Répétition 1 : Polynômes.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 En classe

Définition : On munit l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ de l'opération interne, nommée composition,

$$\circ : \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ (P,Q) \mapsto P \circ Q = P(Q)$$

définie telle que, si $P = c_d X^d + \cdots + c_1 X + c_0$ et $Q = a_\ell X^\ell + \cdots + a_1 X + a_0$, alors

$$P \circ Q = P(Q) = c_d Q^d + \cdots + c_1 Q + c_0$$

où Q^i représente la multiplication de $\underbrace{Q \cdot Q \cdots Q}_{i \text{ termes}}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
En particulier, le degré du polynôme $P(Q)$ est égal à $d.\ell$, le produit des degrés de P et de Q.

Exercice 1. Soient les polynômes

$$P = X^2 - 2X + 2 \quad \text{et} \quad Q = X^2 - 1.$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, calculer le polynôme $P(Q)$ ainsi que son degré.

Exercice 2. Notons P et Q les polynômes définis par

$$P = X^3 + 2X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q = 2X^2 + 1.$$

Dans $\mathbb{Z}_3[X]$, déterminer les polynômes $2P$, $P + Q$, $P.Q$ et $P(Q)$ et vérifier que les polynômes obtenus ont un degré correspondant au degré attendu d'un point de vue théorique. Même question si $Q = 3X^2 + 1$.

Rappel 1 : Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, la *fonction induite* par P est la fonction

$$\mathbb{K} \to \mathbb{K},\ k \mapsto P(k).$$

Exercice 3. Sur $\mathbb{Z}_3[X]$ (resp., $\mathbb{Z}_2[X]$), existe-t-il deux polynômes différents de degré 2 donnant lieu à une même fonction induite ? Si oui, donner un exemple. Si non, justifier.

Exercice 4. Combien y a-t-il de polynômes de degré au plus d sur $\mathbb{Z}_m$? Combien y a-t-il de polynômes de degré exactement d sur $\mathbb{Z}_m$?

Rappel 2 : Pour tous polynômes $P, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que $D \neq 0$, il existe des polynômes $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ uniques tels que $P = QD + R$ et $\deg(R) < \deg(D)$. Les polynômes Q, R sont appelés les quotient et reste de la division respectivement. De plus, on dit que P est divisible par D (ou D divise P) si $R = 0$.

Exercice 5. Calculer le quotient et le reste, dans $\mathbb{Z}_5[X]$, de la division de

$$X^3 + X^2 + 1$$

par

$$X^2 + 2.$$

Rappel 3 : Pour tout $P \in \mathbb{C}[X], \mathbb{R}[x]$ ou $\mathbb{Q}[x]$ et tout $k \in \mathbb{K}$, on a

$$P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} \frac{\mathrm{D}^i P(k)}{i!} (X - k)^i.$$

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}[X]$, écrire le polynôme $3X^4 - 2X^2 - 3$ sous la forme de Taylor en le point $k = -1$.

Rappel 4 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{K}$. Le nombre k est un zéro de P si et seulement si $P(k) = 0$.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $k \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$. Le nombre k est un zéro de multiplicité α de P si et seulement si $P(k) = 0$, $\mathrm{D}P(k) = 0$, …, $\mathrm{D}^{\alpha-1}P(k) = 0$ et $\mathrm{D}^{\alpha}P(k) \neq 0$.

De plus, si k est un zéro de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}$ de P, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(k) \neq 0$ et $P = (X - k)^{\alpha} Q$.

Exercice 7. Soit

$$P = X^5 + 2X^4 + 6X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X].$$

Pour quels $a, b, c \in \mathbb{C}$, le polynôme P est-il divisible par

(a) $X(X - 1)$?

(b) $(X - 1)^2$?

Exercice 8. Soient P, Q deux polynômes à coefficients complexes. Sachant que

$$P = (X - 1)^2 Q$$

et que $Q(-1) = 0, \mathrm{D}Q(-1) = 0, Q(1) \neq 0, \mathrm{D}Q(1) = 0$, déterminer la multiplicité de la racine 1 dans P. Que peut-on dire de la multiplicité de la racine -1 dans P ?

Exercice 9. Supposons que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. Démontrer que si $k \in \mathbb{K}$ est un zéro de multiplicité $\alpha \geq 1$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors k est un zéro de multiplicité $\alpha - 1$ du polynôme $\mathrm{D}P$.

Exercice 10. Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}_{\leq 5}[X]$ tels que $P + 10$ soit divisible par $(X + 2)^3$ et $P - 10$ soit divisible par $(X - 2)^3$.

Rappel 5 : Un PGCD de deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ est un polynôme D qui divise P et Q et qui est tel que tout polynôme divisant simultanément P et Q divise aussi D.

Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont *premiers entre eux* si 1 est un PGCD de P et de Q.

Exercice 11. (a) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $m \in \mathbb{N}$ le nombre de racines distinctes de P. Démontrer que le degré du PGCD de P et de $\mathrm{D}P$ est égal à $\deg(P) - m$.

(b) Considérons le polynôme $P = (X-2)^3(X+1)^2$. Carlculer $\mathrm{D}P$ et le PGCD de P et $\mathrm{D}P$ ainsi que son degré.

> **Rappel 6 : *Théorème fondamental de l'algèbre :*** Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$ possède exactement d zéros lorsque ceux-ci sont comptés avec leurs multiplicités. Ainsi, si $k_1, \ldots, k_m$ sont les zéros de P de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, alors
>
> $$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = d$$
>
> et
>
> $$P = c(z-k_1)^{\alpha_1} \cdots (z-k_m)^{\alpha_m},$$
>
> où c est le coefficient dominant de P.

Exercice 12. Chercher les zéros réels du polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P = X^3 - 7X^2 - 28X + 160$$

sachant qu'il possède un zéro négatif ainsi que deux zéros positifs dont l'un est le double de l'autre.

Exercice 13. Chercher les zéros complexes du polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$X^3 + 3X^2 + (9 - 4\mathrm{i})\mathrm{X} + 15$$

sachant qu'il possède un zéro imaginaire pur.

> **Rappel 7 :** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $c \in \mathbb{C}$ est un zéro de P de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}$, alors son conjugué $\bar{c}$ est aussi un zéro de P de multiplicité α.

Exercice 14. Chercher les zéros complexes du polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$X^3 - 3X^2 + 4X - 12$$

sachant qu'il possède un zéro imaginaire pur.

2 Préparation

Exercice 15. Soient les polynômes

$$P = X^3 - X + 2 \quad \text{et} \quad Q = X^2 - 2.$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer les polynômes $3P$, $P + 2Q$, $P.Q$ et $Q(P)$ et vérifier que les polynômes obtenus ont un degré correspondant au degré attendu d'un point de vue théorique.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}[X]$, écrire le polynôme $2X^5 - 4X^2 - X + 1$ sous la forme de Taylor en le point $k = 1$.

Exercice 17. Calculer le quotient et le reste de la division de

$$X^5 + 2X^4 - X^3 + 22X$$

par

$$X^2 - 4X + 1$$

dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 18. Pour quelles valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{C}$ le polynôme

$$P = 2X^4 - 7X^3 + aX^2 + bX - 4$$

est-il divisible par $(X - 2)^2$.

Exercice 19. Sachant que le polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$X^4 + X^3 - 5X^2 + X - 6$$

possède un zéro réel et un zéro imaginaire pur, déterminer tous ses zéros.

3 Pour aller plus loin

Exercice 20. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme

$$\cos((n-1)\theta)X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos(\theta)X + 1$$

est divisible par

$$X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$$

dans $\mathbb{C}[X]$ et calculer le quotient de cette division.

Exercice 21. Soit $n > 1$ un entier. Démontrer que 1 est un zéro triple du polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1.$$

Répétition 2 : Espaces Vectoriels, sous-espaces vectoriels et indépendance linéaire.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022
{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 En classe

Rappel 1 : Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ est la donnée d'un ensemble E et de deux opérations

$$+ : E \times E \to E$$

et

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$

qui satisfont les propriétés suivantes :

1. Il existe un élément $\mathbf{0}$ de E neutre pour $+$, càd pour tout $\mathbf{e} \in E, \mathbf{e} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{e} = \mathbf{e}$.
2. Tout élément de E possède un opposé, càd pour tous $\mathbf{e} \in E$, il existe $\mathbf{f} \in E$ tel que $\mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$.
3. L'opération $+$ est assiociative, càd pour tous $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g} \in E$, on a $(\mathbf{e} + \mathbf{f}) + \mathbf{g} = \mathbf{e} + (\mathbf{f} + \mathbf{g})$.
4. L'opération $+$ est commutative, càd pour tous $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in E$, on a $\mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{e} + \mathbf{f}$.
5. Pour tous $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in E$ et tout $k, l \in \mathbb{K}$, on a
   (a) $k.(l.\mathbf{e}) = (kl).\mathbf{e}$,
   (b) $(k + l).\mathbf{e} = k.\mathbf{e} + l.\mathbf{e}$,
   (c) $k.(\mathbf{e} + \mathbf{f}) = k.\mathbf{e} + k.\mathbf{f}$,
   (d) $1.\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ des lois $+$ et $\cdot$ comme suit

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda.x \\ \lambda.y \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ des lois $\oplus$ et $\odot$ comme suit

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' - 2xx' - 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda.x - \lambda^2 xy \\ \lambda.y \end{pmatrix}.$$

Déterminer si l'ensemble $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot\right)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Parmis les ensembles de fonctions suivants, munis des opérations usuelles, lesquels sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (resp., sur $\mathbb{C}$).

1. $E_1 = \{f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}\}$
3. $E_3 = \{f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}\}$
4. $E_4 = \{f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$

Exercice 4. On définit sur l'ensemble des matrices matrices réelles carrées de dimension 2 les lois $\oplus$ et $\odot$ comme suit

$$\oplus : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x'_3 & x'_4 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 & x_2 + x'_2 \\ x_3 + x'_3 & x_4 + x'_4 \end{pmatrix}$$

et

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : \left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si l'ensemble $\left(\mathbb{R}^{2\times 2}, \oplus, \odot\right)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère l'ensemble des cercles de rayon $r \in \mathbb{N}$ (r fixé) du plan cartésien où un cercle de centre (x, y) est noté $\mathscr{C}(x, y)$. On considère avec les lois d'additions et de multiplication par un scalaire définies comme suit.

- Si on considères les cercles $C_1 = \mathscr{C}(x_1, y_1)$ et $C_2 = \mathscr{C}(x_2, y_2)$ de rayon r alors $C_1 + C_2$ est le cercle $\mathscr{C}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ de rayon r.
- Si $C_1 = \mathscr{C}(x, y)$ et λ est un nombre réel, alors $\lambda C = \mathscr{C}(\lambda x, \lambda y)$.

L'ensemble des cercles du plan cartésien muni de ces opération est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. On considère l'ensemble des cercles du plan cartésien où un cercle de centre (x, y) et de rayon r est noté $\mathscr{C}((x, y), r)$. On considère avec les lois d'additions et de multiplication par un scalaire définies comme suit.

- Si $C_1 = \mathscr{C}((x_1, y_1), r_1)$ et $C_2 = \mathscr{C}((x_2, y_2), r_2)$ alors $C_1 + C_2$ est le cercle $\mathscr{C}((x_1 + x_2, y_1 + y_2), r_1 + r_2)$.
- Si $C_1 = \mathscr{C}((x, y), r)$ et λ est un nombre réel, alors $\lambda C = \mathscr{C}((\lambda x, \lambda y), |\lambda| r)$.

L'ensemble des cercles du plan cartésien muni de ces opération est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Rappel 2 : Une *combinaison linéaire* des vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ de E (avec $n \in \mathbb{N}$) est une expression de la forme

$$k_1\mathbf{x}_1 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n$$

avec $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$. Les scalaires $k_1, \ldots, k_n$ sont appelés les *coefficients* de cette combinaison linéaire.

Exercice 7. Sur $\mathbb{R}$, déterminer si le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Même question pour le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

> **Rappel 3 :** Des vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de E sont *linéairement indépendants* si pour tous $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ on a
> $$k_1\mathbf{x}_1 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0.$$
> Des vecteurs $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de E sont *linéairement dépendants* s'ils ne sont pas linéairement indépendants. Des vecteurs non nuls sont linéairement dépendants si et seulement l'un est combinaison linéaire des autres.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 8^3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Vérifier la dépendance (ou l'indépendance) linéaire des vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $(\mathbb{Z}_5)^3$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_5$).

Exercice 10. Déterminer si les polynômes P, Q et R sont linéairement dépendants ou indépendants dans $\mathbb{R}[X]$ si

$$P = X^3 - 3X^2 + 3X + 1, \qquad Q = X^3 - X^2 + 8X + 2, \qquad \text{et} \qquad R = 2X^3 - 4X^2 + 9X + 5.$$

Exercice 11. Déterminer si les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 sont linéairement dépendants ou indépendants dans $\mathbb{R}[X]$ si, pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a

$$P_n = (X + n)^2.$$

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues réelles, étudier l'indépendance linéaire de $1, \sin$ et $\cos$.

Exercice 13. Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\mathrm{i} \\ -14 \\ 7\mathrm{i} \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants si on regarde $\mathbb{C}^3$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et linéairement dépendants si on le regarde comme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Rappel 4 : Un *sous-espace vectoriel* de E est une partie de E qui contient $\mathbf{0}$ et les combinaisons linéaires de ses vecteurs. Formellement, W est un sous-vectoriel de E sur $\mathbb{K}$ si

(a) $\mathbf{0} \in W$,

(b) pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, on a $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$,

(c) pour tous $\mathbf{x} \in W, \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda.\mathbf{x} \in W$.

Exercice 14. Vérifier si chacune des parties suivantes est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) muni des lois usuelles (pour un n adéquat) :

1. $\mathbb{Z}^2$,
2. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}$,
3. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 0 \right\}$,
4. $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = a \right\}$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante fixée,
5. $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid xy = 0 \right\}$,

Rappel 5 : Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E (muni des mêmes opérations d'addition et de multiplication par un scalaire) est un espace vectoriel.

Exercice 15. Soient $\mathbb{K}$ un champ et n un naturel strictement plus grand que 1. Considérons le vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée. Les parties suivantes de $\mathbb{K}[X]$ sont-elles des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des polynômes de degré exactement n,
2. l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n,
3. $W_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X+2) = 2P(X+1) - P(X)\}$,
4. $W_2 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 0\}$.

2 Préparation

Exercice 16. Parmis les ensembles de fonctions suivants, munis des opérations usuelles, lesquels sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (resp., sur $\mathbb{C}$).

1. $E_1 = \{f \colon \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[\}$
2. $E_2 = \{f \colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}\}$

3. $E_3 = \{f\colon \mathbb{R} \mapsto [0,1]\}$

Exercice 17. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. Déterminer si les polynômes P, Q et R sont linéairement dépendants ou indépendants dans $\mathbb{R}[X]$ si

$$P = X^3 - 2X^2 + 2X + 1, \qquad Q = X^3 - X^2 + 3X, \qquad \text{et} \qquad R = 2X^3 + 5.$$

Exercice 19. Vérifier si chacune des parties suivantes est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) muni des lois usuelles (pour un n adéquat) :

1. $\mathbb{N}^2$,
2. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \right\}$,
3. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2 \right\}$,
4. $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid y = -2z \right\}$.

Exercice 20. Soient $\mathbb{K}$ un champ et n un naturel strictement plus grand que 1. Considérons le vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée. Les parties suivantes de $\mathbb{K}[X]$ sont-elles des espaces vectoriels ?

1. l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à n,
2. $W_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 1\}$.

Répétition 3 : Base et changement de base.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

Rappel 1 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $B \subseteq E$, B est une base de E si

(a) B est une partie génératrice de E, càd B est une partie de E telle que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de B,

(b) B est une partie libre de E, càd une partie de E telle que toute partie finie de B est formée de vecteurs linéairement indépendants.

Théorème d'équipotence des bases : Si E admet une partie génératrice finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Soit $B = (b_1, \dots, b_m)$ une base de E. Tout vecteur E admet une unique décomposition dans la base B : pour tout $x \in E$, il existe des scalaires uniques $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = x_1 b_1 + \cdots + x_m b_m.$$

Les coefficients $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ de l'unique décomposition de x dans B sont appelés les composantes de x dans la base B. On les note

$$\Psi_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

1 En classe :

Exercice 1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). Déterminer les composantes du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 2. On considère les vecteurs de $(\mathbb{Z}_3)^3$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs forment-ils une base de $(\mathbb{Z}_3)^3$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_3$) ? Si oui, déterminer les composantes du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 3. Démontrer que les polynômes P_1, P_2 et P_3 définis ci-après forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficient dans $\mathbb{R}$.

$$P_1 = X \qquad P_2 = 2X + 1 \qquad P_3 = X^2 + 2X + 2.$$

Déterminer les composantes des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 dans cette base si

$$Q_1 = 1, \qquad Q_2 = X, \qquad Q_3 = X^2.$$

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}^{n\times n}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices $n \times n$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit E_k l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = k, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{et}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

(a) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble E_k est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n\times n}$ sur $\mathbb{R}$?

(b) Sachant que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n\times n}$ sur $\mathbb{R}$, donner une base de E_0 dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$.

(c) Généraliser le point précédent pour un $n \geq 2$ arbitraire. En déduire la dimension de E_0 (en fonction de n).

> **Rappel 2 :** Soient $B = (b_1, \ldots, b_m)$ et $B' = (b'_1, \ldots, b'_m)$ deux bases de E. Pour tout $x \in E$, on a
>
> $$\Psi_{B'}(x) = \mathscr{M}(B, B')\Psi_B(x)$$
>
> où $\mathscr{M}(B, B)$ est la matrice de $\mathbb{K}^{m\times m}$ dont la j-ième colonne est le vecteur $\Psi_{B'}(b_j)$, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Exercice 5. Démontrer que les ensembles $B = (1, X, X^2)$ et $B' = (1, X-1, (X-1)^2)$ forment des bases de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficient dans $\mathbb{R}$. Donner les composantes des polynômes $1, X-1$ et $(X-1)^2$ dans la base B. En déduire la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B', B)$.

> **Rappel 3 :** Pour toutes bases B, B' et B'', on a
>
> $$\mathscr{M}(B, B'') = \mathscr{M}(B', B'')\mathscr{M}(B, B'),$$
>
> et
>
> $$\mathscr{M}(B', B) = (\mathscr{M}(B, B'))^{-1}.$$

Exercice 6. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On définit

$$f_1 = e_1 + e_2, \qquad f_2 = e_2 + e_3, \qquad f_3 = e_3 + e_1.$$

(a) Montrer que $B' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
(b) Donner les composantes du vecteur $x = e_1 + e_2 + e_3$ dans la base B'.
(c) Donner les composantes de $y = e_1 - 2e_2 + e_3$ dans la base B.
(d) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B', B)$.
(e) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B, B')$.
(f) Donner les composantes de $y = e_1 - 2e_2 + e_3$ dans la base B'.
(g) Montrer que $B'' = (g_1, g_2, g_3)$ est une base de E, où

$$g_1 = 2e_2 + 3e_3, \qquad g_2 = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \qquad g_3 = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

(h) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B'', B)$.
(i) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B'', B')$.

2 Préparation

Exercice 7. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On définit

$$f_1 = e_1 + e_2, \qquad f_2 = e_3 - 2e_1, \qquad f_3 = e_2 - 2e_3.$$

(a) Montrer que $B' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
(b) Donner les composantes du vecteur $x = e_1 - 3e_2 - e_3$ dans la base B.
(c) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B', B)$.
(d) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B, B')$.
(e) Donner les composantes de $x = e_1 - 3e_2 - e_3$ dans la base B'.

Répétition 4 : Valeur propre, vecteur propre et espace propre.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

Rappels : Soit A une matrice de $\mathbb{C}^m_m$.
Une *valeur propre* de A est un nombre complexe λ pour lequel il existe un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ non nul tel que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Le *polynôme caractéristique* de A est le polynôme $\det(A - XI_m)$ de $\mathbb{C}[X]$.
Un nombre complexe λ est valeur propre de A si et seulement s'il est zéro de son polynôme caractéristique.
La *multiplicité algébrique* d'un nombre complexe λ est sa multiplicité en tant que zéro du polynôme caractéristique de A.
Un *vecteur propre* de A relatif à un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ tel que $A\lambda = \lambda\mathbf{x}$.
Le *sous-espace propre* relatif à $\lambda \in \mathbb{C}$, noté $E_\lambda(A)$, est l'ensemble des vecteurs propres relatifs à λ :

$$E_\lambda(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m : A\lambda = \lambda\mathbf{x}\}.$$

La *multiplicité géométrique* d'un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ en tant que valeur propre de A est la dimension du sous-espace vectoriel $E_\lambda(A)$ sur $\mathbb{C}$.
La multiplicité géométrique d'une valeur propre est non nulle et inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique.

1 En classe

Exercice 1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques et géométriques.

Rappel : Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de A répétées selon leurs multiplicités algébriques. On a $\det(A) = \prod_{i=1}^m \lambda_i \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^m \lambda_i$.

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2a & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2a & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques et géométriques. En déduire la trace et le déterminant de la matrice A.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Sachant que 1 est valeur propre de A, $\det(A) = 1$ et que $\mathrm{tr}(A) = 1$, déterminer les autres valeurs propres de A et donner un exemple d'une telle matrice A.

> **Rappel :** Le rang d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{\ell\times c}$ est égal au nombre maximum de colonnes (respectivement de lignes) linéairement indépendantes de A, où l'indépendance linéaire est comprise dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^c$ (respectivement $\mathbb{K}_\ell$).
>
> Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
>
> $$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_m) \qquad \text{et} \qquad \dim E_\lambda(A) = m - \mathrm{rg}(A - \lambda I_m).$$

Exercice 5. (a) Soit la matrice diagonale par bloc

$$A = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer sa multiplicité géométrique.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_n$ la matrice de dimension $n \times n$ composée de 1. Généraliser le point précédent à une matrice diagonale par bloc définie par

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1}_{n_{k-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{1}_{n_k} \end{pmatrix}$$

où $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $n_i \in \mathbb{N}_0$,

$$n_1 + \ldots + n_k = n$$

et où il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $n_i \neq 1$

2 Préparation

Exercice 6. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques et géométriques.

Répétition 5 : Théorème de Cayley-Hamilton et polynôme minimal.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

Rappels : Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

1. **Théorème (Cayley-Hamilton)** : Toute matrice carrée complexe annule son polynôme caractéristique. Autrement dit, si $P = \det(A - XI_m)$, alors $P(A) = 0$.
2. **Polynôme minimal** : Le *polynôme minimal* de A est le polynôme de $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ de coefficient dominant 1 de plus petit degré qui est annulé par A.
3. **Propriétés** :
   - Le polynôme minimal de A divise tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ annulé par A.
   - Le polynôme minimal de A divise le polynôme caractéristique de A.
   - Les zéros du polynôme minimal de A sont les valeurs propres de A.
   - Si toutes les valeurs propres de A sont simples, alors les polynômes minimal et caractéristique de A coïncident (au signe près).

1 En classe

Exercice 1. Trouver une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ (où m est à déterminer) vérifiant

$$A^4 - 7A^3 + 18A^2 - 20A + 8I = \mathbf{0},$$

où l'on note $\mathbf{0}$ la matrice de $\mathbb{C}^{m\times m}$ composée que de 0 et I la matrice identité de $\mathbb{C}^{m\times m}$.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

(b) Déterminer le polynôme minimal de A.

(c) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 3. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le polynôme minimal de A en fonction de la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$.

2 Préparation

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

(b) Déterminer le polynôme minimal de A.

(c) En déduire si la matrice A est inversible. Si oui, déterminer A^{-1}.

Répétition 6 : Diagonalisation.

Mathématiques pour l'informatique 2,

Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

Méthode : Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

1. Valeurs propres et multiplicité algébrique : Les *valeurs propres* de A, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, sont les zéros du polynôme $\det(A - XI_m)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, la *multiplicité algébrique* μ_i associée à la valeur propre λ_i est la multiplicité de λ_i en tant que zéros du polynôme caractéristique $\det(A - XI_m)$.
2. Espace propre et multiplicité géométrique : Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, l'*espace propre* associé à la valeur propre λ_i est l'ensemble $E_{\lambda_i}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m : A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}\}$. La multiplicité géométrique ν_i de λ_i est égale à $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i}(A)$. On a toujours $1 \leq \nu_i \leq \mu_i$.

   Théorème : La matrice A est diagonalisable si et seulement si $\nu_i = \mu_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. En particulier, si la matrice A n'a que des valeurs propres simples (càd de multiplicités algébriques égales à 1), alors elle est diagonalisable.
3. La matrice S qui diagonalise A : Les colonnes de S sont les vecteurs propres formant les bases des $E_{\lambda_i}(A)$. On a

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\mu_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{\mu_r}\right).$$

   ATTENTION : Ordre des colonnes de S !

1 En classe

Exercice 1. Diagonaliser si possible la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si la matrice A est diagonalisable en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Diagonaliser si possible la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si la matrice B est diagonalisable en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A quelles conditions sur les paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la matrice M est-elle diagonalisable ? Quand M est diagonalisable, fournir une matrice inversible S telle que $S^{-1}MS$ soit diagonale.

Exercice 4. Pour quelle(s) valeur(s) du complexe α la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Si c'est possible, diagonaliser la matrice M.

Exercice 5. Soient A et B deux matrices de $\mathbb{C}^{n\times n}$. Prouver que si les valeurs propres de A sont simples et que B commute avec A, alors B est diagonalisable.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ une matrice diagonalisable. Si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de A (répétées selon leurs multiplicités algébriques), démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\det(A^n) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^n \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(A^n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n.$$

2 Préparation

Exercice 7. Pour quelle(s) valeur(s) du complexe α la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Si c'est possible, diagonaliser la matrice M.

Exercice 8. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-u & 0 \\ 1 & u-1 & 4-u & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & u-1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $u \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Pour $u = 5$, fournir une matrice S qui diagonalise M ainsi que la matrice diagonale $S^{-1}MS$.

Répétition 7: Approximations polynomiales.

Mathématiques pour l'informatique 2,

Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

Rappels :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec $I \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in I$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{\leq n}[X]$ est une *approximation (polynomiale)* de f à l'ordre n en a lorsqu'on a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Proposition : Si f admet une approximation polynomiale à l'ordre n en a, alors celle-ci est unique.

Théorème (Approximation polynomiale) : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec $I \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in I$. Si f est n fois dérivable sur I alors le polynôme

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(D^i f)(a)}{i!}(X-a)^i$$

est l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en a.

Théorème (Développement limité de Taylor) : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec $I \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Pour tous $a, x \in I$ distincts, il existe u compris strictement entre a et x tels que

$$r_n(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{(D^{n+1} f)(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

où P_n désigne l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en a.

1 En classe

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale de f à l'ordre $n = 0, 1, 2$ en a.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)e^{3x}, \quad a = 0.$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+9x}, \quad a = 0.$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x), \quad a = 1.$

Exercice 2. Déterminer l'approximation de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos^2(x)$ en $a = 0$ à l'ordre $n = 0, 1, 2$. Donner un expression explicite du reste de ces approximations. En déduire où se situe le graphique de f au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations.

Exercice 3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ayant un développement limité

$$P_3 = -2 + 2(x-2) + 5(x-2)^2 - 2(x-2)^3$$

au voisinage de 2

(a) Donner les valeurs de $f(2), Df(2), D^2f(2)$ et $D^3f(2)$.

(b) Donner le développement limité de la fonction Df à l'ordre 2 au voisinage de 2.

(c) Si on considère une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ également 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ayant un développement limité

$$Q_3 = 1 - 2(x-2) + 3(x-2)^2 + 4(x-2)^3$$

au voisinage de 2. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 des fonctions

$$f - g \quad \text{et} \quad 2f + 3g.$$

(d) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 2 de la fonction

$$h : \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\mapsto \mathbb{R}$$

définie par

$$h(x) = f(x) + \ln(2x-3), \quad \forall x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[.$$

Exercice 4. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mystère telle que :

$$f(\pi) = 0, \quad Df(\pi) = \frac{-3}{2}, \quad D^2f(\pi) = 0, \quad D^3f(\pi) = \frac{3}{8}, \quad D^4f(\pi) = 0, \quad D^5f(\pi) = \frac{-3}{32}$$

et

$$\forall u \in]2, \pi[, \quad |D^6f(u)| \leq \frac{3}{64}.$$

Estimer (de la meilleure façon possible) la valeur de la fonction f mystère en le point 2 en ne connaissant que les informations données et donner une majoration de l'erreur de votre estimation.

Exercice 5. Déterminer une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes en utilisant aucun outil tel qu'une calculatrice ou un gsm.

2 Préparation

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale de f à l'ordre $n = 0, 1, 2$ en a.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-2x}, \quad a = 0.$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x), \quad a = 0.$

Exercice 7. Déterminer l'approximation polynomiale de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ à l'ordre 3 en $a = 0$ et en estimer le reste.

Répétition 8: Séries.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

Rappels :

- Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ converge alors $\lim_{i\to+\infty} x_i = 0$.
- **Série géométrique :** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{i=k}^{+\infty} x^i$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (c-à-d $x \in]-1, 1[$) uquel cas on a
$$\sum_{i=k}^{+\infty} x^i = \frac{x^k}{1-x}.$$
- **Série de Riemann :** Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.
- **Séries alternées :** Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, alors la série alternée $\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i x_i$ converge.
- **Séries de puissances :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$ converge. De plus, la somme de cette série est égale à $\exp(x)$.
- **Critère de comparaison :** Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des suites de réels. Si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i$ converge et si pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $|x_i| \leq y_i$, alors la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ converge aussi.
En particulier, si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|$ converge, alors la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ converge aussi.

1 En classe

Exercice 1. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\cos(i^2)}{i^2}$

(b) $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^i$

(c) $\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{\sin((2i+1)\frac{\pi}{2})}{i \ln i}$

(d) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3^i}{\sqrt{i}}$

(e) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2i}{\sqrt{i^2+1}}$

(f) $\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{i^2+2}{i^3+3}$

Exercice 2. Étudier la convergence des séries suivantes et préciser leurs sommes si elles convergent :

(a) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{4^{2i-1}}{i!}$

(b) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2^{i+3}}{3^i}$

(c) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)(i+3)}$

(d) $\sum_{i=3}^{+\infty} \frac{1}{i^2-4}$

(e) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^{i+4}}{i! \ln 9}$

(f) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(2\ln 2)^i}{3(i!)}$

Exercice 3. Écrire sous forme d'une série puis d'une fraction irréductible le réel $1,590909090\ldots$.

Exercice 4. Pour les $\theta \in \mathbb{R}$ "valides" (condition(s) à déterminer), démontrer l'égalité

$$\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) + \cos^6(\theta) + \cdots = \operatorname{cotg}^2(\theta).$$

2 Préparation

Exercice 5. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i^2+\sqrt{2}}$

(b) $\sum_{i=1}^{+\infty} i \cos\left(\frac{1}{i}\right)$

Exercice 6. Étudier la convergence des séries suivantes et préciser leurs sommes si elles convergent :

(a) $\sum_{i=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^i$

(b) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^{1-i}}{i!}$

(c) $\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{5^i (\ln 5)^{i-1}}{i!}$