ELEN0040 – REPETITION 1

Algèbre booléenne

Quelques rappels

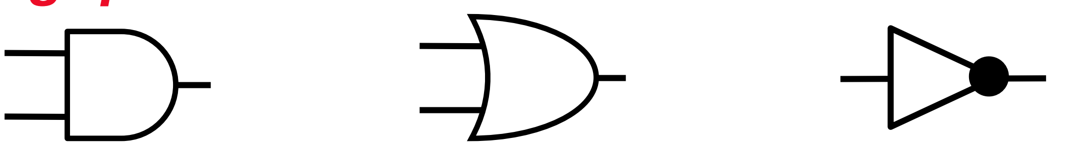
- **F : fonction booléenne**
  - Variables booléennes (binaires) : **0/1**
  - Opérateurs logiques : **AND, OR, NOT**

expression algébrique *:*

$X \cdot Y$ $\quad$ $X + Y$ $\quad$ $\overline{X}$

table de vérité *:* **0/1**

circuit logique *:*



AND OR NOT

Quelques rappels

- **F : fonction booléenne**
  - Variables booléennes (binaires) : **0/1**
  - Opérateurs logiques : **AND, OR, NOT**

- **But : simplifier le circuit équivalent à F**
  - Moins de composants
  - Carte plus petite
  - Gain en fiabilité
  - Gain en rapidité

→ Coût moindre et meilleure performance

Les identités de base

1 variable

1. $X + 0 = X$
2. $X . 1 = X$
3. $X + 1 = 1$
4. $X . 0 = 0$
5. $X + X = X$
6. $X . X = X$
7. $X + \overline{X} = 1$
8. $X . \overline{X} = 0$
9. $\overline{\overline{X}} = X$

Rem : $\overline{X} = X' = \sim X$

Les identités de base

<u>Plusieurs variables</u>

10. $X + Y = Y + X$
11. $X + (Y + Z) = X + Y + Z$
12. $X . (Y + Z) = X . Y + X . Z$
13. $X . Y = Y . X$
14. $X . (Y . Z) = X . Y . Z$
15. $X + (Y . Z) = (X + Y) . (X + Z)$

$\rightarrow X + (X . Y) = X . (X + Y) = X$

Les identités de base

Théorème De Morgan

$$\overline{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}$$

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \ldots + \overline{X_n}$$

Théorème Du Consensus

$$\mathbf{X}.Y + \overline{\mathbf{X}}.Z + Y.Z = X.Y + \overline{X}.Z$$

$$(\mathbf{X} + Y) \cdot (\overline{\mathbf{X}} + Z) \cdot (Y + Z) = (X + Y) \cdot (\overline{X} + Z)$$

Exercice 13

- a) $X + \overline{X}Y$
  $= (X+\overline{X})\ (X+Y)$ [15]
  $= X+Y$ [7, 2]

- b) $\overline{X}\ .\ (X+Y)$
  $= \overline{X}X + \overline{X}Y$ [12]
  $= \overline{X}Y$ [8, 1]

- c) $ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C$
  $= AB(C+\overline{C}) + A\overline{B}C$
  [mise en évidence]
  $= A.(B+\overline{B}C)$ [7, 2]
  [mise en évidence]
  $= A.(B+C)$ [Ex a)]

Exercice 13 (suite)

- d) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$

  $= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + BC(\overline{A}+A) + A\overline{B}(\overline{C}+C)$ [mise en évidence]

  $= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + BC + A\overline{B}$ [7, 2]

  $= \overline{B}\,(A+\overline{A}\,\overline{C}) + BC$ [mise en évidence]

  $= \overline{B}\,(A+\overline{C}) + BC$ [Ex a)]

Exercice 13 (suite)

- e) $(A+C+D)\,(A+C+\overline{D})\,(A+\overline{C}+D)\,(A+\overline{B})$ (v.1)

distribuer et supprimer

- les doublons car $X+X=X$
- le termes où $X.\overline{X}$ (= 0) càd $Y+X.\overline{X}.Z=Y$

$= A+A\overline{B}+AC\overline{B}+ACD+ACD\overline{B}+CD\overline{B}+AD+AC+A\overline{D}$

$= A.(1+\ldots) + CD\overline{B}$

$= A + CD\overline{B}$ [3, 2]

Exercice 13 (suite)

- e) $(A+C+D)\,(A+C+\overline{D})\,(A+\overline{C}+D)\,(A+\overline{B})$ (v.2)

  $= [(A+C)+D\overline{D}]\,[A+(\overline{C}+D).\overline{B}]$ [15]

  $= (A+C)\,[A+(\overline{C}+D).\overline{B}]$ [8]

  $= A + C.(\overline{C}+D).\overline{B}$ [15]

  $= A + C\overline{C}\overline{B} + CD\overline{B}$ [12]

  $= A + CD\overline{B}$ [8]

Exercice 13 (suite et fin)

- f) $\overline{(A+B)} \;.\; \overline{(\bar{A}+\bar{B})} = (\bar{A}.\bar{B}) \;.\; (\bar{\bar{A}}.\bar{\bar{B}})$ [De Morgan]
  $= \bar{A}.\bar{B}.A.B$ [9, 14]
  $= 0$ [8]

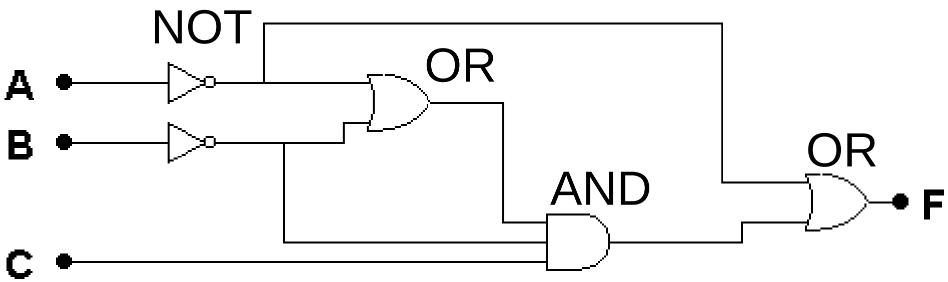
À vous !

- g) $\overline{(\overline{CD}+A)} + A + AB + CD =$ A+CD
- h) $\overline{[(\bar{X}+Z) \;.\; (\bar{X}+\bar{Z}) \;.\; \bar{Y}] + [\overline{(\bar{X}+Z)} + \overline{(Y+Z)}]} =$ $XZ+\bar{X}Y$

Déterminer le complément de F (= $\overline{F}$) de 2 manières différentes

- Table de vérité : 0 $\leftrightarrow$ 1
- De Morgan sur l’expression booléenne de F

Exercice 14



- $F = \overline{A} + [(\overline{A}+\overline{B}).\overline{B}.C]$

  $\rightarrow$ T.V.

- $\overline{F} = \overline{\overline{A} + [(\overline{A}+\overline{B}).\overline{B}.C]}$

  $= A.(A.B + B + \overline{C})$

  $= A.(B+\overline{C})$

Table de vérité				
A	**B**	**C**	**F**	$\overline{\textbf{F}}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Exercice 15a

- $F = BC + A(B+C)$

  $\rightarrow$ T.V.

- $\overline{F} = \overline{BC + A(B+C)}$

$= (\overline{BC}).(\overline{A(B+C)})$

$= (\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+(\overline{B+C}))$

$= (\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}.\overline{C})$

$= (\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}).(\overline{A}+\overline{C})$

ou $\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C}$

Table de vérité				
A	**B**	**C**	**F**	$\overline{\mathbf{F}}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Exercices supplémentaires (15b – 15c)

- $F = (M + N) \cdot (\overline{M} + P) \cdot (\overline{N} + \overline{P})$

  $\overline{F} = PN + \overline{P}M + \overline{M}\,\overline{N}$

- $F = [\,(\overline{AB}) \cdot A\,] \cdot [\,(\overline{AB}) \cdot B\,]$

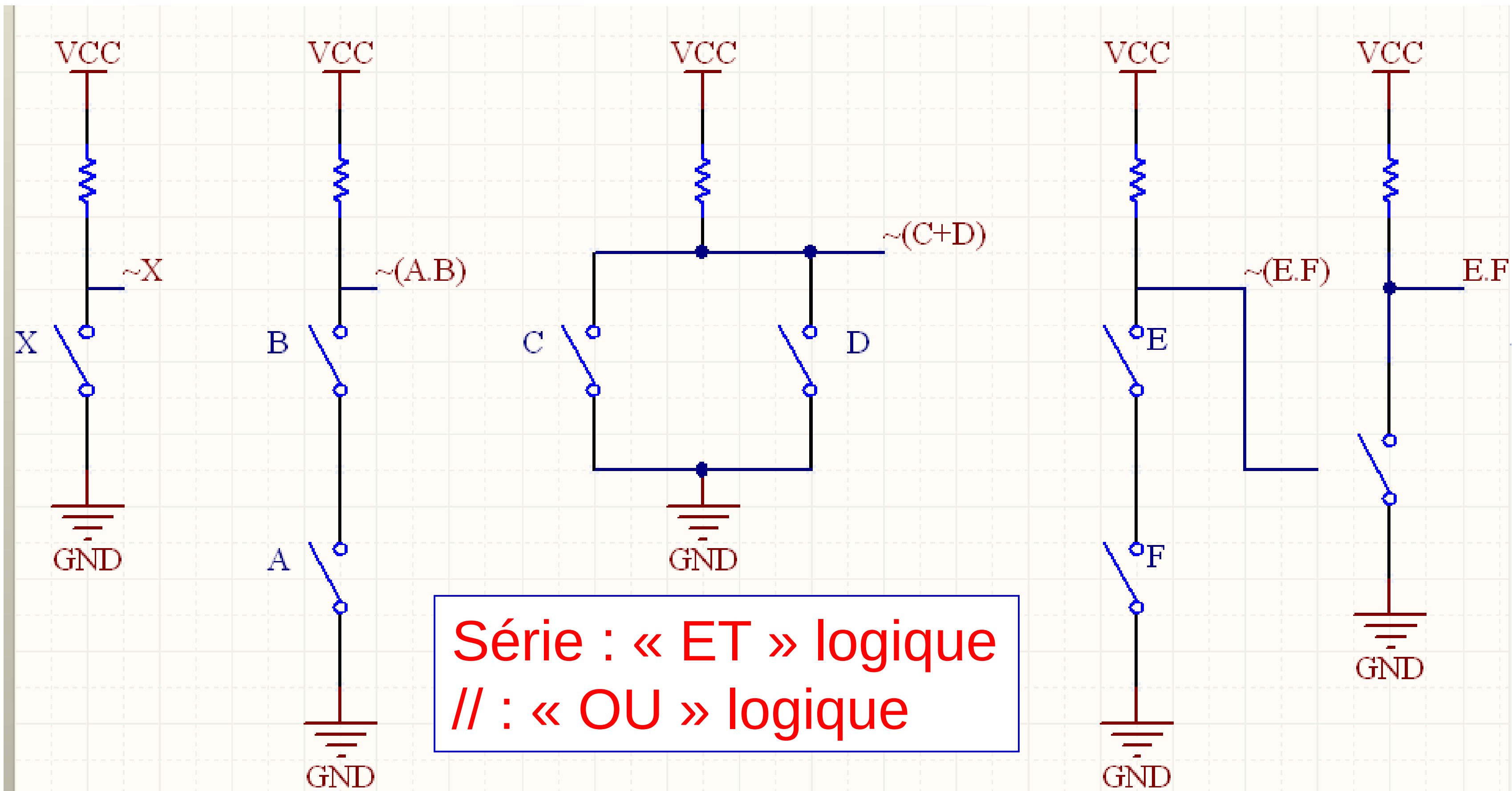
  $\overline{F} = 1$

Implémenter de manière optimale

- Modifier/simplifier l'expression booléenne
- Schématiser à l'aide de portes logiques
- Minimiser (compromis):
  - Le nombre de niveaux $\rightarrow$ délai
  - Le nombre de portes $\rightarrow$ taille

Portes simples à réseaux d'interrupteurs tire-bas

INV   2-NAND = $\overline{A.B}$ 2-NOR = $\overline{C+D}$ 2-NAND+INV=2-AND



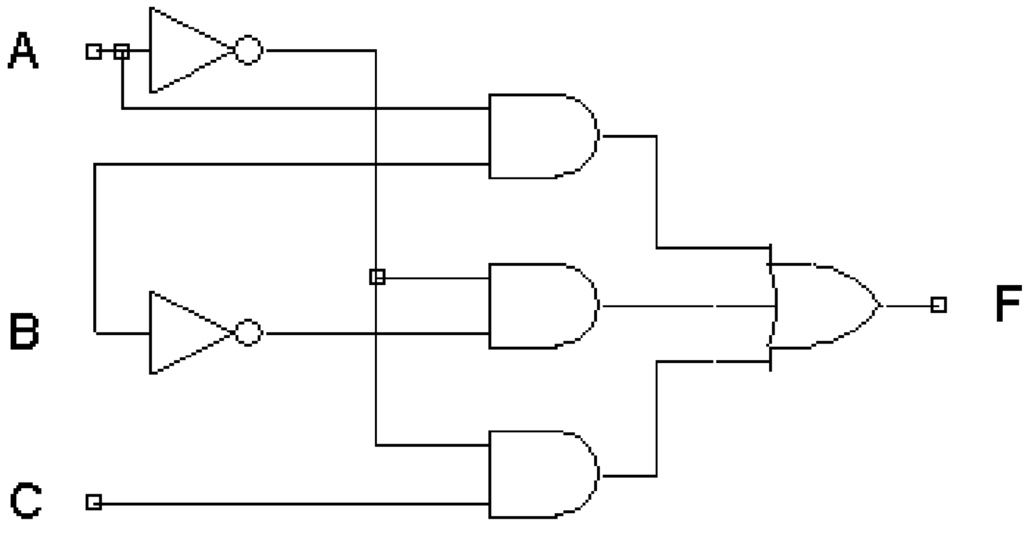
Rem: technologie CMOS: 2 transistors pour former 1 interrupteur

Implémenter de manière optimale

- Modifier/simplifier l'expression booléenne
- Schématiser à l'aide de portes logiques
- Comptabiliser:
  - Le nombre de niveaux
  - Le nombre de transistors
    - INV : 2 transistors
    - n-NAND, n-NOR : $2n$ transistors
    - n-AND (= n-NAND + INV),
      n-OR (= n-NOR + INV) : $2n$ + **2** transistors

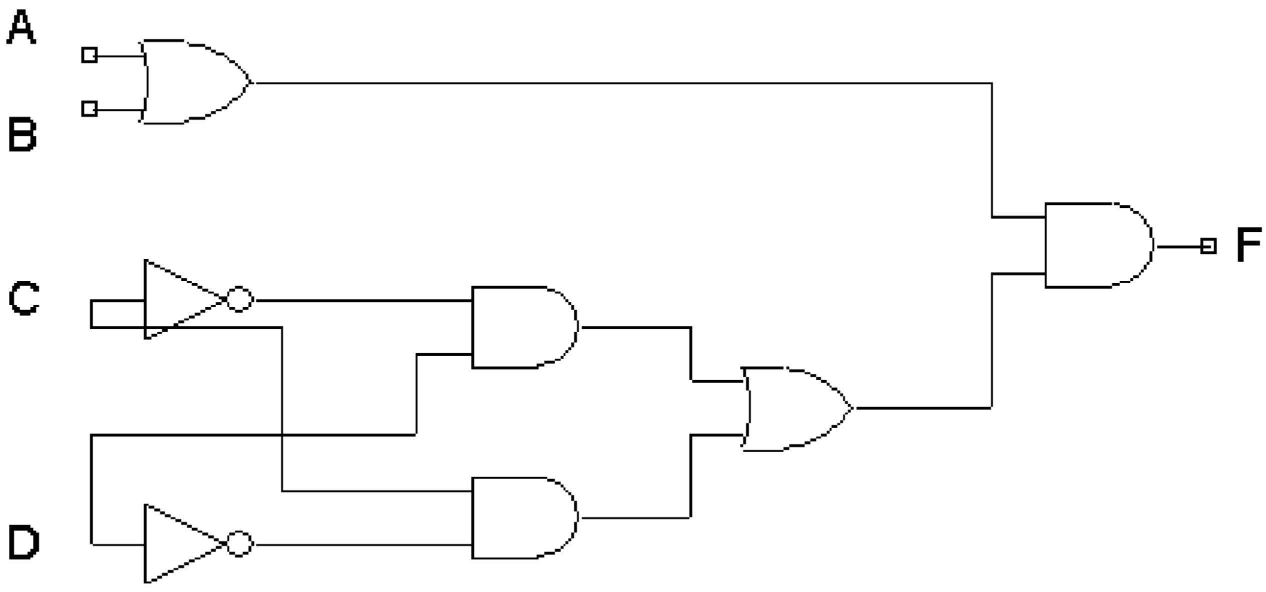
Exercice 16a

- $F_1 = AB + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}C$
  - 2 portes INV *2*2 transistors*
    + 3 portes *2*-AND *3*(2*2+2) transistors*
    + 1 porte *3*-OR *1*(2*3+2) transistors*
    = 30 transistors sur 3 niveaux



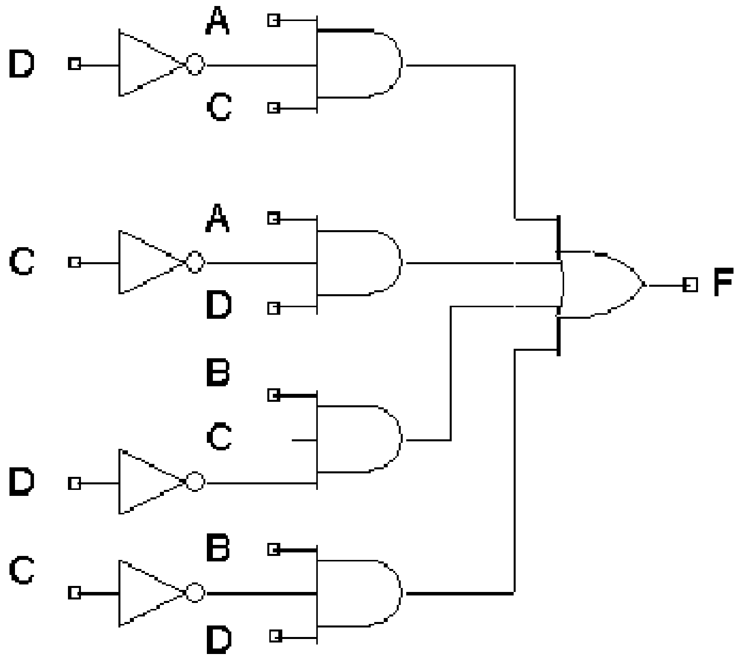
Exercice 16b

- $F_2 = (A + B)\,(C\overline{D} + \overline{C}D)$ (*version 1*)
  - 2 INV + 5 portes sur 4 niveaux



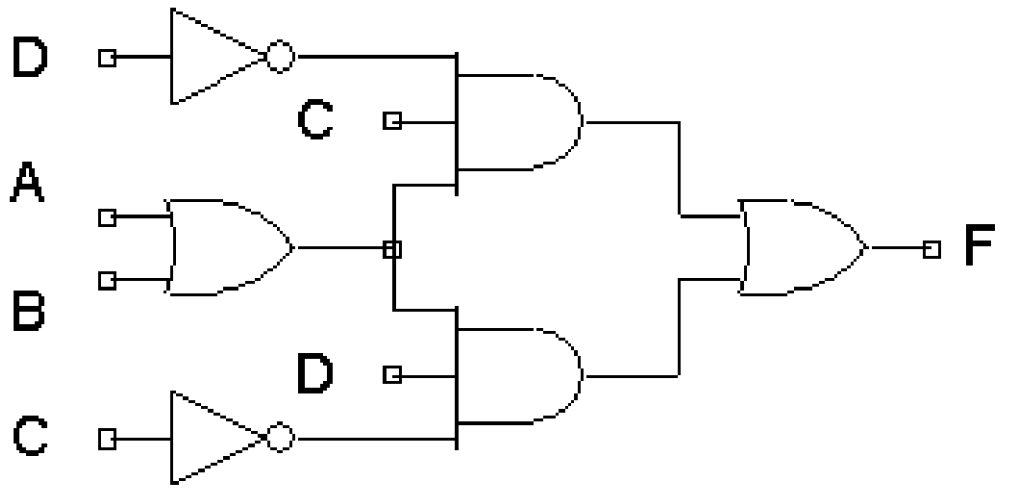
Exercice 16b

- $F_2 = AC\overline{D} + A\overline{C}D + BC\overline{D} + B\overline{C}D$ (*version 2*)
  - 2 INV + 5 portes sur 3 niveaux



Exercice 16b

- $F_2 = \overline{C}D\ (A+B) + C\overline{D}\ (A+B)$ (*version 3*)
  - 2 INV + 4 portes sur 3 niveaux



Exercice 16c

- $F_3 = (\overline{RST})\ (\overline{R+S+T})$

$= (\overline{R}+\overline{S}+\overline{T})\ \overline{R}\ \overline{S}\ \overline{T}$

$= \overline{R}\ \overline{R}\ \overline{S}\ \overline{T} + \overline{R}\ \overline{S}\ \overline{S}\ \overline{T} + \overline{R}\ \overline{S}\ \overline{T}\ \overline{T}$

$= \overline{R}\ \overline{S}\ \overline{T}$ $\rightarrow$ 3 INV + 3-AND : 6 tr + (6+2) tr

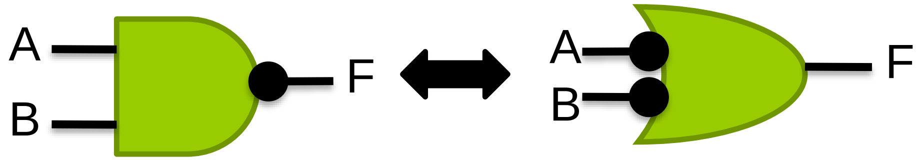
= 14 transistors

$= \overline{R+S+T}$ $\rightarrow$ 3-NOR : 6 transistors

$\boxed{\text{NAND et NOR : portes universelles}}$

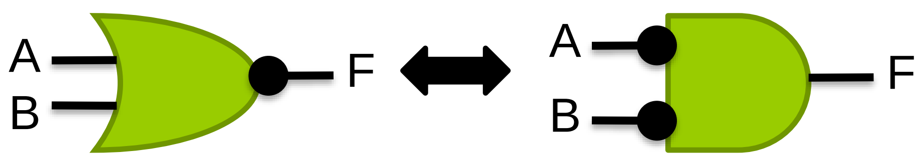
Portes universelles : NAND et NOR

- NAND : $F = \overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$



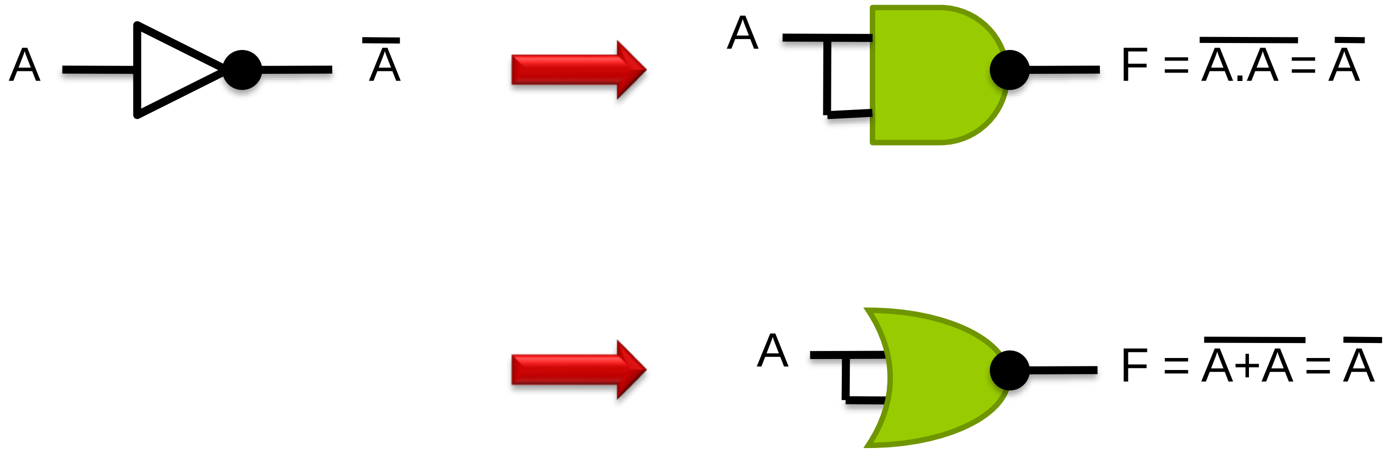
F = SOMME [DE PRODUITS]

- NOR : $F = \overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

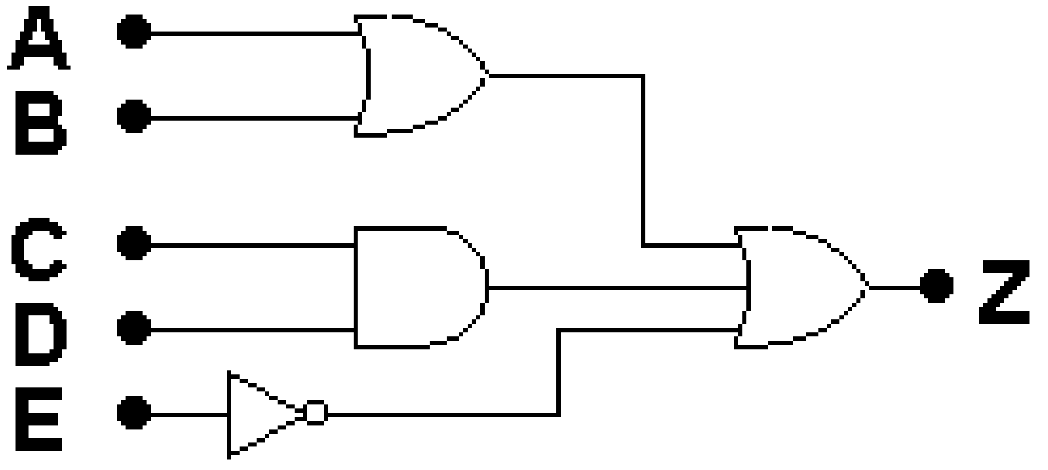


F = PRODUIT [DE SOMMES]

Comment réaliser un inverseur avec une porte NAND/NOR ?



EX. 19 Implémenter le circuit au moyen de portes NAND

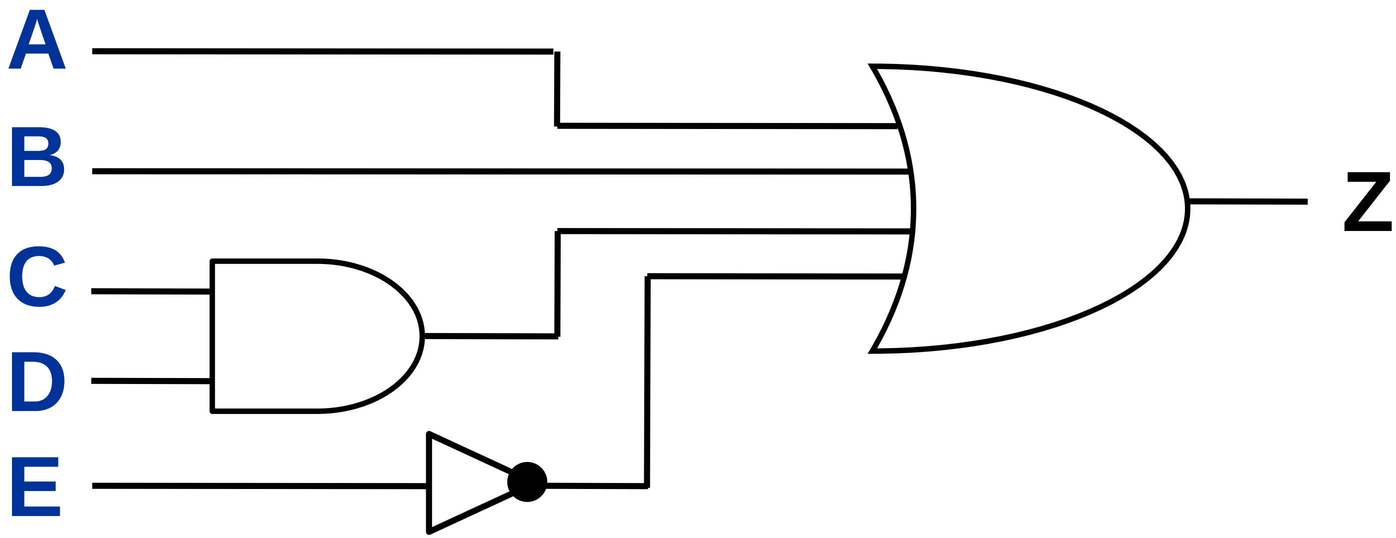


$$Z = A + B + CD + \overline{E}$$

$$= \text{somme de produits}$$

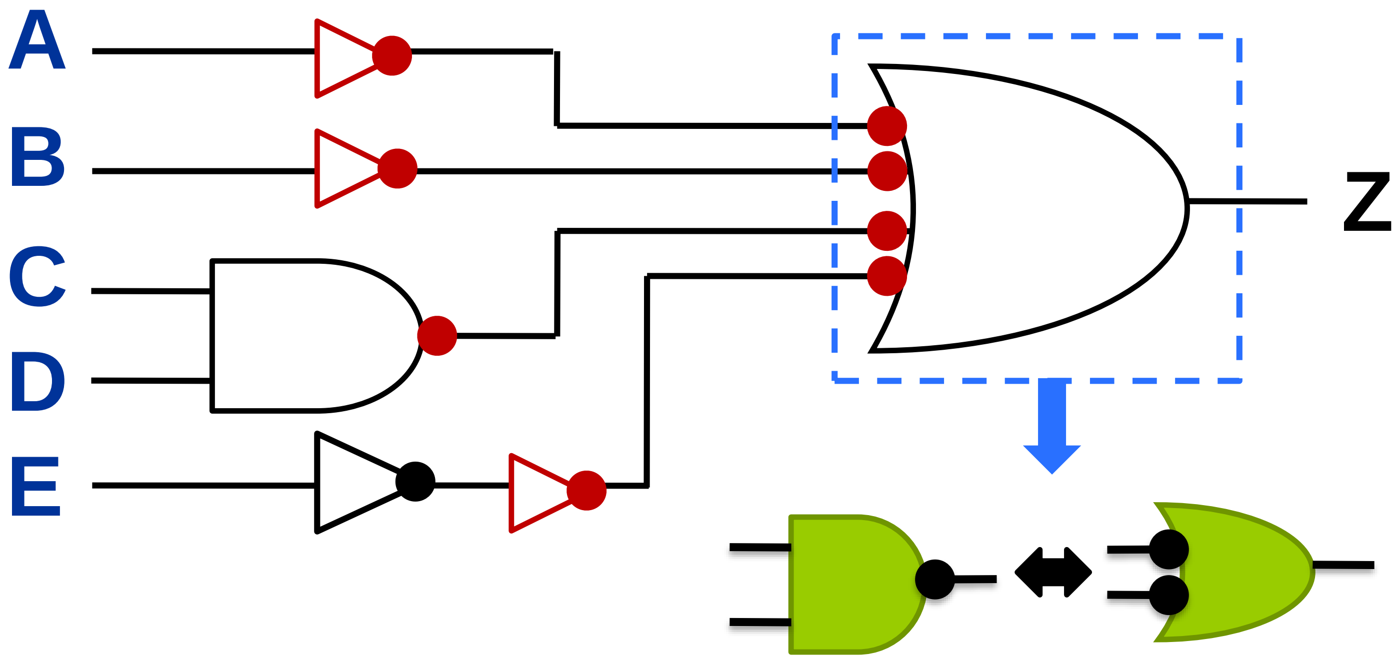
EX. 19 Implémenter le circuit au moyen de portes NAND

$$Z = A + B + CD + \overline{E}$$



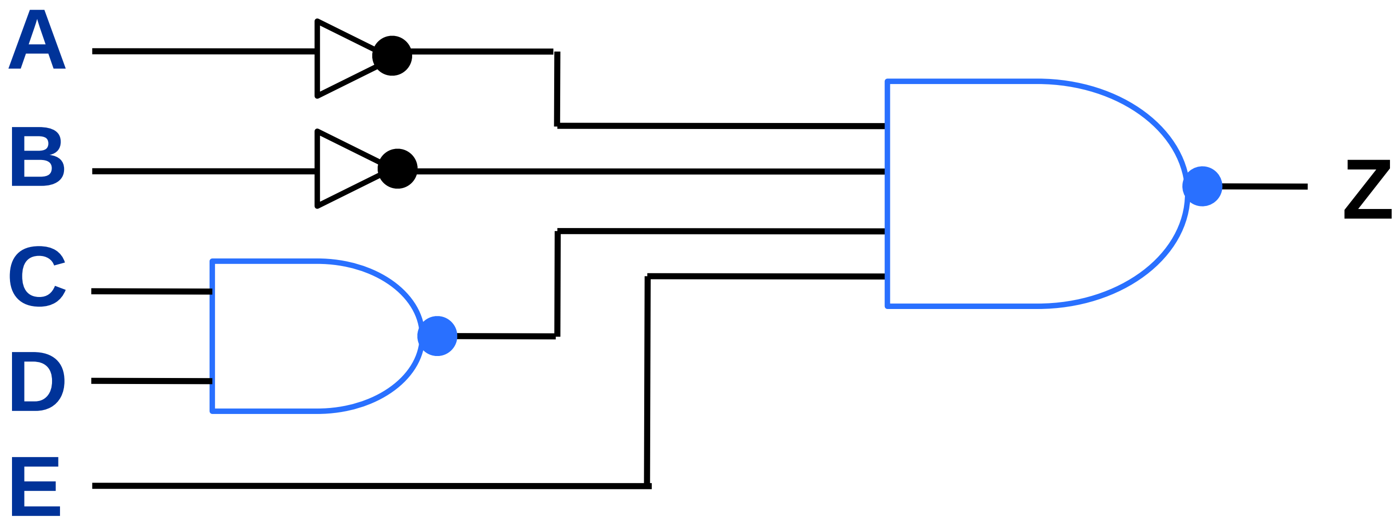
EX. 19 Implémenter le circuit au moyen de portes NAND

$$Z = A + B + CD + \overline{E}$$



EX. 19 Implémenter le circuit au moyen de portes NAND

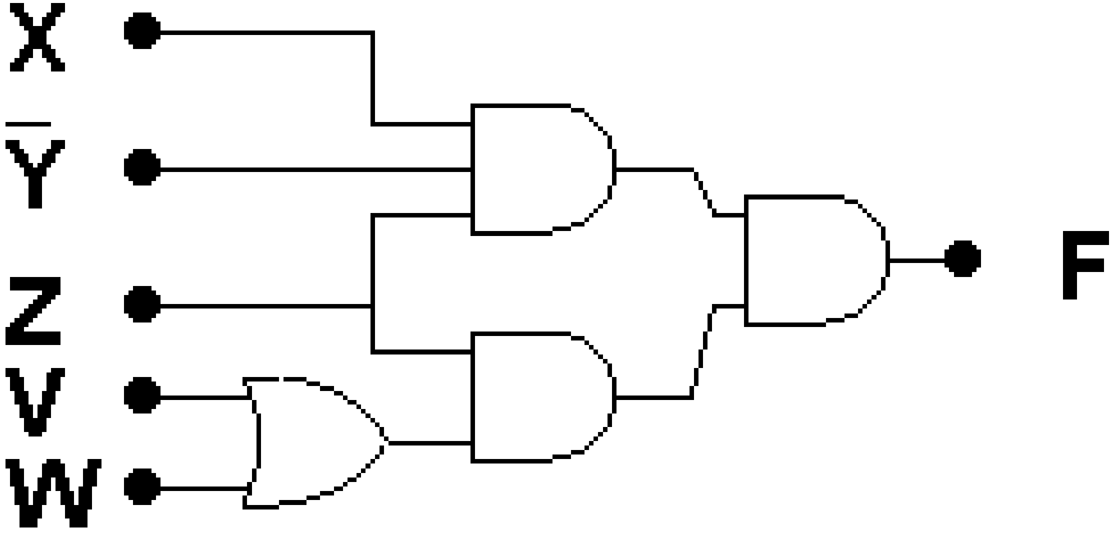
$$Z = A + B + CD + \overline{E}$$



Méthode algébrique

$$Z = \overline{\overline{A + B + CD + \overline{E}}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{CD} \cdot E}$$

EX. 20 Implémenter le circuit au moyen de portes NOR

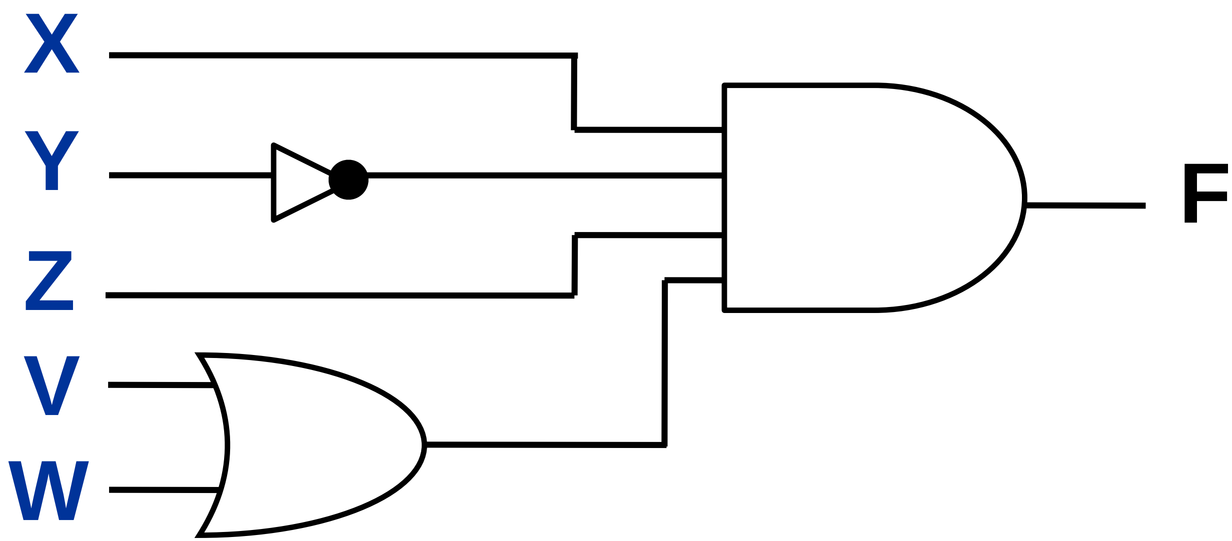


$F = X\overline{Y}Z \,.\, Z(V+W) = X.\overline{Y}.Z.(V+W)$

$= $ produit de sommes

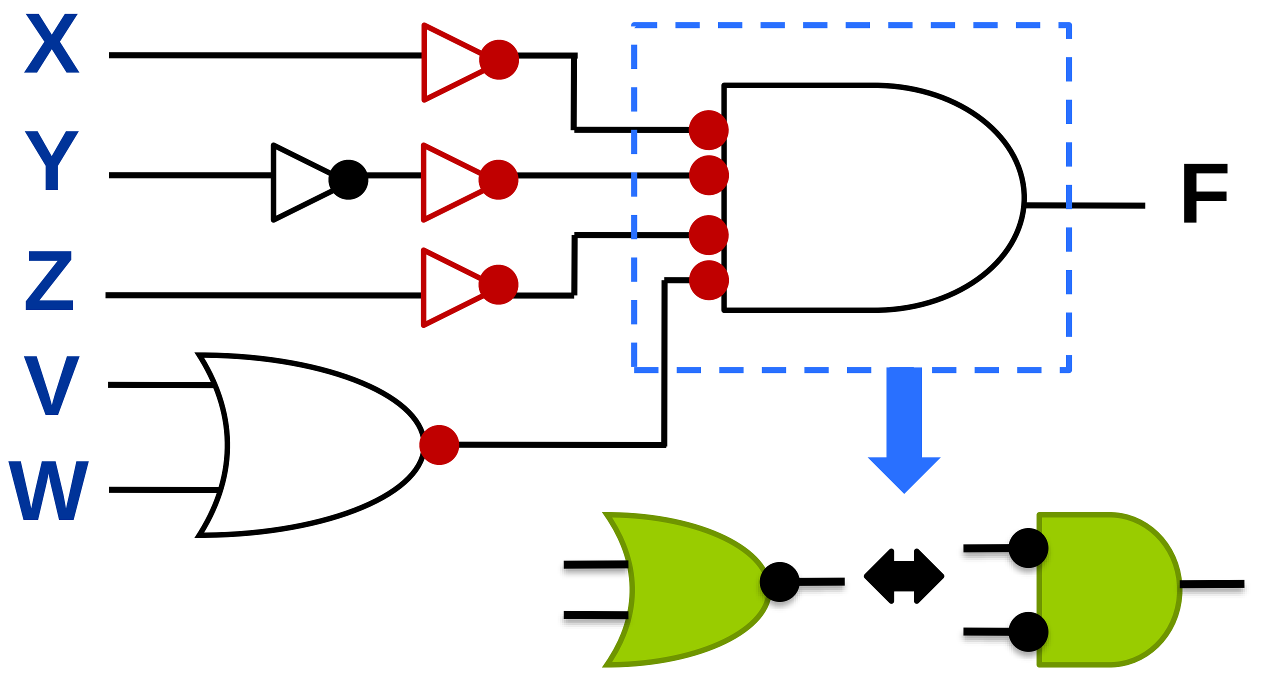
EX. 20 Implémenter le circuit au moyen de portes NOR

$$F = X.\overline{Y}.Z.(V+W)$$



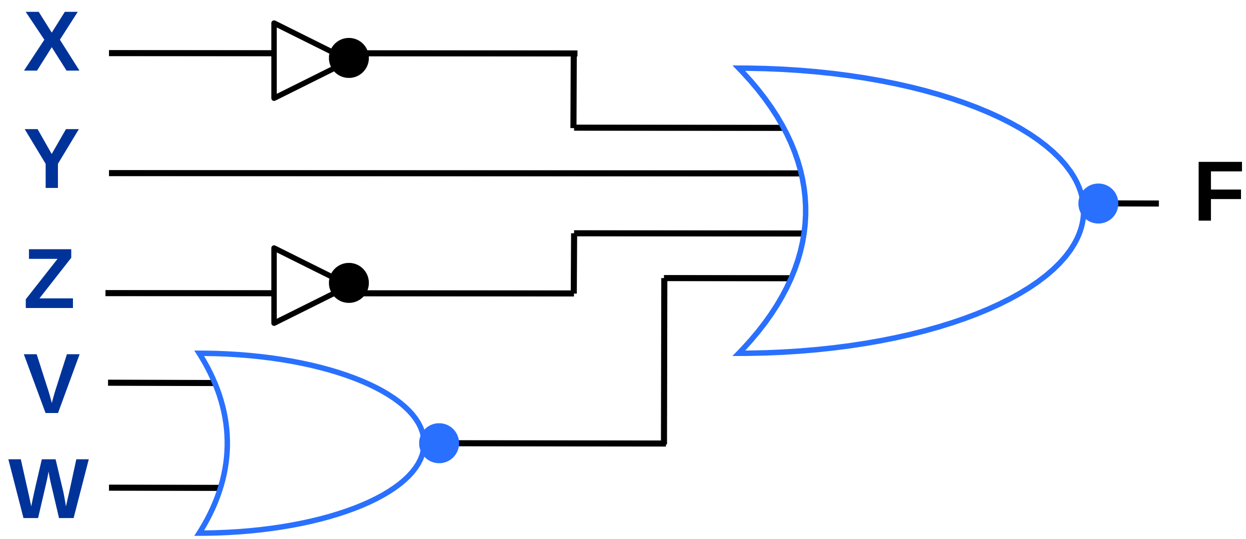
EX. 20 Implémenter le circuit au moyen de portes NOR

$$F = X.\overline{Y}.Z.(V+W)$$



EX. 20 Implémenter le circuit au moyen de portes NOR

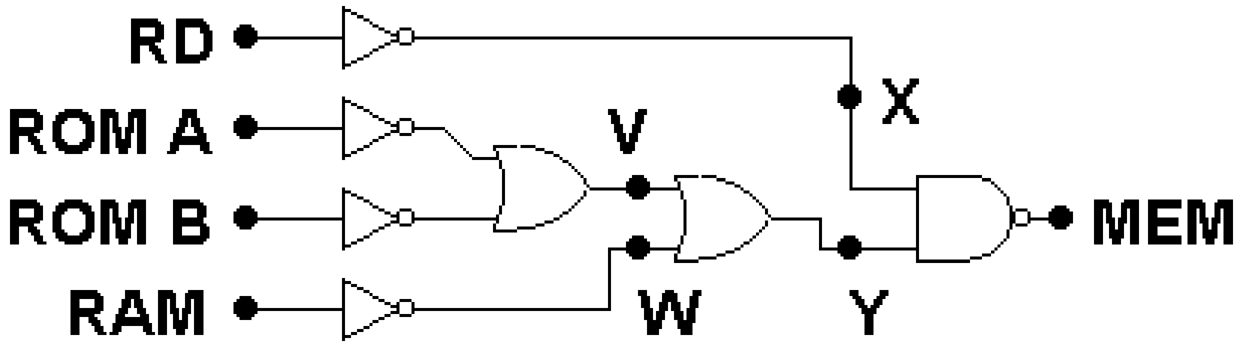
$$F = X.\overline{Y}.Z.(V+W)$$



Méthode algébrique

$$F = \overline{\overline{X.\overline{Y}.Z.(V+W)}} = \overline{\overline{X} + Y + \overline{Z} + \overline{(V+W)}}$$

EX.21 Pour quelles conditions MEM=0 ?



MEM = 0 si X = 1 **ET** Y = 1

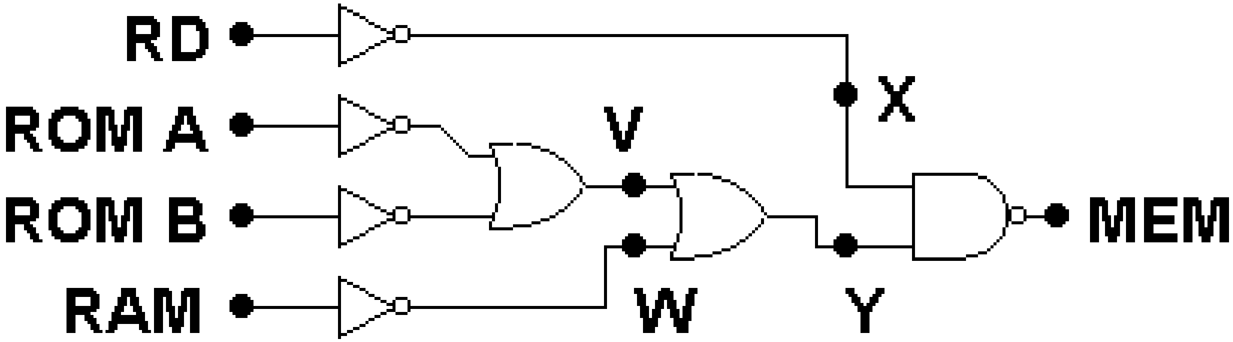
RD = 0

V = 1 **OU** W = 1

ROM A = 0
OU
ROM B = 0

RAM = 0

EX.21 Pour quelles conditions MEM=0 ?

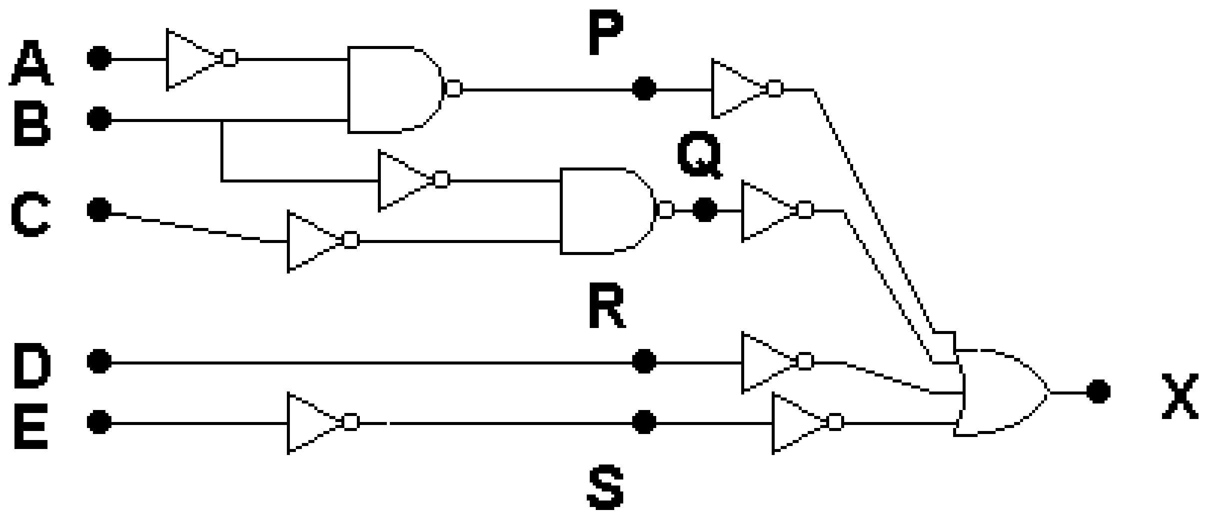


MEM = 0 si RD = 0

ET

{ ROM A = 0 **OU** ROM B = 0 **OU** RAM = 0 }

EX.22 Pour quelles conditions X=1 ?



X = 1 **si** $\overline{P} = 1$ **OU** $\overline{Q} = 1$ **OU** $\overline{R} = 1$ **OU** $\overline{S} = 1$

si $P = 0$ **OU** $Q = 0$ **OU** $R = 0$ **OU** $S = 0$

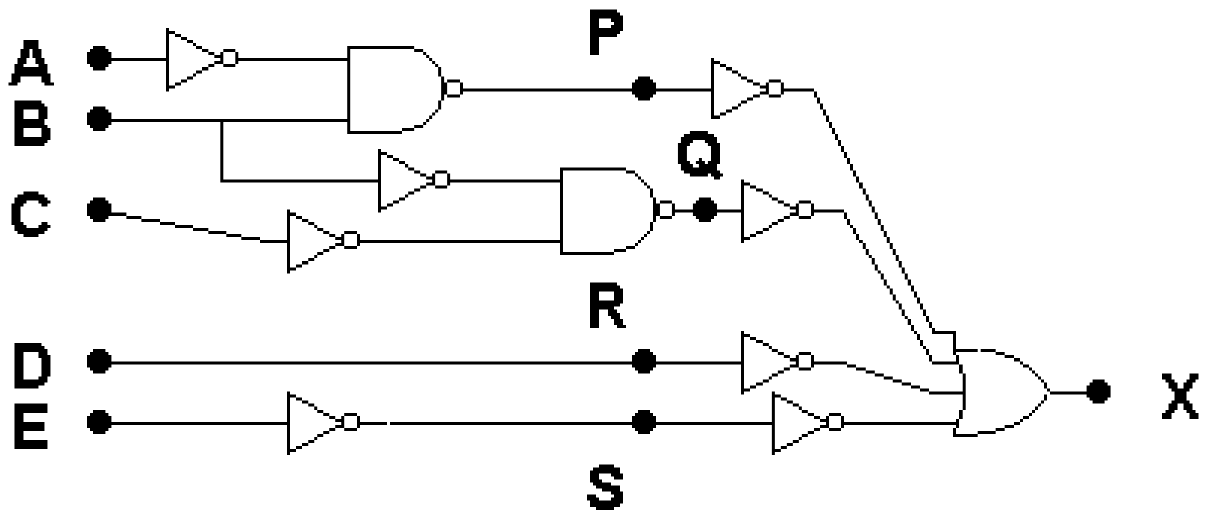
$P = \overline{\overline{A}.B} = A + \overline{B}$ **P = 0** **si** A = 0 **ET** B = 1

$Q = \overline{\overline{B}.\overline{C}} = B + C$ **Q = 0** **si** B = 0 **ET** C = 0

$R = D$ **R = 0** **si** D = 0

$S = \overline{E}$ **S = 0** **si** E = 1

EX.22 Pour quelles conditions X=1 ?



X = 1 **si** A = 0 **ET** B = 1

OU

si B = 0 **ET** C = 0

OU

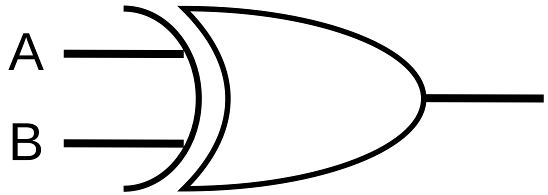
si D = 0

OU

si E = 1

XOR et NXOR

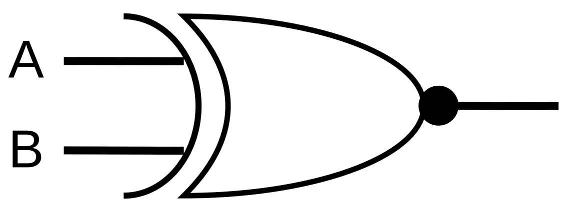
- <u>XOR</u> $A.\overline{B} + \overline{A}.B = A \oplus B$



Le résultat d’un XOR entre n variables vaut 1 *si et seulement* si un nombre impair des variables d’entrée sont à 1

➡ **XOR = TEST DE PARITE**

- <u>NXOR</u> $A.B + \overline{A}.\overline{B} = \overline{A \oplus B}$



EX.23 Montrer que A xor B xor C = A xor (B xor C)

A xor B xor C

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A xor (B xor C)

A	B xor C	F
0	0	0
0	1	1
0	1	1
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	0
1	0	1

Les tables de vérité sont identiques !