Mathématiques pour l'informatique 2

Introduction

Émilie Charlier

Université de Liège

Plan du cours

1. Polynômes
2. Espaces vectoriels
3. Diagonalisation de matrices
4. Outils d'analyse

Organisation du cours

1. Cours théoriques
   - Définitions des notions théoriques
   - Résultats théoriques
   - Démonstrations de certains résultats théoriques
   - Motivations et illustrations des concepts abordés
2. Séances d'exercices
   - Illustrations des concepts abordés
   - Exercices d'entraînement
3. WIMS
   - Exercices d'entraînement

Évaluation du cours

1. WIMS (10%)
   - 3 ou 4 listes WIMS à terminer pour des dates fixées à l'avance.
   - Séance d'explications spécifiques la semaine prochaine !
2. Examen écrit (90%)
   - Théorie
     - Définitions et énoncés théoriques
     - Une ou deux démonstrations théoriques vues en classe
     - Applications directes de la théorie
   - Exercices
     - Du même type que ceux vus en classe

Liens avec les autres cours

1. Éléments du calcul des probabilités
   - Ensembles, produits cartésiens
   - Fonctions
2. Introduction aux processus stochastiques
   - Matrices, polynômes
   - Diagonalisation de matrices
3. Théorie des graphes
   - Matrices, polynômes
   - Diagonalisation de matrices
4. Introduction à l'algorithmique numérique
   - Systèmes linéaires
   - Approximations de fonctions
5. Programmation fonctionnelle
   - Récurrences, définitions récursives
   - Fonctions

Puissances de matrices

De nombreux problèmes dans des domaines variés nécessitent pour leur résolution de savoir calculer des **puissances de matrices**.

Or, effectuer un produit de matrices est plus simple lorsqu'elles comportent beaucoup de zéros.

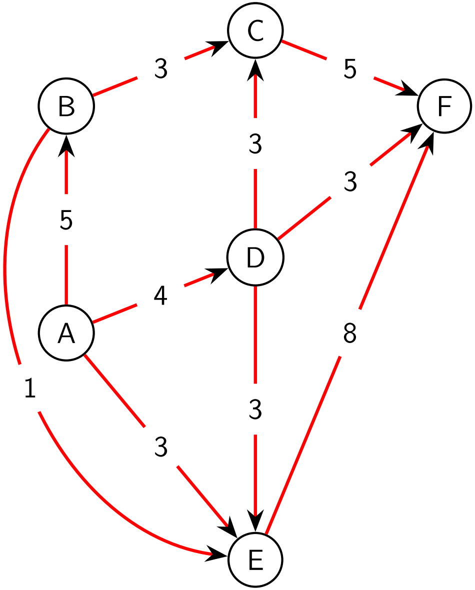
En particulier, le produit de deux matrices

- diagonales est encore une matrice diagonale
- triangulaires sup. est encore une matrice triangulaire sup.
- triangulaires inf. est encore une matrice triangulaire inf.

La théorie de la diagonalisation de matrices est basée sur ce principe.

On peut même aller plus loin et définir les *formes canoniques de Jordan*, mais ceci ne rentre pas dans le cadre de ce cours.

Matrice associée à un graphe



$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un exemple de processus stochastiques

On souhaite étudier les mouvements des populations entre la ville et ses faubourgs.

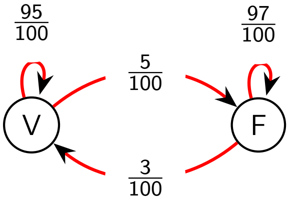
On suppose que chaque année :

- 95% de la population de la ville y reste
- 5% de la population de la ville part vers les faubourgs
- 97% de la population des faubourgs y reste
- 3% de la population des faubourgs part vers la ville.

Modélisation du problème

On suppose que chaque année :

- 95% de la population de la ville y reste
- 5% de la population de la ville part vers les faubourgs
- 97% de la population des faubourgs y reste
- 3% de la population des faubourgs part vers la ville.



$$\begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{3}{100} & \frac{97}{100} \end{pmatrix}$$

S'il y a 200 000 habitants de la ville et 500 000 habitants des faubourgs en 2021, quelle sera la situation en 2030 ?

Notons respectivement V_n et F_n les nombres d'habitants de la ville et des faubourgs en $2021 + n$.

On cherche donc à calculer V_9 et F_9.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} V_n \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{95}{100} & \frac{3}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{97}{100} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} V_0 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

Méthode de la diagonalisation

Pour calculer une puissance M^n d'une matrice carrée M, l'idée de la diagonalisation est de trouver, si possible, une matrice inversible S telle que $S^{-1}MS$ soit une matrice diagonale Δ.

On a alors $M = S\Delta S^{-1}$ et

$$\begin{aligned} M^n &= (S\Delta S^{-1})(S\Delta S^{-1})\cdots(S\Delta S^{-1}) \\ &= S\Delta^n S^{-1}. \end{aligned}$$

Méthode de la diagonalisation

Soit M une matrice dont on cherche à calculer les puissances.

- Recherche du polynôme caractéristique de la matrice.
- Calcul des valeurs propres.
- Calcul de la dimension des espaces propres associés.
- Vérification du critère de diagonalisation.
- Construction d'une matrice de diagonalisation S, c'est-à-dire telle que $S^{-1}MS$ soit une matrice diagonale Δ.
- Enfin, on calcule $M^n = S\Delta^n S^{-1}$.