ELEN0040 – REPETITION 2

Les tables de Karnaugh

Minterms et maxterms

Forme canonique d'une fonction booléenne

- sous forme d'une *somme de minterms*

Chaque ligne de la table de vérité représente un minterm de la fonction

- sous forme d'un *produit de maxterms*

$$\boxed{m_x = \overline{M_x}}$$

Fonction à n variables ➡ 2^n minterms (maxterms)

EX. 25a Représenter la fonction suivante et son complément sous forme de minterms et de maxterms

$$F = A\overline{C} + \overline{B}C$$

A	B	C	F	m_i	$\overline{F}$
0	0	0	0	**0**	**1**
0	0	1	**1**	**1**	0
0	1	0	0	**2**	**1**
0	1	1	0	**3**	**1**
1	0	0	**1**	**4**	0
1	0	1	**1**	**5**	0
1	1	0	**1**	**6**	0
1	1	1	0	**7**	**1**

EX. 25a Représenter la fonction suivante et son complément sous forme de minterms et de maxterms

$$F = A\overline{C} + \overline{B}C = \sum m(1,4,5,6) = \prod M(0,2,3,7)$$

A	**B**	**C**	**F**	m_i	$\overline{F}$
0	0	0	0	**0**	**1**
0	0	1	**1**	**1**	0
0	1	0	0	**2**	**1**
0	1	1	0	**3**	**1**
1	0	0	**1**	**4**	0
1	0	1	**1**	**5**	0
1	1	0	**1**	**6**	0
1	1	1	0	**7**	**1**

EX. 25a Représenter la fonction suivante et son complément sous forme de minterms et de maxterms

Indices des **m_i de F** et des **M_j de F**

Indices des **m_j de $\overline{F}$** et des **M_i de $\overline{F}$**

EX. 25b Représenter la fonction suivante et son complément sous forme de minterms et de maxterms

$$F(W,X,Y,Z) = XYZ + \overline{Y}Z + WX$$

$$F(W,X,Y,Z)$$
$$= XYZ + \overline{Y}Z + WX$$

W	X	Y	Z	F	m_i
0	0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**1**	**1**
0	0	1	0	0	**2**
0	0	1	1	0	**3**
0	1	0	0	0	**4**
0	1	0	1	**1**	**5**
0	1	1	0	0	**6**
0	1	1	1	**1**	**7**
1	0	0	0	0	**8**
1	0	0	1	**1**	**9**
1	0	1	0	0	**10**
1	0	1	1	0	**11**
1	1	0	0	**1**	**12**
1	1	0	1	**1**	**13**
1	1	1	0	**1**	**14**
1	1	1	1	**1**	**15**

$$F = \sum m(1,5,7,9,12,13,14,15)$$

$$\overline{F} = \sum m(0,2,3,4,6,8,10,11)$$

$$F = \prod M(0,2,3,4,6,8,10,11)$$

$$\overline{F} = \prod M(1,5,7,9,12,13,14,15)$$

Tables de Karnaugh

2 variables

m_0	m_1
m_2	m_3

Y

		0	1
	0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
X	1	$X\bar{Y}$	XY

3 variables

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

Code de Gray

Y

		00	01	11	10
	0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
X	1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	XYZ	$XY\bar{Z}$

Z

➡ 2 minterms adjacents ne varient que d'un bit

Tables de Karnaugh

4 variables

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

➡ 2 minterms adjacents ne varient que d'un bit

Tables de Karnaugh

5 variables

	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

A = 0

	00	01	11	10
00	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}
01	m_{20}	m_{21}	m_{23}	m_{22}
11	m_{28}	m_{29}	m_{31}	m_{30}
10	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}

A = 1

➡ 2 minterms adjacents ne varient que d'un bit

Méthode de simplification de Karnaugh

Règles

1) On peut grouper **2^n** minterms adjacents

jamais de groupement en diagonale !

2) Tous les minterms de la fonction doivent faire partie d'un groupement.

Remarque

Grouper des minterms = les additionner $\Rightarrow$ Simplification de F

Soit F une fonction à n variables,

Si on groupe $\begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ minterms, il reste $\begin{cases} n\text{-}1 \\ n\text{-}2 \end{cases}$ variables

$\Rightarrow$ *Il faut rechercher les groupements les + intéressants !*

Ex. 26 – Réduire par Karnaugh

$$F(x,y,z) = \sum m(2,3,4,6,7)$$

Y

			1	1
X	1		1	1

Z

Groupements :

1) $m_2 + m_3 + m_6 + m_7 = Y$
2) $m_4 + m_6 = X\bar{Z}$

$\Rightarrow$ $\boxed{F = Y + X\bar{Z}}$

Y

	m_0	m_1	m_3	m_2
X	m_4	m_5	m_7	m_6

Z

Y

	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
X	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	XYZ	$XY\bar{Z}$

Z

Ex. 27a – Réduire par Karnaugh

$$F(A,B,C,D) = \sum m(1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15)$$

	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	1
11	1	1	1	
10			1	

C

B

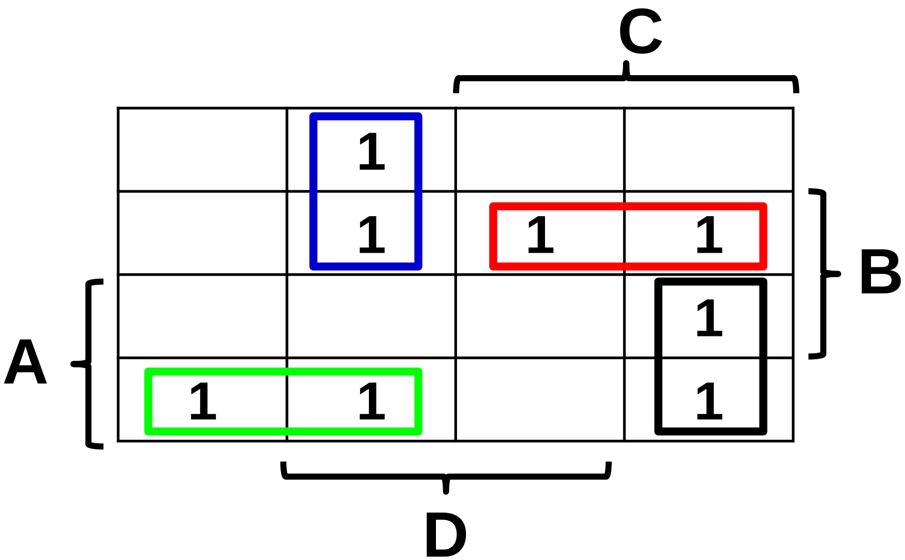
A

D

$$\Rightarrow \boxed{F = \bar{A}\bar{C}D + A\bar{C}B + ACD + \bar{A}CB}$$

Ex. 27c – Réduire par Karnaugh (sol. 1)

$F(A,B,C,D) = \sum m(1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14)$

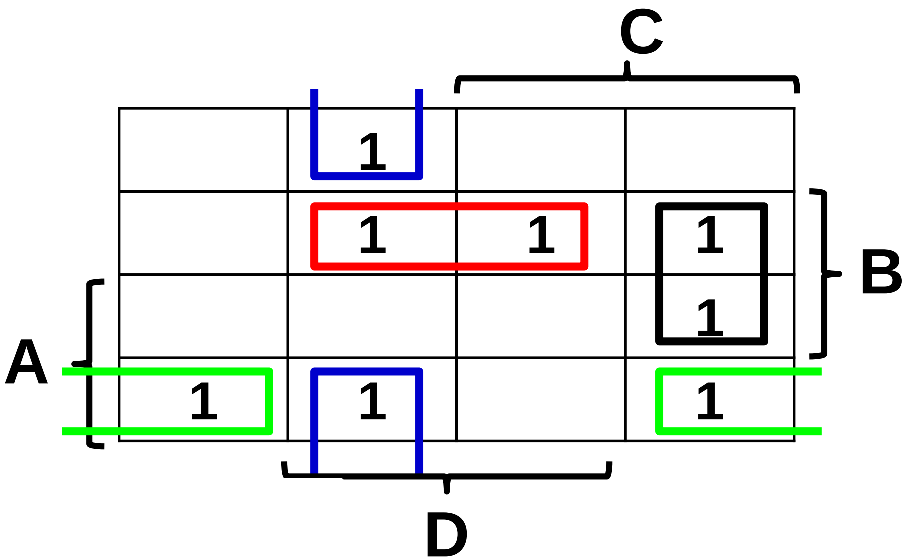


m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$$F = \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AC\bar{D}$$

Ex. 27c – Réduire par Karnaugh (sol. 2)

$$F(A,B,C,D) = \sum m(\ 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14\ )$$



m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$$F = \bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BD + BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{D}$$

Conclusion: il peut exister plusieurs solutions optimales!

Ex. 28 – Exprimer F et $\overline{F}$ sous forme de produit de sommes

$F(A,B,C,D) = \sum m(\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 13\ )$

C

1	1	1	1
1	1		1
	1		
	1	1	

A

B

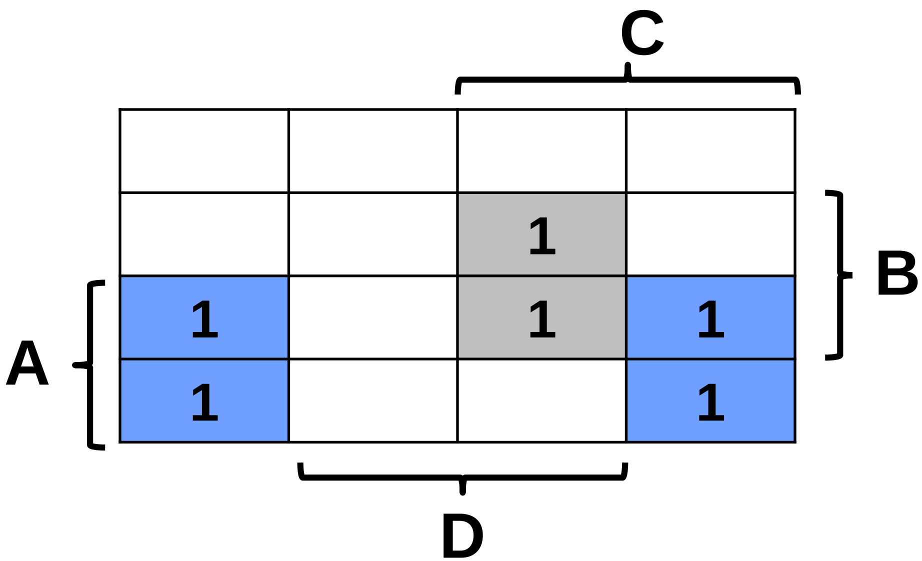
D

$$\boxed{F = \overline{C}D + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{B}D}$$

Par De Morgan : $\overline{F} = (C+\overline{D}).(A+D).(B+\overline{D})$

Ex. 28 – Même démarche appliquée à $\overline{F}$

Simplification de $\overline{F}$ par Karnaugh



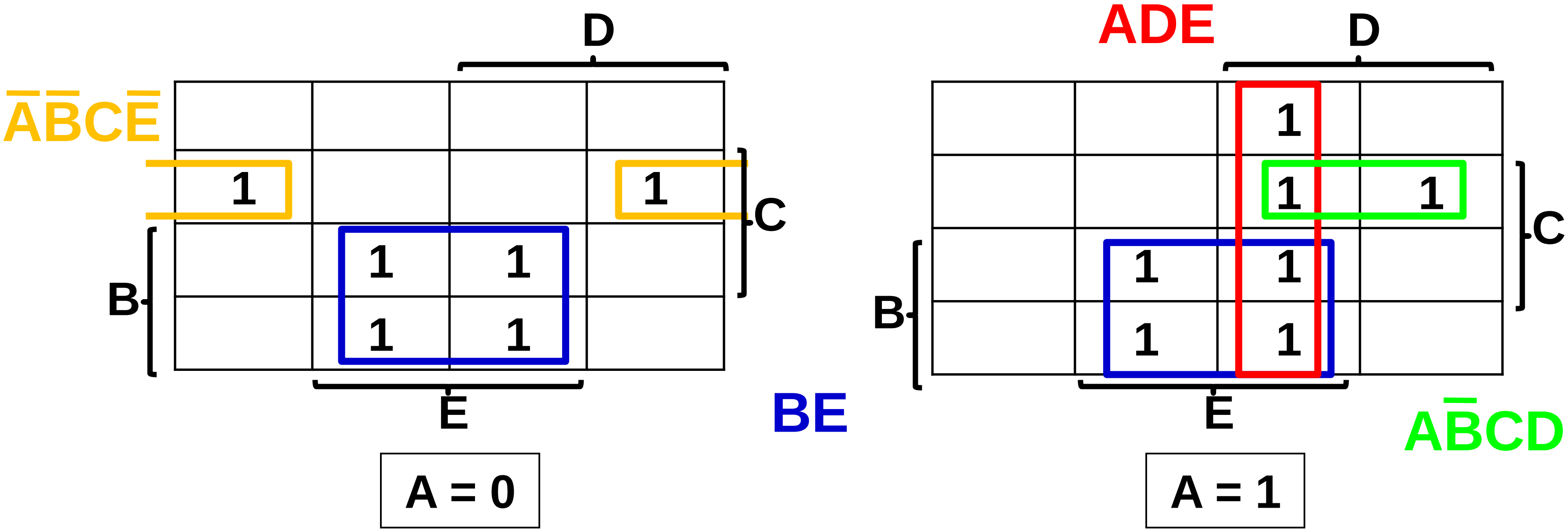
$$\boxed{\overline{F} = A\overline{D} + BCD}$$

Par De Morgan : $F = (\overline{A}+D).(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$

Ex. 30 - Exprimer la fonction F sous forme de produit de sommes

$F(A,B,C,D,E) = \sum m(0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 26, 28, 30)$

$\overline{F}(A,B,C,D,E) = \sum m(4, 6, 9, 11, 13, 15, 19, 22, 23, 25, 27, 29, 31)$



$$\overline{F} = BE + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{E} + ADE + A\overline{B}CD$$

Ex. 30 - Exprimer la fonction F sous forme de produit de sommes

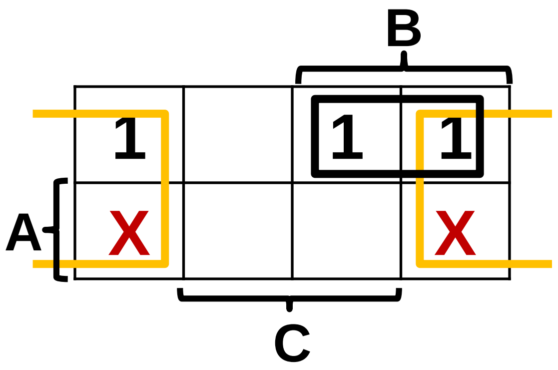
$$\overline{F} = BE + \overline{A}\overline{B}C\overline{E} + ADE + A\overline{B}CD$$

Par De Morgan,

$$F = (\overline{B}+\overline{E}).(A+B+\overline{C}+E).(\overline{A}+\overline{D}+\overline{E}).(\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D})$$

Ex. 31 – Que valent F et $\overline{F}$?

$F = ?$

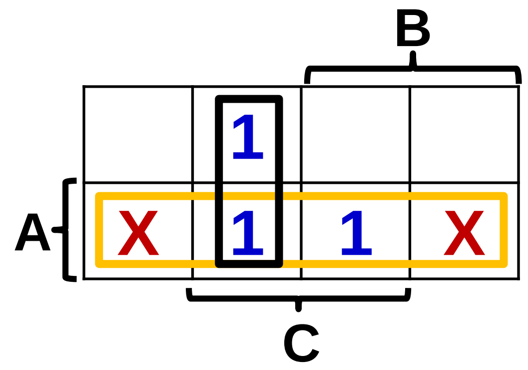


$F = \overline{C} + \overline{A}B$

$\overline{F} = C.(A+\overline{B})$

$\overline{F} = AC + \overline{B}C$

$\overline{F} = ?$

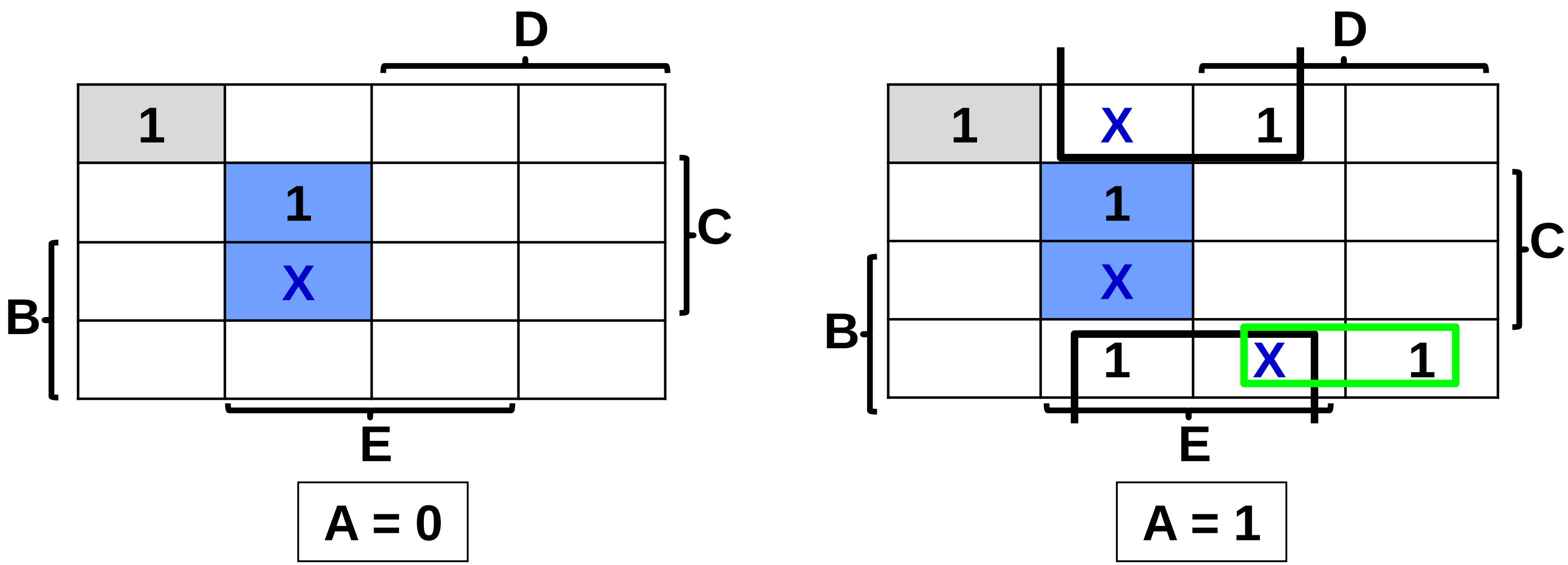


$\overline{F} = A + \overline{B}C$

Différence d'expression pour $\overline{F}$ due aux « <u>don't care »</u> !

Ex. 32a - Simplifier

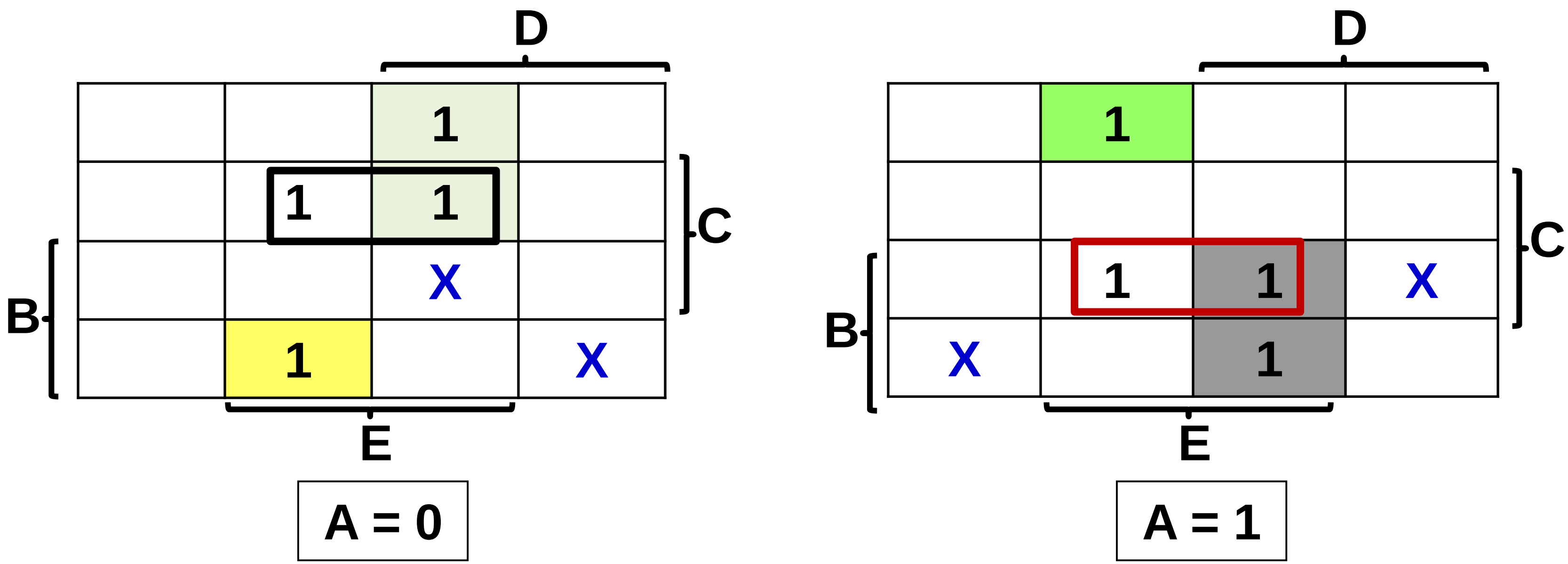
$$F(A,B,C,D,E) = \sum m(0, 5, 16, 19, 21, 25, 26) + \sum d(13, 17, 27, 29)$$



$$\boxed{F = C\overline{D}E + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\overline{C}E + AB\overline{C}D}$$

Ex. 32b - Simplifier

$$F(A,B,C,D,E) = \sum m(3, 5, 7, 9, 17, 27, 29, 31) + \sum d(10, 15, 24, 30)$$

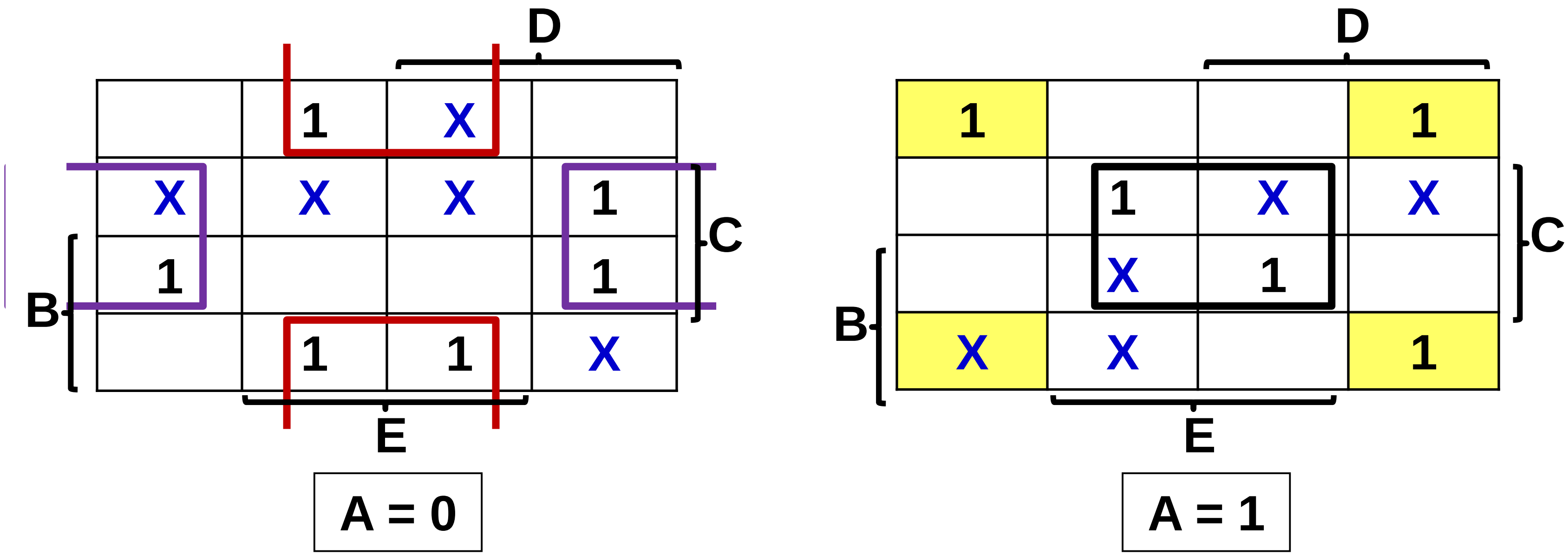


$$\boxed{F = \overline{A}\,\overline{B}CE + \overline{A}\,\overline{B}DE + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}E + ABCE + ABDE + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}E}$$

Les don’t care n’apportent pas de simplification supplémentaire

Ex. 32c – Minimiser par Karnaugh

$$F(A,B,C,D,E) = \sum m(1, 6, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 21, 26, 31)$$
$$+ \sum d(3, 4, 5, 7, 10, 22, 23, 24, 25, 29)$$



$$\boxed{F = \bar{A}\bar{C}E + \bar{A}C\bar{E} + ACE + A\bar{C}\bar{E}}$$