Mathématiques pour l'informatique 1

Année académique 2019–2020

C.Dozot@uliege.be - Beatrice.Lahaye@uliege.be

Remarque importante : Ce solutionnaire n'ayant pas été relu, il n'est pas exclu qu'il contienne des erreurs. N'hésitez pas à me contacter par e-mail en cas de doute ou pour me signaler une erreur. Merci d'avance pour vos remarques, B. Lahaye.

1 Propositions logiques et tables de vérité

Exercice 1. On dit que "P ou exclusif Q" est vrai si P ou Q est vrai mais pas simultanément P et Q. Écrire la table de vérité du "ou exclusif".

Solution :

P	Q	P ou excl. Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercice 2. Démontrer que les assertions suivantes sont logiquement équivalentes.

1. $P \Rightarrow Q$
2. $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
3. $\neg P \vee Q$

Exercice 3. Évaluer les assertions suivantes en utilisant les tables de vérités. Indiquez alors lesquelles parmi ces assertions sont des tautologies et lesquelles sont des contradictions.

1. $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R)$
2. $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \neg Q)$
3. $((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Rightarrow P$
4. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Solution :

1. Tautologie
2. Contradiction
3. Tautologie
4. Tautologie

Exercice 4. Démontrer que si P, Q et R sont des assertions, alors on a

$$(P \Rightarrow (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R).$$

Peut-on échanger les rôles de Q et R ?

Solution : On peut échanger les rôles de Q et R au vu de la symétrie de leurs rôles dans l'assertion de gauche.

Exercice 5. Ecrire la table de vérité des assertions suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données.

1. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ si P est faux
2. $P \wedge (P \vee Q)$ si Q est vrai
3. $P \vee (Q \Rightarrow R)$ si Q est faux

Solution :

P	Q	R	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1

P	Q	$P \wedge (P \vee Q)$
0	1	0
1	1	1

P	Q	R	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1

Exercice 6. Soient P, Q, R des propositions logiques. Dans chacun des cas suivants, les assertions citées sont-elles la négation l'une de l'autre ? Si non, donner la négation de chacune.

1. $(P \wedge Q)$ et $(\neg P \wedge \neg Q)$
2. $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$
3. $(P \Rightarrow (Q \wedge R))$ et $(P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$
4. $(P \Rightarrow (R \wedge \neg Q))$ et $((\neg R \vee Q) \wedge P)$

Solution :

1. Non.
   $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$
   $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \equiv (P \vee Q)$
2. Non.
   $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$
   $\neg(\neg P \Rightarrow \neg Q) \equiv (\neg P \wedge Q)$
3. Non.
   $\neg(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$
   $\neg(P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
4. Oui.

Exercice 7. En interprétant P par "je pars", Q par "tu restes" et R par "il n'y a personne", traduisez les assertions suivantes en phrases du langage naturel :

1. $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$
2. $(\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg R$

Solution :

1. Si nous partons tous les deux, alors il n'y a personne.
2. Si un de nous deux reste, alors il y a quelqu'un.

Exercice 8. Soient P la proposition "les chiens aboient" et Q la proposition "la caravane passe". Traduisez les phrases suivantes en langage propositionnel.

1. Si les chiens aboient, alors la caravane passe.
2. Les chiens n'aboient pas.
3. La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
4. Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Solution :

1. $P \Rightarrow Q$
2. $\neg P$
3. $\neg Q \vee P$
4. $\neg P \wedge \neg Q$

Exercice 9. Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Justifier.

1. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un carré est que tous ses côtés soient de même longueur.
2. Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un carré est que tous ses angles soient des angles droits.
3. une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme est que tous ses angles soient des angles droits.
4. Une condition nécessaire pour que le carré d'un réel soit plus grand ou égal à celui-ci est que ce réel soit négatif.
5. Une condition suffisante pour que le carré d'un réel soit plus grand ou égal à celui-ci est que ce réel soit négatif.
6. Une condition nécessaire pour que le carré d'un réel soit plus grand ou égal à celui-ci est que ce réel soit positif.

Solution :

1. F
2. V
3. V
4. F
5. V
6. F

2 Techniques de démonstration et tables de Karnaugh

Techniques de démonstration

Exercice 1. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$$

avec $a \neq 0$ et b des paramètres réels. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.

Exercice 3. Montrer que si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

Exercice 4. Montrer que la racine carrée d'un nombre premier est un nombre irrationnel.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Montrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 6. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 7. Démontrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier pour tout entier n.

Exercice 8. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique alors f ne possède aucun zéro ou en possède une infinité.

Exercice 9. Soit n un naturel. Montrer que le reste de la division de n^2 par 4 est soit 0 soit 1.

Tables de Karnaugh

Exercice 10. Donner des formules aussi condensées que possible pour les expressions f, g et h dont les tables de vérité sont données ci-dessous.

p	q	r	f	g	h
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0

Solution : $f \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, $g \equiv \neg p \vee r$ et $h \equiv (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$.

Exercice 11. Donner la table de vérité de la formule

$$\varphi \equiv (p \Rightarrow \neg(q \vee r)) \Rightarrow (q \wedge (p \Rightarrow \neg r)).$$

Déterminer ensuite une FND et une FNC de longueur minimale pour la proposition φ.

Solution : $\varphi \equiv (p \wedge r) \vee q \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r)$

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Exercice 12. Donner des formules aussi condensées que possible pour les expressions f, g et h dont les tables de vérité sont données ci-dessous.

x	y	z	t	f	g	h
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0

Solution :
$f \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge \neg t)$
$g \equiv (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge z \wedge t) \vee (\neg y \wedge z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge \neg t)$
$h \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge (\neg y \vee \neg z)) \vee (x \wedge z \wedge t)$

Exercice 13. Exprimer les formules suivantes sous FND et FNC :

$$\varphi \equiv p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \vee \neg p)) \qquad\qquad \psi \equiv (\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Leftrightarrow p)$$

Solution : $\varphi \equiv \neg p \vee q$ et $\psi \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r)$

Exercice 14. Donner une FND et une FNC de longueur minimale pour les formules dont les tables de Karnaugh sont les suivantes :

φ_1		(x, y)			
		(1,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)
(z, t)	(1,1)	1	1	0	1
	(0,1)	0	0	0	1
	(0,0)	0	0	0	1
	(1,0)	0	1	0	1

φ_2		(x, y)			
		(1,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)
(z, t)	(1,1)	1	0	0	1
	(0,1)	0	1	1	0
	(0,0)	0	1	1	0
	(1,0)	1	0	0	1

φ_3		(x, y)			
		(1,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)
(z, t)	(1,1)	1	0	0	0
	(0,1)	1	0	0	1
	(0,0)	1	1	1	1
	(1,0)	0	0	0	0

φ_4		(x, y)			
		(1,1)	(0,1)	(0,0)	(1,0)
z	0	1	1	0	1
	1	0	0	0	1

Solution :

$$\varphi_1 \equiv (x \wedge y) \vee (y \wedge z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee t)$$
$$\varphi_2 \equiv (x \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z) \equiv (x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z)$$
$$\varphi_3 \equiv (x \wedge \neg z) \vee (\neg z \wedge \neg t) \vee (x \wedge y \wedge t) \equiv (x \vee \neg t) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee t)$$
$$\varphi_4 \equiv (y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y) \equiv (\neg y \vee \neg z) \wedge (x \vee y)$$

Exercice 15. Simplifier les expressions suivantes en utilisant les tables de Karnaugh :

$$\varphi_1 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$
$$\varphi_2 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$
$$\varphi_3 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$
$$\varphi_4 \equiv (q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$
$$\varphi_5 \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$
$$\varphi_6 \equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

Solution :

$$\varphi_1 \equiv (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$
$$\varphi_2 \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$
$$\varphi_3 \equiv (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r \wedge s) \vee (\neg q \wedge r \wedge s)$$
$$\varphi_4 \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge r \wedge s)$$
$$\varphi_5 \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$
$$\varphi_6 \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

3 Ensembles, relations et quantificateurs

Ensembles

Exercice 1. Combien d'éléments contient l'ensemble $\{\emptyset\}$?

Solution : L'ensemble contient 1 élément, à savoir $\emptyset$.

Exercice 2. Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\emptyset \subseteq \emptyset$
2. $\emptyset \in \emptyset$
3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
4. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
5. $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
6. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
7. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$
8. $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = \emptyset$

Solution :

1. V
2. F
3. V
4. V
5. F
6. F
7. F
8. F

Exercice 3. Donner l'ensemble des parties des ensembles suivants :

$A = \{a, b, c, d\}$
$B = \{1, \{2, 3\}, 4\}$
$C = \{(0, 1), (0, 4), (2, 6)\}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\
&\quad \{a, b, c, d\}\Big\} \\
\mathcal{P}(B) &= \Big\{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, 4\}, \{1, \{2, 3\}\}, \{\{2, 3\}, 4\}, \{1, \{2, 3\}, 4\}\Big\} \\
\mathcal{P}(C) &= \Big\{\emptyset, \{(0, 1)\}, \{(0, 4)\}, \{(2, 6)\}, \{(0, 1), (0, 4)\}, \{(0, 1), (2, 6)\}, \{(0, 4), (2, 6)\}, \{(0, 1), (0, 4), (2, 6)\}\Big\}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Donner le produit cartésien des ensembles suivants :

$A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{e, f, g\}$
$C = \{1, 3, 5\}$ et $D = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
$E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{(0, 1), (0, 4), (2, 6)\}$.

Solution :

$$\begin{aligned}
A \times B &= \Big\{(a, e), (a, f), (a, g), (b, e), (b, f), (b, g), (c, e), (c, f), (c, g), (d, e), (d, f), (d, g)\Big\} \\
C \times D &= \Big\{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 0), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (5, 0), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8)\Big\} \\
E \times F &= \Big\{\big(1, (0, 1)\big), \big(1, (0, 4)\big), \big(1, (2, 6)\big), \big(2, (0, 1)\big), \big(2, (0, 4)\big), \big(2, (2, 6)\big), \big(3, (0, 1)\big), \big(3, (0, 4)\big), \big(3, (2, 6)\big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Donner l'ensemble des parties du produit cartésien des ensembles $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{e, f, g\}$.

Solution : On a

$$A \times B = \Big\{(a, e), (a, f), (a, g), (b, e), (b, f), (b, g), (c, e), (c, f), (c, g), (d, e), (d, f), (d, g)\Big\}.$$

L'ensemble des parties parties de $A \times B$ ne sera pas détaillé, celui-ci contenant $2^{12} = 4096$ éléments. Oups...

Exercice 6. Soit E un ensemble et A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$. Utiliser les diagrammes de Venn pour se convaincre des égalités suivantes :

1. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
2. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
3. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 7. Soit E un ensemble et A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer les assertions suivantes :

1. $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow (A = B)$
2. $(A \cup B = B \cap C) \Rightarrow (A \subseteq B \subseteq C)$.

Exercice 8. Soit E un ensemble et A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$. Sachant que $(A \cap B) \subseteq C$, quelle propriété peut-on déduire parmi celles qui suivent ?

1. $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$
2. $(A \setminus C) \cap B = \emptyset$
3. $(C \setminus A) \cap B = \emptyset$
4. $(C \setminus B) \cap A = \emptyset$

Solution : La propriété 2.

Relations

Exercice 9. On considère les ensembles $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont une relation de A dans B ? Parmi ces relations, lesquelles sont des fonctions ?

1. $\{0, 2\}$
2. $\{(0, 0), (0, 2)\}$
3. $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 0), (2, 3)\}$
4. $\{(0, 1), (1, 2), (3, 1)\}$
5. $\{(3, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 0)\}$
6. $\{(0, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 0)\}$
7. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$
8. $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$

Solution :

1. Pas une relation de A dans B.
2. Relation de A dans B.
3. Pas une relation de A dans B.
4. Fonction de A dans B.
5. Relation de A dans B.
6. Fonction de A dans B.
7. Relation de A dans B.
8. Fonction de A dans B.

Exercice 10. On considère l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire en extension la relation $\leq$ de A dans A. S'agit-il d'une fonction ?

Solution : La relation demandée est

$$\mathcal{R} = \Big\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\Big\}.$$

Cette relation n'est pas une fonction.

Exercice 11. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont des fonctions ?

1. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \}$
2. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = |y| \}$
3. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 \}$
4. $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 7 \}$

Solution : Les relations 1, 3 et 4.

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F. Démontrer les assertions suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Quantificateurs

Exercice 13. Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Écrire les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs.

1. $A = \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \not\subset B$.
4. $A \subsetneq B$.

Solution :
1. $\forall\, x \in \mathbb{N},\ x \notin A$
2. $\forall\, x \in \mathbb{N},\ (x \in B) \Rightarrow (x \notin A)$
3. $\exists\, x \in \mathbb{N} : (x \in A) \wedge (x \notin B)$
4. $\big(\forall\, x \in \mathbb{N},\ (x \in A) \Rightarrow (x \in B)\big) \wedge \big(\exists\, x \in \mathbb{N} : (x \in B) \wedge (x \notin A)\big)$

Exercice 14. Nier les propositions suivantes :
1. Toutes les voitures rouges sont rapides.
2. Il existe un mouton écossais dont au moins un coté est noir.
3. Tout triangle rectangle possède un angle droit.

Solution :
1. Il existe une voiture rouge qui n'est pas rapide.
2. Tous les moutons écossais ne possèdent pas de côté noir.
3. Il existe un triangle rectangle qui ne possède pas d'angle droit.

Exercice 15. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes.

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Il existe un entier multiple de tous les autres.
5. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :
1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
2. $\exists\, x \in \mathbb{R} : x > x^2$
3. $\forall\, x \in \mathbb{Z},\ \exists\, y \in \mathbb{Z} : x < y$
4. $\exists\, x \in \mathbb{Z} : \forall\, y \in \mathbb{Z},\ \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = ky$
5. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ (x \neq y) \Rightarrow (\exists\, q \in \mathbb{Q} : (x < q < y) \vee (y < q < x))$

Exercice 16. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier les énoncés suivants.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$.
2. Il existe $x \in [0, +\infty[$ tel que $f(x) \geq 0$.
3. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$.

Solution :

1. Il existe $x \in \mathbb{R} : f(x) < 1$.
2. Pour tout $x \in [0, +\infty[\quad , f(x) < 0$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$: $(x < y)$ et $f(x) \leq f(y)$.

Exercice 17. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Traduire les assertions suivantes par une phrase simple et compréhensible immédiatement.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists l \in \mathbb{N} : q_n = l$.
2. $\exists l \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, q_n = l$.
3. $\forall l \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : q_n = l$.
4. $\forall q \in \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, |q_n| < q$.

Solution :

1. Tous les éléments de la suite sont des naturels.
2. Tous les éléments de la suite sont égaux au même naturel.
3. La suite possède au moins un élément naturel.
4. Tous les éléments de la suite sont nuls.

4 Signe sommatoire, démonstration par récurrence, injections et surjections

Signe sommatoire

Exercice 1. Permuter les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=4}^{10}\sum_{j=3}^{i}(i+j)^3$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=i+1}^{10}(i-j)$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=3}^{7}\frac{i}{j}$
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{9}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i}{2}\rfloor}(i+j)^3$

Solution :

1. $\displaystyle\sum_{j=3}^{10}\sum_{i=\max(j,4)}^{10}(i+j)^3$
2. $\displaystyle\sum_{j=2}^{10}\sum_{i=1}^{\min(7,j-1)}(i-j)$
3. $\displaystyle\sum_{j=3}^{7}\sum_{i=0}^{5}\frac{i}{j}$
4. $\displaystyle\sum_{j=0}^{4}\sum_{i=2j}^{9}(i+j)^3$

Exercice 2. Exprimer en fonction de n la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{n-k+1}$.

Solution : La somme vaut n.

Démonstration par récurrence

Exercice 3. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 5. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6. Démontrer par récurrence la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 7. Soient $u_0 = 2$ et $u_n = \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 8. Soient $u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice 9. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, le naturel $7^n - 1$ est un multiple de 6.

Exercice 10. Soient $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Injections et surjections

Exercice 11. Parmi les fonctions ci-dessous, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : n \mapsto 2n$
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : n \mapsto -n$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2$
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

Solution :

1. Injection
2. Bijection
3. Ni injection, ni surjection
4. Bijection
5. Surjection
6. Bijection

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
1. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
2. Démontrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
3. Démontrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Solution : La fonction f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}_0 : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Solution : Une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ est donnée par $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1) - 1$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q} : (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?

Solution : La fonction est injective mais elle n'est pas surjective.

Exercice 15. Soient A, B, C et D quatre ensembles et soient des fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Démontrer les assertions suivantes.
1. Si $g \circ f$ est injectif, alors f est injectif.
2. Si $g \circ f$ est surjectif, alors g est surjectif.

5 Division euclidienne et PGCD

Exercice 1. Calculer le PGCD des nombres suivants ainsi que leur coefficients de Bézout au moyen de l'algorithme d'Euclide étendu.

1. 1092 et 3060
2. 741 et 238
3. 375 et 1080
4. 879 et 517

Solution :

1. $\text{pgcd}(1092, 3060) = 12$ et $5.3060 - 14.1092 = 12$
2. $\text{pgcd}(741, 238) = 1$ et $97.741 - 302.238 = 1$
3. $\text{pgcd}(375, 1080) = 15$ et $8.1080 - 23.375 = 15$
4. $\text{pgcd}(879, 517) = 1$ et $10.879 - 17.517 = 1$

Exercice 2. Montrer que les nombres suivants sont premiers entre eux pour tout n dans $\mathbb{N}$.

1. $8n + 3$ et $5n + 2$
2. $2n^2 + 10n + 13$ et $n + 3$

Exercice 3. Démontrer que pour tout naturel n, l'entier $n^2(n^2 - 1)$ est divisible par 3, par 4 et par 12.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère les naturels $a = n + 3$ et $b = 2n + 1$.

1. Montrer que si un naturel divise a et b, alors il divise 5 et en déduire les valeurs possibles pour $\text{pgcd}(a, b)$.
2. Déterminer la valeur de $\text{pgcd}(a, b)$ en fonction de la valeur de n.

Solution : Le $\text{pgcd}(a, b)$ vaut 5 si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2 + 5k$. Sinon, il vaut 1.

Exercice 5. Trouver toutes les solutions des équations suivantes dont les inconnues sont $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. $5x + 2y = 3$
2. $3x - 5y = 13$
3. $212x + 45y = 3$
4. $42x + 45y = 4$

Solution :

1. $S = \{(3 - 2k,\ 6 + 5k) : k \in \mathbb{Z}\}$
2. $S = \{(1 + 5k,\ -2 + 3k) : k \in \mathbb{Z}\}$
3. $S = \{(24 + 45k,\ -113 - 212k) : k \in \mathbb{Z}\}$
4. $S = \emptyset$

Exercice 6. Déterminer les couples d'entiers naturels a et b vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\text{pgcd}(a, b) = 18$ et $a + b = 360$
2. $\text{pgcd}(a, b) = 18$ et $ab = 6480$
3. $\text{pgcd}(a, b) = 12$ et $\frac{a}{b} = \frac{7}{9}$

Solution :

1. $S = \{(18, 342), (54, 306), (126, 234), (162, 198), (198, 162), (234, 126), (306, 54), (342, 18)\}$
2. $S = \{(18, 360), (36, 180), (72, 90), (90, 72), (180, 36), (360, 18)\}$
3. $S = \{(84, 108)\}$

Exercice 7. Soient a et b deux naturels non nuls. Montrer que a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, a et b^2 sont premiers entre eux.

Exercice 8. Démontrer que si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors $a+b$ et ab sont premiers entre eux. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9. Montrer que si a, b et c sont trois naturels non nuls avec a et c premiers entre eux, alors on a $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a,bc)$.

Exercice 10. Dans un QCM comportant 20 questions, on décide d'attribuer 10 points par réponse correcte, de n'attribuer aucun point en cas d'abstention et de retirer 4 points par réponse incorrecte. Le résultat global N est formé en additionnant les points récoltés à chacune des 20 questions, ce résultat pouvant être positif ou négatif.

1. Exprimer le résultat global N en fonction du nombre x de réponses correctes, du nombre y d'abstentions et du nombre z de réponses incorrectes.
2. Si un étudiant désire obtenir un résultat global de 76 points en maximisant le nombre de questions auxquelles il s'abstient de répondre, combien de réponses correctes doit-il donner ?

<u>Solution :</u>

1. $N = 10x - 4z$
2. Il doit donner 8 réponses correctes.

Exercice 11. Afin de valoriser son économie locale, une ville belge s'apprête à mettre en circulation une monnaie locale complémentaire. Dans un premier temps, elle décide de ne mettre en circulation que des jetons dont les valeurs correspondantes en euros sont de 5 et 7 euros. Dans ces conditions, de combien de façons différentes peut-on former un montant de 1000 euros à l'aide des jetons de monnaie locale ?

<u>Solution :</u> Il y a 29 possibilités.

Exercice 12. Saint-Nicolas se prépare à récompenser les 256 enfants d'une école. Pour ce faire, il dispose d'un budget de 1 euro par élève et, en tant que bon samaritain, se doit de dépenser l'entièreté du budget en friandises. Sachant qu'une gaufre aux fruits lui coûte 5 euros, qu'un paquet de chiques revient à 3 euros et que trois mandarines lui sont facturées 1 euro, déterminer le nombre de friandises de chaque sorte qui seront servies aux enfants si Saint-Nicolas désire maximiser le nombre d'élèves recevant une mandarine.

<u>Solution :</u> Saint-Nicolas doit distribuer 256 friandises et dépenser son budget de 256 euros en maximisant le nombre de mandarines distribuées. Il distribuera donc 36 gaufres, 1 paquet de chiques et 219 mandarines.

Exercice 13. Pour récolter des fonds et éviter que les étudiants ne doivent payer les frais d'organisation des laboratoires d'informatique, la Faculté des Sciences Appliquées a mis en vente des gadgets (décapsuleurs, ecocups, alcootests) portant le nouveau logo ULiège via un système de tickets à 3 euros. Le tarif était d'un ticket pour un décapsuleur ou un ecocup et de 2 tickets pour un alcootest. Au total, 100 tickets ont été vendus et utilisés au sein du Conseil de Faculté. Le bénéfice réalisé est de 1.4 euros par décapsuleur, de 1 euro par ecocup et de 3 euros par alcootest, un bénéfice total de 110 euros ayant été dégagé. Déterminer le nombre de décapculeurs, d'ecocups et d'alcootests qui ont été vendus. Combien de solutions différentes à ce problème existe-t-il ?

<u>Solution :</u> Il y a 6 solutions.

6 Numération en bases entières et code de Gray

Exercice 1. Quelle est la représentation de

1. 6356 en base 13 ?
2. 518 en base 7 ?
3. 2567 en base 9 ?
4. 763 en base 6 ?

Solution :

1. $(2, 11, 7, 12)_{13}$
2. $(1, 3, 4, 0)_7$
3. $(3, 4, 6, 2)_9$
4. $(3, 3, 1, 1)_6$

Exercice 2. Quelle est la représentation de 15783 en hexadécimal ? Et en binaire ?

Solution : La représentation en base 16 de 15783 est $(3, 13, 10, 7)_{16}$ tandis que sa représentation en base 2 est $(1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)_2$.

Exercice 3. A quels nombres correspondent les représentations suivantes ?

1. $(10122)_3$
2. $(50413)_7$
3. $(310223)_4$
4. $(4, 9, 11, 2)_{13}$

Solution :

1. 98
2. 12211
3. 3371
4. 10454

Exercice 4. Sans passer par la base 10 effectuer les opérations suivantes :

1. $(125746)_8 + (3623)_8$
2. $(41302)_5 + (3410)_5$
3. $(21542)_6 - (2351)_6$
4. $(45380)_9 - (6781)_9$
5. $(3211)_4 \cdot (23)_4$
6. $(261)_7 \cdot (63)_7$
7. $(213526)_7 \,/\, (36)_7$
8. $(5420632)_6 \,/\, (43)_6$

Solution :

1. $(1, 3, 1, 5, 7, 1)_8$
2. $(1, 0, 0, 2, 1, 2)_5$
3. $(1, 5, 1, 5, 1)_6$
4. $(3, 7, 4, 8, 8)_9$
5. $(2, 1, 3, 1, 1, 3)_4$
6. $(2, 4, 3, 3, 3)_7$
7. $(4, 0, 1, 2)_7$
8. $(1, 1, 3, 4, 5, 2)_6$

Exercice 5. Compléter la multiplication suivante sachant qu'elle est effectuée en base 7.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \cdot & \cdot & 6 & \cdot \\
 & & & & \cdot & 4 \\
\hline
 & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\hline
1 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5
\end{array}
$$

Solution :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 1 & 6 & 3 \\
 & & & & 5 & 4 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\
1 & 4 & 2 & 4 & 1 & \\
\hline
1 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5
\end{array}$$

Exercice 6. Compléter la multiplication suivante sachant qu'elle est effectuée en base 13.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 11 & 10 & \cdot & 11 & 10 \\
 & & & & & \cdot & 12 \\
\hline
 & \cdot & \cdot & \cdot & 10 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\hline
11 & 9 & 2 & 1 & 9 & 1 & \cdot
\end{array}$$

Solution :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 11 & 10 & 0 & 11 & 10 \\
 & & & & & 12 & 12 \\
\hline
 & 10 & 11 & 3 & 10 & 11 & 3 \\
10 & 11 & 3 & 10 & 11 & 3 & \\
\hline
11 & 9 & 2 & 1 & 9 & 1 & 3
\end{array}$$

Exercice 7. Calculer les codes de Gray des nombres suivants :

1. 27
2. 154
3. 215
4. 431

Solution :

1. $(1, 0, 1, 1, 0)$
2. $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$
3. $(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$
4. $(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$

7 Modulos

Exercice 8. Représenter la table de la multiplication dans $\mathbb{Z}_8$ et en déduire, lorsqu'ils existent, les inverses dans $\mathbb{Z}_8$ des éléments de $\mathbb{Z}_8$.

Solution : Seuls les éléments 1,3,5,7 possèdent un inverse dans $\mathbb{Z}_8$. Ils sont tous leur propre inverse.

$\cdot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Exercice 9. Calculer, s'il existe, l'inverse de

1. 11 dans $\mathbb{Z}_{26}$
2. 374 dans $\mathbb{Z}_{729}$
3. 118 dans $\mathbb{Z}_{2000}$
4. 162 dans $\mathbb{Z}_{217}$

Solution :

1. 19
2. 614
3. 118 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{2000}$
4. 71

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes :

1. $7x + 3 = 0$ dans $\mathbb{Z}_{12}$
2. $4x + 2 = 0$ dans $\mathbb{Z}_{11}$
3. $3x + 8 = 0$ dans $\mathbb{Z}_9$
4. $5x = 20$ dans $\mathbb{Z}_{120}$
5. $4x = 10$ dans $\mathbb{Z}_{20}$
6. $4x = 10$ dans $\mathbb{Z}_{26}$

Solution :

1. $S = \{3\}$
2. $S = \{5\}$
3. $S = \emptyset$
4. $S = \{4, 28, 52, 76, 100\}$
5. $S = \emptyset$
6. $S = \{9, 22\}$

Exercice 11. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 7x + 4y = 9 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{10}$
2. $\begin{cases} 4x + 7y = 10 \\ 5x + 14y = 18 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{20}$
3. $\begin{cases} 4x + 4y = 9 \\ 2y - 4x = 7 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{10}$
4. $\begin{cases} 6x + 7y = 5 \\ 8x - y = 4 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{12}$
5. $\begin{cases} 7x + 6y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{18}$
6. $\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}_{17}$

Solution :

1. $S = \{(5,1),(5,6)\}$
2. $S = \{(14,2)\}$
3. $S = \emptyset$
4. $S = \emptyset$
5. $S = \{(15,4),(15,13)\}$
6. $S = \{(12,5)\}$

Exercice 12. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{ \begin{array}{l} 2x+5y+z=3 \\ 4x-5y+6z=8 \\ 6x+9y-3z=7 \end{array} \right.$ dans $\mathbb{Z}_{10}$

2. $\left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z=7 \\ 8x+9y+6z=3 \\ 2x+4y-z=9 \end{array} \right.$ dans $\mathbb{Z}_{20}$

Solution :

1. $S = \{(0,4,3),(5,4,3)\}$
2. $S = \{(12,9,11)\}$

8 Éléments de base du calcul matriciel

Exercice 1. On considère les matrices A, B, C décrites ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+i & -i \\ -5 & 3i & 4+3i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & 0 \\ i & 4+i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3i & -4i \end{pmatrix}$$

Effectuer, si possible, les opérations suivantes et simplifier au maximum le résultat obtenu. Lorsqu'une opération n'est pas définie, expliquer pourquoi.

1. $\bar{A}$
2. B^*
3. $\tilde{C}$
4. $\tilde{C} - A$
5. $A + B$
6. $A + \tilde{B}$
7. $A\bar{B}$
8. BA
9. C^3
10. A^2
11. $\widetilde{(AB)} + C$
12. $\tilde{B}A^*C$

Solution :

1. $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2-i & i \\ -5 & -3i & 4-3i \end{pmatrix}$
2. $B^* = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -i \\ -i & 0 & 4-i \end{pmatrix}$
3. $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -2 & -4i \end{pmatrix}$
4. $\tilde{C} - A$ n'est pas défini.
   En effet, $\dim(\tilde{C}) \neq \dim(A)$.
5. $A + B$ n'est pas défini.
   En effet, $\dim(A) \neq \dim(B)$.
6. $A + \tilde{B} = \begin{pmatrix} 3-i & 4+i & 0 \\ -5+i & 3i & 8+4i \end{pmatrix}$
7. $A\bar{B} = \begin{pmatrix} 5+4i & -1-6i \\ -2-3i & 19+13i \end{pmatrix}$
8. $BA = \begin{pmatrix} 2-7i & -i & -4+3i \\ 4 & 4+2i & -2i \\ -20-3i & -4+14i & 14+16i \end{pmatrix}$
9. $C^3 = \begin{pmatrix} -23-12i & 30+20i \\ 30-45i & -48+58i \end{pmatrix}$
10. A^2 n'est pas défini.
    En effet, A n'est pas une matrice carrée.
11. $\widetilde{(AB)} + C = \begin{pmatrix} 8 & -10+15i \\ 1+i & 13+7i \end{pmatrix}$
12. $\tilde{B}A^*C = \begin{pmatrix} -4-10i & 2+16i \\ 38+63i & -50-88i \end{pmatrix}$

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 - A - 8I = 0$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 2+i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 3i & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^3 - (1+2i)A^2 - (1-4i)A + (4+2i)I = 0$.

Exercice 4. Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquels les matrices A et B commutent si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution : Les matrices A et B commutent lorsque $\alpha = -1$ et $\beta = 3$.

Exercice 5. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2i & 3+i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 2 & 1-i \end{pmatrix}$.

<u>Solution :</u>

1. Les matrices qui commutent avec A sont de la forme
$$\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$$
avec $x, y \in \mathbb{C}$.
2. Les matrices qui commutent avec B sont de la forme
$$\begin{pmatrix} x & y \\ 4y & x-3y \end{pmatrix}$$
avec $x, y \in \mathbb{C}$.
3. Les matrices qui commutent avec C sont de la forme
$$\begin{pmatrix} 6a & 6b & 6c \\ 0 & 6a+(5+i)b-(4+10i)c & 0 \\ -3ic & -(4+10i)b+(7+17i)c & 6a+(3-9i)c \end{pmatrix}$$
avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Solution :</u> On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 1 \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
- on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
- s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
- s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?

Solution : Il y a 25% de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

Exercice 9. On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».
- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs.
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

À la génération 1, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. Décrire, à l'aide des matrices, le taux de fumeurs et de non-fumeurs à la génération n avec $n \in \mathbb{N}_0$.

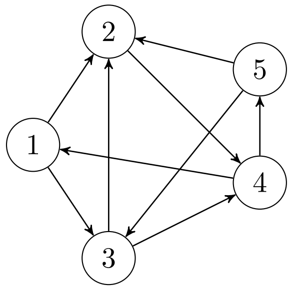
Solution : Soit $n \in \mathbb{N}_0$, si l'on note respectivement F_n et NF_n les proportions de fumeurs et non fumeurs à la génération n, on a

$$\begin{pmatrix} F_n \\ NF_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires. 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie. Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2 et 5 ans.

Solution : Si l'on note respectivement n_X et n_Y le nombre d'habitants des villes X et Y, on a :
- après 1 an $n_X = 387500$ et $n_Y = 612500$;
- après 2 ans $n_X = 490625$ et $n_Y = 509375$;
- après 5 ans $n_X = 669482$ et $n_Y = 330518$.

Exercice 11. On considère le graphe suivant :



Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tous $i, j \in \{1 \ldots 5\}$, le nombre de chemins de longueur n allant d'un sommet i vers un sommet j de ce graphe est donné par l'élément A^n_{ij} avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9 Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3i & -4i \end{vmatrix}$

3. $D_3 = \begin{vmatrix} 2+i & -i \\ 3i & 4+3i \end{vmatrix}$

4. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

5. $D_5 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

6. $D_6 = \begin{vmatrix} 2i & 3+i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 2 & 1-i \end{vmatrix}$

7. $D_7 = \begin{vmatrix} 2i & 2+i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 4i & 1-i & 0 \end{vmatrix}$

8. $D_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

9. $D_9 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$

10. $D_{10} = \begin{vmatrix} 1-i & i & 2i & 3+i \\ 2 & 0 & 2 & 1-i \\ i & 4i & 2-i & 3-i \\ 1+4i & 0 & 2 & 3i \end{vmatrix}$

Solution :

1. -8
2. $2i$
3. $2+10i$
4. -4
5. 67
6. $2+4i$
7. $-6-2i$
8. -1
9. 12
10. $31-107i$

Exercice 2. Calculer et factoriser les déterminants suivants :

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} 3m & 2 & m \\ 1 & m & 4 \\ 5 & 2m & 1 \end{vmatrix}$

3. $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

4. $D_4 = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 3b & a \end{vmatrix}$

5. $D_5 = \begin{vmatrix} x & -y & -x & y \\ y & x & -y & x \\ z & -u & z & -u \\ u & z & u & z \end{vmatrix}$

6. $D_6 = \begin{vmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{vmatrix}$

Solution :

1. $-(m-1)^2(m+2)$
2. $2(19-12m^2)$
3. $(x-y)(y-z)(z-x)$
4. $(a-3b)(a-b)(a+b)(a+3b)$
5. $4y^2(u^2+z^2)$
6. $(x-y)^3(x+3y)$

Exercice 3. Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ qui annulent les déterminants suivants :

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 6z+1 & 0 & 5z+1 \\ 2z+3 & 4z & z+3 \\ z-2 & -8 & z \end{vmatrix}$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} -7iz^2-z & 2 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ 4z^2-z & -7/4 & -1 \end{vmatrix}$

Solution :

1. $S = \{0,\ -1-i\sqrt{5},\ -1+i\sqrt{5}\}$
2. $S = \left\{ \dfrac{2+i}{10}, \dfrac{-2+3i}{26} \right\}$

10 Inverse et rang

Inverse

Exercice 1. Si possible, inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 2+6i \\ -2i & 3-i \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 5+i & 1-i \\ 4 & 2+7i \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} i & -i & 1+i \\ i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 2i \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3+2i & 4 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 2i & 3+i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 2 & 1-i \end{pmatrix}$
9. $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
10. $K = \begin{pmatrix} 0 & 2+i & -3 & 1 \\ 4-3i & 1 & 2i & 0 \\ 1+i & 0 & 4 & 2 \\ 2+i & 3 & i & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}$
2. B^{-1} n'est pas défini.
3. $C^{-1} = \frac{1}{1682} \begin{pmatrix} 285-89i & 42+40i \\ 4+164i & 36-206i \end{pmatrix}$
4. $D^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i & -3-i & 1+3i \\ 2i & 1-i & 1-i \\ 0 & 2+2i & 2-2i \end{pmatrix}$
5. $E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. F^{-1} n'est pas défini.
7. $G^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2+2i & 5-i & 1-i \\ 6+6i & -1-3i & 3-3i \\ -2-8i & -2+3i & i \end{pmatrix}$
8. $H^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1-3i & 4+2i & -2+4i \\ 0 & 10 & 0 \\ 2+i & -13-9i & 4+2i \end{pmatrix}$
9. $J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
10. $K^{-1} = \frac{1}{6404} \begin{pmatrix} -254+554i & 780+820i & 80+2i & 94-558i \\ -886+218i & -456-972i & -1032-346i & 2950+474i \\ -1598-120i & 16-640i & 289-353i & 1020+826i \\ 3600+90i & -12+480i & 2585+665i & -2366-1420i \end{pmatrix}$

Exercice 2. Déterminer pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{C}$ les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse lorsqu'il est défini.

1. $A = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 2 & 2m \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} m+3 & (1+6i)m \\ -i & 2m-i \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & \overline{m} & \overline{m}^2 \\ m & 1 & \overline{m} \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 2m^2 & m+2 & 0 \\ 0 & m-4-4i & m^2 \\ 2+6i & 0 & m \end{pmatrix}$

Solution :

1. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

   $A^{-1} = \frac{1}{2m^2-8} \begin{pmatrix} 2m & -4 \\ -2 & m \end{pmatrix}$

2. $\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2}$

   $B^{-1} = \frac{1}{2m^2-3i} \begin{pmatrix} 2m-i & -(1+6i)m \\ i & 3+m \end{pmatrix}$

3. $\det(C) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ et $m \neq 3$

   $C^{-1} = \frac{1}{m^2-4m+3} \begin{pmatrix} 3-m & m-3 & 0 \\ m^2-m-1 & 2-m & 1-m \\ 1-2m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

4. $\det(D) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

   $D^{-1} = \frac{1}{1-m^2} \begin{pmatrix} 3 & -3m & -1+m^2 \\ -m & 1 & 0 \\ -2 & 2m & 1-m^2 \end{pmatrix}$

5. $\det(E) \neq 0 \Leftrightarrow |m| \neq 1$

   $E^{-1} = \frac{1}{1-|m|} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{m} & 0 \\ -m & 1+|m| & -\overline{m} \\ 0 & -m & 1 \end{pmatrix}$

6. $\det(F) \neq 0 \Leftrightarrow m \notin \{0, 2i, 3-i\}$

   $F^{-1} = \frac{1}{2m^4-(6+2i)m^3+(4+12i)m^2} \begin{pmatrix} m^2-(4+4i)m & -m^2-2m & m^3+2m^2 \\ (2+6i)m^2 & 2m^3 & -2m^4 \\ -(2+6i)m-(16-32i) & (2+6i)m+(4+12i) & 2m^3-(8+8i)m^2 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit A une matrice de $\mathbb{C}^n_n$ pour laquelle il existe un entier $k \geq 2$ tel que

$$A^k = 0 \quad \text{et} \quad A^{k-1} \neq 0.$$

On pose $B = I - A$ où $I \in \mathbb{C}^n_n$ est la matrice identité de dimension n.

1. Démontrer que A n'est pas inversible ;
2. Démontrer que B est inversible et que $B^{-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$.

Rang

Exercice 4. Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -13 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

1. $\mathrm{Rg}(A) = 2$
2. $\mathrm{Rg}(B) = 1$
3. $\mathrm{Rg}(C) = 2$
4. $\mathrm{Rg}(D) = 3$

Exercice 5. Discuter, en fonction du paramètre complexe m, le rang des matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} m^2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & m & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & m & 2 & 2 \\ m & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. $\mathrm{Rg}(A) = \begin{cases} 4 & \text{si } m \notin \{-1, \pm\sqrt{2}\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $\mathrm{Rg}(B) = 3$
3. $\mathrm{Rg}(C) = \begin{cases} 4 & \text{si } m \neq 3 \\ 3 & \text{si } m = 3 \end{cases}$

Exercice 6. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & b \\ a & c & d \end{pmatrix}.$$

Discuter la valeur du rang de la matrice M en fonction des paramètres réels a, b, c et d.

Solution :

$$\mathrm{Rg}(M) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq b \text{ et } c \neq d \\ 1 & \text{si } a = b = c = d \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$