Mathématiques pour l'informatique 2

Espaces vectoriels

Émilie Charlier

Université de Liège

Espace vectoriel

Un espace vectoriel (abbrévié ev) sur $\mathbb{K}$ est la donnée d'un ensemble E et de deux opérations

$$+ : E \times E \to E \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$

qui satisfont les propriétés suivantes.

1. Il existe un élément $\mathbf{0}$ de E neutre pour $+$: pour tout $\boldsymbol{e} \in E$, $\boldsymbol{e} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$.
2. Tout élément de E possède un opposé : pour tout $\boldsymbol{e} \in E$, il existe $\boldsymbol{f} \in E$ tel que $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{e} = \mathbf{0}$.
3. L'opération $+$ est associative : pour tous $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in E$, on a $(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{e} + (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})$.
4. L'opération $+$ est commutative : pour tous $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in E$, on a $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{e}$.
5. Pour tous $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in E$ et tous $k, \ell \in \mathbb{K}$, on a
   - 5.1 $k \cdot (\ell \cdot \boldsymbol{e}) = (k\ell) \cdot \boldsymbol{e}$,
   - 5.2 $(k + \ell) \cdot \boldsymbol{e} = k \cdot \boldsymbol{e} + \ell \cdot \boldsymbol{e}$,
   - 5.3 $k \cdot (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}) = k \cdot \boldsymbol{e} + k \cdot \boldsymbol{f}$,
   - 5.4 $1 \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$.

Vecteurs et scalaires

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors

- les éléments de E sont appelés des vecteurs
- les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Conséquences immédiates de la définition

- L'élément neutre pour $+$ est unique, et donc il n'y a pas d'ambigüité à le noter $\mathbf{0}$.
  Attention cependant à ne pas confondre $\mathbf{0}$ avec l'élément neutre 0 de $\mathbb{K}$.
- L'opposé d'un élément est unique et nous noterons $-\boldsymbol{e}$ l'opposé de $\boldsymbol{e}$ ainsi que $\boldsymbol{e} + (-\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{f}$.
  Dans la suite, nous noterons généralement $k\boldsymbol{e}$ à la place de $k \cdot \boldsymbol{e}$.

Exemples d'espaces vectoriels

1. L'ensemble $\mathbb{K}^{\ell \times c}$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un ev sur $\mathbb{K}$.

   Cas particuliers

   1.1 L'ensemble $\mathbb{K}^m$ des matrices-colonnes est un ev sur $\mathbb{K}$.

   1.2 L'ensemble $\mathbb{K}$ lui-même est un ev sur $\mathbb{K}$.

Exemples d'espaces vectoriels

1. L'ensemble $\mathbb{K}^{\ell \times c}$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un ev sur $\mathbb{K}$.

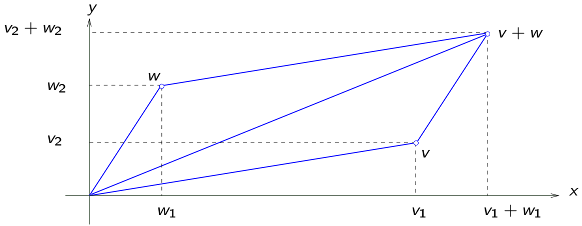
   Cas particuliers

   1.1 L'ensemble $\mathbb{K}^m$ des matrices-colonnes est un ev sur $\mathbb{K}$.

   1.2 L'ensemble $\mathbb{K}$ lui-même est un ev sur $\mathbb{K}$.

   Cas particulier de $\mathbb{R}^2$

   L'addition de deux vecteurs correspond à la règle du parallélogramme.



Exemples d'espaces vectoriels (suite)

2. L'ensemble $\mathbb{C}^{\ell \times c}$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{C}$ est un ev sur $\mathbb{R}$. C'est aussi un ev sur $\mathbb{Q}$.

   Cas particuliers

   2.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut être vu comme un ev sur $\mathbb{R}$ ou comme un ev sur $\mathbb{Q}$.

   2.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être vu comme un ev sur $\mathbb{Q}$.

Exemples d'espaces vectoriels (suite)

3. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un ev.

   Plus précisément, si $A \in \mathbb{K}^{\ell \times c}$, alors l'ensemble

   $$E = \{\mathrm{x} \in \mathbb{K}^c \colon A\mathrm{x} = 0\}$$

   muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire

   $$+\colon \mathbb{K}^c \times \mathbb{K}^c \to \mathbb{K}^c \quad \text{et} \quad \cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K}^c \to \mathbb{K}^c$$

   restreintes à E est un ev sur $\mathbb{K}$.

   - Addition interne
     Si $A\boldsymbol{x} = 0_\ell$ et $A\boldsymbol{y} = 0_\ell$, alors $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = 0_\ell$.
   - Multiplication scalaire interne
     Si $A\boldsymbol{x} = 0_\ell$, alors $A(k \cdot \boldsymbol{x}) = k \cdot A\boldsymbol{x} = 0_\ell$.
   - Exercice : Vérifier les axiomes 1 à 5 de la définition.

Exemples d'espaces vectoriels (suite)

Considérons le système linéaire à 3 inconnues réelles suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Soient (a, b, c) et (a', b', c') deux solutions de ce système.
Alors les triplets $(a + a', b + c', c + c')$ et $(2a, 2b, 2c)$ sont aussi solutions :

$$\begin{aligned} 2(a + a') + 3(b + b') + (c + c') &= (2a + 3b + c) + (2a' + 3b' + c') = 0 \\ (a + a') - (b + b') + 2(c + c') &= (a - b + 2c) + (a' - 3b' + 2c') = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2(2a) + 3(2b) + (2c) &= 2(2a + 3b + c) = 0 \\ (2a) - (2b) + 2(2c) &= 2(a - b + 2c) = 0. \end{aligned}$$

Exemples d'espaces vectoriels (suite)

Cas particuliers

3.1 Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un ev sur $\mathbb{R}$.

En effet, une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ est l'ensemble des solutions (x,y) d'une équation de la forme

$$ax + by = 0$$

où a et b sont des réels non simultanément nuls.

3.2. Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un ev sur $\mathbb{R}$.

En effet, un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ est l'ensemble des solutions (x,y,z) d'une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0$$

où a, b, c sont des réels non simultanément nuls.

Exemples d'espaces vectoriels (suite)

3.3. Dans $\mathbb{R}^3$, toute droite passant par l'origine est un ev sur $\mathbb{R}$.

En effet, une droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ est l'ensemble des solutions (x,y,z) d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

où les triplets de réels (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Exemples d'espaces vectoriels (suite)

4. L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ muni des opérations somme et multiplication par un scalaire est un ev sur $\mathbb{K}$.

5. Pour tout $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, l'ensemble $\mathbb{K}_d[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus d est un ev sur $\mathbb{K}$.

Exemples d'espaces vectoriels (suite)

6. Si A est un ensemble, alors l'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ des fonctions $f\colon A \to \mathbb{K}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies par

$$f + g\colon A \to \mathbb{K},\ a \mapsto f(a) + g(a) \quad \text{et} \quad k \cdot f\colon A \to \mathbb{K},\ a \mapsto kf(a)$$

   (pour $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{K}$) est un ev sur $\mathbb{K}$.

7. L'ensemble $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues (muni des mêmes opérations qu'au point 6 adaptées à ce cadre, c'est-à-dire avec $A = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) est un ev sur $\mathbb{K}$.

Notation

Jusqu'à la fin du chapitre, nous supposons que E est un ev sur $\mathbb{K}$.

Propriétés des espaces vectoriels

Proposition

Pour tous $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in E$ et tout $k \in \mathbb{K}$, on a

1. $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{g} \implies \boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$
2. $0 \cdot \boldsymbol{e} = \mathbf{0}$
3. $(-k) \cdot \boldsymbol{e} = -(k \cdot \boldsymbol{e})$
4. $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. $k \cdot \boldsymbol{e} = \mathbf{0} \implies (k = 0 \text{ ou } \boldsymbol{e} = \mathbf{0})$.

Démonstration.

Laissée en exercice. $\square$

Remarque

Au vu du point 3, on pourra écrire $-k \cdot \boldsymbol{e}$ sans qu'il y ait d'ambiguïté.

Combinaison linéaire

Définition

Une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ de E (avec $n \in \mathbb{N}$) est une expression de la forme

$$k_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n \boldsymbol{x}_n$$

avec $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$.

Les scalaires $k_1, \ldots, k_n$ sont appelés les coefficients de cette combinaison linéaire.

Une combinaison linéaire est dite triviale si tous ses coefficients sont nuls.

Deux remarques importantes

- Une combinaison linéaire de 0 vecteur vaut toujours $\mathbf{0}$.
  Dans ce cas, on parle de combinaison linéaire vide.
- Une combinaison linéaire de combinaison linéaires de vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ est encore une combinaison linéaire de $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$.

  Exemple
  Soit $\boldsymbol{z} = 2\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3$ avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= 4\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2. \end{aligned}$$

  Alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= 2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + 3(\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2) + (4\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= (2 + 3 + 4)\boldsymbol{x}_1 + (2 + 6 - 1)\boldsymbol{x}_2 \\ &= 9\boldsymbol{x}_1 + 7\boldsymbol{x}_2. \end{aligned}$$

Une combinaison linéaire de combinaison linéaires est encore une combinaison linéaire : cas général

Soit $\boldsymbol{z}$ une combinaison linéaire

$$\boldsymbol{z} = \sum_{j=1}^{n} \ell_j \boldsymbol{y}_j$$

de n vecteurs $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$, qui sont chacun combinaison linéaire des m mêmes vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, c'est-à-dire

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \boldsymbol{y}_j = \sum_{i=1}^{m} k_{i,j} \boldsymbol{x}_i .$$

Alors z est combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$:

$$\boldsymbol{z} = \sum_{j=1}^{n} \ell_j \boldsymbol{y}_j = \sum_{j=1}^{n} \ell_j \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i,j} \boldsymbol{x}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \ell_j k_{i,j} \right) \boldsymbol{x}_i .$$

Indépendance linéaire

Définition

Des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ de E sont linéairement indépendants si pour tous $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$, on a

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0} \implies k_1 = \cdots = k_n = 0.$$

Des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ de E sont linéairement dépendants s'ils ne sont pas linéairement indépendants.

Autrement dit, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sont linéairement indépendants si la seule façon d'obtenir $\mathbf{0}$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ est de prendre tous les coefficients égaux à 0.

En prenant la négation de cette définition, on obtient que des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sont linéairement dépendants lorsque que $\mathbf{0}$ peut d'obtenir comme une combinaison linéaire non triviale de $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, c'est-à-dire s'il existe des scalaires $k_1, \ldots, k_n$ non tous nuls tels que
$k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$.

Exemples

- Les vecteurs

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}$$

  de $\mathbb{C}^4$ sont linéairement dépendants.

  Pour le voir, nous résolvons l'équation $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, où les inconnues sont les coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Exemples (suite)

On obtient successivement

$$\left\{\begin{aligned} 7a + 2b + 17c &= 0 \\ 4a + b + 10c &= 0 \\ 2a - 5b + 16c &= 0 \\ -a + 4b - 11c &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} 30b - 60c &= 0 \\ 17b - 34c &= 0 \\ 3b - 6c &= 0 \\ -a + 4b - 11c &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{aligned} b - 2c &= 0 \\ -a + 4b - 11c &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{aligned} b &= 2c \\ a &= -3c \end{aligned}\right.$$

et il est maintenant facile de voir que ce système possède la solution non triviale $(a, b, c) = (-3, 2, 1)$, et donc que $-3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$.

Les vecteurs $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ sont donc linéairement dépendants dans $\mathbb{C}^4$.

Exemples (suite)

- Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

  Les réels 1 et $\sqrt{2}$ vu comme vecteurs de E sont linéairement dépendants car
  $$\sqrt{2} \cdot 1 - 1 \cdot \sqrt{2} = 0.$$

- Soit F l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$.

  Les réels 1 et $\sqrt{2}$ vu comme vecteurs de F sont linéairement indépendants.

  En effet, il n'est pas possible de trouver des rationnels a, b non tous deux nuls tels que
  $$a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} = 0$$
  car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Proposition

1. Un vecteur $\boldsymbol{e}$ est linéairement dépendant si et seulement si $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$.
2. Si $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sont des vecteurs linéairement dépendants et si $m > n$, alors pour tous vecteurs $\boldsymbol{x}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ sont encore linéairement dépendants.
3. Si $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants et si $m < n$, alors les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ sont encore linéairement indépendants.
4. Des vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement l'un est combinaison linéaire des autres.
5. Soient $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ des vecteurs linéairement indépendants et soit un vecteur $\boldsymbol{e}$. Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}$ sont linéairement dépendants si et seulement $\boldsymbol{e}$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Preuves des points 1 et 5.

1. Un vecteur $\boldsymbol{e}$ est linéairement dépendant si et seulement si $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$.

D'une part, le vecteur $\mathbf{0}$ est linéairement dépendant puisque $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

D'autre part, si $\boldsymbol{e}$ est un vecteur linéairement dépendant, alors il existe $k \in \mathbb{K}$ non nul tel que $k \cdot \boldsymbol{e} = \mathbf{0}$. Ceci implique que $k = 0$ ou $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$. Puisque $k \neq 0$, on doit donc avoir $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$.

5. Soient $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ des vecteurs linéairement indépendants et soit un vecteur $\boldsymbol{e}$. Les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}$ sont linéairement dépendants si et seulement $\boldsymbol{e}$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Si $\boldsymbol{e} = k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n$ avec $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$, alors $k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n + (-1)\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ et cette combinaison linéaire est non triviale.

Supposons à présent qu'il existe $k_1, \ldots, k_n, k \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n + k\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$. Alors $k \neq 0$ car sinon un des k_i serait non nul et on aurait une combinaison linéaire non triviale des $\boldsymbol{x}_i$ qui s'annulerait. D'où

$$\boldsymbol{e} = -\frac{k_1}{k}\boldsymbol{x}_1 - \cdots - \frac{k_n}{k}\boldsymbol{x}_n.$$

$\square$

Exercice

Démontrer les points 2, 3 et 4.

Théorème de Steinitz

Si $n+1$ vecteurs sont combinaisons linéaires de n vecteurs, alors ils sont linéairement dépendants.

Exemple d'application du théorème de Steinitz

N'importe quels 5 vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$ de $\mathbb{R}^4$ sont linéairement dépendants. En effet, ils sont tous combinaisons linéaires des 4 vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

car on a toujours

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Sous-espaces vectoriels

Définition

Un sous-espace vectoriel de E est une partie de E qui contient les combinaisons linéaires de ses vecteurs.

Proposition

Un sous-espace vectoriel de E (muni des mêmes opérations d'addition et de multiplication par un scalaire) est un espace vectoriel.

Démonstration.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Par définition d'un sous-espace vectoriel, l'addition et la multiplication scalaire restreintes à F sont internes à F :

- pour tous $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in F$, on a $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} \in F$
- pour tout $k \in \mathbb{K}$ et tout $\boldsymbol{e} \in F$, on a $k \cdot \boldsymbol{e} \in F$.

Le neutre $\mathbf{0}$ appartient à F puisqu'il est obtenu comme la combinaison linéaire vide.

Les autres points à vérifier pour être un espace vectoriel sont valables pour n'importe quelle partie de E, donc en particulier pour F. $\square$

Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Définition

L'enveloppe linéaire d'une partie A de E est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de A. On la note $\rangle A \langle$.

On écrit

$$\rangle \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \langle$$

au lieu de $\rangle \{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \langle$ et on parle de l'enveloppe linéaire des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$.

Remarque

On a $\rangle \emptyset \langle = \{\mathbf{0}\}$.

Proposition

L'enveloppe linéaire d'une partie A de E est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A.

Démonstration.

Soit A une partie de E.

Premièrement, $\rangle A \langle$ est un sous-espace vectoriel de E puisque toute combinaison linéaire de combinaisons linéaires de vecteurs de A est encore une combinaison linéaire de vecteurs de A.

Deuxièmement, il est clair que $A \subseteq \rangle A \langle$.

Troisièmement, tout sous-espace vectoriel de E contenant A contient également $\rangle A \langle$ puisqu'un sous-espace vectoriel contient les combinaisons linéaires de ses vecteurs par définition. $\square$

Au vu de la proposition précédente, l'enveloppe linéaire de A est parfois aussi appelée le sous-espace vectoriel engendré par A.

De même, on dit que $\rangle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \langle$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Critère pratique pour vérifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel

Proposition

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mathbf{0} \in F$
2. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F$, $k, \ell \in \mathbb{K} \implies k\boldsymbol{x} + \ell\boldsymbol{y} \in F$.

Preuve

La condition nécessaire est immédiate.

Vérifions la condition suffisante. Supposons que $F \subseteq E$ et que les conditions 1 et 2 soient vérifiées.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que F contient les combinaisons de n de ses vecteurs.

Si $n = 0$, alors la seule combinaison linéaire de 0 vecteur est la combinaison linéaire vide, qui vaut $\mathbf{0}$ et qui appartient à F au vu de la conditon 1.

Supposons à présent que $n \geq 1$ et que F contient les combinaisons de $n - 1$ de ses vecteurs.

Soient $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in F$ et $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$.

Par hypothèse de récurrence, le vecteur $k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}$ appartient à F.

En utilisant la condition 2, on obtient que

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n = 1 \cdot (k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1}) + k_n\boldsymbol{x}_n$$

appartient à F.

Ceci montre que F est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Parties génératrices et parties libres

Définition

Une partie génératrice de E est une partie G de E telle que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de G.

Autrement dit, on a $E = \rangle G \langle$.

Dans ce cas, on dit que les vecteurs de G engendrent E.

Définition

Une partie libre de E est une partie L de E telle que toute partie finie de L est formée de vecteurs linéairement indépendants.

Bases

Remarque

- Tout sous-ensemble d'une partie libre est encore libre.
- Tout sur-ensemble d'une partie génératrice est encore générateur.

Définition

Une base de E est une partie libre et génératrice de E.

Restriction au cas d'une dimension finie

Nous démontrons les résultats qui suivent dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie (c'est-à-dire pour l'instant dans le cas où E admet une partie génératrice finie).

La suite du chapitre se poursuivra donc dans ce contexte uniquement.

Lemme

Si E admet une partie génératrice finie de taille p, alors toute partie libre de E est de taille au plus p.

Démonstration.

Soit G une partie génératrice finie de taille p et soit L une partie libre.

Procédons par l'absurde et supposons que L possède au moins $p+1$ vecteurs.

Par définition d'une partie génératrice, ces $p+1$ vecteurs sont combinaisons linéaires des p vecteurs de G.

Par le théorème de Steinitz, ils sont linéairement dépendants.

Ceci contredit le fait que L soit une partie libre. $\square$

Équipotence des bases

Théorème (Équipotence des bases)

Supposons que E admette une partie génératrice finie.

Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Démonstration.

Supposons que E admet une partie génératrice finie.

Au vu du lemme, nous savons que toutes les bases de E sont finies.

Soient B et B' deux bases de E.

Comme B est une partie libre et B' est une partie génératrice, on obtient $|B| \leq |B'|$.

Symétriquement, on obtient $|B'| \leq |B|$.

Ainsi, $|B| = |B'|$. $\square$

Complétion des bases

Théorème (Complétion des bases)

Supposons que E admette une partie génératrice finie.

Alors pour toute partie génératrice G de E et toute partie libre L de E, il existe une base B de E telle que $L \subseteq B \subseteq L \cup G$.

Corollaire

Supposons que E admette une partie génératrice finie.

1. Toute partie génératrice de E contient une base.
2. Toute partie libre de E est incluse dans une base.

Démonstration.

On obtient le point 1 en appliquant le théorème de complétion des bases avec $L = \emptyset$.

On obtient le point 2 en appliquant le théorème de complétion des bases avec $G = E$. $\square$

Remarque

En particulier, nous avons montré que si un espace vectoriel admet une partie génératrice finie, alors il possède une base.

Signalons tout de même que le fait qu'un espace vectoriel admette une base n'est pas une évidence en général, et pour cause.

Il n'est en fait pas possible de démontrer ou bien d'infirmer cette affirmation !

Dimension

Le théorème d'équipotence des bases et le fait même que E possède une base permet de donner du sens à la définition suivante.

Définition

Dans le cas où E admet une partie génératrice finie, on appelle dimension de E le nombre d'éléments d'une base quelconque de E.

On note la dimension $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou simplement $\dim(E)$ si l'ensemble des scalaires $\mathbb{K}$ est implicitement connu.

On dit que E est de dimension finie s'il admet une partie génératrice finie (et donc une base finie).

Exemples

- On a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\ell\times c}) = \ell c$. En particulier, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{m\times m}) = m^2$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m) = m$.

- L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie puisque pour tout $d \in \mathbb{N}$, les polynômes $1, X, X^2, X^3, \ldots, X^d$ sont linéairement indépendants.

- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_d[X]) = d + 1$.

- En général, si $\mathbb{K} \neq \mathbb{K}'$, alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) \neq \dim_{\mathbb{K}'}(E)$.
  Par exemple, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m) = m$ alors que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^m) = 2m$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition

Supposons que E soit de dimension finie et que F soit un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. $\dim(F) \leq \dim(E)$,
2. $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Preuve

Soit B une base de F.

En particulier, B est une partie libre de E.

Par le corollaire du théorème de complétion des bases, B est incluse dans une base B' de E.

Ainsi $\dim(F) = |B| \leq |B'| = \dim(E)$, et le premier point est démontré.

Passons à présent au second point.

La condition suffisante ($\Longleftarrow$) est immédiate.

Pour montrer la condition nécessaire ($\Longrightarrow$), nous supposons que $\dim(F) = \dim(E)$.

Dans ce cas, on a $|B| = |B'|$.

Puisque $B \subseteq B'$, on obtient que $B = B'$.

Ainsi, tout élément de E est combinaison linéaire d'éléments de B et donc de F.

On obtient donc $E \subseteq F$.

Comme on a aussi $F \subseteq E$, on conclut que $F = E$, comme souhaité.

$\square$

Conventions

Nous supposons à présent, et pour le reste de ce chapitre,

- que E est un espace vectoriel de dimension finie m.
- qu'une base B de E est une partie ordonnée de E :

$$B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m).$$

Ceci n'est pas une vraie restriction dans le sens où si on souhaite énumérer les éléments de B dans un autre ordre, il suffira d'appliquer une permutation aux éléments de B.

Composantes d'un vecteur dans une base

Théorème de décomposition dans une base

Soit $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m)$ une base de E. Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, il existe des scalaires uniques $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ tels que $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_m \boldsymbol{b}_m$.

Démonstration.

L'existence vient du fait qu'une base soit une partie génératrice.

Montrons à présent l'unicité. Supposons que

$$x_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_m \boldsymbol{b}_m = y_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_m \boldsymbol{b}_m$$

avec $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{K}$. Alors

$$(x_1 - y_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (x_m - y_m)\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{0}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m$ étant linéairement indépendants, on obtient

$$x_1 - y_1 = 0, \dots, x_m - y_m = 0$$

c'est-à-dire $x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m$. $\square$

Définition

Soient $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ une base de E et soit $\boldsymbol{x} \in E$. Les coefficients $x_1, \ldots, x_m$ de la décomposition unique de $\boldsymbol{x}$ dans la base B sont appelés les composantes de $\boldsymbol{x}$ dans la base B.

Définition

Pour chaque base $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ de E, on définit une fonction

$$\Psi_B \colon E \to \mathbb{K}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

qui à un vecteur $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots x_m\boldsymbol{b}_m$ de E associe la matrice-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_m \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ de ses composantes dans la base B.

Tout espace vectoriel de dimension finie m est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^m$.

Corollaire

Pour toute base B de E, la fonction Ψ_B est un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est-à-dire une bijection telle que pour tous $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in E$ et tous $k, \ell \in \mathbb{K}$, on a

$$\Psi_B(k\boldsymbol{e} + \ell\boldsymbol{f}) = k\Psi_B(\boldsymbol{e}) + \ell\Psi_B(\boldsymbol{f}).$$

Démonstration.

C'est une simple vérification. □

Corollaire

Soit B une base de E. Des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ de E sont linéairement dépendants (dans E) si et seulement si les vecteurs $\Psi_B(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \Psi_B(\boldsymbol{x}_n)$ de $\mathbb{K}^m$ sont linéairement dépendants (dans $\mathbb{K}^m$).

Démonstration.

Laissée en exercice.

Suggestion : commencer par montrer que, pour tout $\boldsymbol{e} \in E$, on a

$$\Psi_B(\boldsymbol{e}) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}^m} \iff \boldsymbol{e} = \mathbf{0}_E.$$

$\square$

Changement de base

Étant donné deux bases B et B' de E, comment obtenir la décomposition d'un vecteur dans une de ces bases à partir de sa décomposition dans l'autre ?

Example

Soient

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $B = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et $B' = (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Étant donné les composantes (a, b) d'un vecteur $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^2$ dans la base B, nous voulons obtenir ses composantes (a', b') dans la base B'.

Puisque $\boldsymbol{e} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = a'\boldsymbol{u}' + b'\boldsymbol{v}'$, on obtient

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b' \\ 0 \end{pmatrix} \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + \ \ b = a' + 2b' \\ \ \ a + 3b = a' \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2b' & = & 2a + b - (a+3b) \\ a' & = & a + 3b \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b' & = & \frac{1}{2}a - b \\ a' & = & a + 3b \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

sont en fait les composantes de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans B'. En effet, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}' &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u} \\ 3\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{v}' &= 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Cette observation est en fait générale, et nous fournit un moyen alternatif pour obtenir les composantes d'un vecteur dans un base à partir de ses composantes dans une autre base.

Théorème (formule de changement de base)

Soient $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m)$ et $B' = (\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m)$ deux bases de E.
Pour tout $\boldsymbol{e} \in E$, on a

$$\Psi_{B'}(\boldsymbol{e}) = \mathcal{M}(B, B')\Psi_B(\boldsymbol{e})$$

où $\mathcal{M}(B, B')$ est la matrice de $\mathbb{K}^{m \times m}$ dont la j-ème colonne est le vecteur $\Psi_{B'}(\boldsymbol{b}_j)$, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.

Définition

La matrice $\mathcal{M}(B, B')$ du théorème précédent est appelée la matrice de changement de base de B vers B'.

Rappel : multiplication matricielle

Si $A \in \mathbb{K}^{\ell \times n}$ et $B \in \mathbb{K}^{n \times c}$, alors $A \cdot B$ est la matrice de dimension $\ell \times c$ définie par

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

pour tous $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ et $j \in \{1, \ldots, c\}$.

En particulier, si

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

alors pour tous $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on a

$$(A \cdot B)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{k1} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} b_k.$$

Démonstration du théorème de changement de base
Soit $\boldsymbol{e} \in E$ et soient

$$\Psi_B(\boldsymbol{e}) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi_{B'}(\boldsymbol{e}) = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}.$$

Soit aussi $\mathcal{M}(B, B') = (k_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$.

Par définition de $\mathcal{M}(B, B')$, on a

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}, \quad \boldsymbol{b}_j = k_{1j}\boldsymbol{b}'_1 + \cdots + k_{mj}\boldsymbol{b}'_m$$

On obtient que

$$\boldsymbol{e} = \sum_{j=1}^{m} e_j \boldsymbol{b}_j = \sum_{j=1}^{m} e_j \sum_{i=1}^{m} k_{ij} \boldsymbol{b}'_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{m} k_{ij} e_j \Big) \boldsymbol{b}'_i.$$

Par unicité de la décomposition de $\boldsymbol{e}$ dans la base B', on obtient que

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad e'_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} e_j.$$

En notation matricielle, ceci revient à dire que

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad \big(\Psi_{B'}(\boldsymbol{e})\big)_i = (\mathcal{M}(B, B')\Psi_B(\boldsymbol{e}))_i$$

d'où

$$\Psi_{B'}(\boldsymbol{e}) = \mathcal{M}(B, B')\Psi_B(\boldsymbol{e}).$$

$\square$

Proposition

Pour toutes bases B, B', B'' de E, on a

$$\mathcal{M}(B, B'') = \mathcal{M}(B', B'')\mathcal{M}(B, B').$$

Démonstration.

Montrons que les colonnes de $\mathcal{M}(B, B'')$ et $\mathcal{M}(B', B'')\mathcal{M}(B, B')$ sont égales deux à deux.

Supposons que $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$.

D'une part, la j-ème colonne de $\mathcal{M}(B, B'')$ est $\Psi_{B''}(\boldsymbol{b}_j)$.

D'autre part, la j-ème colonne de $\mathcal{M}(B, B')$ est $\Psi_{B'}(\boldsymbol{b}_j)$.

Par définition du produit matriciel, la j-ème colonne de $\mathcal{M}(B', B'')\mathcal{M}(B, B')$ est $\mathcal{M}(B', B'')\Psi_{B'}(\boldsymbol{b}_j)$.

On conclut en appliquant le théorème de changement de base. $\square$

Corollaire

Pour toutes bases B et B' de E, on a

$$\mathcal{M}(B', B) = (\mathcal{M}(B, B'))^{-1}.$$

Démonstration.

Il suffit de remarquer que pour toute base B de E, on a $\mathcal{M}(B, B) = I_m$. Le résultat découle alors de la proposition précédente avec $B'' = B$. $\square$

Retour aux matrices et théorème du rang

(Rappels de Mathématiques pour l'informatique 1.)

Définition

Le rang d'une matrice est la taille de la plus grande sous-matrice carrée de déterminant non nul.

Proposition

Soit $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Les colonnes de A sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{K}^m$.
2. Les lignes de A sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{K}_m$.
3. $\det(A) = 0$.

Remarque

Pour faire la distinction entre les matrices-lignes et les matrices-colonnes, on note $\mathbb{K}_\ell$ l'ensemble des matrices-lignes à ℓ éléments et $\mathbb{K}^c$ l'ensemble des matrices-colonnes à c éléments.

Théorème

- Le rang d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{\ell \times c}$ est égal au nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes de A, où l'indépendance linéaire est comprise dans l'ev $\mathbb{K}^c$.
- Le rang d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{\ell \times c}$ est égal au nombre maximum de lignes linéairement indépendantes de A, où l'indépendance linéaire est comprise dans l'ev $\mathbb{K}_\ell$.

Image et noyau d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathbb{K}^{\ell \times c}$.

L'image de A est l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^{\ell}$ tels qu'il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^{c}$ tel que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$:

$$\mathrm{Im}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^{\ell} \colon \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^{c},\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\} = \{A\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^{c}\}.$$

Le noyau de A est l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^{c}$ tels que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^{c} \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3i \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3i \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3iz \\ 8z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3i \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, on obtient que

$$\mathrm{Im}(A) \quad = \quad \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 8 \end{pmatrix} \langle \quad = \quad \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 8 \end{pmatrix} \langle.$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 8 \end{pmatrix}$ étant lin. indépendants, on a $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$.

Nous verrons qu'on a toujours $\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rg}(A)$, et on peut vérifier dans cet exemple que $\mathrm{rg}(A) = 2$ puisque par exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 3i \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

De plus, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3i \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3iz & = & 0 \\ 8z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Dès lors, on a

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{C} \right\} = \Big\rangle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\langle$$

et donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.

Nous allons montrer en général que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$ est toujours égal au nombre de colonnes de A (c'est le théorème du rang).

Cette égalité se vérifie dans cet exemple puisque

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = 1 + 2 = 3.$$

Proposition

L'image et le noyau d'une matrice de $\mathbb{K}^{\ell\times c}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\ell}$ et de $\mathbb{K}^{c}$ respectivement.

Démonstration.

C'est une simple vérification. $\square$

Proposition

Soit $A \in \mathbb{K}^{\ell \times c}$. Alors $\dim \mathrm{Ker}(A) = c - \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration

Le noyau de A est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Parmi les ℓ équations de ce système, on peut trouver au plus $\mathrm{rg}(A)$ équations linéairement indépendantes.

En utilisant la méthode de Gauss pour la résolution de ce système, on obtient que la dimension de l'ensemble des solutions est $c - \mathrm{rg}(A)$.

Détaillons ce dernier argument en reprenant les notations de Mathématiques pour l'informatique 1.

Le système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ se réécrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2 + \cdots + B_{1,r}x_r + B_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + B_{1c}x_c & = & 0 \\ & \vdots & \\ B_{r,r}x_r + B_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + B_{r,c}x_c & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

où $B_{1,1}, \ldots, B_{r,r}$ sont tous non nuls et où il y a $\ell - r$ équations de la forme $0 = 0$.

On a $r = \mathrm{rg}(A)$.

Ce système est équivalent au système obtenu en supprimant toutes les équations de la forme $0 = 0$ et en déplaçant les inconnues $x_{r+1}, ..., x_c$ dans les seconds membres des r premières équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B_{1,1}x_1 + B_{1,2}x_2 + \cdots + B_{1,r}x_r & = & -B_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - B_{1,c}x_c \\ & \vdots & \\ B_{r,r}x_r & = & -B_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - B_{r,c}x_c. \end{array} \right.$$

On obtient la valeur de x_r en fonction de $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_c$ grâce à la dernière équation.

Ensuite, en utilisant la dernière équation, on obtient la valeur de x_{r-1} en fonction de $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_c$ grâce à l'avant-dernière équation.

En remontant les équations, on obtient les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ en fonction de $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_c$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions est de la forme

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{1,r+1}x_{r+1} + C_{1,r+2}x_{r+2} + \cdots + C_{1,c}x_c \\ \vdots \\ C_{r,r+1}x_{r+1} + C_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + C_{r,c}x_c \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_c \end{pmatrix} : x_{r+1}, \ldots, x_c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ x_{r+1} \begin{pmatrix} C_{1,r+1} \\ \vdots \\ C_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} C_{1,r+2} \\ \vdots \\ C_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_c \begin{pmatrix} C_{1,c} \\ \vdots \\ C_{r,c} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : x_{r+1}, \ldots, x_c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Les $c - r$ vecteurs

$$\begin{pmatrix} C_{1,r+1} \\ \vdots \\ C_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{1,r+2} \\ \vdots \\ C_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} C_{1,c} \\ \vdots \\ C_{r,c} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{K}^c$ engendrent donc $\mathrm{Ker}(A)$.

Comme ils sont aussi linéairement indépendants, ils forment une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

D'où $\dim \mathrm{Ker}(A) = c - r = c - \mathrm{rg}(A)$. $\square$

Proposition

Soit $A \in \mathbb{K}^{\ell \times c}$. Alors $\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que l'image de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A.

Dès lors, $\dim \mathrm{Im}(A)$ est égal au nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes de A, donc au rang de A au vu du théorème précédent. $\square$

Théorème du rang

Pour toute matrice $A \in \mathbb{K}^{\ell \times c}$, on a

$$\dim \mathrm{Im}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = c.$$

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes. $\square$