Mathématiques pour l'informatique 2

Outils d'analyse

Émilie Charlier

Université de Liège

Approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point

Le but de cette section est d'apprendre comment on peut approcher les valeurs d'une fonction

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad \text{où } A \subseteq \mathbb{R},$$

au voisinage d'un point au moyen de polynômes.

D'autres techniques d'approximation de fonction, comme par exemple l'interpolation de Lagrange, existent aussi, mais ne feront pas l'objet de cette première approche de ce vaste sujet.

Dérivabilité

Rappelons qu'une fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$, avec $A \subseteq \mathbb{R}$, est dérivable en un point $a \in I$, où I est un intervalle ouvert inclus dans A, lorsque la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, cette limite est appelée la dérivée de f en a et est notée $\mathrm{D}\, f(a)$.

Si P est le polynôme de degré 1

$$P = f(a) + \mathrm{D}\, f(a)(X - a),$$

et si r est la fonction

$$r \colon A \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - P(x)$$

nous avons

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \mathrm{D}\, f(a) \right) = 0.$$

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \mathrm{D}\, f(a) \right) = 0$$

Le polynôme P peut donc être vu comme une approximation polynomiale de f au voisinage de a, dans le sens où on peut approcher les valeurs de la fonction f au voisinage de a par celles de P.

La fonction r, quant à elle, est appelée le reste, ou l'erreur.

Le calcul de limite ci-dessus exprime la qualité de l'approximation obtenue, puisqu'il nous indique que l'erreur commise $|r(x)|$ en valeur absolue est petite par rapport à $|x-a|$ dans un voisinage de a.

À première vue, on peut être assez content de la situation, puisque nous avons répondu à la question initiale au moyen des dérivées.

Pourtant, approcher les valeurs de n'importe quelle fonction réelle par des polynômes de degré 1, c'est-à-dire par des droites, n'est pas vraiment satisfaisant.

Pensez par exemple à la fonction sinus :

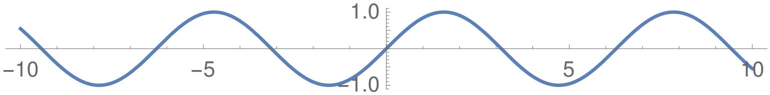

Figure – La fonction sinus.

On souhaite donc aller plus loin, et être capable d'approcher les valeurs de fonctions par des polynômes de degré quelconque.

Nous allons étudier pour quelles fonctions ces approximations sont possibles et, lorsque c'est le cas, expliciter comment fournir de telles approximations.

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec $I \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in I$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est une approximation de f à l'ordre n en a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Autrement dit, P est une approximation de f à l'ordre n en a si $f = P + r$ avec $r(x) = o((x-a)^n)$ lorsque x tend vers a.
L'écart $|r(x)|$ entre l'approximation $P(x)$ et la valeur qu'on souhaite estimer, c'est-à-dire $f(x)$, est petite par rapport à $|x-a|^n$ dans un voisinage de a.

Remarquez que si $|x-a| < 1$, alors

$$|x-a| \; > \; |x-a|^2 \; > \; |x-a|^3 \; > \; |x-a|^4 \; > \; \cdots$$

Une approximation à l'ordre n est donc meilleure qu'une approximation à l'ordre $n-1$.

Proposition

1. Si f admet une approximation polynomiale à l'ordre n en a, alors celle-ci est unique.

2. Si f admet une approximation polynomiale à l'ordre n en a, alors f admet une approximation à l'ordre i en a pour tout $i \leq n$.

Démonstration

Supposons que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Alors, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a aussi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^i} = \lim_{x \to a} \left(\underbrace{\frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(x-a)^{n-i}}_{\to 0} \right) = 0.$$

Écrivons $P = c_n(X-a)^n + \cdots + c_1(X-a) + c_0$.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, les coefficients $c_n, \cdots, c_1, c_0$ sont les composantes de P dans la base $((X-a)^n, \ldots, X-a, 1)$.

Pour montrer l'unicité de l'approximation polynomiale P, il suffit donc de montrer l'unicité des coefficients c_i.

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{i-1} c_j (x-a)^j}{(x-a)^i} &= \lim_{x \to a} \Bigg(\underbrace{\frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^i}}_{\to 0} + \frac{P(x) - \sum_{j=0}^{i-1} c_j (x-a)^j}{(x-a)^i} \Bigg) \\
&= \lim_{x \to a} \sum_{j=i}^{n} c_j (x-a)^{j-i} \\
&= \lim_{x \to a} \Bigg(c_i + \sum_{j=i+1}^{n} c_j \underbrace{(x-a)^{j-i}}_{\to 0} \Bigg) \\
&= c_i.
\end{aligned}$$

On obtient donc, en procédant de proche en proche pour i allant de 0 à n, que les coefficients c_i sont uniques.

En effet, on a

$$c_0 = \lim_{x \to a} f(x), \; c_1 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - c_0}{x - a}, \; c_2 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - c_1(x-a) - c_0}{(x-a)^2}$$

et ainsi de suite jusque c_n. Le point 1 est démontré.

En réutilisant le calcul de limite précédent, on obtient que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{i} c_j (x-a)^j}{(x-a)^i} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - \sum_{j=0}^{i-1} c_j (x-a)^j}{(x-a)^i} - c_i \right) = 0$$

et donc le polynôme $c_i(X-a)^i + \cdots + c_1(X-a) + c_0$ est une approximation polynomiale de f à l'ordre i en a, ce qui démontre le point 2. $\square$

Nous savons à présent que, si elle existe, l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en a est unique.

D'un point de vue pratique, nous voudrions être capables de donner des conditions explicites et pouvant être testées effectivement sous lesquelles cette approximation polynomiale existe, et dans ce cas, pouvoir fournir explicitement l'approximation polynomiale recherchée.

C'est l'objet du résultat suivant, que nous donnons sans preuve.

Théorème (Approximation polynomiale)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec $I \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in I$. Si f est n fois dérivable sur I, alors le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^i f)(a)}{i!}(X-a)^i$$

est l'approximation de f à l'ordre n en a.

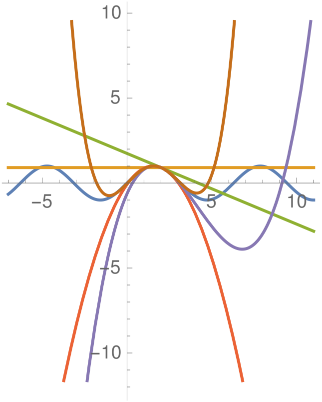

Figure – Approximations polynomiales de la fonction sinus en $a = 2$ pour les ordres $n \in \{0, \ldots, 4\}$.

Zoom sur le point d'absisse 2 :

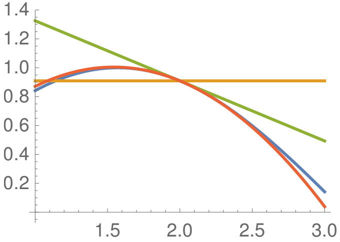

Figure – Approximations polynomiales de la fonction sinus en $a = 2$ pour les ordres $n \in \{0, 1, 2\}$.

Remarque 1

Dans le cas où la fonction f est un polynôme, souvenons-nous de la formule de Taylor vue au chapitre 1 : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$P = \sum_{i=0}^{\deg(P)} \frac{\mathrm{D}^i P(a)}{i!}(X-a)^i.$$

Ainsi, si $n < \deg(P)$, l'approximation polynomiale de P à l'ordre n est le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{D}^i P(a)}{i!}(X-a)^i$$

et pour tout $n \geq \deg(P)$, l'approximation polynomiale de P à l'ordre n est le polynôme P lui-même.

Bien entendu, dans ce deuxième cas, il ne s'agit plus d'une approximation mais d'une formule exacte : le reste est nul.

Remarque 2

Le théorème d'approximation polynomiale nous dit en particulier que toute fonction n fois dérivable sur I admet une approximation polynomiale à l'ordre n en tout point de I.

La réciproque est fausse : si $n \geq 2$, il est possible qu'une fonction f définie sur un intervalle I admette une approximation polynomiale à l'ordre n en tout point de I sans pour autant qu'elle soit n fois dérivable sur I.

C'est le cas par exemple de la fonction

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En revanche, il est vrai que toute fonction f admettant une approximation polynomiale

- à l'ordre 0 en tout point de I est nécessairement continue sur I

  Si $P = c_0$ est tel que $\lim_{x\to a}(f(x) - c_0) = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = c_0$, ce qui montre que la fonction f est continue en a (et même que $f(a) = c_0$).

- à l'ordre 1 en tout point de I est nécessairement dérivable sur I.

  Si $P = c_1(X - a) + c_0$ est tel que

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - (c_1(x-a) + c_0)}{x - a} = 0$$

  alors on a nécessairement

  $$c_0 = f(a) \quad \text{et} \quad c_1 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  ce qui montre que la fonction f est dérivable en a (et même que $\mathrm{D}\, f(a) = c_1$).

Exemple

Calculons les approximations polynomiales de la fonction cosinus en $a = \frac{\pi}{2}$.

On a $\mathrm{D}\cos = -\sin,\ \mathrm{D}^2\cos = -\cos,\ \mathrm{D}^3\cos = \sin,\ \mathrm{D}^4\cos = \cos.$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}^{4n}\cos)\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\\
(\mathrm{D}^{4n+1}\cos)\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\\
(\mathrm{D}^{4n+2}\cos)\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\\
(\mathrm{D}^{4n+3}\cos)\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Aux ordres $4n+1$ et $4n+2$, on obtient l'approximation polynomiale

$$-\frac{1}{1!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^5+\ldots-\frac{1}{(4n+1)!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^{4n+1}$$

et aux ordres $4n+3$ et $4n+4$, on obtient l'approximation polynomiale

$$-\frac{1}{1!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^5+\ldots+\frac{1}{(4n+3)!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^{4n+3}.$$

Par exemple, aux ordres 5 et 6, on obtient

$$-\left(X-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^5$$

et aux ordres 7 et 8, on obtient

$$-\left(X-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^5+\frac{1}{7!}\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^7$$

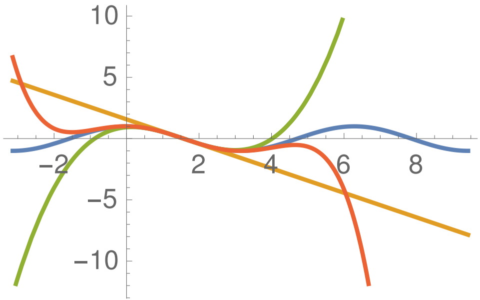

Figure – Approximations polynomiales de cosinus en $a=\frac{\pi}{2}$ pour les ordres $n \in \{1, 3, 5\}$

Estimation du reste

Nous souhaitons donner une estimation de l'écart entre la valeur de la fonction estimée $f(a)$ et celle obtenue grâce à son approximation polynomiale $P(a)$.

Par définition, nous savons qu'à l'ordre n, si P_n désigne l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en a, la fonction $r_n \colon A \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - P_n(x)$ est telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Théorème (Développement limité de Taylor)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f \colon A \to \mathbb{R}$ avec $I \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Pour tous $a, x \in I$ distincts, il existe u compris strictement entre a et x tel que

$$r_n(x) = \frac{(\mathrm{D}^{n+1} f)(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

En se servant du résultat (admis) précédent, on pourra dans de nombreux cas obtenir une majoration du type

$$|r_n(x)| \leq c|x-a|^n$$

où c est une constante, voire même du type

$$|r_n(x)| \leq c|x-a|^{n+1}$$

lorsque f est suffisamment dérivable.

Exemple

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'écart entre $\cos(x)$ et son approximation à l'ordre $n = 5$ en $a = \frac{\pi}{2}$ vaut

$$r_5(x) = \cos(x) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5.$$

Le théorème précédent nous indique que si $x \neq \frac{\pi}{2}$, alors il existe u compris strictement entre x et $\frac{\pi}{2}$ tel que

$$r_5(x) = \frac{(\mathrm{D}^6 \cos)(u)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 = \frac{-\cos(u)}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6.$$

On en déduit que

$$|r_5(x)| \leq \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6.$$

Remarquez qu'on a utilisé ici que la fonction cosinus était 6 fois dérivable (et non pas juste 5 fois comme pour définir l'approximation polynomiale d'ordre 5), ce qui n'est pas un problème puisque la fonction cosinus est dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Remarque

Si la fonction f est n fois dérivable mais pas $n+1$ fois dérivable, elle admet tout de même une approximation d'ordre n et on peut aussi obtenir une estimation du reste à l'ordre n en utilisant le développement limité de Taylor, mais en procédant un peu différemment.

En effet, dans ce cas, pour $a, x \in I$ distincts, le théorème du développement limité de Taylor appliqué au reste à l'ordre $n-1$ nous dit qu'il existe u compris strictement entre x et a tel que

$$\begin{aligned} r_n(x) &= r_{n-1}(x) - \frac{(\mathrm{D}^n f)(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \frac{(\mathrm{D}^n f)(u)}{n!}(x-a)^n - \frac{(\mathrm{D}^n f)(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \frac{(\mathrm{D}^n f)(u) - (\mathrm{D}^n f)(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Suites et séries numériques

Lorsqu'une fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ est $\mathrm{C}^\infty(I)$, où I est un intervalle inclus dans le domaine A de f, elle admet des approximations polynomiales à tous les ordres $n \in \mathbb{N}$ sur I.
On est alors tenté d'étudier la validité d'une expression du type

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{D}^i f)(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Dans cette expression se cache en réalité un passage à la limite pour n tendant vers l'infini :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^i f)(a)}{i!}(x-a)^i + r_n(x) \right).$$

Les fonctions qui admettent un tel développement au voisinage d'un point a, c'est-à-dire qui sont telles que

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$$

pour tout x dans un intervalle ouvert contenant a, sont dites analytiques en a.

Elles sont dites analytiques sur l'intervalle ouvert I si elles sont analytiques en tout $a \in I$.

C'est le cas de la plupart des fonctions élémentaires que vous connaissez, mais c'est loin d'être le cas de toutes les fonctions !

Suite

Une somme infinie est en fait la limite d'une suite tout à fait particulière, appelée série.

Le but de cette section est d'étudier la convergence de ces suites particulières.

Définition

Une suite de points d'un ensemble A est une fonction $x\colon \mathbb{N} \to A$.

On note communément une suite x par $(x(i))_{i\in\mathbb{N}}$, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ou même $(x_i)_{i\geq 0}$.

Puisque pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{j, j+1, \ldots\}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$, on considère de la même façon que $(x_i)_{i\geq j}$ est une suite.

Une suite de réels est alors simplement une fonction $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Série

Définition

Une série de réels est une suite de la forme

$$S\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \ n \mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i$$

où $(x_i)_{i \geq 0}$ est une suite de réels.

Comme d'habitude, on écrit $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque la série S est convergente, on désigne par

$$\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$$

sa limite, qui est appelée la somme de la série S.

Remarque

Puisqu'une série n'est rien de plus qu'une suite particulière, on utilise la même définition pour la convergence des séries que celle pour la convergence des suites.

Si la série S converge, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i .$$

Abus de langage

- Tout comme on trouve la notation $(x_i)_{i\geq j}$ pour les suites, on trouve aussi la notation
$$\left(\sum_{i=j}^{n} x_i\right)_{n\geq j}.$$
Il s'agit précisément de la suite des sommes partielles de la suite $(x_i)_{i\geq j}$.
Si cette série converge, on note sa limite (ou sa somme)
$$\sum_{i=j}^{+\infty} x_i.$$
- Par abus de langage, on parle aussi de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$, que celle-ci converge ou non.
Dans ce cas, étudier la convergence de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ signifie en fait étudier la convergence de la série $(\sum_{i=0}^{n} x_i)_{n\geq 0}$.

Exemple 1

Considérons la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i.$$

Si on note $S_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} S_0 &= (-1)^0 = 1 \\ S_1 &= S_0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \\ S_2 &= S_1 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1 \\ S_3 &= S_2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

En continuant, on extrait deux sous-suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers des limites différentes, à savoir 1 et 0 respectivement.

La série ne converge donc pas !

Exemple 2

Considérons la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}.$$

Si on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$ pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \\
S_1 &= S_1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
S_2 &= S_2 + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
S_3 &= S_3 + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.
\end{aligned}$$

On montre facilement (par exemple par récurrence sur $n \geq 1$) que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

La série converge et on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Il s'agit en fait d'une série géométrique.

Exemple 3

La série harmonique est la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i}.$$

Si on note $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i}$ pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= S_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ S_3 &= S_2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\ S_4 &= S_3 + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

Montrons que cette série converge vers $+\infty$.

Puisqu'elle est croissante, c'est-à-dire que $S_n \leq S_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, il suffit d'en extraire une sous-suite convergeant vers $+\infty$.

Montrons par récurrence que

$$S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \quad \text{pour tout } m \geq 1.$$

Si $m = 1$, on a bien $S_2 = \frac{3}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$.

Supposons à présent que $m \geq 1$ et que $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$.

Alors

$$\begin{aligned} S_{2^{m+1}} &= S_{2^m} + \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{i} \\ &\geq 1 + \frac{m}{2} + \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= 1 + \frac{m}{2} + \frac{2^{m+1} - 2^m}{2^{m+1}} \\ &= 1 + \frac{m+1}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{m \to +\infty} (1 + \frac{m}{2}) = +\infty$, la sous-suite $(S_{2^m})_{m \geq 1}$ converge vers $+\infty$.

Exemple 4

Considérons la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i}.$$

Si on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i}$ pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
S_1 &= -1 \\
S_2 &= S_1 + \frac{(-1)^2}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\
S_3 &= S_2 + \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6} \\
S_4 &= S_3 + \frac{(-1)^4}{4} = -\frac{5}{6} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

Cette série converge vers $-\ln(2)$.

Il s'agit d'une jolie application des approximations polynomiales et du développement limité de Taylor.

Considérons la fonction $\ln\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $i \geq 1$, on a

$$\mathrm{D}^i \ln(x) = \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{x^i}.$$

De plus, on sait que $\ln(1) = 0$.

Dès lors, l'approximation polynomiale de ln à l'ordre $n \geq 1$ en $a = 1$ est

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{D}^i \ln(1)}{i!}\,(X-1)^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{i!}\,(X-1)^i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i}\,(X-1)^i.
\end{aligned}$$

Par le développement limité de Taylor appliqué en $x = 2$, il existe $u \in \,]1, 2[$ tel que

$$\ln(2) \;=\; P_n(2) \;+\; \frac{(\mathrm{D}^{n+1}\ln)(u)}{(n+1)!} \;=\; -\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} \;+\; \underbrace{\frac{(-1)^n}{(n+1)\,u^{n+1}}}_{\to 0 \text{ si } n \to +\infty} \;.$$

On obtient donc que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i} = -\ln(2).$$

Séries géométriques

Définition

Une série géométrique est une série du type

$$\sum_{i=k}^{+\infty} a^i$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Théorème

La série géométrique $\sum_{i=k}^{+\infty} a^i$ converge si et seulement si $|a| < 1$, auquel cas sa somme est $\frac{a^k}{1-a}$.

Démonstration

Si $a = 1$, alors on a $1 + 1 + 1 + \cdots$ et il est clair que cette série diverge.

Supposons à présent que $a \neq 1$.

Dans ce cas, remarquons que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^\ell = \frac{1 - a^{\ell+1}}{1 - a}.$$

Pour tout $n \geq k$, on a donc

$$\sum_{i=k}^{n} a^i = a^k(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-k}) = a^k \, \frac{1 - a^{n-k+1}}{1 - a} = \frac{a^k - a^{n+1}}{1 - a}.$$

On obtient donc que la série $\sum_{i=k}^{+\infty} a^i$ converge si et seulement si la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire, si et seulement si $|a| < 1$.

De plus, lorsque $|a| < 1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on obtient que

$$\sum_{i=k}^{+\infty} x^i = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^k - a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^k}{1-a}$$

comme souhaité. $\square$

Séries de Riemann

Definition

Une série de Riemann est une série du type

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^a}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Théorème

La série de Riemann $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

Démonstration

Supposons tout d'abord que $a > 1$.

Alors la fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-a}$ est positive, strictement décroissante et vaut 1 en $x = 1$.

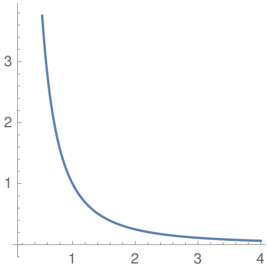

Figure – La fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-2}$.

Dès lors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^{-a} \leq 1 + \int_{1}^{n} x^{-a} dx = 1 + \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_{1}^{n} = 1 + \frac{n^{1-a} - 1}{1-a} = \frac{a - n^{1-a}}{a-1} \leq \frac{a}{a-1}.$$

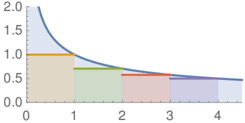

Figure – Si f est une fonction continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, alors, pour tout entier $n \geq 1$, la somme des aires des rectangles de base 1 et de hauteur $f(i)$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} f(i)$, est inférieure à $f(1) + \int_{1}^{n} f(x)dx$.

On est donc en présence d'une suite croissante et majorée, donc convergente.

Inversement, supposons que $a \leq 1$.

Alors $i^a \leq i$ pour tout $i \geq 1$ et donc, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^a} \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}_{\substack{\to +\infty \\ \text{si } n \to +\infty}} .$$

Ceci montre que la série $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^a}$ diverge. $\square$

Critères pratiques pour obtenir la convergence ou la non-convergence de séries

Proposition

Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des suites de réels.

- **(Critère de comparaison)**

  Si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i$ converge et si pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $|x_i| \leq y_i$, alors la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ converge aussi.

  En particulier, si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|$ converge, alors la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ converge aussi.

- **(Critère pour les séries alternées)**

  Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, alors la série alternée $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i x_i$ converge.

- **(Critère de non convergence)**

  Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ne décroît pas vers 0, alors la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ ne converge pas.

Séries de puissances et fonction exponentielle

Dans cette section, nous allons voir comment l'étude des séries de réels nous permet de définir la célèbre fonction exponentielle.

Et oui, vous l'avez souvent rencontrée, mais vous ne l'avez en fait jamais vraiment définie...

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$$

converge.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leq N$ (un tel N existe nécessairement).

Il suffit de montrer que la série

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$$

converge.

Pour tout entier $i \geq N+1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^i}{i!}\right| &= \frac{|x|^i}{i!} \\
&= \frac{|x|^i}{i(i-1)\cdots(N+1)N!} \\
&\leq \frac{|x|^i}{(N+1)^{i-N}\,N!} \\
&= \frac{(N+1)^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^i.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{|x|}{N+1} < 1$, la série géométrique

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} \left(\frac{|x|}{N+1} \right)^i$$

converge.

Par conséquent, la série

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{(N+1)^N}{N!} \left(\frac{|x|}{N+1} \right)^i$$

converge aussi.

On conclut en utilisant le critère de comparaison. $\square$

Exponentielle

Définition

La fonction exponentielle est la fonction

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

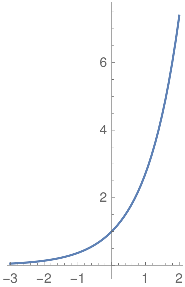

Figure – La fonction exponentielle.

Propriétés de la fonction exponentielle

Théorème

Soit $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si pour tout $x \in]-r, r[$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} c_i\,(x-a)^i$ converge, alors la fonction

$$f :]-r, r[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} c_i\,(x-a)^i$$

est $\mathrm{C}^\infty(]-r, r[)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{D}^\alpha f :]-r, r[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=\alpha}^{+\infty} c_i\ \mathrm{D}^\alpha\left((x-a)^i\right).$$

Proposition (Propriétés de la fonction exponentielle)

1. La fonction exp est $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{D}^\alpha \exp = \exp$.
2. On a $\exp(0) = 1$.
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = 0$.

   En particulier, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
6. La fonction exp est strictement croissante.

   En particulier, c'est une injection et son image est $]0, +\infty[$.

Démonstration

1. Par le théorème précédent, on obtient que la fonction exponentielle est $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{D}^\alpha \exp(x) = \sum_{i=\alpha}^{+\infty} \mathrm{D}^\alpha \left(\frac{x^i}{i!}\right) = \sum_{i=\alpha}^{+\infty} \frac{x^{i-\alpha}}{(i-\alpha)!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = \exp(x).$$

2. Par définition, on a $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$.

3. Admis.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \geq 0$, alors clairement $\exp(x) > 0$ (puisque la série est croissante et de premier terme 1).

Supposons à présent que $x < 0$.

Vu les points précédents, on a $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$.

On en tire que $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\exp(x)}{x^n} = \frac{1}{x^n} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} \geq \frac{1}{x^n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{x}{(n+1)!}}_{\substack{\to +\infty \\ \text{si } x \to +\infty}}.$$

Ainsi, on obtient que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ et ensuite que

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \exp(x) = \lim_{y \to +\infty} (-y)^n \exp(-y) = (-1)^n \lim_{y \to +\infty} \frac{y^n}{\exp(y)} = 0.$$

6. On déduit des points 1 et 3 que la dérivée de exp est partout strictement positive.

   Par conséquent, la fonction exp est strictement croissante.

   Le cas particulier découle alors en utilisant le point précédent.

$\square$

Nombre e

Définition

Le nombre e est la valeur prise par la fonction exponentielle en 1 :

$$e = \exp(1).$$

Transcendance de e

On peut démontrer que, tout comme le nombre π, le nombre e est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est zéro d'aucun polynôme à coefficients rationnels !

Même s'il existe (beaucoup) plus de nombres transcendants que de nombres algébriques, c'est-à-dire qui sont zéros de polynômes à coefficients rationnels, on n'en connaît que peu de façon aussi explicite.

En général, démontrer qu'un nombre donné est transcendant peut s'avérer très difficile !

Notation e^x

Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a

$$\exp(x) = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{x \text{ fois}}) = \underbrace{\exp(1) \cdots \exp(1)}_{x \text{ fois}} = \underbrace{e \cdots e}_{x \text{ fois}} = e^x.$$

On étend cette notation à l'ensemble des réels x en écrivant $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (mais le sens de e^x est bien rigoureusement donné par la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$ et non par une nébuleuse notion d'exposant étendue aux réels).

Proposition

Tour tout $n \in \mathbb{N}$, l'approximation polynomiale de la fonction exponentielle à l'ordre n en 0 est le polynôme
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

Démonstration

En effet, on a $(\mathrm{D}^i \exp)(0) = \exp(0) = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. $\square$

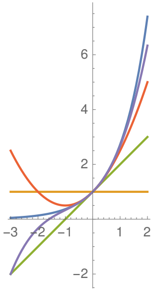

Figure – Approximations polynomiales de la fonction exponentielle en 0 aux ordres $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Notations de Landau

Nous fixons pour toute cette section des fonctions réelles f, g et h telles que leurs domaines contiennent un intervalle de la forme $I = [a, +\infty[$.

Definition (La notation de domination O)

On écrit $f \in O(g)$ s'il existe des constantes strictement positives C et N telles que pour tout réel $x \geq N$, on a $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

Dans ce cas, on dit que la fonction f est dominée par g.

La notation $O(g)$ désigne donc la classe des fonctions dominées par g.

Exemple

La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sin(x)$ est dominée par la fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ puisque $|x\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On écrit $x\sin(x) \in O(x)$.

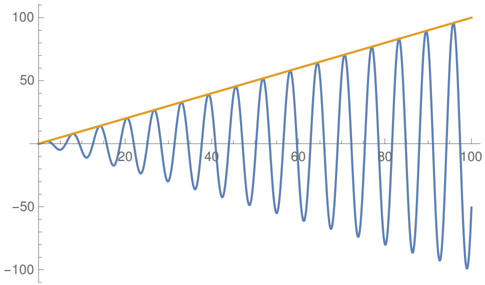

Figure – Les fonctions $x\sin(x)$ et x.

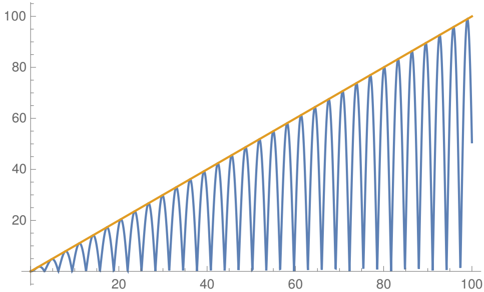

Figure – Les fonctions $|x \sin(x)|$ et $|x|$.

Arithmétique de O

Proposition

Si f et g sont dans $O(h)$, alors $f + g$ est aussi dans $O(h)$.

Démonstration

Supposons que f et g soient dans $O(h)$.

Il existe $C, N, C', N' > 0$ tels que pour tout $x \geq N$, on a $|f(x)| \leq C|h(x)|$ et pour tout $x \geq N'$, on a $|g(x)| \leq C'|h(x)|$.

Alors pour tout $x \geq \max\{N, N'\}$, on a $|f(x)| \leq (C + C') \cdot |h(x)|$.

Ainsi, $f + g \in O(h)$. $\square$

Proposition

Si f est $O(g)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est également dans $O(g)$.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $C, N > 0$ tels que pour tout $x \geq N$, on a $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

Si $\lambda = 0$, alors $\lambda f = 0 \in O(g)$.

Sinon, $|\lambda|\, C > 0$ et pour tout $x \geq N$, on a $|\lambda f(x)| \leq |\lambda|\, C\, |g(x)|$.

Dans les deux cas, on a $\lambda f \in O(g)$. $\square$

Quelques classes de complexité

- $O(1)$ est la classe des fonctions à croissance constante.
- $O(\log(x))$ est la classe des fonctions à croissance logarithmique.
- $O((\log(x))^c)$ est la classe des fonctions à croissance polylogarithmique d'exposant c.
- $O(x)$ est la classe des fonctions à croissance linéaire.
- $O(x \log(x))$ est la classe des fonctions à croissance quasi-linéaire.
- $O(x^2)$ est la classe des fonctions à croissance quadratique.
- $O(x^c)$ est la classe des fonctions à croissance polynomiale de degré c.
- $O(c^x)$ est la classe des fonctions à croissance exponentielle de base c.

Definition (La notation Θ)

On écrit $f \in \Theta(g)$ si $f \in O(g)$ et $g \in O(f)$.

Exercice

Montrer que si $f \in \Theta(g)$, alors les classes $\Theta(f)$ et $\Theta(g)$ coïncident.

En particulier, on a $f \in \Theta(g) \iff g \in \Theta(f)$.

Exemple

De même, on a $5x^2(\sin(x)+2) \in \Theta(x^2)$.

En effet, pour tout réel x, on a $1 \leq \sin(x)+2 \leq 3$ et donc

$$5x^2 \leq 5x^2(\sin(x)+2) \leq 15x^2.$$

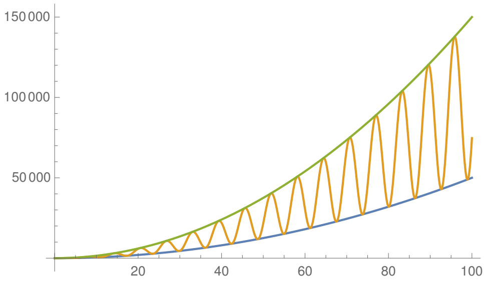

Figure – Les fonctions $5x^2$ (bleu), $5x^2(\sin(x)+2)$ (orange) et $15x^2$ (vert).

On a $x^2 \in \Theta(5x^2(\sin(x)+2))$.

En effet, pour tout réel x, on a $1 \leq \sin(x)+2 \leq 3$ et donc

$$\frac{1}{3}x^2(\sin(x)+2) \leq x^2 \leq x^2(\sin(x)+2).$$

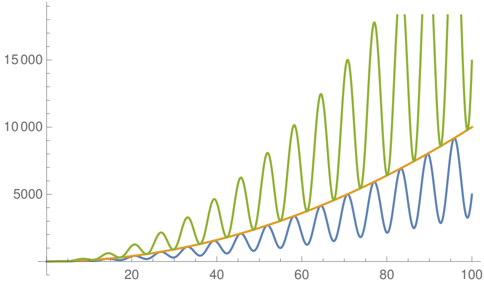

Figure – Les fonctions $\frac{1}{3}x^2(\sin(x)+2)$ (bleu), x^2 (orange) et $x^2(\sin(x)+2)$ (vert).

Une condition suffisante pour appartenir à $\Theta(g)$

Proposition

Supposons qu'il existe un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dans lequel g ne s'annule pas. Si la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe et est non nulle, alors $f = \Theta(g)$.

La condition est suffisante mais pas nécessaire

Dans l'exemple précédent, la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2(\sin(x)+2)}{x^2}$$

n'existe pas.

La condition de l'existence de la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est donc suffisante, mais pas nécessaire !

Definition (La notation o)

Supposons qu'il existe un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dans lequel g ne s'annule pas. On écrit $f \in o(g)$ lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On dit dans ce cas que la fonction f est négligeable devant g.

Exemple

Pour tout entier $k \geq 0$, on a $x^k \in o(x^{k+1})$ car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{x^{k+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

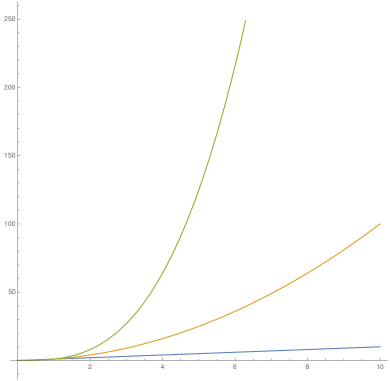

Figure – Les fonctions x, x^2 et x^3.

Proposition

Si $f \in o(g)$, alors $f \in O(g)$.

Démonstration.

En effet, si $f \in o(g)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \geq N$, on a $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$, donc aussi $|f(x)| < \varepsilon|g(x)|$. $\square$

Arithmétique de o

Proposition

- Si f et g sont dans $o(h)$, alors $f+g$ est aussi dans $o(h)$.
- Si f et g sont dans $o(h)$, alors $fg \in o(h^2)$.

Démonstration.

Il suffit de voir que si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=0,$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{h(x)}+\frac{g(x)}{h(x)}\right)=0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)g(x)}{(h(x))^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{h(x)}\cdot\frac{g(x)}{h(x)}\right)=0.$$

$\square$

Proposition

Si $f \in O(1)$ et $g \in o(h)$, alors $fg \in o(h)$.

Démonstration.

Supposons que $f \in O(1)$ et $g \in o(h)$.

Il existe $C, N > 0$ tels que pour tout $x \geq N$, on a $|f(x)| \leq C$.

Quitte à choisir un N plus grand, on peut supposer que les fonctions g et h soient définies sur $[N, +\infty[$.

Alors pour tout $x \geq N$, on a

$$\left|\frac{f(x)g(x)}{h(x)}\right| \leq C \left|\frac{g(x)}{h(x)}\right|.$$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$, on obtient par le critère de l'étau que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)g(x)}{h(x)} = 0.$$

Ainsi, $fg \in o(h)$.

Definition (Equivalence asymptotique)

Supposons qu'il existe un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dans lequel g ne s'annule pas. On écrit $f \sim g$ lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On dit dans ce cas que f est asymptotiquement équivalent à g.

Exemple

On a $x^2 - x \sim x^2 + x + 10$ car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 10} = 1.$$

Proposition

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence : on a

1. $f \sim f$
2. $f \sim g \implies g \sim f$.
3. $f \sim g$ et $g \sim h \implies f \sim h$.

Démonstration

Le premier point est évident : on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{f(x)} = 1.$$

Pour le deuxième point, supposons que $f \sim g$. Il existe un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dans lequel g ne s'annule pas et on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Il doit donc aussi exister un intervalle de la forme $[b, +\infty[$ dans lequel f ne s'annule pas (sinon, la limite précédente ne pourrait pas valoir 1). De plus, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 1.$$

Pour le troisième point, supposons aussi que $g \sim h$. Alors il existe un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ dans lequel h ne s'annule pas et on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1.$$

$\square$

Proposition

On a $f \sim g \iff f - g \in o(g)$.

Démonstration.

En effet, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0.$$

$\square$

Proposition

Si $f \sim g$, alors la limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

existe si et seulement la limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$

existe, et dans le cas où elles existent, ces limites sont égales.

Démonstration.

Si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x) = L.$$

On conclut par symétrie de la relation $\sim$. $\square$

Notations de Landau au voisinage d'un point

On peut adapter les définitions vues pour comparer des fonctions au voisinage d'un point a plutôt qu'à l'infini.