Решим I-ую краевую задачу аналитически!

(опуская некоторые этапы)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t \geq 0 \;, \; 0 \leq x \leq 1 \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = \sin \pi x + \sin 3\pi x$$

1) Ищем частные решения в виде $\tilde{u}(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

$$+ \quad \begin{matrix} X(0)T(t) = 0 \\ X(1)T(t) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{matrix}$$

1.1) Задача Штурма-Лиувилля на СЗ: $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; x \in (0,1) \\ X(0) = 0, \; X(1) = 0 \end{cases}$

Решение: $\lambda_k = (\pi k)^2$, $X_k(x) = \sin(\pi k x)$, $k \in \mathbb{N}$

~~Ч.Р. $\tilde{u}_k(x,t) =$~~

1.2) $T'(t) + \lambda T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = e^{-\lambda t}$

Итого: Ч.Р. – $\tilde{u}_k(x,t) = \sin(\pi k x)\, e^{-\lambda_k t} = \sin(\pi k x)\, e^{-(\pi k)^2 t}$

2) Решение, удовл начальному усл в виде ЛК ЧР:

Очевидно ($k = 1$ и $k = 3$) $\quad \tilde{u}(x,t) = \sin \pi x \, e^{-\pi^2 t} + \sin 3\pi x \, e^{-9\pi^2 t}$

Ответ: $u(x,t) = \sin(\pi x) \cdot e^{-\pi^2 t} + \sin(3\pi x) \cdot e^{-9\pi^2 t}$

Выбор к-р схемы: по заданию

Порядок сходимости: $O(\tau+h^2)$

Условие устойчивости: $\tau \le 0{,}5h^2$

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}$$

$$y_i^{n+1}=y_i^n+\tau\left(\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}\right)$$