**

  Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

  Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

  Tinjau graf G_1: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$

  $= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

  Tinjau graf G_2: $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$

  $= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

  Tinjau graf G_3: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$

  $= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$

  $= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 4$

  Akibat dari *lemma* (*corollary*)

  Teorema: Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selau genap.

  Contoh 2:

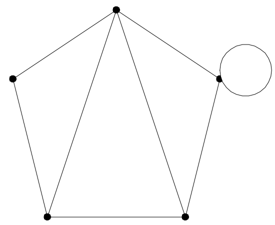
  Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

  a. 2, 3, 1, 1, 2
  b. 2, 3, 3, 4, 4

  Penyelesaian:

  a. Tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil.
     $(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9)$

b. Dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap.
   (2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16)



1.4.8.6 Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan $v_n$didalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2,... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G.

Tinjau graf G_1: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada G_1 memiliki panjang 3.

1.4.8.7 Siklus

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus.**

Tinjau graf G_1: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada G_1 memiliki panjang 3.

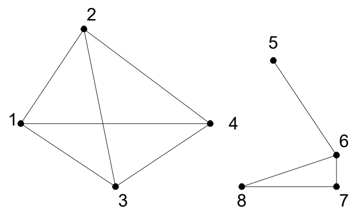
1.4.8.8 Terhubung

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2.

G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j.

Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph)*

Contoh graf tak-terhubung:

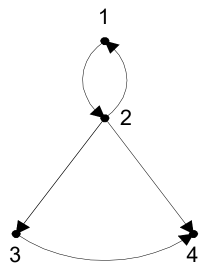


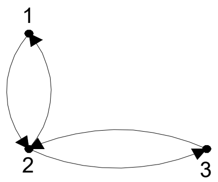
Graf berarah G dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari G diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

Dua simpul, u dan v, pada graf berarah G disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan juga lintasan berarah dari v ke u.

Jika u dan v tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka u dan v dikatakan **terhubunglemah** (*weakly coonected*).

Graf berarah G disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang u dan v di G, terhubung kuat. Kalau tidak, G disebut **graf terhubung lemah.**



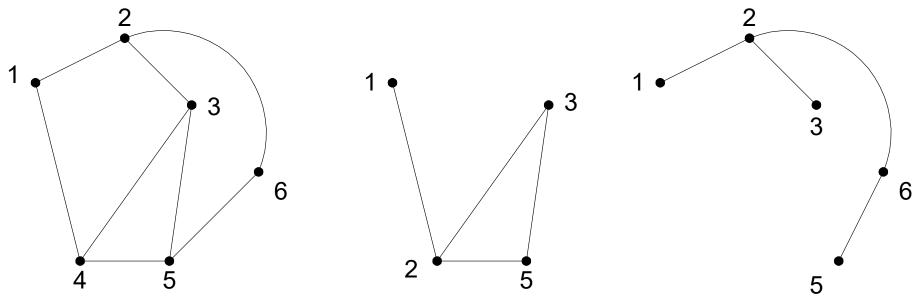


graf berarah terhubung lemah   graf berarah terhubung kuat

1.4.8.9 Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

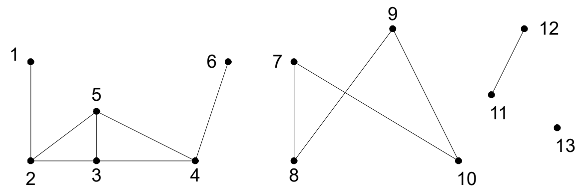
Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.



(a) Graf G_1 (b) Sebuah upagraf (c) komplemen dari upagraf (b)

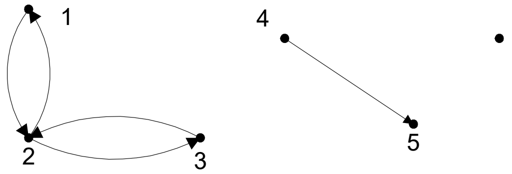
Komponen graf (*connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf *G*.

Graf *G* di bawah ini mempunyai 4 buah komponen.



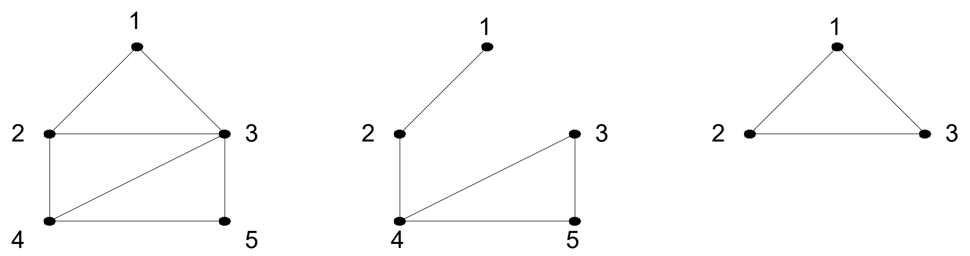
Pada graf berarah, komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) adalah jumlah maksimum upagraf yang terhubung kuat.

Graf di bawah ini mempunyai 2 buah komponen terhubung kuat:



1.4.8.10 Upagraf Rentang

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).



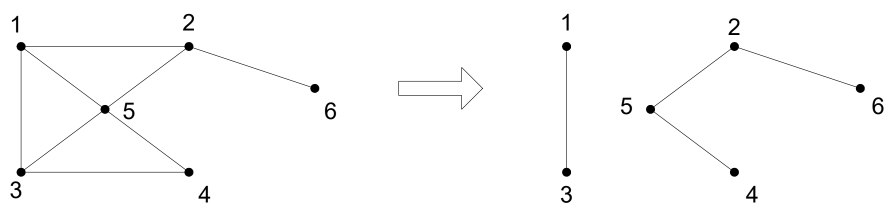
(a) graf *G*, (b) upagraf rentang dari *G*,(c) bukan upagraf rentang dari *G*

1.4.8.11 Cut-Set

Cut-set dari graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

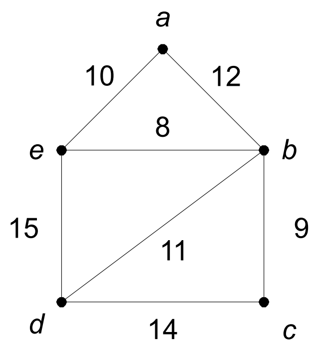
Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set,* tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.



(a) (b)

1.4.8.12 Graf Berbobot

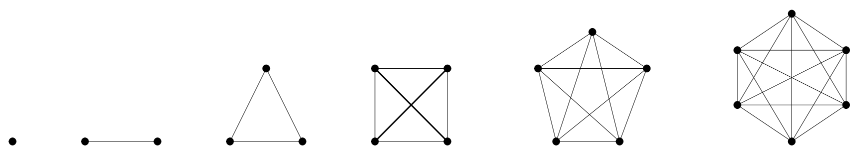
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



1.4.8.13 Beberapa Graf Khusus

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

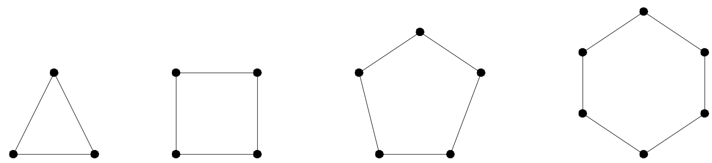
Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n-1)/2$.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

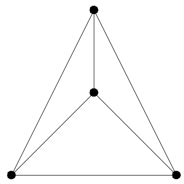
b. Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.



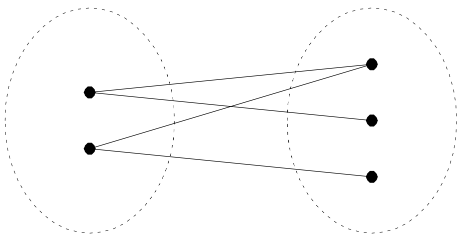
c. **Graf Teratur (*Regular Graphs*)**

Graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut **graf teratur**. Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r. Jumlah sisi pada graf teratur adalah $nr/2$.



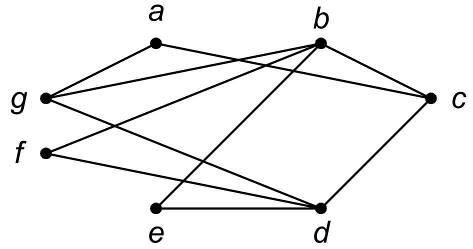
d. **Graf Bipartite (*Bipartite Graph*)**

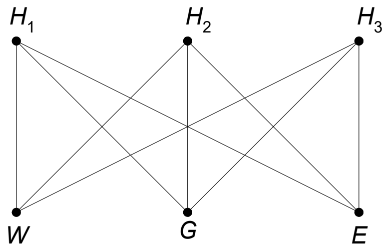
Graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.

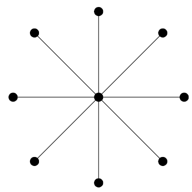


V_1 V_2

Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$







G

graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), topologi bintang

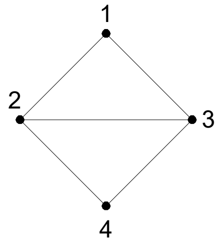
1.4.9 Represtasi Graf

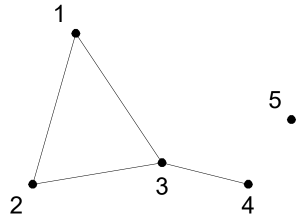
1.4.9.1 Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

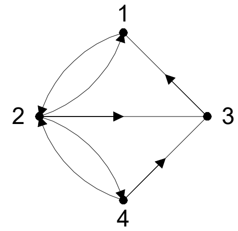
$A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Contoh:







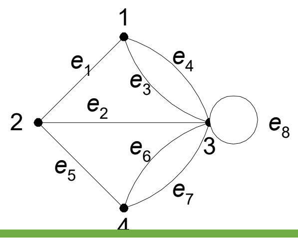
1 2 3 4

1 2 3 4 5

1 2 3 4

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (b) (c)



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

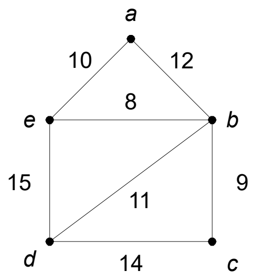
Derajat tiap simpul *i:*

(a) Untuk graf tak-berarah

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$



$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

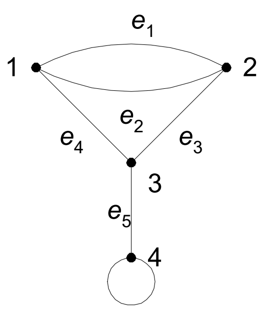
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\ \infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & \infty & 15 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

1.4.9.2 Matriks Bersisian

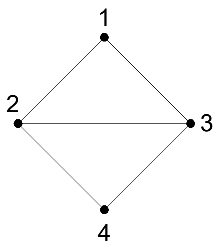
$A = [a_{ij}]$,

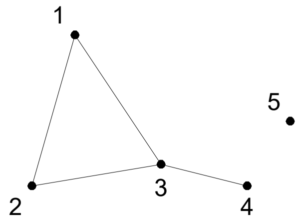
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$

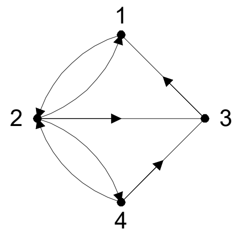
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



1.4.9.3 Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)







Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)

Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)

Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

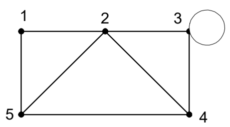
(c)

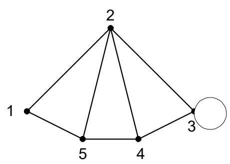
1.4.10 Graf Isomorfik

Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah. Gambarkan dua buah graf yang yang bersesuaian dengan matriks.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

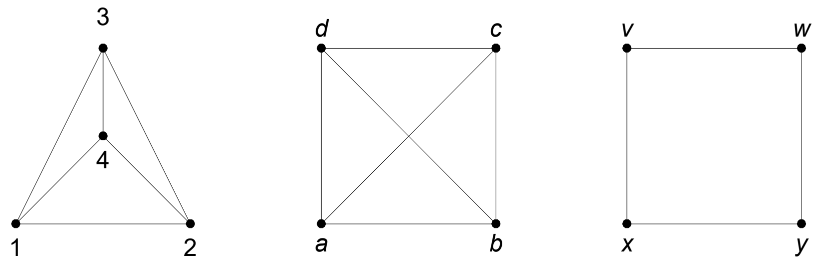
Jawaban:





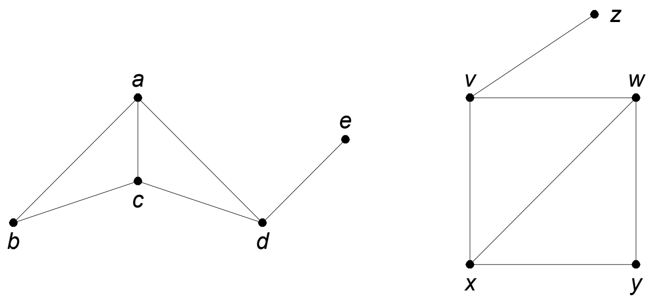
Dua buah graf yang sama (hanya penggambaran secara geometri berbeda)→**isomorfik**!

a. Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik.**
b. Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduaya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.
c. Dengan kata lain, misalkan sisi *e* bersisian dengan simpul *u* dan *v* di G_1, maka sisi *e*' yang berkoresponden di G_2 harus bersisian dengan simpul *u*' dan *v*' yang di G_2.
d. Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

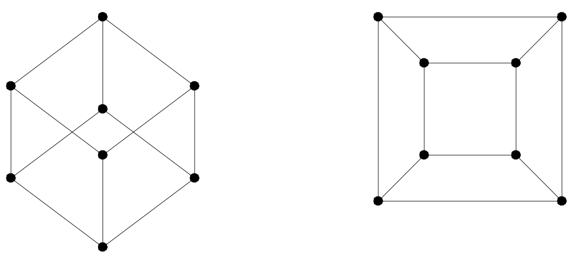
Gambar 6.35 G_1 isomorfik dengan G_2, tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3



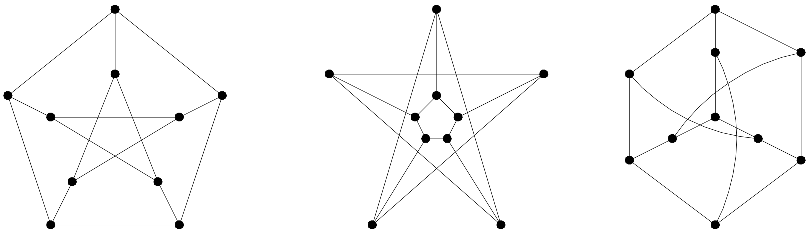
(a) G_1 (b) G_2

Gambar 6.36 Graf (a) dan graf (b) isomorfik [DEO74]

$$A_{G1} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_{G2} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



(a)



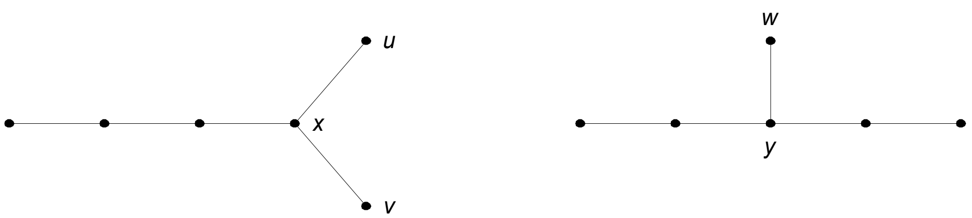
(b)

Gambar 6.38 (a) Dua buah graf isomorfik, (b) tiga buah graf isomorfik

Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:

1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama.
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu.

Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan.

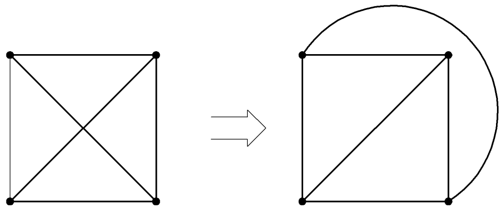


(a) (b)

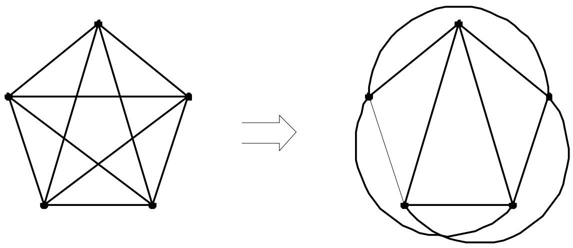
1.4.11 Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph)*

a. Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan) disebut **graf planar.**
b. jika tidak, maka ia disebut **graf tak-planar.**

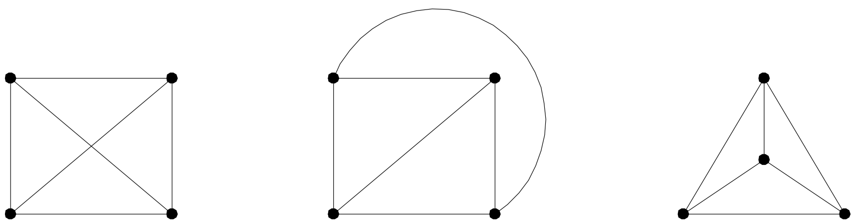
c. K_4 adalah graf planar:



d. K_5 adalah graf tidak planar:



Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut **graf bidang** (*plane graph*).

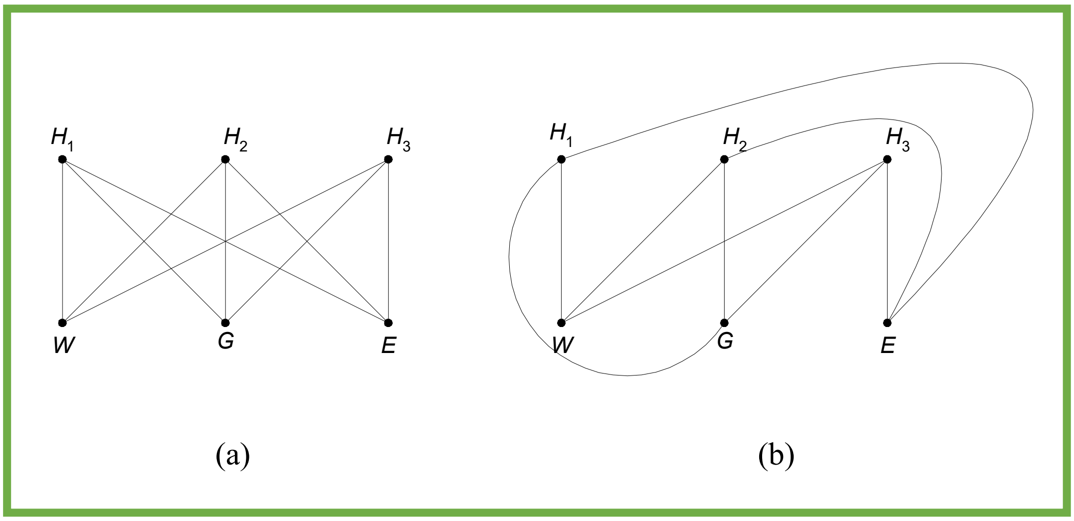


(a) (b) (c)

Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

1.4.11.1 Aplikasi Graf Planar

Persoalan utilitas (*utility problem)*

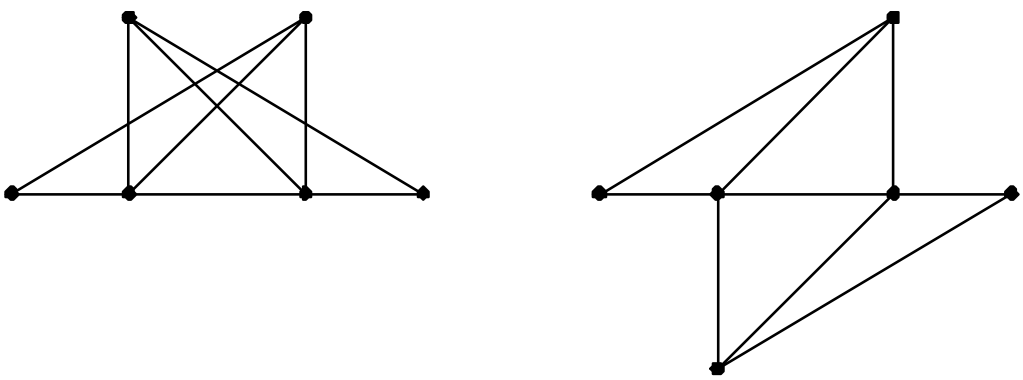


(a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

a. Perancangan IC (*Integrated Circuit*)
b. Tidak boleh ada kawat-kawat di dalam *IC-board* yang saling bersilangan → dapat menimbulkan interferensi arus listrik →*malfunction*
c. Perancangan kawat memenuhi prinsip graf planar

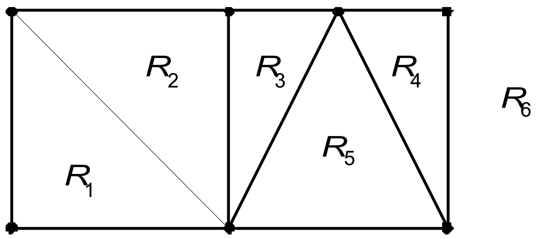
Contoh:

Gambarkan graf (kiri) di bawah ini sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan (menjadi graf bidang). (Solusi: graf kanan)



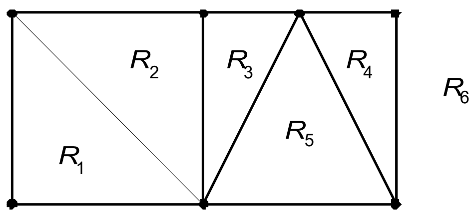
Sisi-sisi pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah (*region*) atau muka (*face*).

Graf bidang pada gambar di bawah initerdiri atas 6 wilayah (termasuk wilayah terluar):



Hubungan antara jumlah simpul (n), jumlah sisi (e), dan jumlah wilayah (f) pada graf bidang:

$\boxed{n - e + f = 2}$ (Rumus Euler)



Pada Gambar di atas, $e = 11$ dan $n = 7$, $f = 6$, maka

$11 - 7 + 6 = 2$

Contoh:

- Misalkan graf sederhana planar memiliki 24 buah simpul, masing-masing simpulberderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk?
- Jawab:
  - Diketahui n = jumlah simpul = 24, maka jumlah derajat seluruh simpul = $24 \times 4 = 96$.Menurut *lemma* jabat tangan,
    Jumlah derajat = 2 x jumlah sisi,

Sehingga

Jumlah sisi = e = jumlah derajat/2 = 96/2 = 48

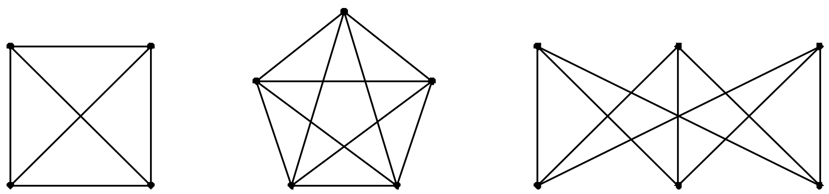
- Dari rumus Euler, $n - e + f = 2$, sehingga

  $f = 2 - n + e = 2 - 24 + 48 = 26$ buah.

Contoh:

- Pada K_4, $n = 4$, $e = 6$, memenuhi ketidaksamaan Euler, sebab $6 \leq 3(4) - 6$. Jadi, K_4 adalah graf planar

  Pada graf K_5, $n = 5$ dan $e = 10$, tidak memenuhi ketidaksamaan Euler sebab $10 \geq 3(5) - 6$. Jadi, K_5 tidak planar.

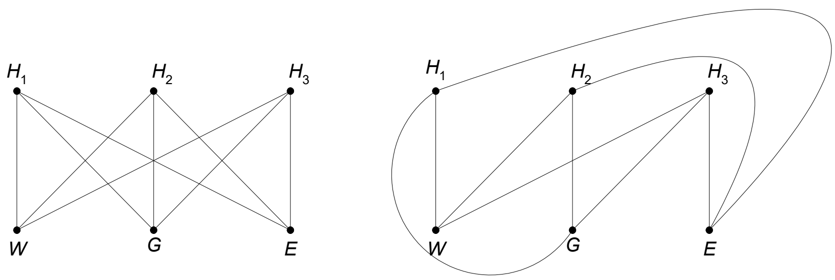


K_4 K_5 $K_{3,3}$

Contoh Graf $K_{3,3}$ pada Gambar di bawah memenuhi ketidaksamaan $e \leq 2n - 6$, karena $e = 9$, $n = 6$

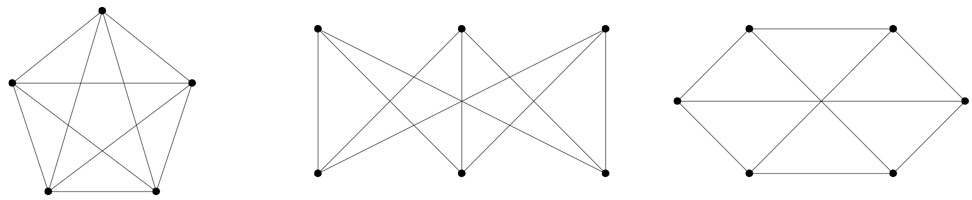
$9 \leq (2)(6) - 4 = 8$ (salah)

Yang berarti $K_{3,3}$ bukan graf planar.



1.4.12 Teorema Kuratoswki

Berguna untuk menentukan dengan tegas keplanaran suat graf.



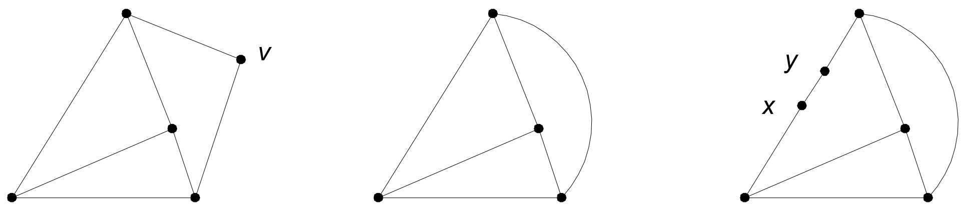
(a) (b) (c)

Gambar (a) Graf Kuratowski pertama (K_5)
(b) Graf Kuratowski kedua ($K_{3,3}$)
(c) Graf yang isomorfik dengan graf Kuratowski kedua

Sifat graf Kuratowski adalah:

1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar.
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

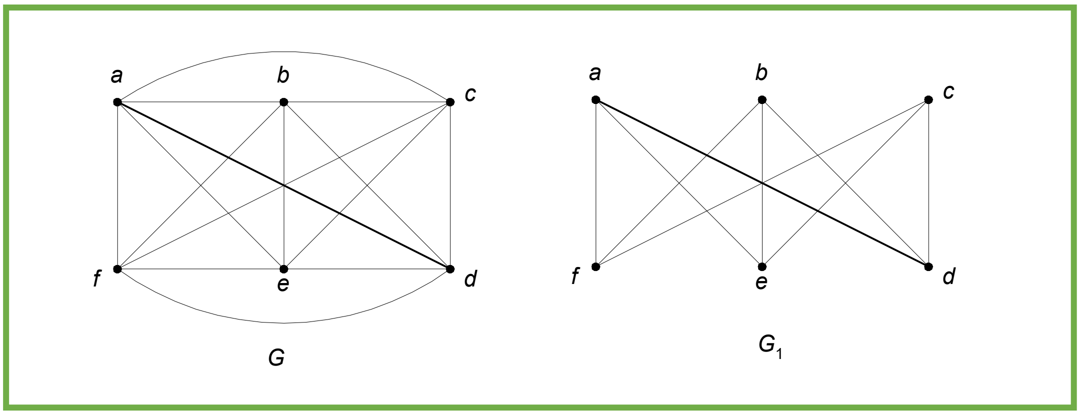
TEOREMA Kuratowski. Graf *G* bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.



G_1 G_2 G_3

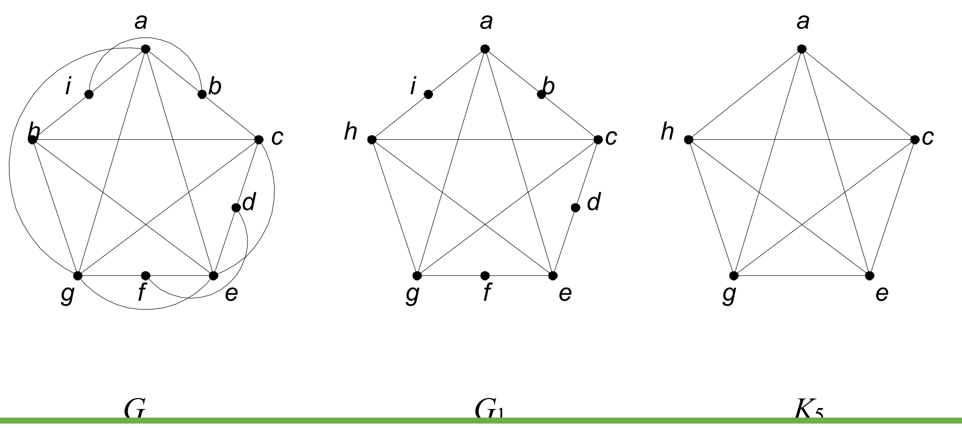
Gambar Tiga buah graf yang homemorfik satu sama lain.

Contoh: Kita gunakan Teorema Kuratowski untuk memeriksa keplanaran graf. Graf G dibawah ini bukan graf planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang sama dengan $K_{3,3.}$



Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf yang sama dengan $K_{3,3.}$

Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang homeomorfik dengan K_5 (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari G_1, diperoleh K_5).



Gambar Graf G, upagraf G_1 dari G yang homeomorfik dengan $K_{5.}$

1.4.13 Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan Euler ialah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Euler ialah sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali.

Graf yang mempunyai sirkuit Euler disebut **graf Euler** (*Eulerian graph*). Graf yang mempunyai lintasan Euler dinamakan juga graf **semi-Euler** (*semi-Eulerian graph*).

Contoh:

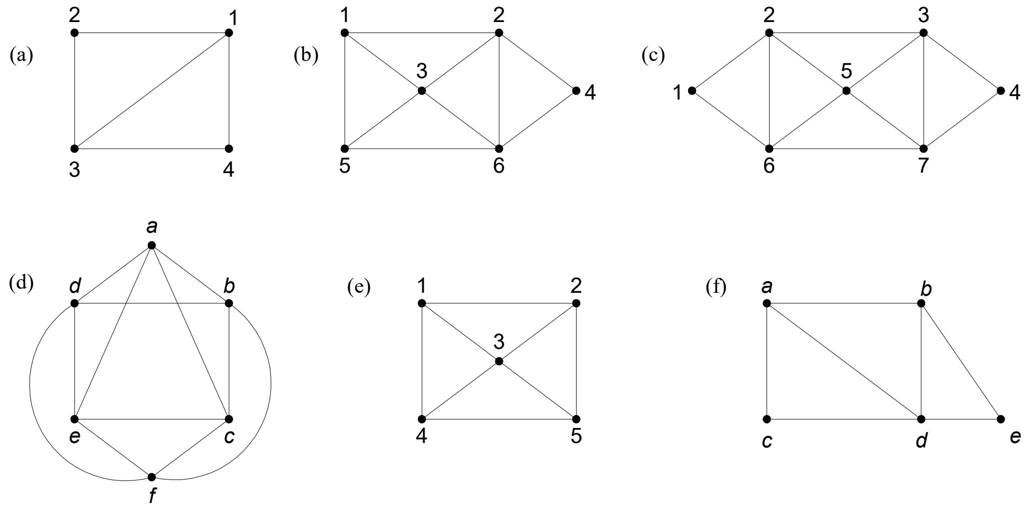
Lintasan Euler pada graf (a) : 3, 1, 2, 3, 4, 1

Lintasan Euler pada graf (b) : 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3

Sirkuit Euler pada graf (c) : 1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6, 1

Sirkuit Euler pada graf (d) : *a*, *c*, *f*, *e*, *c*, *b*, *d*, *e*, *a*, *d*, *f*, *b*, *a*

Graf (e) dan (f) tidak mempunyai lintasan maupun sirkuit Euler



(a) dan (b) graf semi-Euler

(c) dan (d) graf Euler

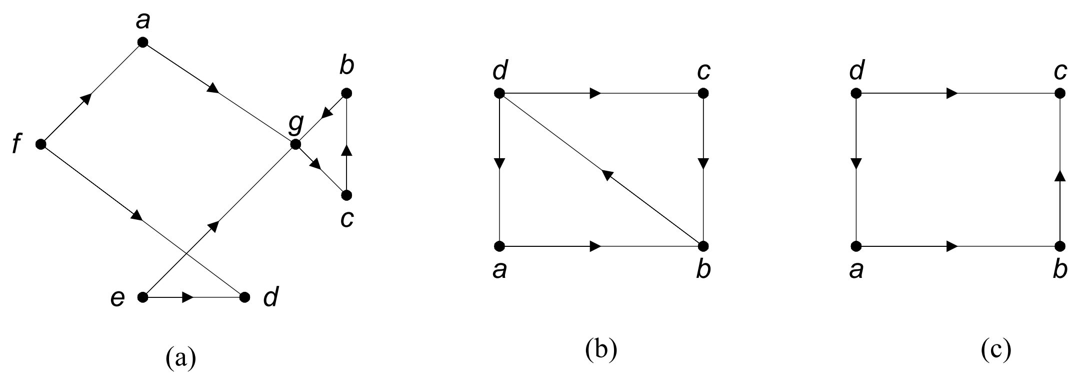
(e) dan (f) bukan graf semi-Euler atau graf Euler.

TEOREMA. Graf tidak berarah memiliki lintasan Euler jika (graf semi-Euler) dan hanya jika terhubung dan memiliki dua buah simpul berderajat ganjil atau tidak ada simpul berderajat ganjil sama sekali.

TEOREMA

(a) Graf berarah G memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama.

(b) G memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk satu lebih besar dari derajat-keluar.



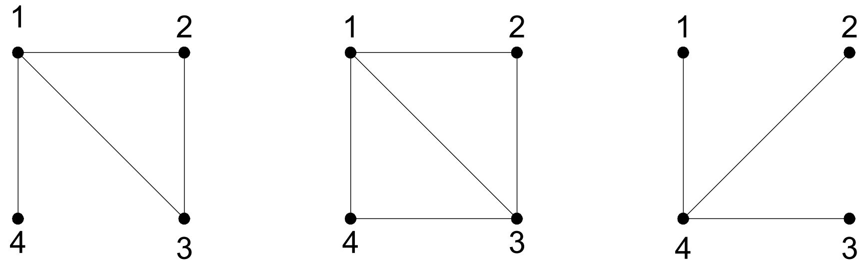
Gambar (a) Graf Euler (*a*, *g*, *c*, *b*, *g*, *e*, *d*, *f*, *a*)
(b) Graf berarah semi-Euler (*d*, *a*, *b*, *d*, *c*, *b*)
(c) Graf berarah bukan Euler maupun semi-Euler

1.4.14 Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Lintasan Hamilton ialah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Hamilton ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui dua kali.

Graf yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan **graf Hamilton**, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut **graf semi-Hamilton.**



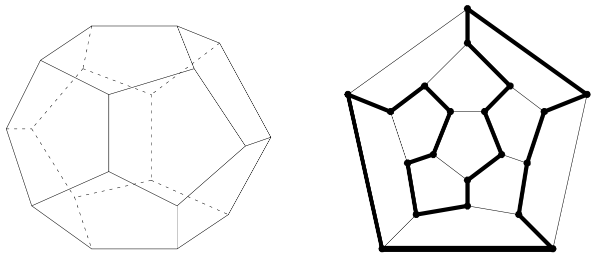
(a) (b) (c)

(a) graf yang memiliki lintasan Hamilton (misal: 3, 2, 1, 4)

(b) graf yang memiliki lintasan Hamilton (1, 2, 3, 4, 1)

(c) graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton

TEOREMA. Graf tidak berarah G adalah graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul berderajat genap.



(a) (b)

(a) *Dodecahedron* Hamilton.

(b) graf yang mengandung sirkuit Hamilton.

TEOREMA. Syarat cukup supaya graf sederhana G dengan n (≥ 3) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit $n/2$ (yaitu, $d(v) \geq n/2$ untuk setiap simpul v di G). *(coba nyatakan dalam "jika p maka q")*

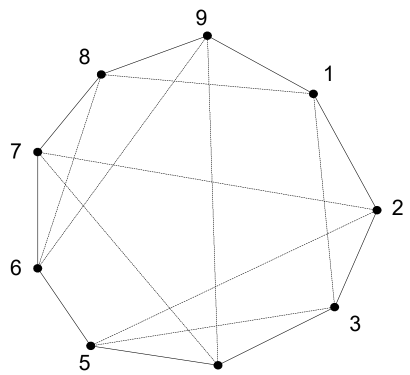
TEOREMA. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

TEOREMA. Di dalam graf lengkap *G* dengan *n* buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $(n - 1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

TEOREMA. Di dalam graf lengkap *G* dengan *n* buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat $(n - 1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika *n* genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $(n - 2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

Contoh. Sembilan anggota sebuah klub bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian sehingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda pada setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dapat dilaksanakan?

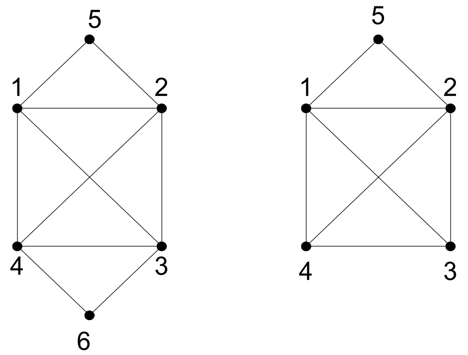
Jawaban: Jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda adalah $(9 - 1)/2 = 4$.



Gambar Graf yang merepresentasikan persoalan pengaturan tempat duduk.

Beberapa graf dapat mengandung sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, dan sebagainya.

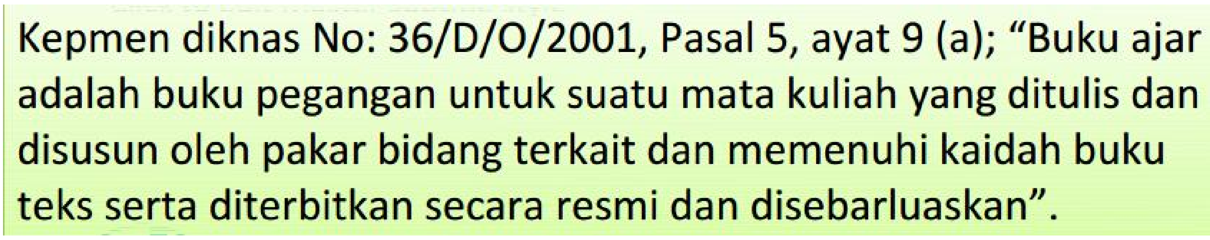
(a) (b)



(a) Graf Hamilton sekaligus graf Euler.

(b) Graf Hamilton sekaligus graf semi-Euler.

Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebar luaskan. Buku teks atau buku referensi adalah suatu tulisan ilmiah dalam bentuk buku yang substansi pembahasannya fokus pada satu bidang ilmu. Buku teks membahas topik yang cukup luas (satu bidang ilmu). Urutan materi dan struktur buku teks disusun berdasarkan logika bidang ilmu (content oriented), diterbitkan secara resmi untuk dipasarkan. Buku Diktat adalah bahan ajar untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pengajar matakuliah tersebut, mengikuti kaidah tulisan ilmiah dan disebar luaskan kepada peserta kuliah.


Kepmen diknas No: 36/D/O/2001, Pasal 5, ayat 9 (a); “Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu mata kuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebarluaskan”.

Gambar 1.1. Contoh Gambar

Tabel 1.1. Contoh Tabel

Judul Kolom 1	**Judul Kolom 2**	**Judul Kolom 3**

6.3. Informasi Pendukung

Buku ajar diketik dengan komputer huruf Times New Roman (font 12) pada kertas ukuran A4 dengan jarak 1,5 spasi, beserta softcopy dalam CD. Jumlah halaman buku tidak kurang dari 200 halaman, tidak termasuk Prakata, Daftar Isi, dan Lampiran. Unsur buku yang harus ada: (1) Prakata, (2) Daftar Isi, (3) Batang tubuh yang terbagi dalam bab atau bagian, (4) Daftar Pustaka, (5) Glosarium, (6) Indeks (sebaiknya). Penulisan Buku Ajar termasuk dalam kegiatan melaksanakan pengajaran. Angka kredit 20 per buku. Batas Kepatutan Buku Ajar/Buku Teks adalah 1 Buku/Tahun.

Buku Ajar berusaha menimbulkan minat baca dan dirancang dan ditulis untuk mahasiswa. Menjelaskan tujuan instruksional. Dipergunakan oleh dosen dan mahasiswa dalam proses perkuliahan. Disusun berdasar pola belajar yg fleksibel, sistematis dan terstruktur berdasarkan kebutuhan mahasiswa dan kompetensi akhir yang ingin dicapai. Fokus pada pemberian kesempatan bagi mahasiswa untuk berlatih. Memberi rangkuman. Gaya penulisan komunikatif. Ada umpan balik. Mengakomodasi kesulitan belajar mahasiswa. Menjelaskan cara mempelajari bahan ajar.

Diktat adalah bahan ajar untuk suatu mata kuliah yang ditulis oleh pengajar mata kuliah tersebut. Mengikuti kaidah penulisan ilmiah dan disebarluaskan kepada peserta kuliah. Angka kredit maksimal adalah 5.

6.4. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

9. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
10. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
11. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

6.5. Kesimpulan / Ringkasan

Kesimpulan atau ringkasan atau rangkuman berisi rangkuman dari paparan materi diatas.

6.6. Latihan dan Evaluasi

1. Dalam sebuah pesta sepuluh orang sating berjabat tangan. Tiap orang hanya berjabat tangan satu kah dengan orang lain. Hitung jumlah jabat tangan yang terjadi (Petunjuk : modelkan persoalan ini ke dalam graf)
2. Tiga pasang suami istri yang sedang menempuh perjalanan sampai ke sebuah sungai. Di situ mereka menemukan sebuah perahu kecil yang hanya bisa membawa tidak lebih dari dua orang setiap kali menyeberang. Penyeberangan sungai dirumitkan oleh kenyataan bahw para suami sangat pencemburu dan tidak mau meninggalkan istri-istri mereka jika ada prig lain. Buatlah sebuah graf untuk menunjukkan bagaimana penyeberangan itu bisa dilakukan
3. Di suatu negara terdapat 7 stasiun televisi. Pemerintah menetapkan aturan bahwa dua stasiun televisi yang berjarak <_ 150 km tidak boleh beroperasi pada saluran frekuensi yang sama. Tabel di bawah ini memperlihatkan jarak (km) stasiun televisi satu dengan lainnya.

4. Pada turnamen bolavoly dengan sistem round-robin tim DIY memukul Jabar, DIY memukul Jatim , DIY memukul DKI, Jabar memukul Jatim, Jabar memukul DKI, dan Jatim memukul DKI. Modelkan dengan graf berarahnya.
5. Sebuah graf akan dibentuk dari 25 buah sisi. Berapa jumlah maksimum simpul di dalam grafsederhana yang dapat dibuat dari 25 buah sisi tersebut?
6. Ada n buah yang akan dihubungkan dengan sejumlahh kabel, baik secara langsung atau terhubng ke computer lainnnya. Berapa jiJmloii filininlUiil i~ouci yang divuiuhkoi-,?
7. Tentukan ju- a,: pada graf sederhana bila mempunyai 12 buah sisi dan tiap simpulberderajat d,:a
8. Bila K, adaia^ ara` !engkap dengan n simpul. Berapakah derajat setiap simpulnya?
9. Gambarkan cer~*or sebuah graf teratur, dan terhubung dengan 6 simpul tetapi bukan graf lengkap.
10. Berapa totala.:s.;r dada graf lengkap K, ? Jelaskan jawaban anda
11. Tentukan simpul pada graf sederhana bila mempunyai 20 buah sisi dan tiap simpul berderajat sa-:a
12. Tunjukan bar-ma cerajat maksimum sembarang simpul pada sembarang graf sederhanary dengan r s~~-~~ araiah n -1
13. Gambarkan dua buah graf teratur berderajat 3 dengan 6 buah simpul.
14. Dapatkah kIta Menggambar graf sederhana dengan 15 buah simpul dimana setiap simpulnya berderajat 5"%
15. Dapatkah ,?a -enagambar graf teratur derajat dengan 7 buah simpul?
16. Dapatkah graf tidak berarah sederhana dengan 8 simpul memiliki 40 buah sisi?
17. Berapa banyak --,.,s-,r suatu graf bila simpulnya berderajat adalah 4, 3, 3, 2, 2? Kemudian gambarkan craf tersebut!
18. Apakah ada gray sederhana terdiri lima simpul dengan derajat sebagai berikut ? Jika ada gambarkan cra'^ya'

    a. 3. 3. 3, 3. 2 c. 0, 1, 2, 2, 3

    b. 1.2.3,4,5 d. 1,1,1,1,1
19. Sajikan graf berikut dengan adjency matrix (matriks ketetanggaan)

    a. KK c. Kzs b. K,~ d. C4
20. Dapatkah lima rumah dihubungkan dengan dua utilitas tanpa hubungan silang?
21. Untuk n apakah graf lengkap K,, merupakan graf Euler?

22. Perusahaan kontraktor Euler dikontrak untuk membangun sebuah jembatan tambahan di Konigsberg sedemikian sehingga ada lintasan Euler yang melintasi setiap jembatan. Di mana jembatan tambahan itu harus dibangun? Gambarkan grafnya
23. Gambarkan graf yang mempunyai lintasan Hamilton tetapi tidak memiliki sirkuit Hamilton.

6.7. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

6.8. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

BAB 7. JUDUL POKOK BAHASAN MINGGU PERTAMA

Setiap Bab adalah Pokok Bahasan pada 1 (satu) minggu pertemuan sesuai SAP Mata Kuliah. Jumlah Bab sama dengan jumlah minggu pertemuan dalam SAP Matakuliah.

7.1. Tujuan Instruksional

Tujuan instruksional terbagi menjadi 2 dalam SAP yaitu Tujuan Instruksional Umum (TIU) dan Tujuan Instruksional Khusus (TIK).

a. Tujuan Instruksional Umum

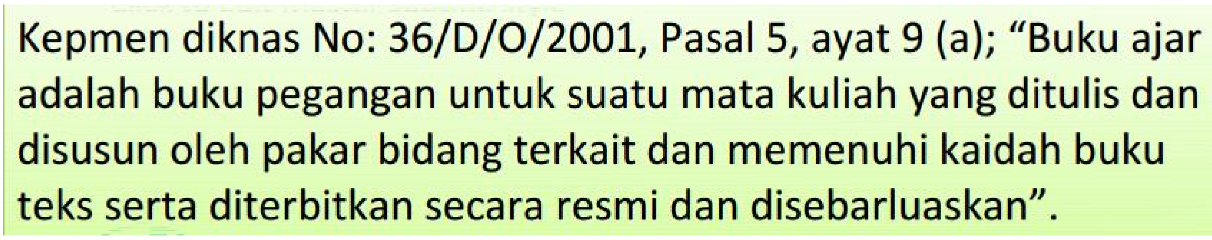
Ini merupakan tujuan dari mata kuliah. Struktur TIK dari setiap pokok bahasan akan membentuk / atau memastikan tercapainya TIU.

b. Tujuan Instruksional Khusus

Ini merupakan tujuan dari setiap pokok bahasan. Setiap pokok bahasan memiliki TIK. Kumpulan dari TIK akan membentuk TIU.

7.2. Paparan Materi (Judul setiap sub bab dari pokok bahasan)

Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebar luaskan. Buku teks atau buku referensi adalah suatu tulisan ilmiah dalam bentuk buku yang substansi pembahasannya fokus pada satu bidang ilmu. Buku teks membahas topik yang cukup luas (satu bidang ilmu). Urutan materi dan struktur buku teks disusun berdasarkan logika bidang ilmu (content oriented), diterbitkan secara resmi untuk dipasarkan. Buku Diktat adalah bahan ajar untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pengajar matakuliah tersebut, mengikuti kaidah tulisan ilmiah dan disebar luaskan kepada peserta kuliah.


Kepmen diknas No: 36/D/O/2001, Pasal 5, ayat 9 (a); "Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu mata kuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebarluaskan".

Gambar 1.1. Contoh Gambar

Tabel 1.1. Contoh Tabel

Judul Kolom 1	Judul Kolom 2	Judul Kolom 3

7.3. Informasi Pendukung

Buku ajar diketik dengan komputer huruf Times New Roman (font 12) pada kertas ukuran A4 dengan jarak 1,5 spasi, beserta softcopy dalam CD. Jumlah halaman buku tidak kurang dari 200 halaman, tidak termasuk Prakata, Daftar Isi, dan Lampiran. Unsur buku yang harus ada: (1) Prakata, (2) Daftar Isi, (3) Batang tubuh yang terbagi dalam bab atau bagian, (4) Daftar Pustaka, (5) Glosarium, (6) Indeks (sebaiknya). Penulisan Buku Ajar termasuk dalam kegiatan melaksanakan pengajaran. Angka kredit 20 per buku. Batas Kepatutan Buku Ajar/Buku Teks adalah 1 Buku/Tahun.

Buku Ajar berusaha menimbulkan minat baca dan dirancang dan ditulis untuk mahasiswa. Menjelaskan tujuan instruksional. Dipergunakan oleh dosen dan mahasiswa dalam proses perkuliahan. Disusun berdasar pola belajar yg fleksibel, sistematis dan terstruktur berdasarkan kebutuhan mahasiswa dan kompetensi akhir yang ingin dicapai. Fokus pada pemberian kesempatan bagi mahasiswa untuk berlatih. Memberi rangkuman. Gaya penulisan komunikatif. Ada umpan balik. Mengakomodasi kesulitan belajar mahasiswa. Menjelaskan cara mempelajari bahan ajar.

Diktat adalah bahan ajar untuk suatu mata kuliah yang ditulis oleh pengajar mata kuliah tersebut. Mengikuti kaidah penulisan ilmiah dan disebarluaskan kepada peserta kuliah. Angka kredit maksimal adalah 5.

7.4. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

12. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
13. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
14. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

7.5. Kesimpulan / Ringkasan

Kesimpulan atau ringkasan atau rangkuman berisi rangkuman dari paparan materi diatas.

7.6. Latihan dan Evaluasi

Setiap akhir dari bab atau sub bab diberikan latihan untuk mengevaluasi pemahaman mahasiswa.

7.7. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

7.8. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

BAB 8. JUDUL POKOK BAHASAN MINGGU PERTAMA

Setiap Bab adalah Pokok Bahasan pada 1 (satu) minggu pertemuan sesuai SAP Mata Kuliah. Jumlah Bab sama dengan jumlah minggu pertemuan dalam SAP Matakuliah.

8.1. Tujuan Instruksional

Tujuan instruksional terbagi menjadi 2 dalam SAP yaitu Tujuan Instruksional Umum (TIU) dan Tujuan Instruksional Khusus (TIK).

c. Tujuan Instruksional Umum

Ini merupakan tujuan dari mata kuliah. Struktur TIK dari setiap pokok bahasan akan membentuk / atau memastikan tercapainya TIU.

d. Tujuan Instruksional Khusus

Ini merupakan tujuan dari setiap pokok bahasan. Setiap pokok bahasan memiliki TIK. Kumpulan dari TIK akan membentuk TIU.

8.2. Paparan Materi (Judul setiap sub bab dari pokok bahasan)

Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebar luaskan. Buku teks atau buku referensi adalah suatu tulisan ilmiah dalam bentuk buku yang substansi pembahasannya fokus pada satu bidang ilmu. Buku teks membahas topik yang cukup luas (satu bidang ilmu). Urutan materi dan struktur buku teks disusun berdasarkan logika bidang ilmu (content oriented), diterbitkan secara resmi untuk dipasarkan. Buku Diktat adalah bahan ajar untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pengajar matakuliah tersebut, mengikuti kaidah tulisan ilmiah dan disebar luaskan kepada peserta kuliah.

Kepmen diknas No: 36/D/O/2001, Pasal 5, ayat 9 (a); "Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu mata kuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebarluaskan".

Gambar 1.1. Contoh Gambar

Tabel 1.1. Contoh Tabel

Judul Kolom 1	Judul Kolom 2	Judul Kolom 3

8.3. Informasi Pendukung

Buku ajar diketik dengan komputer huruf Times New Roman (font 12) pada kertas ukuran A4 dengan jarak 1,5 spasi, beserta softcopy dalam CD. Jumlah halaman buku tidak kurang dari 200 halaman, tidak termasuk Prakata, Daftar Isi, dan Lampiran. Unsur buku yang harus ada: (1) Prakata, (2) Daftar Isi, (3) Batang tubuh yang terbagi dalam bab atau bagian, (4) Daftar Pustaka, (5) Glosarium, (6) Indeks (sebaiknya). Penulisan Buku Ajar termasuk dalam kegiatan melaksanakan pengajaran. Angka kredit 20 per buku. Batas Kepatutan Buku Ajar/Buku Teks adalah 1 Buku/Tahun.

Buku Ajar berusaha menimbulkan minat baca dan dirancang dan ditulis untuk mahasiswa. Menjelaskan tujuan instruksional. Dipergunakan oleh dosen dan mahasiswa dalam proses perkuliahan. Disusun berdasar pola belajar yg fleksibel, sistematis dan terstruktur berdasarkan kebutuhan mahasiswa dan kompetensi akhir yang ingin dicapai. Fokus pada pemberian kesempatan bagi mahasiswa untuk berlatih. Memberi rangkuman. Gaya penulisan komunikatif. Ada umpan balik. Mengakomodasi kesulitan belajar mahasiswa. Menjelaskan cara mempelajari bahan ajar.

Diktat adalah bahan ajar untuk suatu mata kuliah yang ditulis oleh pengajar mata kuliah tersebut. Mengikuti kaidah penulisan ilmiah dan disebarluaskan kepada peserta kuliah. Angka kredit maksimal adalah 5.

8.4. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

15. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
16. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
17. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

8.5. Kesimpulan / Ringkasan

Kesimpulan atau ringkasan atau rangkuman berisi rangkuman dari paparan materi diatas.

8.6. Latihan dan Evaluasi

Setiap akhir dari bab atau sub bab diberikan latihan untuk mengevaluasi pemahaman mahasiswa.

8.7. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

8.8. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

BAB 9. JUDUL POKOK BAHASAN MINGGU PERTAMA

Setiap Bab adalah Pokok Bahasan pada 1 (satu) minggu pertemuan sesuai SAP Mata Kuliah. Jumlah Bab sama dengan jumlah minggu pertemuan dalam SAP Matakuliah.

9.1. Tujuan Instruksional

Tujuan instruksional terbagi menjadi 2 dalam SAP yaitu Tujuan Instruksional Umum (TIU) dan Tujuan Instruksional Khusus (TIK).

e. Tujuan Instruksional Umum

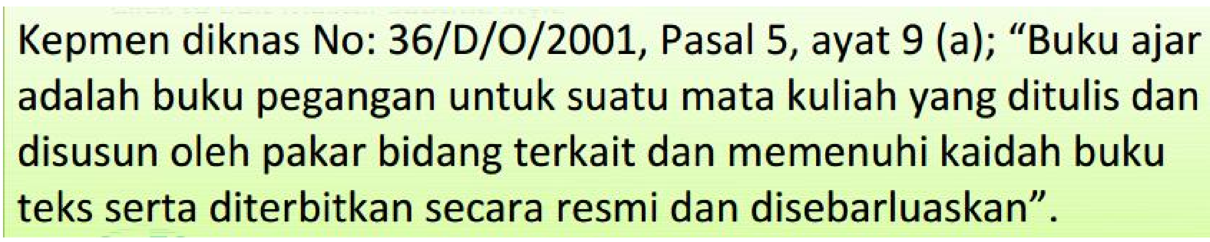
Ini merupakan tujuan dari mata kuliah. Struktur TIK dari setiap pokok bahasan akan membentuk / atau memastikan tercapainya TIU.

f. Tujuan Instruksional Khusus

Ini merupakan tujuan dari setiap pokok bahasan. Setiap pokok bahasan memiliki TIK. Kumpulan dari TIK akan membentuk TIU.

9.2. Paparan Materi (Judul setiap sub bab dari pokok bahasan)

Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebar luaskan. Buku teks atau buku referensi adalah suatu tulisan ilmiah dalam bentuk buku yang substansi pembahasannya fokus pada satu bidang ilmu. Buku teks membahas topik yang cukup luas (satu bidang ilmu). Urutan materi dan struktur buku teks disusun berdasarkan logika bidang ilmu (content oriented), diterbitkan secara resmi untuk dipasarkan. Buku Diktat adalah bahan ajar untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pengajar matakuliah tersebut, mengikuti kaidah tulisan ilmiah dan disebar luaskan kepada peserta kuliah.


Kepmen diknas No: 36/D/O/2001, Pasal 5, ayat 9 (a); "Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu mata kuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebarluaskan".

Gambar 1.1. Contoh Gambar

Tabel 1.1. Contoh Tabel

Judul Kolom 1	Judul Kolom 2	Judul Kolom 3

9.3. Informasi Pendukung

Buku ajar diketik dengan komputer huruf Times New Roman (font 12) pada kertas ukuran A4 dengan jarak 1,5 spasi, beserta softcopy dalam CD. Jumlah halaman buku tidak kurang dari 200 halaman, tidak termasuk Prakata, Daftar Isi, dan Lampiran. Unsur buku yang harus ada: (1) Prakata, (2) Daftar Isi, (3) Batang tubuh yang terbagi dalam bab atau bagian, (4) Daftar Pustaka, (5) Glosarium, (6) Indeks (sebaiknya). Penulisan Buku Ajar termasuk dalam kegiatan melaksanakan pengajaran. Angka kredit 20 per buku. Batas Kepatutan Buku Ajar/Buku Teks adalah 1 Buku/Tahun.

Buku Ajar berusaha menimbulkan minat baca dan dirancang dan ditulis untuk mahasiswa. Menjelaskan tujuan instruksional. Dipergunakan oleh dosen dan mahasiswa dalam proses perkuliahan. Disusun berdasar pola belajar yg fleksibel, sistematis dan terstruktur berdasarkan kebutuhan mahasiswa dan kompetensi akhir yang ingin dicapai. Fokus pada pemberian kesempatan bagi mahasiswa untuk berlatih. Memberi rangkuman. Gaya penulisan komunikatif. Ada umpan balik. Mengakomodasi kesulitan belajar mahasiswa. Menjelaskan cara mempelajari bahan ajar.

Diktat adalah bahan ajar untuk suatu mata kuliah yang ditulis oleh pengajar mata kuliah tersebut. Mengikuti kaidah penulisan ilmiah dan disebarluaskan kepada peserta kuliah. Angka kredit maksimal adalah 5.

9.4. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

18. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
19. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
20. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

9.5. Kesimpulan / Ringkasan

Kesimpulan atau ringkasan atau rangkuman berisi rangkuman dari paparan materi diatas.

9.6. Latihan dan Evaluasi

Setiap akhir dari bab atau sub bab diberikan latihan untuk mengevaluasi pemahaman mahasiswa.

9.7. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

9.8. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

BAB 10. JUDUL POKOK BAHASAN MINGGU PERTAMA

Setiap Bab adalah Pokok Bahasan pada 1 (satu) minggu pertemuan sesuai SAP Mata Kuliah. Jumlah Bab sama dengan jumlah minggu pertemuan dalam SAP Matakuliah.

10.1. Tujuan Instruksional

Tujuan instruksional terbagi menjadi 2 dalam SAP yaitu Tujuan Instruksional Umum (TIU) dan Tujuan Instruksional Khusus (TIK).

g. Tujuan Instruksional Umum

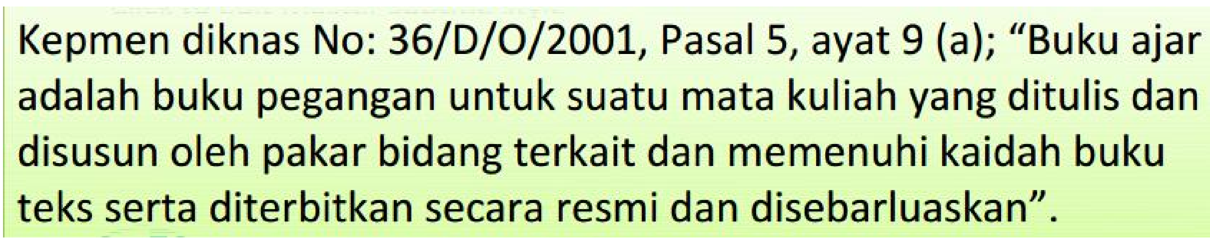
Ini merupakan tujuan dari mata kuliah. Struktur TIK dari setiap pokok bahasan akan membentuk / atau memastikan tercapainya TIU.

h. Tujuan Instruksional Khusus

Ini merupakan tujuan dari setiap pokok bahasan. Setiap pokok bahasan memiliki TIK. Kumpulan dari TIK akan membentuk TIU.

10.2. Paparan Materi (Judul setiap sub bab dari pokok bahasan)

Buku ajar adalah buku pegangan untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pakar bidang terkait dan memenuhi kaidah buku teks serta diterbitkan secara resmi dan disebar luaskan. Buku teks atau buku referensi adalah suatu tulisan ilmiah dalam bentuk buku yang substansi pembahasannya fokus pada satu bidang ilmu. Buku teks membahas topik yang cukup luas (satu bidang ilmu). Urutan materi dan struktur buku teks disusun berdasarkan logika bidang ilmu (content oriented), diterbitkan secara resmi untuk dipasarkan. Buku Diktat adalah bahan ajar untuk suatu matakuliah yang ditulis dan disusun oleh pengajar matakuliah tersebut, mengikuti kaidah tulisan ilmiah dan disebar luaskan kepada peserta kuliah.



Gambar 1.1. Contoh Gambar

Tabel 1.1. Contoh Tabel

Judul Kolom 1	Judul Kolom 2	Judul Kolom 3

10.3. Informasi Pendukung

Buku ajar diketik dengan komputer huruf Times New Roman (font 12) pada kertas ukuran A4 dengan jarak 1,5 spasi, beserta softcopy dalam CD. Jumlah halaman buku tidak kurang dari 200 halaman, tidak termasuk Prakata, Daftar Isi, dan Lampiran. Unsur buku yang harus ada: (1) Prakata, (2) Daftar Isi, (3) Batang tubuh yang terbagi dalam bab atau bagian, (4) Daftar Pustaka, (5) Glosarium, (6) Indeks (sebaiknya). Penulisan Buku Ajar termasuk dalam kegiatan melaksanakan pengajaran. Angka kredit 20 per buku. Batas Kepatutan Buku Ajar/Buku Teks adalah 1 Buku/Tahun.

Buku Ajar berusaha menimbulkan minat baca dan dirancang dan ditulis untuk mahasiswa. Menjelaskan tujuan instruksional. Dipergunakan oleh dosen dan mahasiswa dalam proses perkuliahan. Disusun berdasar pola belajar yg fleksibel, sistematis dan terstruktur berdasarkan kebutuhan mahasiswa dan kompetensi akhir yang ingin dicapai. Fokus pada pemberian kesempatan bagi mahasiswa untuk berlatih. Memberi rangkuman. Gaya penulisan komunikatif. Ada umpan balik. Mengakomodasi kesulitan belajar mahasiswa. Menjelaskan cara mempelajari bahan ajar.

Diktat adalah bahan ajar untuk suatu mata kuliah yang ditulis oleh pengajar mata kuliah tersebut. Mengikuti kaidah penulisan ilmiah dan disebarluaskan kepada peserta kuliah. Angka kredit maksimal adalah 5.

10.4. Dinamika Belajar

Dinamika belajar menggambarkan skenario aktivitas yang akan dilakukan pembaca (mahasiswa). Bagian dinamika belajar ini, dirancang untuk memastikan tercapainya sasaran pembelajaran (TIK). Rancangan dimaksud menggambarkan apa yang dilakukan oleh mahasiswa. Beberapa dinamika yang dapat dimasukkan seperti:

21. Praktik: Praktik dapat berupa prakti di kelas, praktik di laboratorium, atau praktik lapangan.
22. Tugas: Dapat berupa tugas pribadi, tugas kelompok, atau Kerja kelompok.
23. Kegiatan: kegiatan dapat berupa pengamatan, kegiatan analisis, Eksperimen, demonstrasi, karya wisata, Permainan-permainan, simulasi: sosio drama.

10.5. Kesimpulan / Ringkasan

Kesimpulan atau ringkasan atau rangkuman berisi rangkuman dari paparan materi diatas.

10.6. Latihan dan Evaluasi

Setiap akhir dari bab atau sub bab diberikan latihan untuk mengevaluasi pemahaman mahasiswa.

10.7. Daftar Pustaka

Berikan referensi yang bisa dibaca mahasiswa mengenai pokok bahasan tersebut.

10.8. Bacaan yang Dianjurkan

Apabila ada bacaan lain untuk pengayaan pengetahuan mahasiswa selain dari daftar pustaka bisa ditambahkan.

DAFTAR PUSTAKA

Tuliskan daftar pustaka dalam format Vancouver / Harvard / IEEE secara konsisten.

GLOSARIUM

Glosarium adalah suatu daftar alfabetis istilah dalam suatu ranah pengetahuan tertentu yang dilengkapi dengan definisi untuk istilah-istilah tersebut.

INDEKS

Indeks adalah istilah atau daftar kata yang penting dalam suatu buku yang tersusun berdasarkan abjad dimana istilah atau kata ini memiliki informasi mengenai halaman itu ditemukan.

LABORATORIUM
TEKNIK INFORMATIKA
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN

UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN