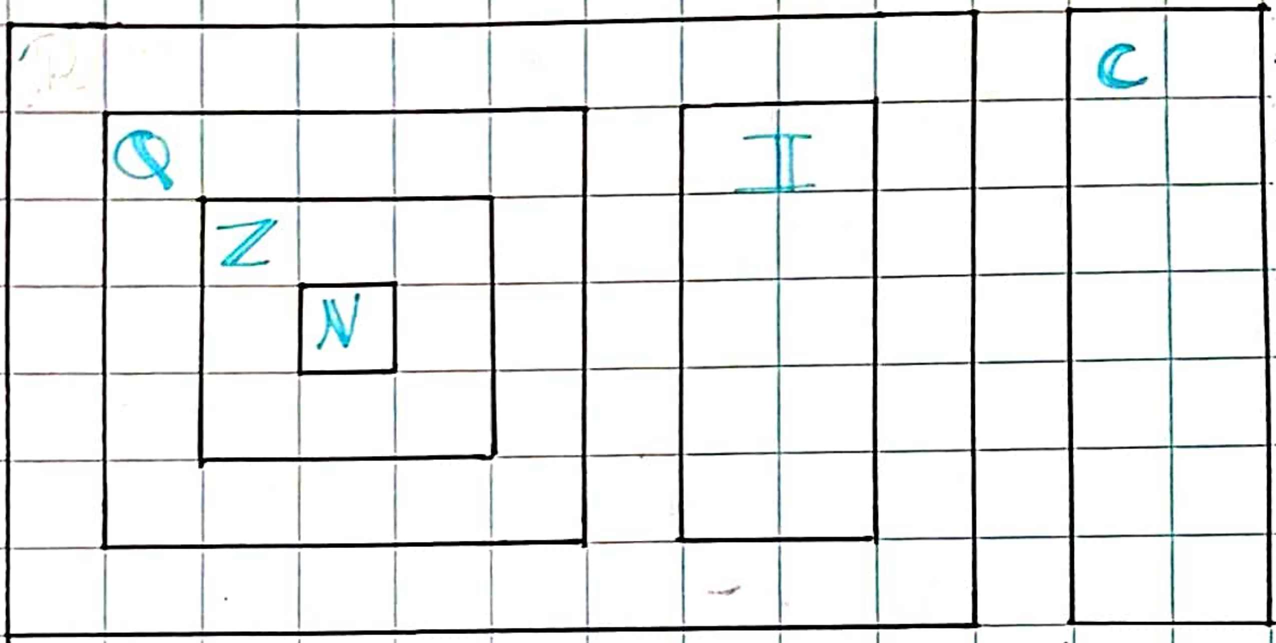
Quelque rappels : base

Les réels :

• Déf + Notation :



• Propriété d'ordre dans les réel :

• addition :

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x'_1 < x'_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x'_1 < x_2 + x'_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq x_2 \\ x'_1 < x'_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x'_1 < x_2 + x'_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq x_2 \\ x'_1 \leq x'_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x'_1 \leq x_2 + x'_2$$

multiplication :

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 x \geq x_2 x$$

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 x > x_2 x.$$

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 x \leq x_2 x$$

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 x < x_2 x$$

Symbole de somme et produit :

$$\sum_{j=1}^{J} x_j \qquad \prod_{j=1}^{J} x_j \rightarrow \text{multiplication}$$

- j est un indice dont l'opérat° ne dépend pas de lui

Une formule utile :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^N}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \\ N & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Resolut° d'equat° du 1 et 2° ; 1 inco :

...Equat° du 1° degré...

Une équation du premier degré à coefficients et variable réel est une relation du type :

$$ax+b=0$$

où a, b sont des réels donné, [a ≠ 0 et x est l'inconnue réel.]

> **Resolution :**

$$x=\frac{-b}{a}$$

...Equation du 2 degré...

C'est une relation, à coeficient et variable réel, du type :

$$ax^2+bx+c=0$$

où a, b, c sont des réel donné, a [≠ 0 et x est l'inconnue réel.]

> **résolution :**

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta>0 : x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

> m est pair $\Rightarrow x^m$ est tjrs ⊕.

> m est impair $\Rightarrow x^m$ garde le signe de x.

Racine réel

C'est la fonction inverse (réciproque) de la puissance. $\sqrt[m]{x} \leftrightarrow x^m$

Racine pair

Si x est un réel positif, la racine m^e de x est (noté $\sqrt[m]{x}$) le réel positif dont la m-ième puissance est x.

$x \in [0;+\infty[\mapsto \sqrt[m]{x} = y \in [0;+\infty[$ tel que $y^m = x$.

Racine impair

Si x est un réel, la racine m-ième de x, notée $\sqrt[m]{x}$, est le réel dont la m-ième puissance est x.

$x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt[m]{x} = y \in \mathbb{R}$ tel que $y^m = x$

· propriété :

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a||b|$
- $a \leq |a|$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $-a \leq |a|$
- $a^2 = |a|^2$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$

– r est positif :

- $|x| \leq r \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq r \\ -x \leq r \end{cases} \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$
- $|x-a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$.

– réel positif :

- $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$
- $|a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

· produit remarquable :

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Analyse combinatoire & binôme de Newtone :

Analyse combinatoire :

› Permutation :

$$P_n = n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

↳ le nbr de répartitions possibles de n élément.

› Arrangements :

$$A_n^p = \prod_{i=0}^{p-1} (n-i) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

↳ nbr de choix de p élément parmis n, ou l'ordre à de l'importance.

› Combinaisons :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

↳ nbr de choix de p élément parmis n, ou la nature à de l'importance.

Binôme de Newton :

$$(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} a^i$$

› fonct° ou coeficient ⊖ |e| eux.

› fonctione dans C

Valeur absolue, puissances entières, racine :

Le module

La valeur absolue d'un nbr est le nbr lui-même s'il est positif et son opposé s'il est négatif.

$$|x| = \begin{cases} x \ ; \ \text{si } x \geq 0 \\ -x \ ; \ \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- propriété :
  - $|x| \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
  - $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

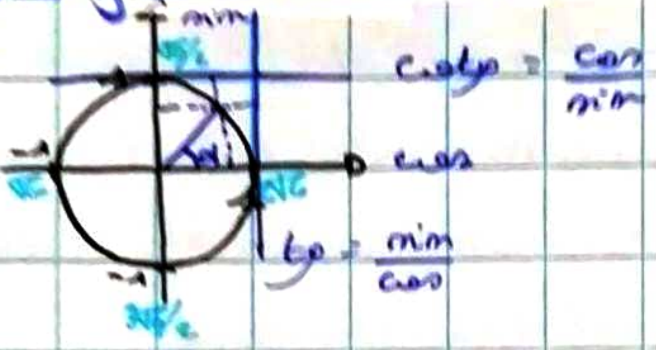
Puissance réele

Soit $n \in \mathbb{N}_0$. La fonction "puissance de n" est la loi :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n$$

- propriété :
  - si $n = 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^n = 1$
  - $x \neq 0$ le réel $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

Trigonométrie :



Cercle Trigonométrique

	0°	30°	45°	60°	90°
	π	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

- relation fondamentale de la trigo.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- formule d'addition :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

- formule de duplication :

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2(a).$$

- formule de carnot :

$$2\cos^2(a) = 1 + \cos(2a)$$

$$2\sin^2(a) = 1 - \cos(2a).$$

Cercle Trigonométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$; on défini le point P du cercle trigonométrique associé à ce réel x.

L'abscisse de P est réel $\cos x$ et son ordonnée est le réel $\sin x$

Les nbrs complexe

- Un nombre complexe s'écrit sous la forme : $Z = a + ib$
  où a et b appartiennent à $\mathbb{R}$ et i est un nombre imaginaire.
- $i^2 = -1$

① Opération sur 2 nbr complexes :

- Égalité : $Z = a + ib$ et $Z' = c + id$
  Alors $Z = Z' \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$

- Somme : $Z = a + ib$ et $Z' = c + id$
  Alors $Z + Z' = (a + c) + i(b + d)$
  > Commutatif.

- Produit : $Z = a + ib$ et $Z' = c + id$
  Alors $Z.Z' = (ac - bd) + i(ad + bc)$
  > Commutatif.
  > L'inverse : $\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$ conjugué.
  > Le module : $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

. Racine carré : $x_1 = \pm\sqrt{\frac{|Z| - a}{2}} = \sqrt{\Delta}$

$x_2 = \pm\sqrt{\frac{|Z| + a}{2}} = \sqrt{\Delta}$

, $b > 0$: signe $=$.

, $b < 0$: signe $\neq$.

$\Rightarrow \Delta \Rightarrow Z_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $Z_2 = \frac{-b \pm x_2}{2a}$

La forme trigonométrique :

$r(\cos \varphi_0 + i \sin(\varphi_0)) = Z$

. Produit : $Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi))$

. Inverse : $\frac{1}{r} \cos(-\varphi) + i (\sin(-\varphi))$

. Quotient : $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi))$

. Formule de Moivre : $(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n$

$= \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$.

. puissance : $z^n = r^n . (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$.

Droites et calcul vect.

Forme canonique de l'équat° cartésienne d'une droite dans le plan :

- $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (a, b non nul en m t^{ps})

Équation cartésienne passant par le point (x_1, y_1) (m = coéficient angulaire) :

- $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Quel est le lien entre le coéficient angulaire et le vecteur de la droite de composante a et b ?

- $m = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$.

Orthogonalité :

- $\vec{v}_d * \vec{v}_{d'} = 0$.
- $m \cdot m' = -1$

$\vec{b} \wedge \hat{a} = \begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B \\ x_A & y_A & z_A \end{vmatrix}$

$= (z_B * z_A - y_B y_A ; z_B z_A - x_B x_A ; y_A y_B - x_B x_A)$

Parallélisme :

- $\vec{v}_d = k \vec{v}_{d'}$
- $m = m'$

Coordonnée d'un vecteur :

$\vec{v} = \vec{AB} = (x_B - x_A, \ y_B - y_A, \ z_B - z_A)$

Distance d'un vecteur :

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

Milieu d'un vecteur :

$\vec{v}_m = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Produit scalaire :

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| * \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = w_x * v_x + w_y * v_y + w_z * v_z$

Pente :

$AB = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Toute droite non verticale possède une équat° de la forme $y = mx + p$, la verticale est de forme $x = p$ ou $y = p$.

Les Coniques

Ellipse :

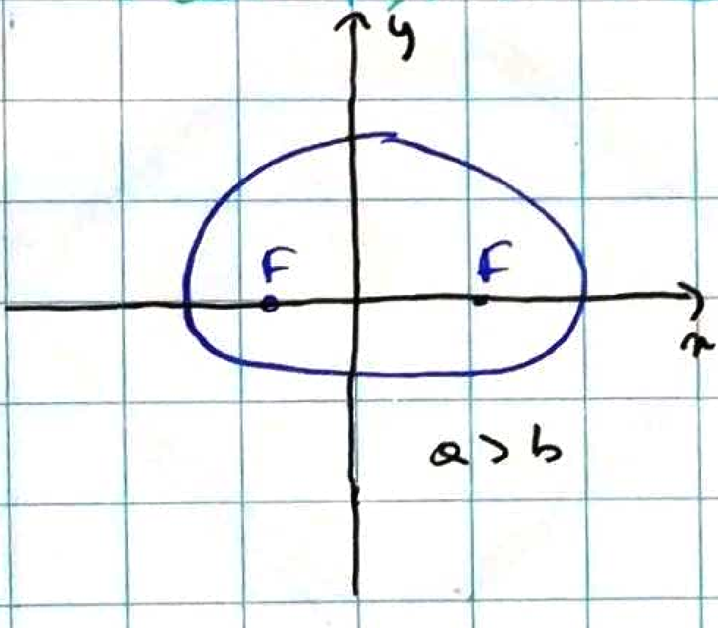
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

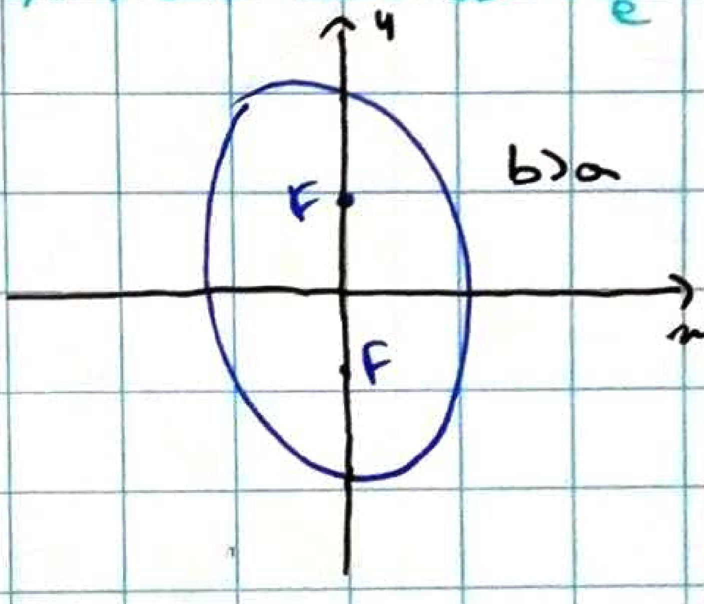
- $e = \frac{c}{a}$
  $\leadsto \begin{cases} \text{excentricité} \\ e < a,\ e < 1 \end{cases}$

- $c = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} & (a > b) \\ \sqrt{b^2 - a^2} & (b > a) \end{cases}$

- $F_1 = \begin{cases} (c, 0) & (a > b) \\ (0, c) & (b > a \end{cases}$
- $F_2 = \begin{cases} (-c, 0) & (a>b) \\ (0, -c) & (b > a) \end{cases}$

- $d(P, F) = e\, d(P, \mathcal{D})$ ou $\mathcal{D} \equiv x = \frac{a}{e}$





> Cercle : $\begin{cases} \text{de centre } (x_0, y_0). \\ \text{de rayon } r. \end{cases}$

$\leadsto (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Hyperbole :

⚠ asymptote ⚠ ⇝ AO souvent !

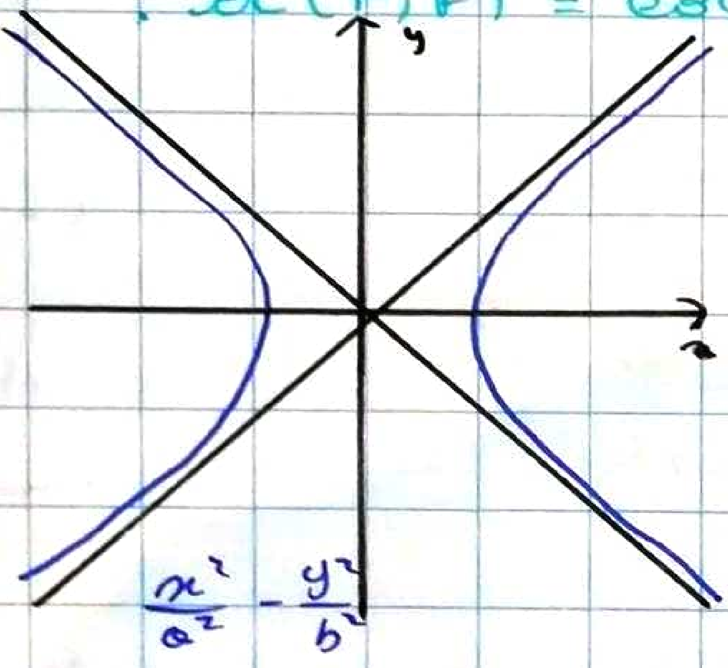
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

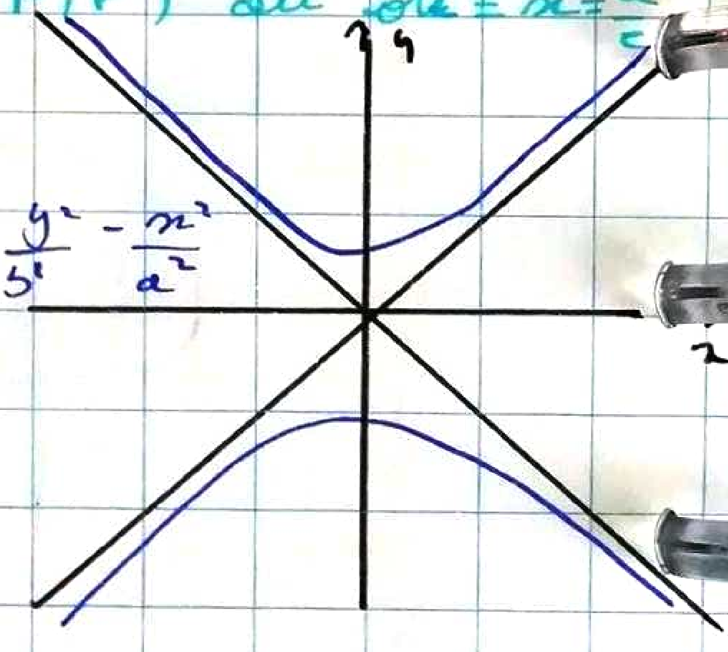
- $e = \begin{cases} \frac{c}{a} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \\ \frac{c}{b} & \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}. \end{cases}$ ⇝ $e > 1$

- $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $F_1 = \begin{cases} (c, 0) & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\ (0, c) & \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \end{cases}$. $F_2 = \begin{cases} (-c, 0) \\ (0, -c) \end{cases}$

- $d(P,F) = e\,d(P,F)$ où $d \equiv x = \frac{a}{c}$



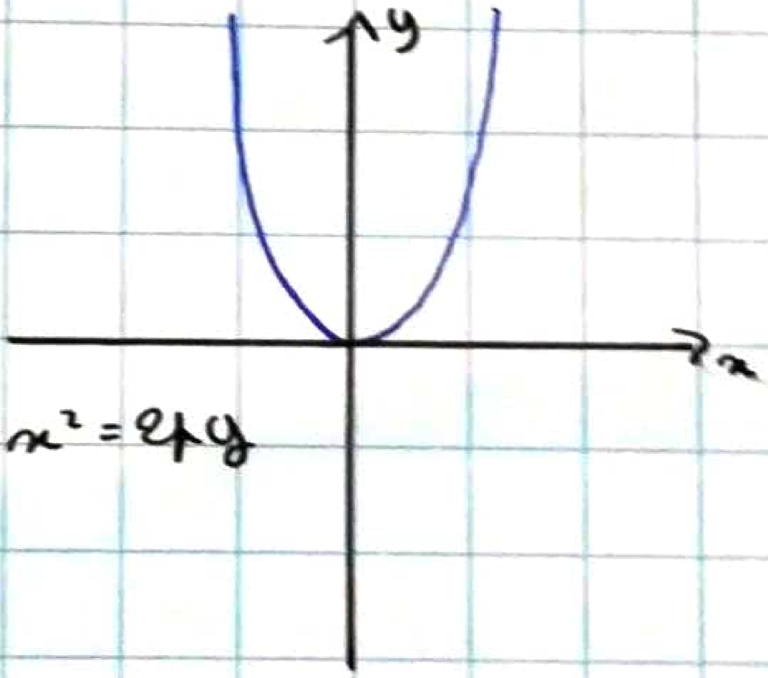


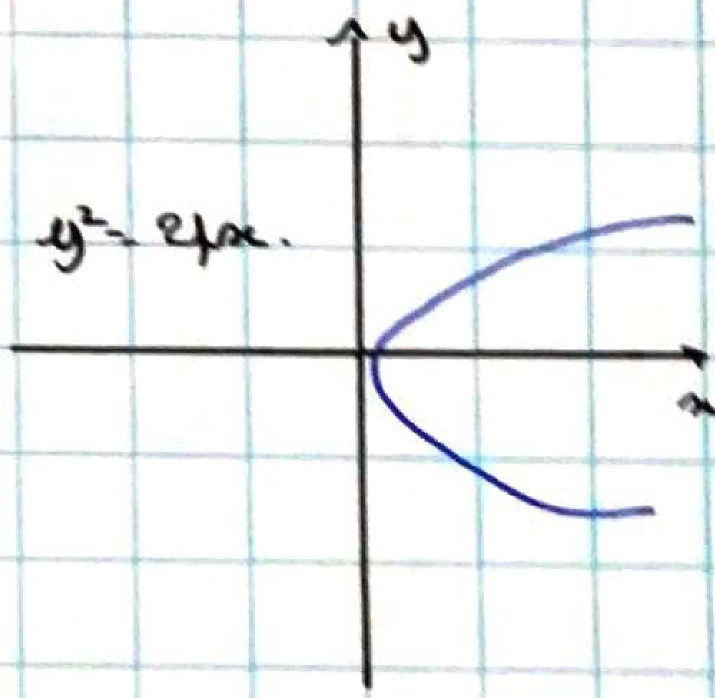
Parabole :

- $y^2 = 2px$ (horizontale)
- $x^2 = 2py$ (verticale) . $e = 1$

- $F = \begin{cases} \left(\frac{p}{2}, 0\right) & \text{(horizontale)} \\ \left(0, \frac{p}{2}\right) & \text{(verticale)} \end{cases}$

- $\mathcal{D} \equiv x = -\frac{p}{2}$





En générale :

- prendre en compte les décalage lors du calcule des foyers.

D) Décomposition en fract° simple.

I: fraction rationnelle simple :

Si elle est de forme $\frac{cst}{(ax+b)^{\alpha}}$

et $\frac{ax+b}{(cx^2+dx+e)^{\alpha}}$ avec :

a, b, c, d et e $\in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$,

$[c \neq 0, a \neq 0, cst \in \mathbb{R}]$

Méthode :

1. vérifier que la fraction est propre

→ degré du Num < degré du Dén.

⤳ si NON : ÷ EUCLIDIENNE.

2. Factoriser le dénominateur

3. Décomposer en ⊕ de fract° simple dont les dénominateurs seront ≠ les puissance de tt les facteurs de la factorisat° jusqu'à celle présentes au seins de celle-ci !

ex : $\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$ (1)

4. Trouver les constantes (mise en système).

Dérivées

$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$

$D\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{D(f)}{f^2}$

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f) \cdot g - f \cdot D(g)}{g^2}$.

$D(f \circ g) = D(f(g)) \cdot D(g)$.

Dérivée immédiate :

- $D(x) = 1$
- $D(x^2) = 2x$
- $D(x^n) = n\,x^{(n-1)}$
- $D\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{(n-m)}}}$.
- $D(c) = 0$
- $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.
- $D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $D(\sin x) = \cos x$.
- $D(\cos x) = -\sin x$
- $D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $D(\operatorname{cotg} x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

Primitive / Intégrale

Intégrale :

Immédiate :

- $\int 0 \, dx = C$
- $\int 1 \, dx = x + C$
- $\int x = \frac{x^2}{2} + C$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
- $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C$

Résolution :

. Décomposition : $\int (a f(x) + b g(x))\, dx$
$= a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$

. Substitution (changement de variable :
$\int f(g(x))\, dx = \frac{1}{D(g(x))} \cdot \int f(u)\, du$
› on pose $u = g(x)$
› $du = D(g(x))\, dx$ on isole le dx.

. Par partie : $\int u \cdot D(v)\, dx$
$= uv - \int D(u)\, v\, dx$.

Intégrale :

. **calcule** :
› $[f(x)]_0^{+\infty} \rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

. **L'air** :
› $A = \int_a^b f(x)\, dx$ (si $f(x) \geq 0$).
› $A = -\int_a^b f(x)\, dx$ (si $f(x) \leq 0$).

. 2 courbes :

› $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$.

. Parité et imparité :

› $\mathcal{A} = 2\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)$ (pair)

› $\mathcal{A} = 2\left(-\int_a^b f(x)\, dx\right)$ (impaire)

. on peut additionner 2 aires.

. Le volume :

› $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$

. 2 courbes :

› $V = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)\, dx$.

. On règle que pour l'air.

Différentiel EDLC

- **Ordre 1 :**

- $a\,D f(x) + b f(x) = g(x)$.

Polynome caractéristique :

- $az + b$

> zéro $= \frac{-b}{a}$

> Les $ de l'equa. homo. : $C e^{-\frac{b}{a}x}$, $C \in \mathbb{C}$

Solution particulière : non homogène.

- $g(x) = P(x) e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$

- Si a n'est pas zéro du pol. caract.

> Q → m̂ degré que $P(x)$:

$f(x) = Q(x) e^{ax}$

peu importe l'ordre.

- Si a est zéro simple du polynome

> Q → m̂ degré que $P(x)$:

$f(x) = x\,Q(x)\,e^{\alpha x}$

- si a est zéro double du polynôme
  > Q → m̃ degré que P(x)
  $$f(x) = x^2 Q(x) e^{\alpha x}$$
  ⇝ injecter dans l'ED pour trouver Q.

. Ordre 2 :

- $a D^2 f(x) + b D f(x) + c f(x) = g(x)$

Polynome caractéristique :

- $a z^2 + b z + c$

> zéro : z_1, z_2
> des \$ de l'eq. homo :

- $z_1 = z_2$: $(C_1 x + C_2) e^{z_1 x}$

- $z_1 \neq z_2$: $C_1 \boxed{e^{z_1 x}} + C_2 \boxed{e^{z_2 x}}$

\$ fondamentale