Répétition 1 : Polynômes.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 14. Soient les polynômes

$$P = X^3 - X + 2 \quad \text{et} \quad Q = X^2 - 2.$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer les polynômes $3P$, $P + 2Q$, $P.Q$ et $Q(P)$ et vérifier que les polynômes obtenus ont un degré correspondant au degré attendu d'un point de vue théorique.

Solution : $3P = 3X^3 - 3X + 6$, $P + 2Q = X^3 + 2X^2 - X - 2$, $P.Q = X^5 - 3X^3 + 2X^2 - 2X + 4$ et $Q(P) = X^6 - 2X^4 + 4X^3 + X^2 - 4X + 2$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}[X]$, écrire le polynôme $2X^5 - 4X^2 - X + 1$ sous la forme de Taylor en le point $k = 1$.

Solution : $P = 1 + (X - 1) + 16(X - 1)^2 + 20(X - 1)^3 + 10(X - 1)^4 + 2(X - 1)^5$.

Exercice 16. Calculer le quotient et le reste de la division de

$$X^5 + 2X^4 - X^3 + 22X$$

par

$$X^2 - 4X + 1$$

dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : Le quotient est $X^3 + 6X^2 + 22X + 82$ et le reste est $328X - 82$.

Exercice 17. Pour quelles valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{C}$ le polynôme

$$P = 2X^4 - 7X^3 + aX^2 + bX - 4$$

est-il divisible par $(X - 2)^2$.

Solution : $a = 3$ et $b = 8$.

Exercice 18. Sachant que le polynôme de $\mathbb{C}[X]$

$$X^4 + X^3 - 5X^2 + X - 6$$

possède un zéro réel et un zéro imaginaire pur, déterminer tous ses zéros.

Solution : Les zéros de P sont 2, -3, i et $-\mathrm{i}$.

Répétition 2 : Espaces Vectoriels, sous-espaces vectoriels et indépendance linéaire.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 14. Parmis les ensembles de fonctions suivants, munis des opérations usuelles, lesquels sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (resp., sur $\mathbb{C}$).

1. $E_1 = \{f\colon \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[\}$
2. $E_2 = \{f\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}\}$
3. $E_3 = \{f\colon \mathbb{R} \mapsto [0,1]\}$

Solution :

1. Ce n'est pas un espace vectoriel.
2. C'est un espace vectoriel.
3. Ce n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 15. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. Les vecteurs sont linéairement indépendants.
2. Les vecteurs sont linéairement indépendants.
3. Les vecteurs sont linéairement dépendants.

Exercice 16. Déterminer si les polynômes P, Q et R sont linéairement dépendants ou indépendants dans $\mathbb{R}[X]$ si

$$P = X^3 - 2X^2 + 2X + 1, \qquad Q = X^3 - X^2 + 3X, \qquad \text{et} \qquad R = 2X^3 + 5.$$

Solution : Les polynômes sont linéairement indépendants.

Exercice 17. Vérifier si chacune des parties suivantes est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) muni des lois usuelles (pour un n adéquat) :

1. $\mathbb{N}^2$,
2. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \right\}$,
3. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2 \right\}$,
4. $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid y = -2z \right\}$.

Solution :

1. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 18. Soient $\mathbb{K}$ un champ et n un naturel strictement plus grand que 1. Considérons le vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée. Les parties suivantes de $\mathbb{K}[X]$ sont-elles des espaces vectoriels ?

1. l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à n,
2. $W_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 1\}$.

Solution :

1. Ce n'est pas un espace vectoriel.
2. Ce n'est pas un espace vectoriel.

Répétition 3 : Base et changement de base.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 7. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On définit

$$f_1 = e_1 + e_2, \qquad f_2 = e_3 - 2e_1, \qquad f_3 = e_2 - 2e_3.$$

(a) Montrer que $B' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.

(b) Donner les composantes du vecteur $x = e_1 - 3e_2 - e_3$ dans la base B.

(c) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B', B)$.

(d) Donner la matrice de changement de base $\mathscr{M}(B, B')$.

(e) Donner les composantes de $x = e_1 - 3e_2 - e_3$ dans la base B'.

Solution :

(a) Premièrement, on montre que B' est une partie libre de E. Ensuite, par le théorème d'équipotence des bases, vu que B et B' ont le même nombre d'élément, B' est aussi génératrice donc B' est une base.

(b) $\Psi_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathscr{M}(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathscr{M}(B, B') = \mathscr{M}(B', B)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(e) $\Psi_{B'}(x) = \mathscr{M}(B, B')\Psi_B(x) = \begin{pmatrix} \frac{-13}{5} \\ \frac{-9}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$.

Répétition 4 : Valeur propre, vecteur propres et espace propre.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 6. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution : Le polynôme caractéristique de cette matrice est $-(X+1)^2(X-2)$. Ainsi, ses valeurs propres sont -1 et 2 (de multiplicités algébriques 2 et 1 respectivement).

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques et géométriques.

Solution : Le polynôme caractéristique de A est $-(X-1)(X-2)(X+4)$. Ainsi, ses valeurs propres sont 1, 2 et -4. Les valeurs propres de A sont toutes simples (c'est-à-dire de multiplicités algébrique égale à 1). Vu que les valeurs propres sont simples, les multiplicités géométriques de toutes les valeurs propres sont égales à 1.

Répétition 5 : Théorème de Cayley-Hamilton et polynôme minimal.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

(b) Déterminer le polynôme minimal de A.

(c) En déduire si la matrice A est inversible. Si oui, déterminer A^{-1}.

Solution :

(a) Le polynôme caractéristique de A est $-(X-1)^2(X-2)$.

(b) Le polynôme minimal de A est $(X-1)(X-2)$ si $\alpha = 0$ et $(X-1)^2(X-2)$ sinon.

(c) Si $\alpha = 0$, on obtient $A^{-1} = -\frac{A}{2} + \frac{3}{2}I_3$ (où I_3 est la matrice identité de d'ordre 3). Si $\alpha \neq 0$, on obtient $A^{-1} = \frac{A^2-4A+5I_3}{2}$.

Répétition 6 : Diagonalisation.

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 7. Pour quelle(s) valeur(s) du complexe α la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Si c'est possible, diagonaliser la matrice M.

Solution : Les valeurs propres de M sont 1 et $\alpha - 1$. La matrice M est diagonalisable si $\alpha \neq 0$ et -1.

Exercice 8. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-u & 0 \\ 1 & u-1 & 4-u & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & u-1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $u \in \mathbb{C}$ la matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Pour $u = 5$, fournir une matrice S qui diagonalise M ainsi que la matrice diagonale $S^{-1}MS$.

Solution : Les valeurs propres de M sont $2, 3, 4, u-1$. Et la matrice M est diagonalisable si $u \neq 3$ et 4. Lorsque $u = 5$, si

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a $S^{-1}MS = \operatorname{diag}(2, 3, 4, 4)$.

Répétition 7: Approximations polynomiales.

Mathématiques pour l'informatique 2,

Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale de f à l'ordre $n = 0, 1, 2$ en a.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-2x}, \quad a = 0.$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x), \quad a = 0.$

Solution :

(a) La fonction f est indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. On a $P_0 = 1, P_1 = 1 + 2x$ et $P_2 = 1 + 2x + 4x^2$.

(b) La fonction f est indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $P_0 = 0$ et $P_1 = x = P_2$.

Exercice 7. Déterminer l'approximation polynomiale de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ à l'ordre 3 en $a = 0$ et en estimer le reste.

Solution : La fonction f est indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R}$. L'approximation polynomiale de f à l'ordre 3 en $a = 0$ est $P_3 = x - \frac{x^3}{6}$. De plus, si l'on note r_3 le reste de l'approximation polynomiale P_3, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|r_3(x)| \leq \frac{x^4}{24}$.

Répétition 8 : Séries

Mathématiques pour l'informatique 2,
Bloc 2 en Sciences Informatiques.

2021 – 2022

{echarlier, ccisternino}@uliege.be

1 Solution de la préparation

Exercice 5. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i^2+\sqrt{2}}$ (b) $\sum_{i=1}^{+\infty} i\cos\left(\frac{1}{i}\right)$

Solutions :

(a) La série converge.

(b) La série diverge.

Exercice 6. Étudier la convergence des séries suivantes et préciser leurs sommes si elles convergent :

(a) $\sum_{i=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^i$ (b) $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{3^{1-i}}{i!}$ (c) $\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{5^i(\ln 5)^{i-1}}{i!}$

Solutions :

(a) La série diverge.

(b) La série converge vers $3\exp\left(\frac{1}{3}\right)$.

(c) La série converge vers $\frac{5^5-1-5\ln 5}{\ln 5}$.