Exercice 41 :

Notons $T_1, T_2, \dots T_k$ les k arbres de la forêt

Notons n_i le nombre de sommets de l'arbre T_i ($i \in \{1, \dots, k\}$)

Dans la forêt, il y a $n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$ sommets, donc $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Rappel : Un arbre de x sommets a $x-1$ arêtes

Ainsi, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, l'arbre T_i a $n_i - 1$ arêtes

Donc la forêt, il y a $(n_1 - 1)(n_2 - 1) = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$ arêtes, Or

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} 1$$

$$= n - k$$

D'où il y a n-k arêtes dans la forêt

Par la Handshaking formula, Si $G(V,E)$ est la forêt dont on parle, on a

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2.\#E = 2.(n-k)$$

Exercice 42 :

Soit T un arbre et P son complémentaire sur le diamètre de T.

1) diam(T) = 0

Alors chaque sommet est de degré

 → pas arbre

La seule possibilité d'arbre est

• son complémentaire est ∅ connexe → pas

2) $\mathrm{diam}(T) = 1$

est le seul arbre possible son complémentaire

est


ok

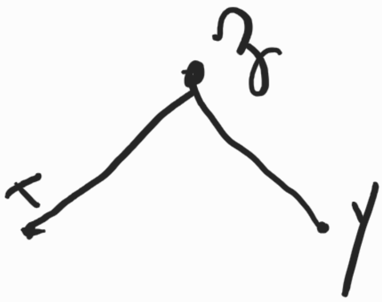
pas connexe

→ solution

3) $\mathrm{diam}(T) \geq 2$

Alors il existe des sommets x et y tels que $d(x,y) = 2$

Ainsi, il existe un sommet $z \neq x, y$ tel que $\{x, z\}$ et $\{z, y\}$ sont des arêtes de l'arbre



Le sommet z est unique car il existe un sommet $z' \neq z$ avec (x, z') et (z', y) des arêtes de l'arbre on aurait un cycle (x, z, y, z', x), ce qui est impossible

Donc si t est un sommet différent de x, y et z, alors t n'est pas relié à x ou t n'est pas relié à y dans T

Ainsi, dans $\overline{T}$, t est relié à x ou à y (ou aux deux)

De plus dans $\overline{T}$, x et y sont reliés

Ensuite, dans $\overline{T}$, z n'est pas relié ni à x ni à y

La seule possibilité pour que $\overline{T}$ relié à personne dans $\overline{T}$, donc à tout le monde dans T

La seule possibilité pour T est donc