LIÈGE université
Sciences

MATHEMATIQUES

Première année de bachelier en

Chimie, Géologie, Informatique, Philosophie

Année académique 2020-2021

Françoise BASTIN

Année académique 2016-2017

Errata et compléments au syllabus (2014-2015)

A PROPOS DU TAF

Revenons sur le TAF et l'une de ses conséquences, qui affirme que ≪ *si une fonction à valeurs réelles est dérivable sur un intervalle ouvert et si sa dérivée y est identiquement nulle, alors cette fonction est constante sur l'intervalle* ≫.

Deux remarques s'imposent : (a) l'hypothèse ≪ f à valeurs réelles ≫ est indispensable pour le TAF et (b) la propriété ≪ *si une fonction à valeurs complexes est dérivable sur un intervalle ouvert et si sa dérivée y est identiquement nulle, alors cette fonction est constante sur l'intervalle* ≫ est toujours vraie. Une justification est donnée ci-dessous.

• (a) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-i}$. On a $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ et

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad Df(x) = -\frac{1}{(x-i)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Si le TAF était vrai pour des fonctions à valeurs complexes, alors il devrait exister $u \in]0,1[$ tel que

$$\frac{1}{1+i} = -\frac{1}{(u-i)^2}.$$

Mais un petit calcul (en fait une ré-écriture de l'égalité ci-dessus) montre qu'en fait il ne peut pas exister de réel u vérifiant cette égalité !

• (b) Si $Df = 0$ sur l'intervalle I alors $D\Re f + iD\Im f = 0$ sur I, vu la linéarité de l'opérateur de dérivation. Cette égalité est équivalente à

$$\begin{cases} D\Re f = 0 \\ D\Im f = 0 \end{cases}, \qquad sur I$$

donc il existe des constantes réelles r, r' telles que

$$\begin{cases} \Re f = r \\ \Im f = r' \end{cases}, \qquad sur I.$$

Dès lors on a

$$f = \Re f + i\Im f = r + ir' \qquad sur I$$

et on conclut.

DIVERS

- p46, dernière ligne : lire ≪ [...] pas de relation d'ordre compatible avec la structure ≫ (Dans un corps totalement ordonné, tout carré est positif ou nul.)

- p57, l'annexe annoncée n'existe pas
- p73, l'intervalle sur lequel est considérée la fonction arctangente est $[-\pi, \pi]$ (et non $[-10, 10]$)
- p137, la définition de la fonction F est incomplète ; il faut lire

$$F(t) = \int_a^t |f(x)| \, dx, \quad t \in [a, b]$$

FB, Version 29 juillet 2016 (V1 : 29/07/16)

Introduction au cours
« Mathématiques générales », partim A

Aperçu général du cours

Composantes indispensables de la boîte à outils des sciences, les mathématiques sont présentes partout. Un cours de mathématiques générales assurant une formation de base solide en connaissances se révèle donc indispensable dans le cursus d'un futur scientifique. Mais au-delà de l'apprentissage de l'outil et des techniques d'utilisation, c'est aussi une formation à l'esprit critique, à la rigueur, à l'analyse et synthèse dont il est question.

Dans cette optique, le cours de mathématiques du premier quadrimestre du premier bachelier en sciences sera consacré à la présentation des notions de base qu'il est indispensable de connaître pour appréhender plusieurs aspects des cours de sciences dans des conditions optimales. Bien sûr, il ne s'agira pas uniquement de donner des « recettes » ; il sera question aussi de démarches logiques et rigoureuses permettant de comprendre, reconnaître, utiliser et appliquer les notions et résultats fondamentaux : comprendre, analyser pour mieux gérer et progresser. Il sera notamment question des thèmes suivants :

- Rappels introductifs
- Nombres réels et complexes, équations du 1er degré et du second degré
- Vecteurs
- Droites, coniques
- Cercle trigonométrique (fonctions trigonométriques)
- Produits scalaire et vectoriel
- Limites, continuité, dérivation, primitivation
- Fonctions élémentaires (propriétés générales, en fonction des notions précédentes)
- Calcul intégral, applications (longueurs de courbes, intégrales le long de courbes, ...)
- Equations différentielles.

Ces thèmes seront enseignés avec une structure invitant à faire les « ponts » avec les autres cours de sciences, en particulier avec le cours de physique.

Objectifs du cours

En bref, le cours s'articule autour de deux objectifs principaux :

- d'une part fournir les outils et techniques de base de l'analyse réelle et de l'algèbre linéaire utilisés régulièrement dans les études en sciences ;
- d'autre part amener à un apprentissage de la rigueur, de la précision, de l'esprit critique, de l'esprit d'analyse et de synthèse.

Ce sont donc à la fois connaissances et démarches scientifiques dont il sera question.

Pre-requis

Aucune formation ou connaissance spécifique n'est requise. La formation de base en mathématique de l'enseignement secondaire permet d'aborder le cours dans de bonnes conditions. Cependant, dès le début de l'année, il est indispensable que l'étudiant remédie aux éventuelles lacunes qui seraient décelées dans ses connaissances, que ce soit au niveau matière ou au niveau méthode de travail et autoévaluation. Des tests, des séances de mise à niveau et de remédiation sont organisés à cette fin ; il importe cependant que chaque étudiant apprenne à se prendre en charge rapidement et utilise donc fructueusement les activités mises en place pour l'aider à la transition secondaire-université.

Par ailleurs, des rappels de base de matières de l'enseignement secondaire ont été rédigés par Madame Crasborn, assistant pédagogique. L'adresse http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/2009-2010/123Sc/Prerequis.pdf y donne accès.

Bien sûr, une bonne connaissance de la langue est indispensable pour comprendre, transmettre et communiquer oralement et par écrit.

Le ≪ contrat pédagogique ≫ ou ≪ engagements réciproques ≫

Du côté des enseignants.

Chaque année, tout enseignant est tenu de décrire la manière dont il organise ses cours dans une rubrique appelée ≪ engagements pédagogiques ≫. Le texte de cette rubrique est repris dans le *Journal de bord* et on le trouve également dans le programme des cours (version papier et version électronique). Ces engagements pédagogiques reflètent l'esprit du cours et détaillent les aspects fondamentaux de son organisation. Ils constituent un ≪ cahier des charges ≫ que l'enseignant s'engage à tenir envers l'étudiant pour assurer sa formation et le guider dans son travail en vue de la réussite.

Et plus spécifiquement ...Du côté des encadrants pour le cours de mathématique

Le cours de maths dans un cursus d'études en sciences joue un rôle central.

C'est en effet l'endroit où les outils de base de techniques de calcul de tout scientifique seront enseignés (ou revus) de manière à ce que leur utilisation puisse être optimale lorsqu'il en sera question dans diverses situations concrètes d'autres cours.

Ce n'est cependant pas à ce rôle d'apprentissage de techniques que le cours de maths est restreint. Son autre rôle fondamental est aussi d'asseoir des processus de raisonnement rigoureux et scientifiques dans un contexte optimal. La matière vue dans ce cours relève en effet d'un cours de ≪ calculus ≫ tout à fait classique, ne fait pas appel à des théories sophistiquées et abstraites et les utilisations directes dans les cours de sciences sont immédiates et nombreuses. C'est dans ce contexte fertile que peuvent venir se greffer et se développer des apprentissages de processus visant à susciter l'esprit critique, l'autoévaluation, le sens du raisonnement rigoureux et de l'expression structurée ... Matière élémentaire, oui, permettant justement de mettre l'accent sur des manques de connaissances ou compétences diverses (langagières, structurales, esprit critique, raisonnement, techniques rudimentaires oubliées ou erronément manipulées...), pourtant indispensables dans un parcours universitaire...

Les techniques mises en oeuvre dans l'encadrement visent à rencontrer ces divers aspects.

Du côté des étudiants.

Si tout est mis en œuvre pour apporter guide, aide et soutien à l'étudiant, sa réussite dépend évidemment de l'utilisation qu'il fera de l'encadrement dont il dispose . Pour réussir, il ne suffit pas de ≪ se laisser faire ≫; il faut aussi agir, participer, devenir autonome et utiliser à bon escient les moyens offerts. L'autoévaluation et l'esprit critique sont des atouts majeurs sur le chemin de la réussite. Ce sont des compétences à acquérir rapidement.

C'est avec un contrat pédagogique réciproque, auquel les deux parties prennent part activement et dans lequel elles dialoguent, que le chemin de la réussite est le plus sûr.

Petit guide de l'étudiant qui veut réussir à l'Université

Voici un petit ≪ mémo ≫ de points essentiels concernant l'attitude à adopter ...

1. *J'assiste au cours en étant présent d'esprit et pas seulement de corps*
2. *Je remets mes cours à jour de manière quotidienne si possible ou de manière hebdomadaire au plus tard*
3. *Je travaille chaque jour, même si je rentre chez moi après 19h*
4. *Je profite des jours de congé pour faire des révisions globales de chapitres et évaluer le temps nécessaire pour les assimiler (pour pouvoir, le moment venu, gérer ma période de bloque)*
5. *Je prépare avec assiduité les répétitions, les interrogations et les examens*
6. *Je ne suis pas fataliste, mais volontaire : conscient que ma réussite dépend de moi et non de la chance ou du professeur, je fais tout pour y accéder*
7. *J'apprends à répondre aux questions par moi-même en les identifiant clairement et en cherchant la réponse dans les acquis*
8. *Je m'interdis de mémoriser une matière si je ne l'ai pas comprise au préalable et je cherche l'aide dont j'ai besoin*
9. *Je fais des synthèses comportant la structure du cours et ce qu'il faut nécessairement mémoriser*
10. *Je consulte toujours ma copie après une interrogation ou un examen et je fais l'effort de comprendre la nature de mes erreurs afin de pouvoir les corriger*

Filières concernées

Ce cours s'adresse aux étudiants de premier bachelier des sections de biologie, chimie, géologie, géographie, physique, dans le cadre du « tronc commun » du projet « 1,2,3…Sciences » en Faculté des Sciences. Au deuxième quadrimestre, il sera suivi d'un second cours dont les crédits sont différents selon les filières.

Les étudiants de premier bachelier en informatique le suivent également ; une suite est prévue au second quadrimestre. Divers aspects de la matière seront approfondis soit à l'occasion de certains cours, soit à l'occasion des séances d'exercices et de travaux dirigés (suites, séries, approximations …)

Il est également inscrit au programme du premier bachelier en philosophie, option sciences.

Descriptif plus précis du contenu du cours

Comme annoncé dans ce qui précède, des liens, des « ponts », avec les autres cours de sciences sont présents partout, que ce soit dans les cours et séances « théoriques » ou dans les séances d'exercices (répétitions). Un bref aperçu de ces liens, présenté dans l'ordre chronologique de l'avancée du cours, est annexé dans les pages qui suivent (et/ou est disponible via les pages web relatives au cours).

Le premier chapitre rappelle tout d'abord les outils de base concernant les nombres réels et complexes, les équations du premier et du second degré. Il consiste ensuite en une étude du cercle et des fonctions trigonométriques, ainsi qu'en une présentation du calcul vectoriel (vecteurs, droites, plans, produit scalaire, produit vectoriel, …). Des représentations graphiques, analytiques, paramétriques de divers ensembles du plan sont aussi au programme.

Le deuxième chapitre consiste en une présentation générale de l'étude des fonctions, de la notion de limite, de continuité, de dérivation, de primitivation.

Le troisième chapitre est alors consacré aux fonctions élémentaires : on rappelle leur définition et on en étudie les propriétés essentielles, sur base du socle mis en place au chapitre précédent. Ce sont ainsi les polynômes, les fractions rationnelles et irrationnelles, les fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses, les fonctions exponentielle et logarithme, qui sont au programme.

Le quatrième chapitre traite du calcul intégral à une variable. Dans un souci d'interprétation, de modélisation très « visuelle », c'est par les « sommes de Riemann » qu'est introduite la notion d'intégrabilité et d'intégrale sur un intervalle fermé borné. C'est en fait vers l'intégrale selon la théorie de Lebesgue que s'oriente ensuite le contenu du chapitre, car celle-ci est beaucoup plus manipulable et efficace en pratique (surtout pour la suite où il est question d'intégration à plusieurs variables). Partant d'une introduction très directe et visuelle, le chapitre prend soin de bâtir une théorie sur un socle rigoureux, en énonçant les propriétés utiles pour que les notions introduites rencontrent à la fois l'efficacité de l'outil et la solidité de la théorie et des notions mathématiques sous-jacentes.

Le cinquième chapitre contient une étude des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2. Il présente aussi quelques autres exemples d'équations différentielles.

Petit guide d'utilisation des notes de cours

Le présent fascicule de « Théorie »

Il contient la matière présentée ci-dessus. Il s'agit vraiment d'une matière de base de « Calculus », présentée de manière logique et déductive mais sans abstraction ou sophistication inutile. Nombreux sont les explications, les exemples et les graphiques (d'où le nombre de pages relativement élevé). ***L'assistance d'esprit ! et la préparation aux cours et répétitions*** est un moyen sûr et concret pour obtenir guide et soutien quant à la structuration (résumé !) et l'apprentissage des notions et raisonnements fondamentaux que ces notes renferment.

Et les exercices ?

Répétons-le : les exercices et les présentations de thèmes de théorie (selon l'ordre décrit ci-dessus) sont indissociables. Les apprentissages doivent se faire en synergie, la compréhension et la résolution des exercices s'appuyant sur la théorie et la théorie montrant directement son utilité pour l'appréhension des situations concrètes et des exercices qui y sont liés.

Les exercices font l'objet de listes disponibles sur les pages web (de cette année académique et des années antérieures). Depuis 2011-2012, un syllabus spécifique a été préparé. Il reprend les listes du premier quadrimestre, des résolutions détaillées ainsi que de nombreux compléments. Il est indispensable de se munir des notes (syllabi de théorie et d'exercices) pour assister aux séances de répétitions.

Des rappels de base de matières de l'enseignement secondaire ont été rédigés par Madame Crasborn, assistant pédagogique. L'adresse http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/2009-2010/123Sc/Prerequis.pdf vous y donne accès.

Les pages web de « 1,2,3...Sciences » et le « Journal de bord ».
Il ne faut certes pas oublier toutes les informations et données disponibles dans le Journal de Bord et sur les pages de la Faculté (adresses relatives à celles-ci disponibles dans le ***Journal de Bord***.)

Compléments

Pour des compléments d'information, des exemples, des exercices supplémentaires, je conseille l'ouvrage
- *CALCULUS, with analytic geometry,* R. Ellis, D. Gulick, Harcourt Brace Jovanovich Inc. 1993
et, pour les curieux, le fantastique
- *WHAT IS MATHEMATICS ? An elementary approach to ideas and methods,* Richard Courant and Herbert Robbins, Oxford University Press (plusieurs éditions).

Ces livres se trouvent notamment à la bibliothèque des sciences.

Je remercie sincèrement tous les assistants qui m'aident dans l'encadrement des étudiants, dans la préparation des exercices et de leurs solutions. Sans l'équipe, rien ne serait possible ! Merci à vous de toujours répondre « présent » !

Je tiens à exprimer un merci particulier à Jacqueline Crasborn pour ses relectures, ses avis et suggestions pertinents, et pour ses enthousiasme et dynamisme permanents, facteurs si importants au sein d'une équipe.

Enfin, et non des moindres, je remercie mille fois ceux qui me sont les plus proches et dont la perspicacité, la finesse, l'intelligence des choses, l'expérience de choses, offertes de façon si franche et subtile à la fois, à travers l'amitié ou autre, me poussent constamment à aller de l'avant.

Françoise Bastin,
26 août 2014(V1 23 août 2008)

Table des matières

Chapitre 1

Quelques rappels d'outils de base

1.1 Les réels

1.1.1 Définitions-Notations

Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés des nombres. Cela nous permet de réinstaller quelques terminologies et notations usuelles dans la traduction française de certaines relations mathématiques.

Les nombres naturels

Considérons l'ensemble des nombres naturels positifs ou nuls $\{0, 1, 2, \ldots\}$, noté

$$\mathbb{N}.$$

Dans cet ensemble, l'addition est bien définie et 0 joue le rôle d'élement neutre, c'est-à-dire qu'il n'a aucun effet quand on l'additionne à un autre : $n + 0 = 0 + n = n$ quel que soit le naturel n. Par contre, étant donné un naturel non nul, on ne peut pas lui trouver de symétrique pour l'addition, c'est-à-dire qu'étant donné un naturel n, on ne peut pas trouver de naturel n' tel que $n + n' = 0$. C'est la raison pour laquelle on a introduit l'ensemble des nombres entiers.

Les nombres entiers

L'ensemble des nombres entiers $\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$, est noté

$$\mathbb{Z}.$$

Dans cet ensemble, on étend l'addition et ainsi, tout entier possède un symétrique pour l'addition c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Z},\ \exists k' \in \mathbb{Z}\ :\ k + k' = k' + k = 0$; k étant donné, k' est unique et est noté $-k$; celui-ci est appelé l'opposé de k.

Mais, outre l'addition, une autre opération entre ces nombres est aussi définie : la multiplication. Pour celle-ci, c'est le naturel 1 qui joue le rôle d'élément neutre, c'est-à-dire qu'il n'a aucun effet quand on multiplie un nombre par cet élément : $1.k = k.1 = k$ quel que soit l'entier k. Par contre, étant donné un entier différent de 1, on ne peut pas trouver d'entier k' tel que $k.k' = 1$. C'est la raison pour laquelle on définit l'ensemble des nombres rationnels.

Les nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble [1] $\{\frac{p}{q}\ :\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$, noté

$$\mathbb{Q}.$$

Dans cet ensemble, on étend l'addition et la multiplication. Toutes les propriétés précédentes de l'addition sont conservées et, en plus, tout rationnel non nul possède un symétrique pour la multiplication c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{Q},\ k \neq 0,\ \exists k' \in \mathbb{Q}\ :\ k.k' = k'.k = 1$; k étant donné, k' est unique et est noté $\frac{1}{k}$; celui-ci est appelé l'inverse de k pour la multiplication.

1. Plus précisément et correctement, on peut définir un rationnel comme la classe d'équivalence d'une paire ordonnée d'entiers (notés ici a, b), par la relation d'équivalence $\frac{a}{b} \mathcal{R} \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Les nombres rationnels peuvent s'écrire sous forme décimale limitée ou illimitée périodique [2], par exemple $\frac{1}{4} = 0.25$ (rationnel limité) et $\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$ (rationnel illimité périodique).

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels [3] , noté

$$\mathbb{R},$$

est formé de l'ensemble des nombres décimaux limités ou illimités périodiques (c'est-à-dire des rationnels) et de l'ensemble des nombres illimités non périodiques, ces derniers étant appelés nombres irrationnels.

Dans l'ensemble des nombres réels, l'addition et la multiplication sont aussi définies, comme prolongement des mêmes opérations dans $\mathbb{Q}$ et avec les mêmes propriétés.

On a donc rappelé les définitions des ensembles fondamentaux $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, distincts et qui sont tels que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, on définit aussi une notion fondamentale : *l'ensemble des nombres réels* est muni d'une *relation d'ordre* [4], notée $\leq$, qui possède notamment la propriété suivante [5]

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{on a} \quad x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

La terminologie employée est (dans ce qui suit x et y sont des réels)

$$\begin{array}{lll} x \text{ est plus petit ou égal à } y \text{ ou } y \text{ est plus grand ou égal à } x & \text{pour} & x \leq y \\ x \text{ est plus grand ou égal à } y \text{ ou } y \text{ est plus petit ou égal à } x & \text{pour} & x \geq y \end{array}$$

Rappelons aussi que $x < y$ signifie que x est plus petit que y (ou que y est plus grand que x) et est différent de y. On dit aussi que x est strictement plus petit que y (ou que y est strictement plus grand que x).

Les réels négatifs sont ceux qui sont inférieurs ou égaux à 0 ; les réels positifs sont ceux qui sont supérieurs ou égaux à 0. On a aussi d'autres propriétés fort importantes, qui sont rappelées ci-dessous.

Les nombres complexes

Si, dans l'ensemble des nombres réels, il est possible de résoudre toutes les équations du type $x^2 = r$, avec $r \geq 0$, ce n'est plus possible lorsque le réel r donné est strictement négatif. C'est notamment pour cette raison qu'on introduit l'ensemble des nombres complexes noté

$$\mathbb{C}$$

où une telle équation peut toujours être résolue. Une partie de ce chapitre est consacrée aux nombres complexes. Signalons déjà le fait très important suivant : *dans l'ensemble des complexes, il n'y a plus de relation d'ordre !* [6] La seule comparaison entre deux complexes se limite donc à "égal" ou "différent".

Notations

Dans la suite, les notations

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$$

désigneront donc respectivement

l'ensemble des nombres naturels, entiers, rationnels, réels, complexes.

2. on convient aussi d'identifier le nombre s'écrivant $a, b_1 \ldots b_N 9999999\ldots$ au nombre $a, b_1 \ldots (b_N + 1)$

3. Les nombres réels non rationnels ont permis de résoudre certains problèmes géométriques simples qui ne pouvaient être résolus dans $\mathbb{Q}$. Par exemple la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, la longueur de la circonférence font intervenir respectivement $\sqrt{2}$ et π, nombres que l'on démontre être des nombres irrationnels.

Les nombres réels peuvent être définis en toute rigueur via la notion de coupure de Dedekind.

Voir aussi par exemple sur google avec "nombres réels" comme mot clef.

4. Une relation d'ordre sur un ensemble X est une relation qui possède les propriétés suivantes :
a) $x \leq x \ \forall x \in X$,
b) si $x, y \in X$ sont tels que $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$
c) si $x, y, z \in X$ sont tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$

5. on dit alors que l'ordre est total

6. Ce fait se démontre de façon relativement directe.

Ces ensembles, privés de 0 (le neutre pour l'addition), seront notés respectivement

$$\mathbb{N}_0,\ \mathbb{Z}_0,\ \mathbb{Q}_0,\ \mathbb{R}_0,\ \mathbb{C}_0.$$

Nous utiliserons essentiellement l'ensemble des nombres réels. Les nombres complexes seront utilisés dans l'étude de la fonction exponentielle complexe (chapitre 4) ainsi que dans le chapitre consacré aux équations différentielles.

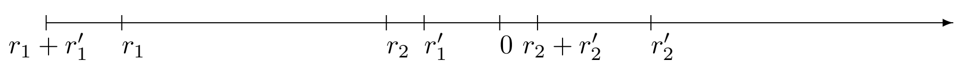
1.1.2 Quelques propriétés de la relation d'ordre au sein des nombres réels

Rappelons brièvement quelques règles élémentaires concernant les inégalités entre nombres réels.

Voici une propriété d'addition

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 < r_2 \\ r_1' < r_2' \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad r_1 + r_1' < r_2 + r_2'$$

que l'on peut illustrer sur des exemples. Dans ceux-ci, on prendra bien soin d'examiner le signe des réels considérés avant de donner une représentation de leur somme ; ce n'est en effet que lorsque le réel est positif que l'on peut l'associer au sens strict à une longueur de segment.



On a aussi les propriétés suivantes, faisant intervenir des signes d'inégalités non strictes

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 \leq r_2 \\ r_1' < r_2' \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad r_1 + r_1' < r_2 + r_2', \qquad \left\{\begin{array}{l} r_1 \leq r_2 \\ r_1' \leq r_2' \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad r_1 + r_1' \leq r_2 + r_2'.$$

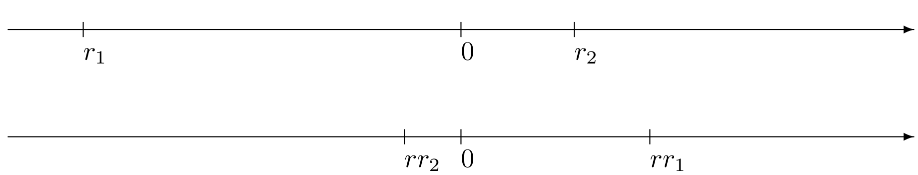
Voici des propriétés de multiplication

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 < r_2 \\ r \leq 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad r_1 r \geq r_2 r; \qquad \left\{\begin{array}{l} r_1 < r_2 \\ r < 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad r_1 r > r_2 r.$$

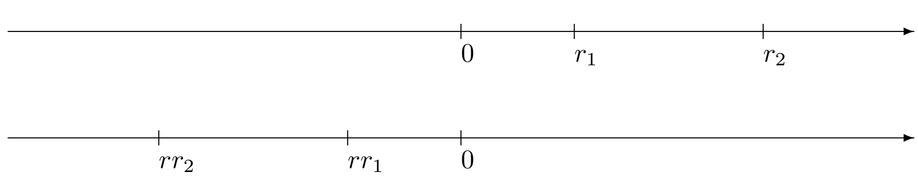
Ces propriétés signifient que si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même réel négatif, on doit changer le sens de l'inégalité.

On peut les illustrer sur des exemples de la manière suivante.

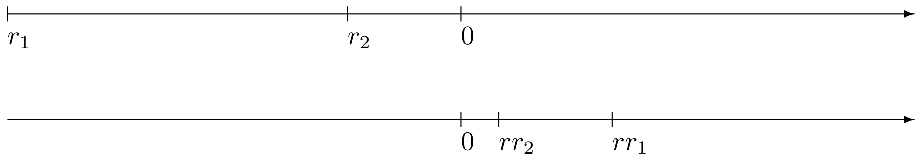
Cas $r_1 < 0$, $r_2 > 0$ et $r < 0$



Cas $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ et $r < 0$



Cas $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ et $r < 0$



Voici des propriétés analogues aux précédentes, dans lesquelles, cette fois, le facteur qui multiplie les deux membres de l'inégalité est positif

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 < r_2 \\ r \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow r_1 r \leq r_2 r; \quad \left\{\begin{array}{l} r_1 < r_2 \\ r > 0 \end{array}\right. \Rightarrow r_1 r < r_2 r.$$

Ces propriétés signifient que si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par même un réel positif, on garde le sens de l'inégalité.

1.1.3 Intervalles

Les *intervalles* de $\mathbb{R}$ sont les ensembles définis ci-dessous[7].

1. Les intervalles bornés sont les ensembles
   - $[r_1, r_2] = \{x \in \mathbb{R} : r_1 \leq x \leq r_2\}$

   - $]r_1, r_2[= \{x \in \mathbb{R} : r_1 < x < r_2\}$

   - $[r_1, r_2[= \{x \in \mathbb{R} : r_1 \leq x < r_2\}$

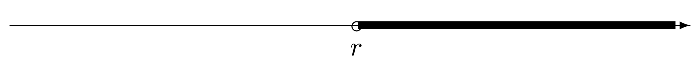
   

   - $]r_1, r_2] = \{x \in \mathbb{R} : r_1 < x \leq r_2\}$

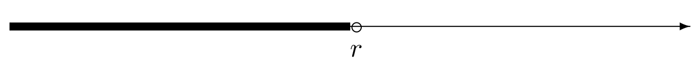
   

   où r_1, r_2 sont des réels tels que $r_1 < r_2$. Le premier est qualifié d'intervalle fermé borné, le second d'ouvert borné et les deux derniers d'intervalles mixtes (ou semi-ouverts ou semi-fermés) bornés.
2. Les intervalles non bornés sont les ensembles
   - $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

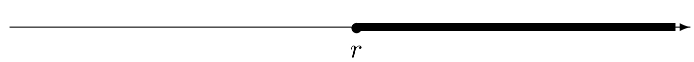
   - $]r, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : r < x\}$

   - $]-\infty, r[= \{x \in \mathbb{R} : x < r\}$

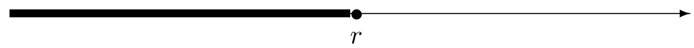
   

   - $[r, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : r \leq x\}$

   - $]-\infty, r] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq r\}$

7. Les notions de "fermés, ouverts" ont une signification mathématique précise liée à la topologie naturelle définie sur $\mathbb{R}$.



où $r \in \mathbb{R}$; les trois premiers sont qualifiés d'ouverts, les deux derniers de fermés.

1.1.4 Somme et produit ; utilisation des symboles usuels

La somme (resp. le produit) de deux réels r_1, r_2 (ou de deux complexes) est un réel (un complexe) noté $r_1 + r_2$ (resp. $r_1.r_2$ ou même $r_1 r_2$). Lorsqu'on doit additionner ou multiplier plus de deux réels (complexes), cette notation devient lourde à manipuler. C'est la raison pour laquelle on introduit les notations suivantes (en fait définition de symboles).

Soit J un naturel strictement positif et soient les réels (complexes) $r_1, \ldots, r_J$. La somme

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_J$$

de ces réels (complexes) est notée

$$\sum_{j=1}^{J} r_j$$

et leur produit

$$r_1 r_2 \ldots r_J$$

est noté

$$\prod_{j=1}^{J} r_j.$$

Dans ces notations, l'indice j est un indice "muet", ce qui signifie que le résultat de l'opération (somme ou produit) ne dépend pas de j ; on peut le remplacer par n'importe quelle autre lettre (ou symbole). Dans le cas de la somme, un tel indice s'appelle "indice sommatoire".

Par exemple,

$$1 + 2 + \ldots + 100 = \sum_{j=1}^{100} j = \sum_{k=1}^{100} k = \sum_{l=0}^{99} (l+1) = \sum_{k=0}^{99} (k+1),$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + N^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 = \sum_{k=0}^{N} k^2,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j},$$

$$\sum_{m=1}^{6} 2 = \underbrace{2+2+2+2+2+2}_{\text{6 termes}} = 6.2 = 12,$$

$$\sum_{m=0}^{N} 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{N+1 termes}} = N + 1,$$

$$1.2.3 \ldots .n = \prod_{j=1}^{n} j$$

1.1.5 Une formule utile

La formule que nous allons présenter ici est très utilisée. Nous y reviendrons plus loin quand nous étudierons les suites (voir sections suivantes pour définitions).

Soit un réel (ou un complexe) q et soit un naturel non nul N. On se propose de calculer la somme

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n$$

que nous noterons

$$\boxed{S_N}$$

pour simplifier. On remarque que les termes de cette somme sont obtenus successivement par multiplication par le nombre q (appelé la raison).

Propriété 1.1.1 *Soit un réel (ou un complexe) q et soit un naturel non nul N. On a*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^N}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ N & si\ q = 1. \end{cases}}$$

Preuve. Puisque $S_N = 1 + q + \ldots + q^{N-2} + q^{N-1}$, on a

$$qS_N = q + q^2 + \ldots + q^{N-1} + q^N$$

donc

$$qS_N - S_N = (q + q^2 + \ldots + q^{N-1} + q^N) - (1 + q + \ldots + q^{N-1}) = q^N - 1.$$

Dès lors, on obtient

$$(q-1)S_N = q^N - 1$$

ce qui donne, si $q \neq 1$:

$$S_N = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{q^N - 1}{q-1} = \frac{1-q^N}{1-q}.$$

La somme S_N est donc égale, dans ce cas, au quotient des deux facteurs suivants : “un moins la raison exposant le nombre de termes” au numérateur et “un moins la raison” au dénominateur.

Lorsque $q = 1$, en reprenant directement la définition, on trouve

$$S_N = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{N \text{ termes}} = N.$$

□

Cette formule se généralise facilement comme suit. Si N, M sont des naturels tels que $M < N$et si q est un réel différent de 1, on a

$$q^M + q^{M+1} + \ldots + q^N = q^M\ (1 + q + \ldots + q^{N-M}) = q^M \frac{1-q^{N-M+1}}{1-q}.$$

1.1.6 Valeur absolue, puissances entières, racines

Module ou valeur absolue d'un réel

Le module (ou valeur absolue) d'un réel est le nombre lui-même s'il est positif et son opposé s'il est négatif. Autrement dit, si on désigne par $|x|$ le module du réel x, on a

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Par exemple, $|-2| = 2,\ |1/3| = 1/3$.
La valeur absolue d'un réel est toujours un réel positif ; cela s'écrit

$$|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La valeur absolue d'un réel est nulle si et seulement si ce réel est nul ; cela s'écrit

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Puissances entières

Soit $m \in \mathbb{N}_0$. La fonction "puissance m" est la loi

$$x \in \mathbb{R} \ \mapsto \ x^m = \underbrace{x \dots x}_{\text{m facteurs}}.$$

Si $m = 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^m = 1$.
Si x est différent de 0 le réel $\frac{1}{x^m}$ est noté x^{-m}.
Si m est pair, alors x^m est un réel positif pour tout réel x. Par contre, si m est impair, alors x^m a le signe de x.

Extraction de racines de réels [8]

Il s'agit en fait de l'opération inverse (fonction réciproque) de la précédente.
Soit m un naturel pair. On définit la fonction "racine m-ième" de la manière suivante : si x est un réel positif, la racine m-ième de x, notée $\sqrt[m]{x}$, est le réel positif dont la m-ième puissance est x. Autrement dit, la fonction "racine m-ième" est la loi définie par

$$x \in [0, +\infty[\ \mapsto \ \sqrt[m]{x} = y \in [0, +\infty[\ \text{ tel que } y^m = x.$$

Si $m = 2$, on utilise plutôt la notation $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$.
Soit m un naturel impair. On définit la fonction "racine m-ième" de la même manière que dans le cas précédent, à l'exception du domaine de définition : si x est un réel, la racine m-ième de x, notée $\sqrt[m]{x}$, est le réel dont la m-ième puissance est x. Autrement dit, la fonction "racine m-ième" est la loi définie par

$$x \in \mathbb{R} \ \mapsto \ \sqrt[m]{x} = y \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } y^m = x.$$

Si $m = 1$, on a bien sûr $\sqrt[1]{x} = x$.
Une racine d'indice pair d'un réel positif est toujours un réel positif. Une racine d'indice impair d'un réel a toujours le signe de ce réel.

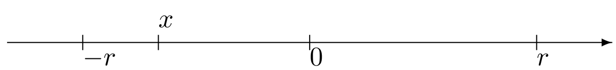
Propriétés

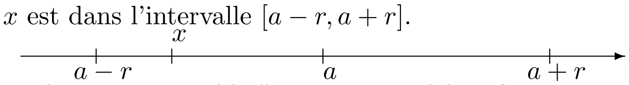
Rappelons encore les quelques propriétés suivantes. Les démonstrations sont élémentaires et sont laissées au lecteur à titre d'exercice.

– Pour tous réels a, b, on a

$$|a| = |-a|, \quad a \leq |a|, \quad -a \leq |a|, \quad |ab| = |a|\ |b|, \quad \sqrt{a^2} = |a|, \quad a^2 = |a|^2.$$

8. Nous reverrons plus loin cette notion de fonction inverse (fonction réciproque) ; de même nous étendrons cette définition à des "racines non entières", c'est-à-dire que l'on va définir la fonction $f(x) = x^a$, avec x réel strictement positif et a réel.

- Pour tous réels a, b, on a
$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad \text{et} \qquad ||a| - |b|| \leq |a-b|.$$
- Pour tous réels a, b, on a
$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b.$$
- Pour tous réels positifs a, b, on a
$$a \leq b \ \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$$
Comme $|x|^2 = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$, obtient
$$|a| \leq |b| \ \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$
pour tous réels a, b.
- Soient r un réel positif et x un réel. On a
$$|x| \leq r \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x & \leq r \\ -x & \leq r \end{cases} \ \Leftrightarrow \ -r \leq x \leq r.$$
Cela signifie que le réel x est en module inférieur ou égal à r si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-r, r]$.


Plus généralement, si a, x, r sont des réels et si r est positif, on a
$$|x-a| \leq r \ \Leftrightarrow \ a - r \leq x \leq a + r.$$
Cela signifie qu'étant donné un réel positif r, la distance entre les réels x et a est inférieure ou égale à r si et seulement si x est dans l'intervalle $[a-r, a+r]$.


- Rappel de quelques "produits remarquables". Pour tous réels a, b, on a
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)\ (a+b), \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\ (a^2 \mp ab + b^2).$$

1.2 Analyse combinatoire et binôme de Newton

1.2.1 Analyse combinatoire

Considérons un comité formé de six personnes. Imaginons les situations suivantes.

1) Les membres du comité doivent s'asseoir en rangée sur une estrade afin d'être présentés. Combien y a-t-il de possibilités de groupements ? Réponse : on choisit une personne parmi les six du comité et on la place sur le premier siège ; on choisit ensuite une personne parmi les cinq qui restent et on l'installe sur le second siège et ainsi de suite. On épuise ainsi tous les cas possibles. On trouve qu'il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités.

Plus généralement, le nombre de répartitions possibles de M éléments, c'est-à-dire le nombre de *permutations* de M éléments est
$$P_M = M \times (M-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = M! = \prod_{i=1}^{M} i.$$

2) Il faut choisir un bureau formé d'un président et d'un secrétaire. Quel est le nombre de bureaux possibles ? Réponse : il faut choisir deux personnes parmi six personnes ; on en choisit une au hasard puis, parmi les cinq personnes restantes, on en choisit encore une. On a ainsi tous les cas possibles ; on a 6×5 possibilités.

Plus généralement, le nombre de choix possibles de p éléments parmi M éléments, choix dans lequel la nature et l'ordre des éléments a de l'importance est le nombre d' *arrangements* de M éléments pris p à p, soit

$$A_M^p = \underbrace{M \times \ldots (M-(p-1))}_{p \text{ facteurs}} = \prod_{i=0}^{p-1} (M-i).$$

3) Il faut choisir un bureau formé d'un président et d'un secrétaire. Quel est le nombre de bureaux possibles si on ne distingue pas le secrétaire et le président ?
Réponse : on commence comme précédemment. Il faut choisir deux personnes parmi six personnes ; on en choisit une puis, parmi les cinq personnes restantes, on en choisit encore une. Parmi les groupes formés, il y a chaque fois deux groupes constitués des mêmes personnes ; vu la question posée, on n'en garde qu'un. Au total, on a formé $\frac{6\times 5}{2} = 15$ bureaux différents.

Plus généralement, le nombre de choix possibles de p éléments parmi M éléments, choix dans lequel seule la nature des éléments a de l'importance est le nombre de *combinaisons* de M éléments pris p à p, soit

$$C_M^p = \frac{M \times \ldots (M-p+1)}{p!} = \frac{A_M^p}{p!}.$$

(Etant donné p éléments fixés, il y a en effet $p!$ permutations possibles de ces éléments ; ces groupes ne peuvent compter que pour un seul quand on envisage les combinaisons ; d'où la division par $p!$ du nombre d'arrangements de M éléments pris p à p.)

On a donc, pour des entiers strictement positifs M et p tels que $p < M$:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} P_M & = & M! \\[2ex] A_M^p & = & M \times (M-1) \times \ldots (M-p+1) = \dfrac{M!}{(M-p)!} \\[2ex] C_M^p & = & \dfrac{A_M^p}{p!} = \dfrac{M!}{(M-p)!p!} = \dfrac{M \times (M-1) \times \ldots (M-p+1)}{p!} \end{array}}$$

Remarques.

1) En posant $0! = 1$, on garde les deuxième et troisième lignes ci-dessus pour $p = M$. Pour $p = 0$, on pose $C_M^0 = 1$; ainsi

$$C_M^p = \frac{M!}{(M-p)!p!} \quad \forall M \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N},\ 0 \leq p \leq M.$$

2) Certains auteurs utilisent la notation $\begin{pmatrix} M \\ p \end{pmatrix}$ en lieu et place de C_M^p.

Propriétés Pour tous $M \in \mathbb{N}_0, p \in \mathbb{N},\ p \leq M$, on a

$$1)\ C_M^p = C_M^{M-p}; \quad 2)\ C_M^0 = C_M^M = 1,\ C_M^1 = C_M^{M-1} = M$$

et, si $p+1 \leq M$:

$$3)\ C_M^p + C_M^{p+1} = C_{M+1}^{p+1}$$

Preuve. 1) On a

$$C_M^p = \frac{M!}{(M-p)!p!} = \frac{M!}{(M-(M-p))!(M-p)!} = C_M^{M-p}.$$

2) On a

$$C_M^0 = C_M^M = \frac{M!}{M!0!} = 1; \quad C_M^1 = C_M^{M-1} = \frac{M!}{(M-1)!1!} = M.$$

3) On a successivement

$$\begin{aligned}
C_M^p + C_M^{p+1} &= \frac{M!}{(M-p)!p!} + \frac{M!}{(M-p-1)!(p+1)!} \\
&= \frac{M!}{(M-p)!(p+1)!}(p+1+M-p) \\
&= \frac{(M+1)!}{(M-p)!(p+1)!} = \frac{(M+1)!}{((M+1)-(p+1))!(p+1)!} \\
&= C_{M+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

□

Le triangle de Pascal illustre la troisième formule. Les lignes sont indicées par M et les colonnes par p.

	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$\begin{array}{ccc} C_M^p & + & C_M^{p+1} \\ & & C_{M+1}^{p+1} \end{array}$$

1.2.2 Le binôme de Newton

Proposition 1.2.1 *Pour tous réels*[9] a, x *et pour tout naturel strictement positif*[10] M*, on a*

$$\boxed{(x+a)^M = \sum_{j=0}^{M} C_M^j x^{M-j} a^j}$$

Il s'agit donc de la formule donnant le développement de $(x+a)^M$ en termes de puissances naturelles de x et de a. Si on considère l'expression $(x+a)^M$ comme une fonction de la variable x, la formule donne donc l'expression du polynôme $(x+a)^M$ de degré $M \in \mathbb{N}_0$ sous forme d'une combinaison linéaire des puissances entières positives successives de x.

Remarquons que pour $M = 2$ et $M = 3$ on retrouve des produits remarquables rappelés plus haut.

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur M.

Pour $M = 1$, l'égalité est vraie car

$$\sum_{j=0}^{1} C_1^j x^{1-j} a^j = C_1^0 x a^0 + C_1^1 x^0 a^1 = x + a.$$

Supposons à présent que l'égalité soit vraie pour $1, \ldots, M$ et démontrons-la pour $M+1$. On a

$$\begin{aligned}
(x+a)^{M+1} &= (x+a)\ (x+a)^M \\
&= (x+a) \left(\sum_{j=0}^{M} C_M^j x^{M-j} a^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{M} C_M^j x^{M+1-j} a^j \ + \ \sum_{j=0}^{M} C_M^j x^{M-j} a^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{M} C_M^j x^{M+1-j} a^j \ + \ \sum_{j=1}^{M+1} C_M^{j-1} x^{M+1-j} a^j
\end{aligned}$$

9. (La formule est aussi valable si a et x sont des complexes
10. La formule est aussi valable pour $M = 0$ mais ne présente aucun intérêt.

$$
\begin{aligned}
&= x^{M+1} + \sum_{j=1}^{M} C_M^j x^{M+1-j} a^j + \sum_{j=1}^{M} C_M^{j-1} x^{M+1-j} a^j + a^{M+1} \\
&= x^{M+1} + \sum_{j=1}^{M} \left(C_M^j + C_M^{j-1} \right) x^{M+1-j} a^j + a^{M+1} \\
&= x^{M+1} + \sum_{j=1}^{M} C_{M+1}^j x^{M+1-j} a^j + a^{M+1} \\
&= C_{M+1}^0 x^{M+1} + \sum_{j=1}^{M} C_{M+1}^j x^{M+1-j} a^j + C_{M+1}^{M+1} a^{M+1} \\
&= \sum_{j=0}^{M+1} C_{M+1}^j x^{M+1-j} a^j .
\end{aligned}
$$

D'où la conclusion.□

1.3 Résolution d'équations du premier et du second degré à une inconnue

AVERTISSEMENT

• Dans cette section, nous nous plaçons dans le *cadre des nombres réels.*
• En ce qui concerne les équations du premier degré, leur résolution est analogue dans le cadre des nombres complexes, *sauf bien sûr quand il s'agit d'étudier le signe d'expressions.* Quant aux équations du second degré, leur résolution dans le cadre des nombres complexes est en fait bien plus directe (voir plus loin), mais il importe encore une fois de *ne plus être tenté de considérer les signes des diverses grandeurs qui sont impliquées.*

1.3.1 Définitions

1) Une équation du premier degré à coefficients et variable réels est une relation du type

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

où a, b sont des réels donnés, $a \neq 0$ et x est l'inconnue réelle.

2) Une équation du second degré à coefficients et variable réels est une relation du type

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

où a, b, c sont des réels donnés, $a \neq 0$ et x est l'inconnue réelle.

Une solution réelle de l'équation (1) (resp. (2)) est un réel x vérifiant cette relation.

1.3.2 Résolution

1) L'équation (1) ci-dessus a toujours une solution unique, à savoir

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Attention toutefois lorsqu'on donne l'équation $ax + b = 0$ sans spécifier si a est nul ou pas ; en effet, si a et b sont nuls, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$; si $a = 0$ et $b \neq 0$, il n'y a pas de solution.

De plus, on obtient aussi le signe du polynôme $B(x) = ax + b$ en fonction de x :

– $B(x)$ a le même signe que a si $x > -\frac{b}{a}$
– $B(x)$ a le signe contraire de a si $x < -\frac{b}{a}$.

2) Pour résoudre l'équation (2) ci-dessus, on définit

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Trois cas peuvent alors se présenter :
- $\Delta > 0$: l'équation a deux solutions différentes, à savoir les réels

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- $\Delta = 0$: l'équation a deux solutions égales :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

- $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle.

De plus, on obtient aussi le signe du polynôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de x :
- $\Delta > 0$: $T(x)$ a toujours le même signe que a, sauf dans l'intervalle borné déterminé par les deux solutions x_1, x_2.
- $\Delta = 0$: $T(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq \frac{-b}{2a}$.
- $\Delta < 0$: $T(x)$ est du signe de a pour tout réel x.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} T(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

. Dans le cas $\Delta < 0$, on conclut directement. Lorsque $\Delta = 0$, on obtient

$$T(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

et on conclut aussi directement. Dans le cas $\Delta > 0$, on a

$$T(x) = a\left((x + \frac{b}{2a}) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left((x + \frac{b}{2a}) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

et on conclut par une étude des signes des différents facteurs.

La représentation graphique de ces fonctions sera revue dans la suite.

1.4 Une introduction au calcul vectoriel et analytique

1.4.1 Définitions

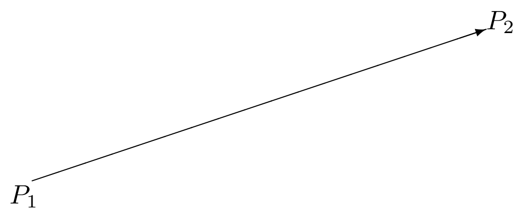
Etant donné deux points P_1, P_2 de l'espace, le segment orienté qu'ils déterminent est appelé

vecteur lié

d'origine P_1 et d'extrémité P_2. Si les deux points sont confondus, on parle du vecteur nul. La notation utilisée pour désigner le vecteur d'origine P_1 et d'extrémité P_2 est

$$\overrightarrow{P_1P_2}.$$

Soit le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$, avec $P_1 \neq P_2$. On appelle *support du vecteur* la droite contenant ces deux points. On appelle *longueur du vecteur* ou encore *norme du vecteur* la longueur du segment joignant P_1 et P_2 ; celle-ci est notée $\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$. On appelle *"sens" du vecteur*, le "sens de parcours du segment" (de P_1 vers P_2). Un vecteur lié est déterminé par son origine et son extrémité ou encore par son origine, son support, son sens et sa longueur.



L'ensemble des vecteurs liés obtenus en déplaçant un vecteur lié non nul parallèlement à lui-même (en conservant son sens) est appelé un

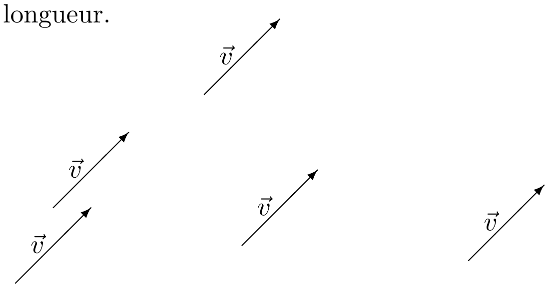
vecteur libre.

La notation habituelle pour désigner un vecteur libre est une lettre (souvent minuscule) surmontée d'une flèche,

$$\vec{v}.$$

On dit que chacun de ces vecteurs liés représente ou est un représentant du vecteur libre. Le vecteur libre nul est formé de tous les vecteurs liés nuls.

Etant donné le vecteur libre non nul $\vec{v}$, on appelle *direction du vecteur* l'ensemble des multiples[11] non nuls de ce vecteur, *longueur du vecteur*, notée $\|\vec{v}\|$, la longueur (ou norme) d'un vecteur lié servant à définir $\vec{v}$, *"sens" du vecteur*, le sens d'un vecteur lié servant à définir $\vec{v}$. Un vecteur libre est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.



1.4.2 Opérations entre vecteurs

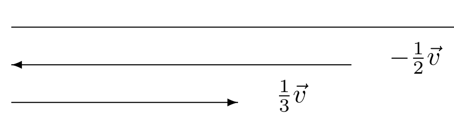
On définit de manière géométrique, dans l'ensemble des vecteurs liés en un même point puis dans l'ensemble des vecteurs libres,
- *la multiplication d'un vecteur par un réel* et
- l'*addition (ou somme) de deux vecteurs* (règle du parallélogramme).

11. voir ci-dessous pour un rappel des opérations définies dans l'ensemble des vecteurs

Multiplication d'un vecteur par un réel

Etant donné le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ $(P \neq Q)$ lié en P et le réel r, le vecteur $r\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur $\overrightarrow{PR}$ lié en P dont la longueur est égale à $|r|$ fois la longueur de $\overrightarrow{PQ}$, dont le support est la droite déterminée par les points P, Q et dont le sens est celui de $\overrightarrow{PQ}$ si $r > 0$ et l'opposé si $r < 0$; dans le cas $r = 0$, le vecteur $r\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur nul. Si $P = Q$, alors $r\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur nul également.

Si $\vec{v}$ est un vecteur libre et si r est un réel, le vecteur libre $r\vec{v}$ est le vecteur libre défini par le vecteur (lié en P) $r\vec{PQ}$ lorsque $\vec{PQ}$ définit $\vec{v}$.



Des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont dits *multiples l'un de l'autre* s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = r\vec{v}$ ou s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = s\vec{u}$. Deux vecteurs sont dits *parallèles* si l'un est un multiple de l'autre.

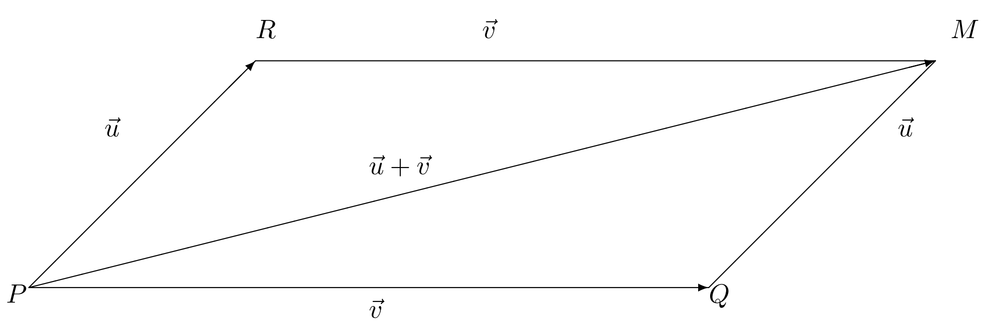
Somme de deux vecteurs

Etant donné deux vecteurs non parallèles et liés au même point P, on définit leur somme de façon géométrique par la règle du parallélogramme : si les deux vecteurs sont $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$, alors leur somme $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ est le vecteur $\overrightarrow{PM}$ où M est diagonalement opposé à P dans le parallélogramme construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.

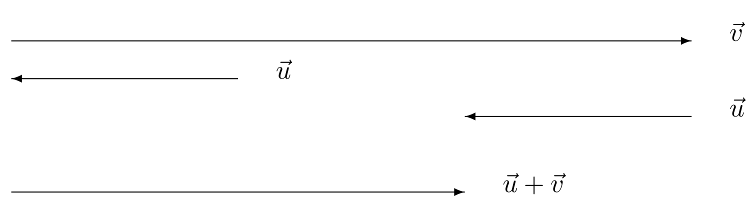
On définit de même la somme de deux vecteurs parallèles (voir cours).

Si $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs libres, respectivement définis par les vecteurs (liés en P) $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$, leur somme $\vec{v} + \vec{u}$ est le vecteur libre défini par $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$.

On remarquera que, pour additionner deux vecteurs libres, il suffit d'en fixer un, de déplacer le second de façon rigide et parallèlement à lui-même de telle sorte que son origine coïncide avec l'extrémité du premier ; la somme des deux vecteurs est alors le segment orienté dont l'origine est l'origine du premier vecteur et dont l'extrémité est l'extrémité du second.



Lorsque les deux vecteurs à additionner sont parallèles, on peut aussi utiliser la règle du parallélogramme (adaptée) pour définir leur somme. Il est cependant plus aisé de définir cette somme de la façon suivante : on fixe un vecteur et on déplace le second de façon rigide et parallèlement à lui-même de telle sorte que son origine coïncide avec l'extrémité du premier ; la somme des deux vecteurs est alors le segment orienté dont l'origine est l'origine du premier vecteur et dont l'extrémité est l'extrémité du second.



Propriétés

Citons quelques propriétés de ces opérations (valables aussi bien pour l'ensemble des vecteurs liés en un point que pour l'ensemble des vecteurs libres) ; elles se démontrent géométriquement, à partir des définitions.

– L'addition entre vecteurs est associative :

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

– Si $\vec{0}$ désigne le vecteur nul, on a

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

pour tout vecteur $\vec{u}$. On dit que le vecteur nul est *neutre* pour l'addition.

– Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

On dit que tout vecteur possède *un symétrique* pour l'addition et le vecteur $-\vec{u}$ est appelé l'opposé du vecteur $\vec{u}$.

– l'addition entre vecteurs est commutative :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$.

– Quant aux propriétés relatives au produit par un nombre et à l'addition entre vecteurs, on a, pour tous réels r, s et tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$

$$\begin{array}{l} r\ (\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u}\ +\ r\vec{v} \\ (r+s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u} \\ 1\vec{u} = \vec{u} \\ (rs)\vec{u} = r(s\vec{u}) \end{array}$$

Remarques et définition

La propriété d'associativité permet de donner un sens à une expression telle que

$$\sum_{j=1}^{J} r_j \vec{u}_j = r_1\vec{u}_1 + \ldots + r_J\vec{u}_J$$

où les r_j $(j = 1, \ldots J)$ sont des réels et $\vec{u}_j$ $(j = 1, \ldots, J)$ sont des vecteurs. Cette expression est appelée

$$\boxed{\textit{combinaison linéaire}}$$

des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_J$. Par convention, une combinaison linéaire de 0 vecteur est le vecteur nul.

Notons que les propriétés citées ci-dessus sont en fait celles qui sont requises pour qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication (par des scalaires) soit qualifié $\boxed{\textit{d'espace vectoriel.}}$ Nous rencontrerons d'autres exemples d'espaces vectoriels dans la suite.

1.4.3 La droite (définition vectorielle)

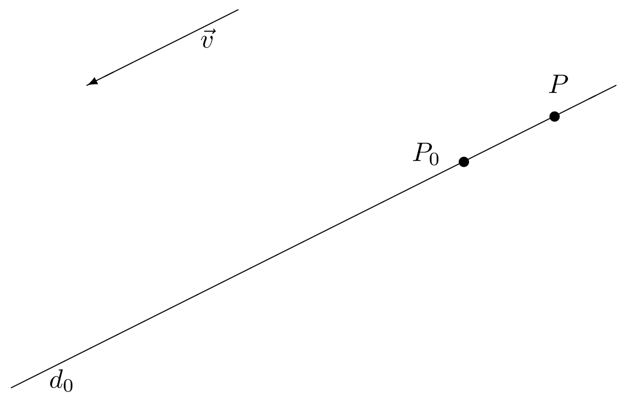
Vu l'introduction au calcul vectoriel que nous venons d'effectuer, on peut introduire la notion de droite sous la forme suivante.

On donne un point P_0 et un vecteur libre non nul $\vec{v}$. L'ensemble des points P pour lesquels il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

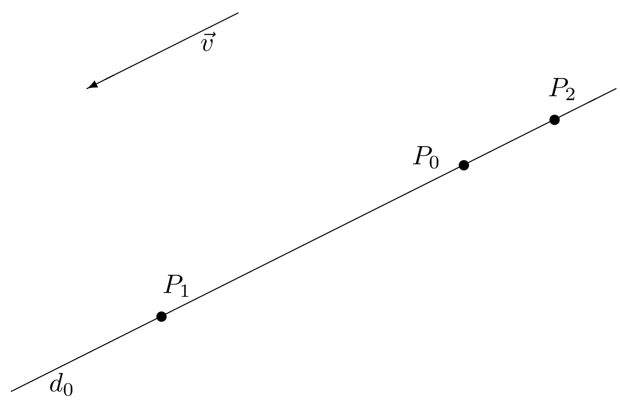
$$\overrightarrow{P_0P} = r\vec{v}$$

est la droite d_0 passant par P_0 et de vecteur directeur $\vec{v}$. On a donc, par définition,

$$\boxed{d_0 = \{P\ :\ \exists r \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{P_0P} = r\vec{v}\}.}$$



On voit directement que cette droite a aussi comme vecteur directeur tout multiple non nul de $\vec{v}$. De plus, le vecteur déterminé par deux points distincts P_1 et P_2 de d_0 est aussi un vecteur directeur de la droite.



Deux droites sont dites *parallèles* si elles sont déterminées par *un même vecteur directeur*. Elles sont dites *orthogonales*[12] si deux de leurs vecteurs directeurs "forment un angle droit"[13]

1.4.4 Notions analytiques : composantes, coordonnées, équations paramétriques, équations cartésiennes

La notion de vecteur vient d'être définie de manière tout à fait géométrique (intrinsèque). Pour une manipulation pratique très aisée de cette notion, de même que pour celle de certains ensembles du plan (définis géométriquement), il est utile de recourir aux notions de *composantes* d'un vecteur dans une base, de *coordonnées cartésiennes* d'un point dans un repère, d'*équation cartésienne* d'un ensemble de points dans un repère. C'est ce qu'on appelle alors *manipuler analytiquement des notions géométriques.*

Composantes d'un vecteur

Considérons tout d'abord les vecteurs d'un plan. Une démarche analogue peut être effectuée pour les vecteurs de l'espace[14].

Si, dans ce plan, on fixe deux vecteurs non parallèles $\vec{u}, \vec{v}$, tout autre vecteur $\vec{x}$ du plan peut se décomposer de manière unique comme une combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Vu nos définitions, on démontre cette propriété de manière géométrique.

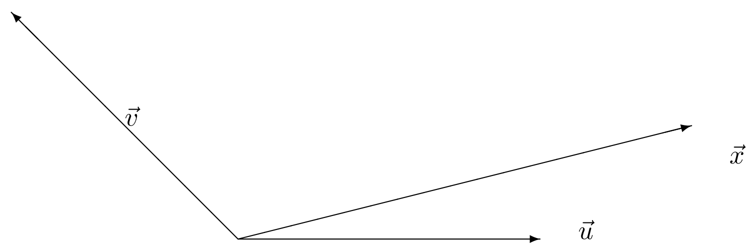
Cette propriété permet d'introduire les notions de base et de composantes.

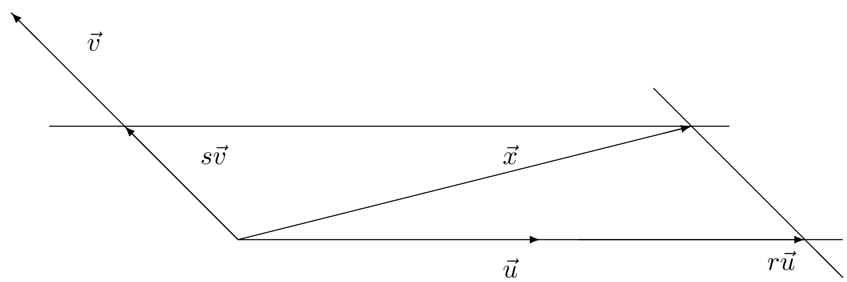
12. ou perpendiculaires
13. la notion d'orthogonalité de deux droites nécessite en fait l'introduction de la notion de produit scalaire de deux vecteurs, notion que nous aborderons dans une des sections suivantes
14. Dans ce cas, une base est formée de trois vecteurs n'appartenant pas à un même plan et un vecteur aura trois composantes et non plus deux.

Deux vecteurs non parallèles $\vec{u}, \vec{v}$ du plan forment une base du plan ; si $\vec{x}$ s'écrit

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v}$$

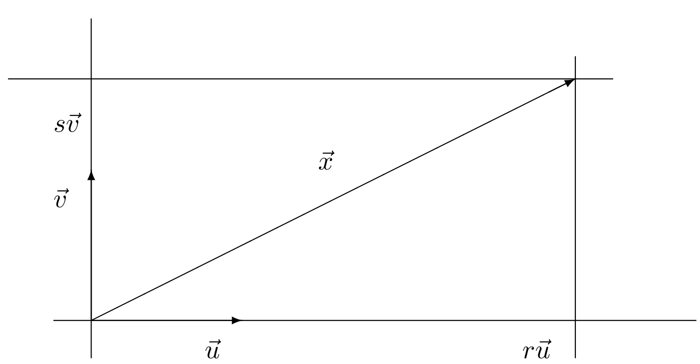
les nombres r, s sont les composantes du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$.



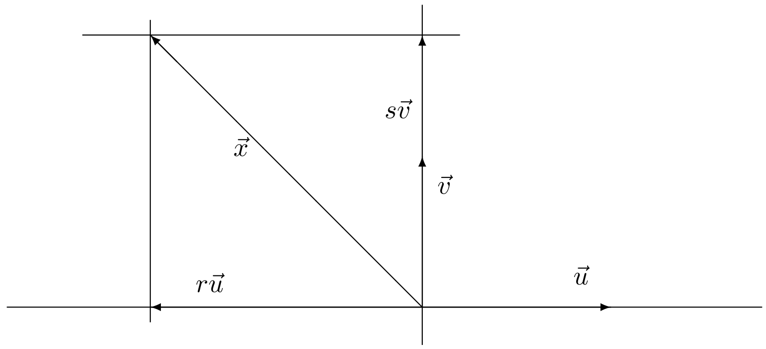


Le vecteur $r\vec{u}$ est en fait la projection du vecteur $\vec{x}$ sur la droite engendrée par $\vec{u}$ parallèlement à $\vec{v}$. De même, le vecteur $s\vec{v}$ est la projection du vecteur $\vec{x}$ sur la droite engendrée par $\vec{v}$ parallèlement à $\vec{u}$.

Dans le cas particulier où les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont orthogonaux ("forment un angle droit", voir plus loin avec le produit scalaire) et de longueur 1, on dit que la base $\vec{u}, \vec{v}$ est orthonormée. Dans ce cas, les composantes de $\vec{x}$ dans cette base sont les mesures algébriques (c'est-à-dire les longueurs prises avec le signe correspondant au sens du vecteur obtenu par projection) des projections orthogonales du vecteur $\vec{x}$ sur les droites engendrées par les deux vecteurs de base.



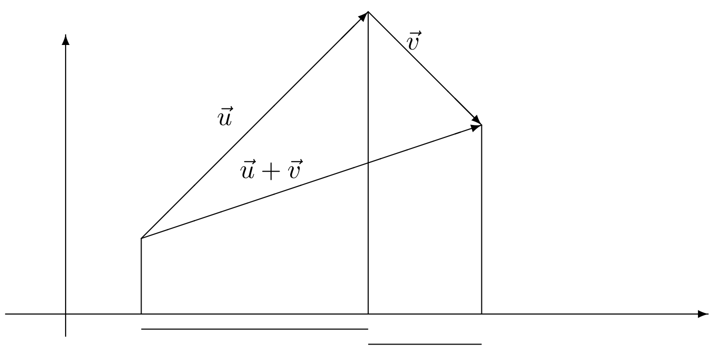
Soulignons que, dans le cas ci-dessus, la longueur de $r\vec{u}$ est r et celle du vecteur $s\vec{v}$ est s ; r et s sont les mesures algébriques des projections orthogonales de $\vec{x}$ sur les droites engendrées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.



Dans ce cas-ci, la longueur de $r\vec{u}$ est $-r$ et celle du vecteur $s\vec{v}$ est s ; r et s sont les mesures algébriques des projections orthogonales de $\vec{x}$ sur les droites engendrées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.

Propriété vis-à-vis des combinaisons linéaires

Signalons l'importante propriété suivante, qui se démontre aussi de manière géométrique, en repassant aux définitions : *les composantes d'une combinaison linéaire de vecteurs sont les combinaisons linéaires des composantes de ces vecteurs.* Cela signifie que si r, r' sont les premières (resp. deuxièmes) composantes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ alors $ar + br'$ est la première (resp. deuxième) composante du vecteur $a\vec{u} + b\vec{v}$.



Repère, coordonnées cartésiennes d'un point

Notre but est maintenant d'introduire une manière de repérer un point quelconque du plan en se servant des nombres réels. La même chose peut être faite tout aussi aisément dans l'espace.

Considérons deux vecteurs non parallèles du plan ainsi qu'un point O, c'est-à-dire que l'on se fixe une base du plan, ainsi qu'un point du plan. Ces éléments constituent ce que l'on appelle *un repère* du plan et le point O est appelé *l'origine* du repère. Dans ce repère, on définit les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque P comme suit : *les coordonnées cartésiennes de P dans le repère donné sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base associée au repère.*

Les *axes* du repère sont les droites passant par l'origine, dont la direction est donnée par les vecteurs de base ; sur chaque axe, on fixe une unité de mesure (pour l'identifier aux réels), celle-ci étant égale à la longueur du vecteur de base correspondant. On désigne les axes le plus souvent par X et Y.

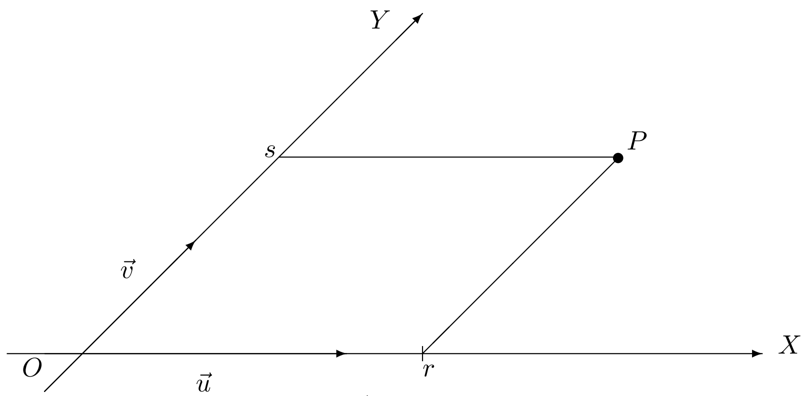
Ainsi, à tout point P du plan on associe un couple unique de réels, à savoir les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$; la première composante est appelée *l'abscisse* de P et la seconde *l'ordonnée* de P. De même, à tout couple de réels, on associe un point du plan, à savoir le point P tel que les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ soient justement ce couple de réels.

L'ensemble des couples de réels est noté $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}.$$

Par l'intermédiaire d'un repère, l'ensemble des points du plan est donc identifié à $\mathbb{R}^2$. Si le point P a pour coordonnées cartésiennes les réels r, s, on utilise souvent la notation (pas d'égalité !)

$$P(r, s).$$



On a $\overrightarrow{OP} = r\vec{u} + s\vec{v}$;

les coordonnées de P sont r (abscisse) et s (ordonnée)

Si les coordonnées du point P sont (x_1, y_1) et si celles du point Q sont (x_2, y_2), à partir de la relation

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

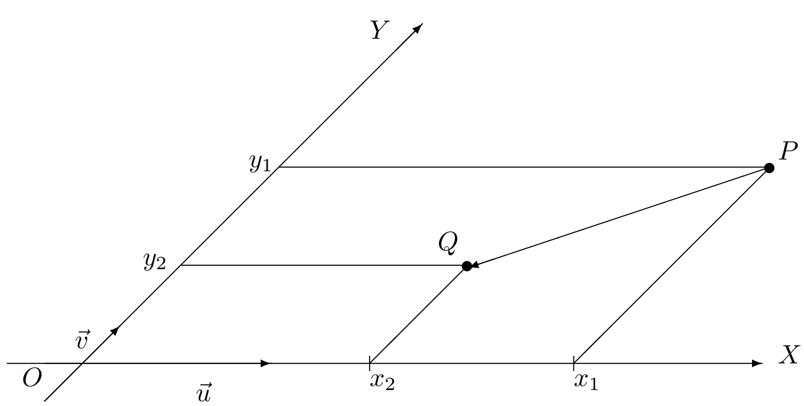
on obtient que

$$\text{la première composante de } \overrightarrow{PQ} \text{ est } x_2 - x_1,$$

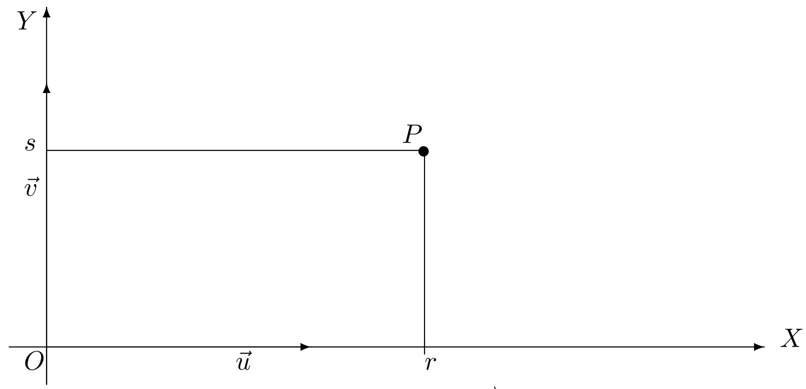
c'est-à-dire la différence entre les abscisses de Q et P, dans l'ordre. De même

$$\text{la seconde composante du vecteur } \overrightarrow{PQ} \text{ est } y_2 - y_1$$

c'est-à-dire la différence entre les ordonnées de Q et P, dans l'ordre.



Dans le cas où les vecteurs de base sont orthonormés, c'est-à-dire lorsque "ils forment un angle droit" (i.e. leur produit scalaire est nul) et que leur norme est égale à 1, on dit que le repère est orthonormé. Lorsque les vecteurs sont uniquement orthogonaux, sans avoir la même longueur, on dit que le repère est orthogonal.



Le repère est orthonormé. On a $\overrightarrow{OP} = r\vec{u} + s\vec{v}$.
Les coordonnées de P sont r (abscisse) et s (ordonnée)

Dès qu'il est question d'orthogonalité, du théorème de Pythagore, il faut utiliser des repères orthonormés car beaucoup de formules liant des vecteurs et leurs composantes ne sont valables que dans ceux-ci.

Equations d'une droite dans le plan

Equations paramétriques

Les relations vectorielles

$$\boxed{\overrightarrow{P_0P} = r\vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}}$$

constituent des

équations paramétriques vectorielles

de la droite d_0 passant par P_0 et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Si on a fixé un repère, ces équations s'écrivent aussi à l'aide des composantes des vecteurs :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x - x_0 & = & rv_1 \\ y - y_0 & = & rv_2 \end{array}\right. , \ r \in \mathbb{R}}$$

où (x, y) sont les coordonnées d'un point P quelconque de la droite, où (x_0, y_0) sont les coordonnées de P_0 et où (v_1, v_2) sont les composantes du vecteur $\vec{v}$. Ici, on parle plus spécifiquement

d'équations paramétriques cartésiennes

de d_0.

Equation cartésienne

Pour rappel, on appelle équation cartésienne d'un ensemble la ou les relations entre les coordonnées cartésiennes qui caractérisent l'appartenance d'un point à l'ensemble.

On fixe un repère et on reprend les notations de la section précédente.

1) Lorsque v_1 et v_2 diffèrent de 0, l'élimination de r dans les équations paramétriques cartésiennes ci-dessus conduit à la relation

$$\boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}.}$$

Lorsque $v_1 = 0$, c'est-à-dire lorsque la droite est parallèle à l'axe Y, l'élimination de r conduit à la relation

$$\boxed{x - x_0 = 0.}$$

Lorsque $v_2 = 0$, c'est-à-dire lorsque la droite est parallèle à l'axe X, l'élimination de r conduit à la relation

$$\boxed{y - y_0 = 0.}$$

Dans chaque cas, la relation encadrée s'appelle *l'équation cartésienne de* la droite.

Pour conclure, chacune des trois formes précédentes de l'équation cartésienne peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et a, b ne sont pas simultanément nuls.

2) Réciproquement, toute équation de cette forme est l'équation cartésienne d'une droite.

De fait, si a et b diffèrent de 0 et si x_0, y_0 sont tels que $ax_0 + by_0 + c = 0$ alors on vérifie directement que

$$ax + by + c = 0 \;\Leftrightarrow\; ax + by - ax_0 - by_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x - x_0}{-b} = \frac{y - y_0}{a}$$

ce qui signifie que l'équation $ax + by + c = 0$ est celle de la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_0, y_0) et dont un vecteur directeur a pour composantes $(-b, a)$.

Si $a = 0$ alors

$$ax + by + c = 0 \;\Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}.$$

L'équation $y = -\frac{c}{b}$ est celle de la droite passant par le point de coordonnées $(0, -c/b)$ et parallèle à l'axe X.

Si $b = 0$ alors

$$ax + by + c = 0 \;\Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}.$$

L'équation $x = -\frac{c}{a}$ est celle de la droite passant par le point de coordonnées $(-c/a, 0)$ et parallèle à l'axe Y.

3) Soit une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées Y. On a donc $v_1 \neq 0$. L'équation cartésienne devient alors

$$y = y_0 \quad \text{si} \quad v_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0) + y_0 \text{ si } \; v_2 \neq 0.$$

Ces équations s'écrivent encore

$$\boxed{y = mx + p}$$

où $p = -\frac{v_2}{v_1}x_0 + y_0$ et

$$\boxed{m = \tfrac{v_2}{v_1}.}$$

Le réel m s'appelle le *coefficient angulaire de la droite*; le réel p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe Y. Comme le vecteur joignant deux points distincts de d en est un vecteur directeur, on a aussi

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées de deux points distincts de d.

Multiple non nul de $\vec{v}$, le vecteur de composantes $(1, \frac{v_2}{v_1}) = (1, m)$ est donc aussi un vecteur directeur de d. On déduit de là une autre expression du parallélisme : si d et d' sont deux droites qui ne sont pas parallèles à Y, elles sont parallèles entre elles si et seulement si elles ont le même coefficient angulaire.

Paramétrage d'un segment de droite

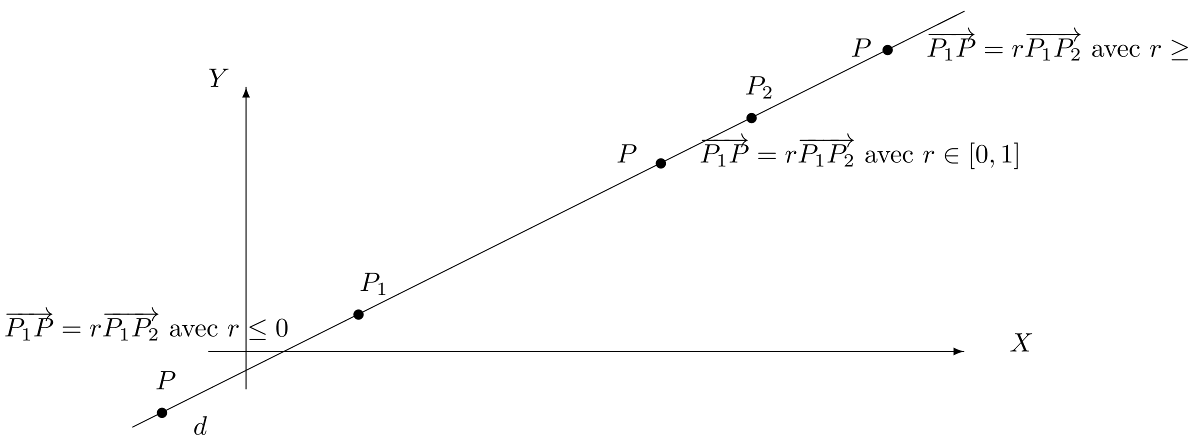
Soit d déterminé par les deux points distincts P_1, P_2, respectivement de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Rappelons que des équations paramétriques de d s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y &=& y_1 + r(y_2 - y_1) \end{array} \right. \quad r \in \mathbb{R}$$

Un point situé sur le segment de droite entre P_1 et P_2 a des coordonnées comme ci-dessus, mais avec $r \in [0,1]$. En particulier, le *point milieu* du segment a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Les points de la droite situés "à gauche" du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ ont des coordonnées correspondant à $r \leq 0$ et les points situés "à droite" ont des coordonnées correspondant à $r \geq 1$.



Coefficient angulaire et orthogonalité

Nous avons rappelé que deux droites étaient dites *orthogonales* si deux de leurs vecteurs directeurs "forment un angle droit" ; cette notion va être réétudiée grâce au produit scalaire de vecteurs et à son expression analytique.

Signalons cependant déjà la propriété fort pratique suivante : dans un repère orthonormé, deux droites d_1, d_2 non parallèles aux axes sont orthogonales si le produit de leurs coefficients angulaires vaut -1.

Il s'ensuit que si d a pour équation $ax+by+c=0$, avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ et a,b non simultanément nuls, alors les composantes d'un vecteur directeur d'une droite du plan orthogonale à d sont (a,b).

Equations d'autres ensembles

Dans ce qui suit, nous aurons maintes fois l'occasion de décrire un ensemble de points du plan par l'intermédiaire d'équations. Nous rencontrerons des équations paramétriques cartésiennes et des équations cartésiennes : *des équations paramétriques cartésiennes d'un ensemble sont des relations qui permettent d'obtenir les coordonnées cartésiennes des points de cet ensemble à l'aide d'un (ou de plusieurs) paramètres*; *une équation cartésienne d'un ensemble est une relation entre les coordonnées cartésiennes des points de cet ensemble permettant de le décrire.*

1.5 Le cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques

C'est en fait la notion de fonction sinus, cosinus [15] que l'on introduit, à savoir la définition géométrique de deux *fonctions dont le domaine de définition est l'ensemble des réels.* Une étude tout à fait générale de la notion de fonction sera effectuée dans le chapitre suivant.

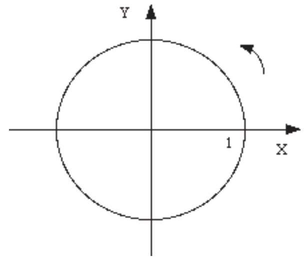
1.5.1 Fonctions sinus (sin) et cosinus (cos)

INTRODUCTION

Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$. La définition géométrique de ces fonctions s'effectue à l'aide du cercle trigonométrique.

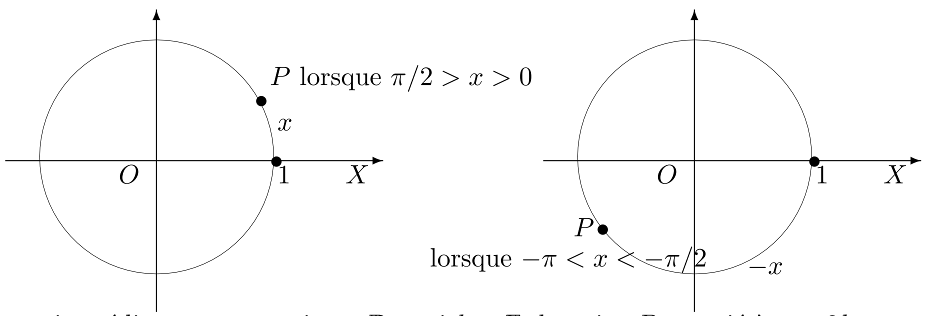
15. et par suite tangente, cotangente

Dans un repère orthonormé, on trace le cercle dont le centre est l'origine des axes du repère et le rayon a pour mesure l'unité de longueur 1 ("cercle trigonométrique"). Le "sens trigonométrique" utilisé en pratique est celui qui correspond au sens de parcours du cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, lorsque les axes sont orientés comme suit.



La longueur d'un arc de ce [16] cercle varie de 0 à 2π. Si on effectue en plus un nombre entier n de tours complets du cercle, la longueur de l'arc parcouru doit être augmentée de $2\pi n$ si n est positif et de $-2\pi n$ si n est négatif.

Cela étant, à tout réel x, associons un point du cercle de la manière suivante. Si $x \geq 0$, le point qui correspond à ce réel est obtenu en parcourant le cercle, à partir du point P_0 de coordonnées $(1, 0)$ et dans le sens trigonométrique, jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur x. Si $x < 0$, le point qui correspond à ce réel est aussi obtenu en parcourant le cercle, à partir du point P_0 de coordonnées $(1, 0)$ mais dans le sens trigonométrique inverse, jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur $-x$.



On remarque immédiatement que si $x \in \mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{Z}$, le point P associé à $x + 2k\pi$ est celui qui est associé à x.

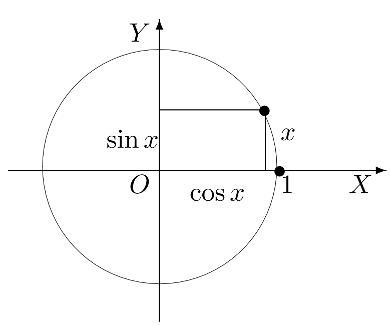
Ces préliminaires étant faits, passons à la définition géométrique des fonctions sinus et cosinus.

Définitions (géométriques)

Soit $x \in \mathbb{R}$; on définit le point P du cercle trigonométrique associé à ce réel x comme décrit dans le paragraphe précédent.

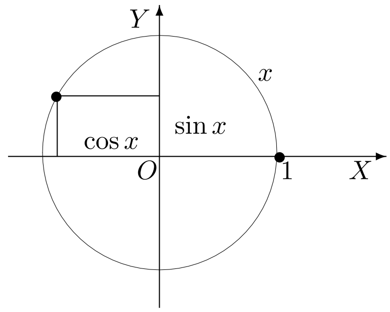
$$\boxed{\text{L'abscisse de } P \text{ est le réel } \cos x \text{ et son ordonnée est le réel } \sin x.}$$

Pour un réel x de $[0, 2\pi]$, on a donc les situations suivantes.
- Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors P est dans le premier quadrant ; son abscisse ($\cos x$) et son ordonnée ($\sin x$) sont donc positives.

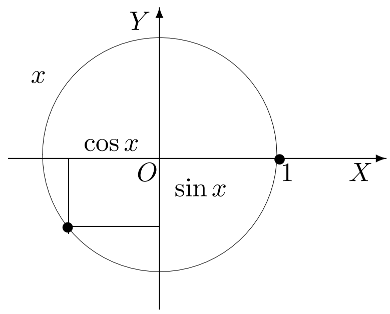


16. La longueur d'un arc de cercle de rayon $R > 0$ varie de 0 à $2\pi R$.

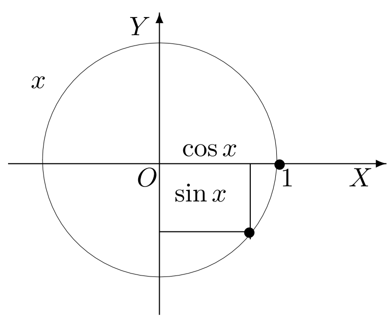
- Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ alors P est dans le second quadrant ; son abscisse ($\cos x$) est donc négative et son ordonnée ($\sin x$) est positive.



- Si $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ alors P est dans le troisième quadrant ; son abscisse ($\cos x$) et son ordonnée sont donc négatives.



- Si $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ alors P est dans le quatrième quadrant ; son abscisse ($\cos x$) est donc positive et son ordonnée ($\sin x$) est négative.



Mesure des angles

Bien qu'intuitivement assez aisées à appréhender, les notions d'angle et de mesure d'un angle (orienté, non orienté) sont des notions très délicates à introduire rigoureusement [17]. Cependant, on peut dès à présent en donner une première idée.

Nous signalerons simplement ici que, dans notre définition géométrique précédente de $\sin x, \cos x$, le réel x correspond à *la mesure en radians de l'angle orienté* [18] formé par le vecteur joignant l'origine au point de coordonnées $(1, 0)$ et le vecteur joignant l'origine au point P. On peut donc dire que "Un radian" (le réel 1) est la mesure de l'angle orienté qui intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique.

Bien sûr, il existe d'autres mesures d'angles. Outre le radian, une mesure courante est celle en degré. Une mesure de 2π radians correspond à 360 degrés ; les autres correspondances se trouvent selon la règle habituelle des proportions ($\pi/2 = 2\pi/4$ radians correspond à $360/4 = 90$ degrés, etc).

17. On fait notamment appel à des connaissances d'analyse réelle et d'algèbre linéaire qui ne sont pas encore acquises ici.
18. pour autant que l'on se limite à un intervalle de longueur 2π

Premières propriétés des fonctions sinus et cosinus

Si $x \in \mathbb{R}$, le fait que, quel que soit l'entier k, le réel $x + 2k\pi$ définisse le même point P se traduit par

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \qquad k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire donne la 2π-*périodicité des fonctions* sin *et* cos. On en déduit le signe des fonctions cosinus et sinus dans $\mathbb{R}$.

De même, la définition géométrique permet d'étudier aisément la parité, la monotonie, et d'autres propriétés remarquables (angles “ associés ” etc). Un résumé de relations fondamentales figure à la fin de cette section.

Nous reviendrons sur ces notions dans le chapitre consacré à l'étude générale des fonctions élémentaires, une fois les outils adéquats installés.

Voici les représentations graphiques (domaine réduit) et propriétés fondamentales des fonctions cosinus et sinus ; il s'agit en fait de représenter l'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes s'écrivent $(x, \cos x),\ x \in \mathbb{R}$ et $(x, \sin x),\ x \in \mathbb{R}$. Notons déjà (nous y reviendrons) que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

$$\left\{(x, \cos x) \ : \ x \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \left\{(x, \sin x) \ : \ x \in \mathbb{R}\right\}$$

sont appelés *graphes* respectivement des fonctions cos et sin.

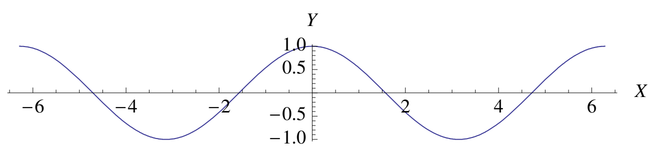
Profitons-en pour donner les exemples suivants d'équations paramétriques et cartésiennes : les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cos t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

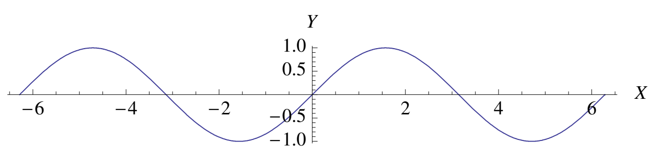
sont des équations paramétriques du graphique (dessin) de la fonction cosinus et

$$y = \cos x$$

en est l'équation cartésienne (dans le repère fixé). Bien sûr, l'analogue peut être fait avec le sinus.



$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$



$\sin x,\ x \in \mathbb{R}$

Lien entre ces fonctions et relations utiles

1) La relation fondamentale de la trigonométrie est

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Elle s'interprète aisément : la somme des carrés des côtés d'un triangle rectangle est égale au carré de l'hypoténuse (Pythagore).

2) Il aurait suffit de définir l'une des fonctions $\sin, \cos$; on a en effet

$$\boxed{\sin x = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x),\ x \in \mathbb{R};}$$

de manière équivalente, on a aussi

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x, \ x \in \mathbb{R}$$

3) Rappelons encore les relations fondamentales suivantes.

Formules d'addition et de multiplication

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sin(x \pm y) & = & \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) & = & \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) & = & 2 \cos x \ \cos y \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) & = & 2 \sin x \ \sin y \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) & = & 2 \sin x \ \cos y \end{array}}$$

Des trois dernières relations, on déduit les suivantes

$$\begin{array}{rcl} \sin x \pm \sin y & = & 2 \sin \left(\dfrac{x \pm y}{2} \right) \cos \left(\dfrac{x \mp y}{2} \right) \\ \cos x + \cos y & = & 2 \cos \left(\dfrac{x + y}{2} \right) \cos \left(\dfrac{x - y}{2} \right) \\ \cos x - \cos y & = & 2 \sin \left(\dfrac{x + y}{2} \right) \sin \left(\dfrac{y - x}{2} \right) \end{array}$$

De même, en prenant $x = y$ dans les premières relations encadrées, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \sin(2x) & = & 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) & = & \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 + \cos(2x) & = & 2 \cos^2 x \\ 1 - \cos(2x) & = & 2 \sin^2 x \end{array}$$

Formules des "angles associés"

$$\boxed{\begin{array}{lcl|lcl} \sin(x + 2\pi) & = & \sin x & \sin(\pi - x) & = & \sin x \\ \cos(x + 2\pi) & = & \cos x & \cos(\pi - x) & = & -\cos x \\ \sin(-x) & = & -\sin x & \sin(\frac{\pi}{2} - x) & = & \cos x \\ \cos(-x) & = & \cos x & \cos(\frac{\pi}{2} - x) & = & \sin x \end{array}}$$

1.5.2 Fonctions tangente (tg) et cotangente (cotg)

DÉFINITION

Les fonctions tangente et cotangente sont définies à partir des fonctions sinus et cosinus de la manière suivante :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

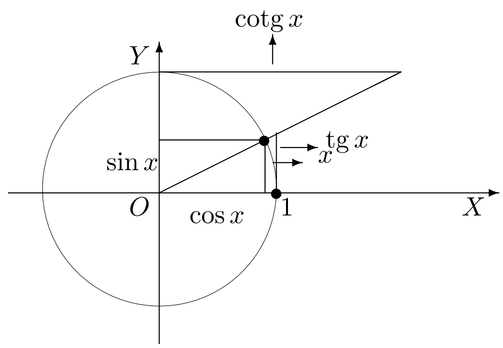
Vu sa définition, le domaine de définition de la fonction tangente est donc l'ensemble des réels exception faite de ceux qui annulent le cosinus, à savoir $\pi/2$ et tous les réels obtenus en ajoutant un multiple entier de π à $\pi/2$. On obtient donc

$$\operatorname{dom}(\operatorname{tg}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

De même, vu sa définition, le domaine de définition de la fonction cotangente est l'ensemble des réels à l'exception de ceux qui annulent la fonction sinus, à savoir tous les multiples entiers de π. On obtient donc

$$\text{dom}(\text{cotg}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'interprétation géométrique de $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ est la suivante.



Propriétés

Les propriétés de ces fonctions se déduisent de celles des fonctions sinus et cosinus (souvent directement, parfois en utilisant des propriétés générales des fonctions que nous verrons plus loin).

1) La fonction tg est définie sur $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$ et son image est $\mathbb{R}$.
La fonction cotg est définie sur $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$ et son image est $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions tg et cotg sont des fonctions impaires. Ces fonctions sont périodiques de période π ; habituellement, on étudie la fonction tg sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction cotg sur l'intervalle $]0, \pi[$.

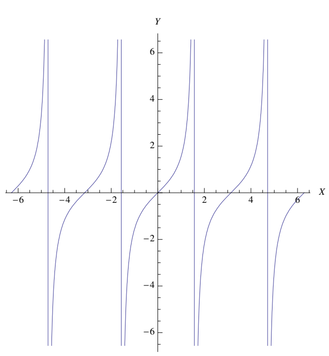
3) Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a

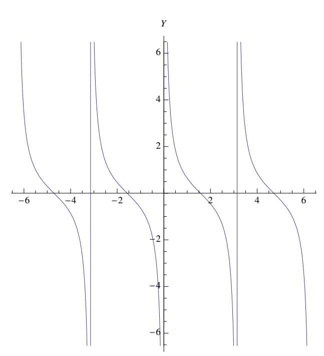
$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}.$$

Soit $x \in]0, \pi[$. On a

$$\operatorname{cotg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{cotg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{cotg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$

4) Voici les représentations graphiques des fonctions tg et cotg (dans l'ordre). Le domaine a été réduit. Des remarques analogues à celles faites pour le cosinus (graphe, équations paramétriques et cartésiennes des graphiques) peuvent bien sûr être faites ici.





5) Les relations fondamentales (addition, multiplication, angles associés) se déduisent des propriétés analogues pour les fonctions sinus et cosinus. La vérification est directe. On obtient les relations suivantes. Pour déterminer l'ensemble des réels où elles sont valables, il faut bien sûr tenir compte des domaines de définition des fonctions qui interviennent.

Formules d'addition

On a

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{tg}(x \pm y), \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$ soient définis ; en particulier

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

De même

$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$$

pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{cotg}(x \pm y), \operatorname{cotg} x, \operatorname{cotg} y$ soient définis.

Angles associés

$$\begin{array}{lllllllll} \operatorname{tg}(x+\pi) & = & \operatorname{tg} x; & \operatorname{tg}(-x) & = & -\operatorname{tg} x; & \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x) & = & \operatorname{cotg} x; \\ \operatorname{cotg}(x+\pi) & = & \operatorname{cotg} x; & \operatorname{cotg}(-x) & = & -\operatorname{cotg} x; & \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}-x) & = & \operatorname{tg} x. \end{array}$$

Signalons encore un lien fort utile entre les fonctions tangente et cosinus (le calcul est direct !) :

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

De manière analogue, on a

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

1.5.3 Valeurs usuelles

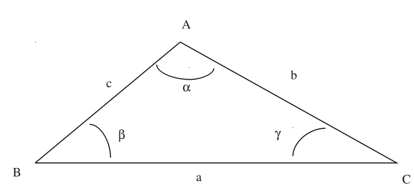
Il est adéquat de se rappeler les valeurs que prennent les fonctions $\cos, \sin, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$ en les réels $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

On n'oubliera pas bien sûr les angles associés pour en déduire les valeurs en $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$, de même que la périodicité de ces fonctions.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
cotg	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

1.5.4 Relations dans les triangles

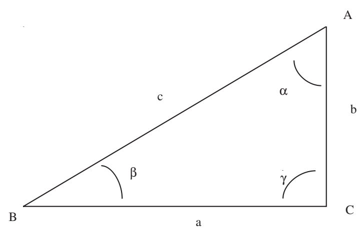
On désigne les sommets d'un triangle par A, B, C, les longueurs des côtés par a, b, c (opposés respectivement à A, B, C) et les mesures des angles (orientés positivement) de ce triangle par α, β, γ (angles aux sommets A, B, C respectivement). Ces mesures sont prises en radians.



Rappelons les formules fondamentales liant les angles et les côtés d'un triangle.

- $\alpha+\beta+\gamma=\pi$
- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
  $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$
  $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$
- $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Dans le cas d'un triangle rectangle (un angle est égal à $\pi/2$, le côté opposé est appelé hypoténuse), ces formules deviennent



- $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ et un des angles est égal à $\pi/2$; dans l'exemple, il s'agit de γ
- $a=c\cos\beta=c\sin\alpha=b\,\mathrm{tg}\,\alpha=b\,\mathrm{cotg}\,\beta$
  $b=c\cos\alpha=c\sin\beta=a\,\mathrm{cotg}\,\alpha=a\,\mathrm{tg}\,\beta$
  $c^2=a^2+b^2$

Les dernières formules se traduisent en toute généralité de la façon suivante :
- *dans un triangle rectangle, un côté est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent (resp. fois le sinus de l'angle opposé)*;
- *dans un triangle rectangle, un côté est égal à l'autre côté multiplié par la cotangente de l'angle adjacent (resp. fois la tangente de l'angle opposé).*

1.5.5 Coordonnées polaires

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on sait qu'à tout point on associe un couple de réels, (x,y), appelés coordonnées cartésiennes du point ; x s'appelle l'abscisse et y l'ordonnée du point. Et réciproquement, tout couple de réels détermine un et un seul point du plan.

Si le point est différent de l'origine des axes, alors on peut aussi le caractériser par l'intermédiaire de ses *coordonnées polaires*.

Définition

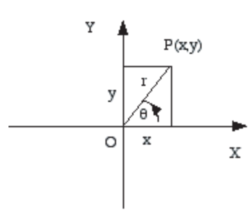
On appelle *coordonnées polaires* d'un point P différent de l'origine et de coordonnées cartésiennes (x,y) le réel strictement positif r (appelé *rayon polaire*) et l'unique[19] $\theta\in[0,2\pi[$, *appelé angle polaire ou argument*, tels que

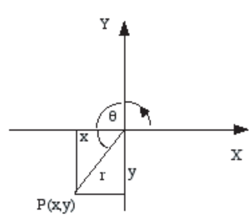
$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

On peut bien sûr trouver les coordonnées polaires (r,θ) à partir des coordonnées cartésiennes :

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\quad \cos\theta=\frac{x}{r}\quad \sin\theta=\frac{y}{r}.$$

Lorsque les fonctions trigonométriques inverses seront réintroduites, nous exprimerons l'angle polaire à partir de la fonction inverse de la fonction tangente.





19. En fait, on peut choisir l'argument dans un autre intervalle de longueur 2π fixé au départ.

1.6 Complément de calcul vectoriel et analytique

Des notions fondamentales de calcul vectoriel telles que le produit scalaire et le produit vectoriel, la notion d'angle entre deux droites…, font intervenir les fonctions trigonométriques. Maintenant que ces fonctions ont été réintroduites, nous pouvons présenter ces notions relatives à la géométrie vectorielle.

1.6.1 Rappels

Dans ce qui précède, une introduction aux vecteurs a été présentée. On y a notamment défini les notions de vecteur lié, libre, d'addition de vecteurs, de multiplication d'un vecteur par un réel. On y a aussi défini la notion de base et de composantes d'un vecteur dans une base.

On introduit également les notions suivantes.

- *Parallélisme de deux vecteurs :* deux vecteurs sont dits parallèles si l'un est multiple de l'autre [20].
- Droite de l'espace ou du plan : il s'agit de la même définition vectorielle. On donne un point P_0 et un vecteur non nul $\vec{v}$. La droite déterminée par P_0 et $\vec{v}$ est l'ensemble des points de l'espace pour lesquels il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{P_0P} = r\vec{v}$. CEPENDANT, l'équation cartésienne d'une droite de l'espace n'est pas celle que nous avons obtenue dans le plan [21].
- *Support d'un vecteur lié non nul :* droite déterminée par l'origine et l'extrémité du vecteur.
- *Droite vectorielle :* ensemble des multiples d'un vecteur non nul.
- *Direction déterminée par un vecteur non nul :* ensemble des multiples non nuls de ce vecteur ; cette direction est notée souvent $\delta_{\vec{v}}$; on a donc $\delta_{\vec{v}} = \{r\vec{v} : r \in \mathbb{R}_0\}$. Deux vecteurs ayant la même direction sont donc parallèles.
- *Sens d'un vecteur et orientation d'une droite vectorielle :* intuitivement, c'est clair car on considère que l'on parcourt le segment de l'origine vers l'extrémité [22].
- si les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles, alors il existe $r \in \mathbb{R}_0$ tel que $\vec{u} = r\vec{v}$ (resp. il existe $s \in \mathbb{R}_0$ tel que $\vec{v} = s\vec{u}$) ; on dit alors que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le *même sens* si $r > 0$ (resp. $s > 0$) et le *sens contraire ou opposé* si $r < 0$ (resp. $s < 0$).

Cela étant rappelé ou défini, nous pouvons passer à l'étude du produit scalaire et du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace.

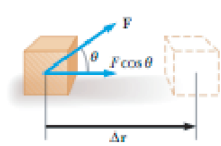
1.6.2 Produit scalaire de deux vecteurs

DÉFINITION

Définissons géométriquement le produit scalaire.

En guise d'exemple, signalons que *le travail d'une force constante $\vec{F}$ agissant sur un objet se déplaçant d'un point P vers un point Q est le produit scalaire de $\vec{F}$ et $\vec{PQ}$*

$$\text{Travail de } \vec{F} \;=\; \vec{F} \bullet \overrightarrow{PQ}.$$



Définition 1.6.1 *Le produit scalaire des vecteurs (libres) non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ est le réel*

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \ \cos\theta}$$

où $\theta \in [0, \pi]$ est la mesure de l'angle non orienté entre les deux vecteurs. Si l'un des vecteurs est nul, on dit que le produit scalaire est le réel 0.

20. le vecteur nul et un autre vecteur sont donc toujours parallèles
21. L'équation d'une droite de l'espace est en fait formée par un système de deux équations de ce type. Ces notions seront (re)vues dans le cadre de la géométrie analytique dans l'espace (partim B du cours).
22. Rigoureusement si $\vec{v} \neq \vec{0}$ définit la droite vectorielle, on considère la direction $\delta_{\vec{v}} = \{r\vec{v} : r \in \mathbb{R}_0\}$ comme union disjointe des deux ensembles $\{r\vec{v} : r > 0\}$ et $\{r\vec{v} : r < 0\}$; orienter la droite, c'est choisir l'un de ces deux ensembles.

Le produit scalaire est donc un réel qui peut être positif, négatif ou nul. S'il n'est pas nul, son signe est celui du cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.

$\vec{u} \bullet \vec{v} > 0$ car $\theta \in [0, \pi/2[$ $\quad$ $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0$ car $\theta \in]\pi/2, \pi]$

On dit que deux vecteurs sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul. Un vecteur et le vecteur nul sont donc toujours orthogonaux. Par contre, le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si $\cos\theta = 0$; cela revient à dire que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si l'angle non orienté qu'ils forment a pour mesure $\pi/2$.

Produit scalaire et projection orthogonale

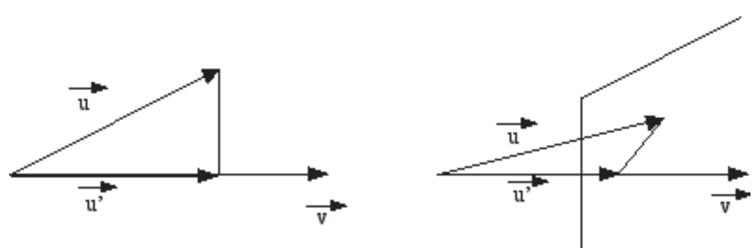
Nous supposons connue d'un point de vue géométrique la notion de projection orthogonale d'un vecteur sur une droite vectorielle.

Relions les notions de produit scalaire et de projection orthogonale. Notre objectif est de trouver une expression vectorielle permettant de calculer aisément la projection orthogonale d'un vecteur $\vec{u}$ sur la droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul $\vec{v}$.

Supposons avoir deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soit

$$\vec{u'}$$

la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite vectorielle déterminée par $\vec{v}$.



Montrons que

$$\boxed{\vec{u'} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.}$$

De fait, notons θ la mesure de l'angle non orienté entre ces deux vecteurs.

Si $\theta = \pi/2$ alors $\vec{u'} = \vec{0}$ et $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ \cos\theta = 0$. Dès lors l'égalité est vraie.

Si $\theta \in [0, \pi/2[$, on a

$$\|\vec{u'}\| = \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\vec{u}\|\ |\cos\theta|$$

et, si $\theta \in]\pi/2, \pi]$, on a

$$\|\vec{u'}\| = -\|\vec{u}\| \cos\theta = \|\vec{u}\|\ |\cos\theta|.$$

Dès lors

$$\|\vec{u'}\| = \|\vec{u}\| |\cos\theta| = \frac{|\ \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ \cos\theta|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = \begin{cases} \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|} & \text{si } \theta \in [0, \pi/2[\\ -\dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|} & \text{si } \theta \in]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

D'autre part, comme le vecteur $\vec{u'}$ est un vecteur de même direction que $\vec{v}$, de même sens si $\theta \in [0, \pi/2[$ et de sens opposé si $\theta \in]\pi/2, \pi]$, on a

$$\vec{u'} = \|\vec{u'}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ si } \theta \in [0, \pi/2[\,, \quad \vec{u'} = -\|\vec{u'}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ si } \theta \in]\pi/2, \pi]\,;$$

il s'ensuit que

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

Cette relation reste valable même si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul car les deux membres sont nuls.

Propriétés

Le produit scalaire entre deux vecteurs possède en outre les propriétés remarquables suivantes. Elles se démontrent géométriquement, à l'aide de ce qui précède.

Propriété 1.6.2

1. *Positivité :* $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$,
2. *Symétrie :* $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$,
3. *Bilinéarité :* $(r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2) \bullet (s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2) = r_1 s_1 \vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1 + r_1 s_2 \vec{u}_1 \bullet \vec{v}_2 + r_2 s_1 \vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1 + r_2 s_2 \vec{u}_2 \bullet \vec{v}_2$

pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ *et tous réels* r_1, r_2, s_1, s_2.

Composantes et produit scalaire

On a vu que dans le plan, étant donné deux vecteurs non parallèles $\vec{u}, \vec{v}$, tout autre vecteur du plan se décompose de manière unique comme une combinaison linéaire de ceux-ci. On a ainsi introduit les notions de base du plan et de composantes d'un vecteur dans une base.

Dans l'espace, on procède de manière analogue. On montre qu'étant donné trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ qui ne sont pas dans un même plan, tout autre vecteur $\vec{x}$ de l'espace se décompose de manière unique en une somme de multiples de ces vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. On dit que ces trois vecteurs forment une *base* de l'espace et que les coefficients de la combinaison linéaire sont les *composantes* du vecteur $\vec{x}$ dans cette base.

En guise de base de l'espace, on utilise souvent une *base orthonormée.* Il s'agit de trois vecteurs de norme 1 qui sont orthogonaux deux à deux :

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ forment une base orthonormée de l'espace si}$$

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1, \quad \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0,\ \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0,\ \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0.$$

On décompose alors un vecteur $\vec{x}$ en fonction de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de la manière suivante (c'est une généralisation de ce qui se passe dans le plan) :

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

où les trois vecteurs

$$x_1\vec{e}_1,\ x_2\vec{e}_2,\ x_3\vec{e}_3$$

sont les projections orthogonales du vecteur $\vec{x}$ sur les droites vectorielles déterminées par les vecteurs de base (c'est-à-dire les droites déterminant les axes du repère). Les nombres réels

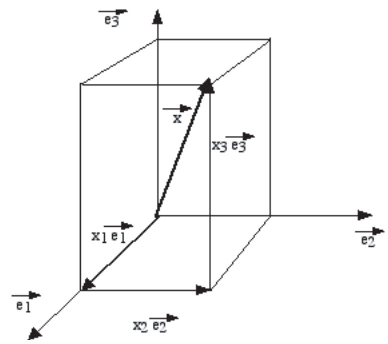
$$(x_1, x_2, x_3) \text{ sont les composantes du vecteur } \vec{x} \text{ dans la base } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$

et on a, en vertu des liens entre produit scalaire et projection orthogonale

$$x_1 = \vec{x} \bullet \vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{x} \bullet \vec{e}_2, \quad x_3 = \vec{x} \bullet \vec{e}_3.$$

Donc on a

$$\boxed{\vec{x} = (\vec{x} \bullet \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x} \bullet \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{x} \bullet \vec{e}_3)\vec{e}_3}$$



Grâce à cette décomposition, on obtient l'expression suivante du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs composantes dans une base orthonormée.

Propriété 1.6.3 *Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée de l'espace. Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de composantes respectivement (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) dans la base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ alors*

$$\boxed{\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.}$$

Preuve. On a

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

et

$$x_i = \vec{x} \bullet \vec{e}_i, \quad y_i = \vec{y} \bullet \vec{e}_i, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Dès lors, en utilisant la propriété de bilinéarité du produit scalaire

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{x} \bullet (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = y_1(\vec{x} \bullet \vec{e}_1) + y_2(\vec{x} \bullet \vec{e}_2) + y_3(\vec{x} \bullet \vec{e}_3) \ = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3.$$

□

Dans une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ d'un plan, on a de même

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

si $\vec{x}, \vec{y}$ sont des vecteurs du plan et (x_1, x_2), (y_1, y_2) leurs composantes respectives dans cette base.

Droites orthogonales

On a introduit précédemment la notion de droites orthogonales dans un plan en disant que deux droites non parallèles aux axes étaient orthogonales si le produit de leurs coefficients angulaires était égal à -1. En fait, la vraie définition de l'orthogonalité de deux droites est celle-ci (et est valable aussi dans l'espace) : d de vecteur directeur $\vec{v}$ et d' de vecteur directeur $\vec{v}'$ sont orthogonales si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux, autrement dit, si leur produit scalaire est nul. Montrons que l'on retrouve bien la relation liant les coefficients angulaires si ceux-ci existent.

Supposons les deux droites dans un plan muni d'un repère orthonormé. Alors, si d a pour équation $y = mx + p$ et d' a pour équation $y = m'x + p'$, des vecteurs directeurs de ces droites ont respectivement pour composantes (dans la base orthonormée du plan choisie) $(1, m)$ et $(1, m')$. Vu la propriété précédente, le produit scalaire des vecteurs directeurs est donc donné par $1 + mm'$. D'où la conclusion.

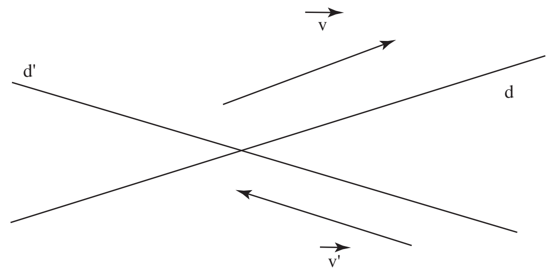
1.6.3 Angle entre deux droites

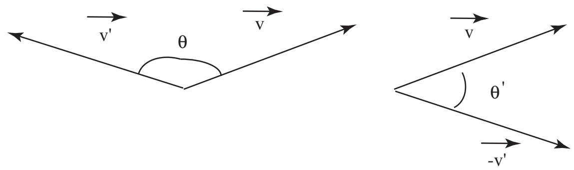
Définition

Soient d, d' deux droites de vecteurs directeurs respectivement $\vec{v}, \vec{v}'$. Soit θ l'angle non orienté[23] entre $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ et soit θ' l'angle non orienté entre $\vec{v}$ et $-\vec{v}'$. Par définition de la mesure des angles non orientés (cf la définition du produit scalaire), on a

$$\theta, \theta' \in [0, \pi], \quad \theta + \theta' = \pi.$$

23. en réalité la mesure de l'angle non orienté





Par définition, *l'angle* entre d et d' est le plus petit des deux angles[24] θ et θ'. L'angle entre deux droites est donc toujours compris dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtient donc que l'angle entre les deux droites d et d' est le réel $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v} \bullet \vec{v}'|}{\|\vec{v}\| \; \|\vec{v}'\|}.$$

Cas de deux droites dans le plan

Donnons une formule utile permettant de trouver l'angle entre deux droites du plan à l'aide de leurs équations cartésiennes.

Soient d et d' respectivement d'équation

$$y = mx + p, \quad y = m'x + p'$$

dans un repère orthonormé du plan.

Propriété 1.6.4 *Si $mm' \neq -1$ alors l'angle entre d et d' est le réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que*

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|m - m'|}{|1 + mm'|}.$$

La preuve est un simple calcul.

Si on a $mm' = -1$, les deux droites sont orthogonales donc l'angle qu'elles forment vaut $\pi/2$.

Si d est parallèle à Y et pas d', l'angle qu'elles forment vaut $\pi/2$ moins l'angle formé par X et d'. Si d et d' sont parallèles, l'angle qu'elles forment vaut 0.

On remarque que la définition donnée est symétrique : l'angle entre d et d' est l'angle entre d' et d.

On voit aussi géométriquement que deux droites déterminent en fait "deux angles" ; la définition que l'on donne est un choix : on décide de prendre l'angle aigu.

Dans le cas particulier où d' est l'axe X, on a $m' = 0$ donc

$$\operatorname{tg}\theta = |m| = \begin{cases} m & \text{si } m \geq 0 \\ -m & \text{si } m \leq 0 \end{cases}$$

24. Que se passe-t-il si on considère $-\vec{v}$ et $\vec{v}'$ au lieu de $\vec{v}$ et $-\vec{v}'$?

1.6.4 Distances

La notion de distance entre deux ensembles non vides repose sur la notion de *borne inférieure de réels,* notion que nous n'avons pas encore étudiée rigoureusement (de même pour la *borne supérieure*). La borne inférieure d'un ensemble de réels est en fait "le plus grand nombre qui est plus petit que tous les nombres de l'ensemble". Il ne s'agit pas toujours "du plus petit des nombres de l'ensemble", ce cas ne se présentant que lorsque la borne inférieure est atteinte, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit d'un nombre qui appartient à l'ensemble.

Dans l'utilisation que nous allons en faire ci-dessous, cette borne sera toujours atteinte et s'exprimera en fait sous la forme de la longueur (norme) d'un vecteur.

La distance entre deux points est la *longueur du vecteur joignant ces deux points.*

La distance entre une droite et un point est la longueur du vecteur joignant le point et sa projection orthogonale sur cette droite.

Ces distances ont une expression analytique simple, utilisant coordonnées et équation cartésiennes des données.

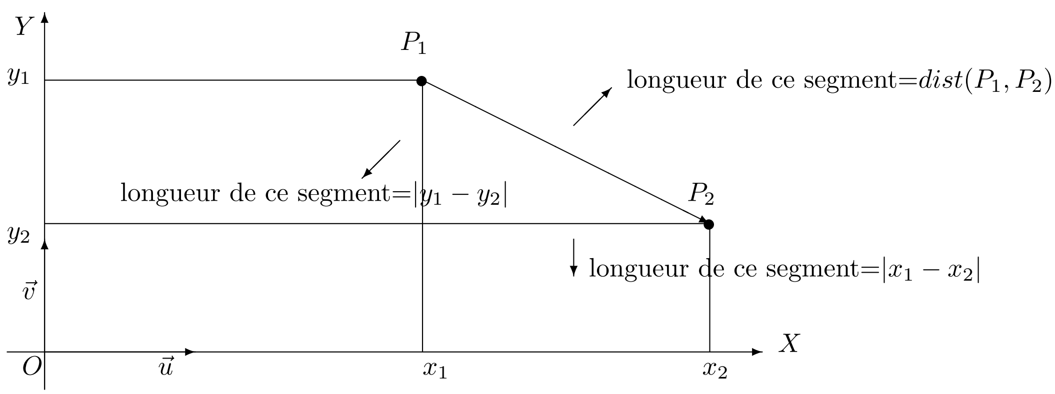
Cas de la distance entre deux points

Dans un repère orthonormé de l'espace, si les points sont donnés par leurs coordonnées cartésiennes,

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

on a

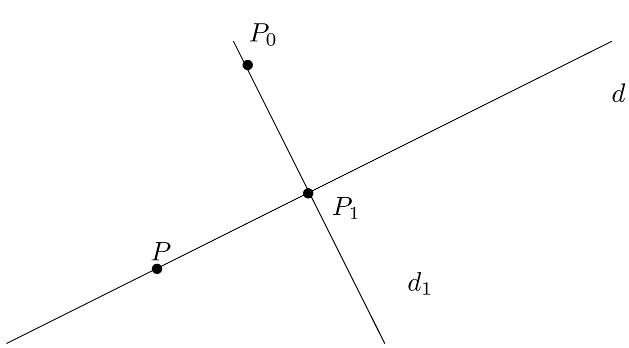
$$dist(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



Cas de la distance entre un point P_0 et une droite d

Puisque cette distance revient à déterminer la distance entre deux points, à savoir le point donné P_0 et sa projection orthogonale P_1 sur la droite, il suffirait bien sûr de déterminer les coordonnées cartésiennes de la projection orthogonale sur la droite, puis d'utiliser le résultat précédent.

Cependant, on peut procéder de manière plus directe. Effectuons le calcul dans le cas du plan.



Propriété 1.6.5 *Si d a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (où a, b ne sont pas simultanément nuls) et si P_0 a pour coordonnées (x_0, y_0), on a*

$$dist(P_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve. Un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à d a pour composantes (a, b). Fixons un point quelconque P de d. Comme le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ est aussi la projection orthogonale de $\overrightarrow{P_0P}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$, on a

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \frac{\overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

donc

$$\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Cela étant, si x, y sont les coordonnées de P, on a

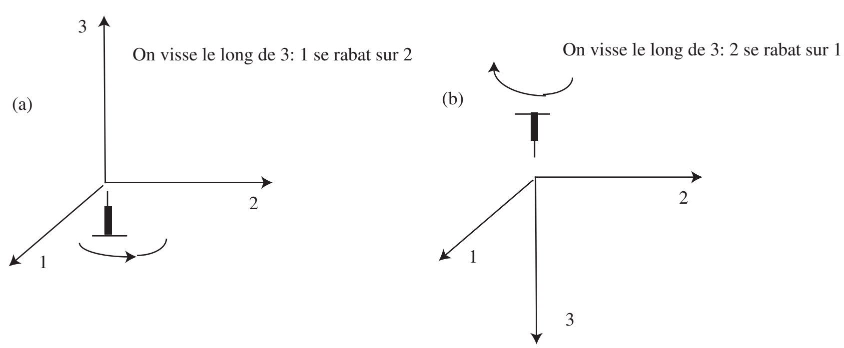
$$\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(x - x_0)a + (y - y_0)b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

en utilisant l'expression analytique du produit scalaire et l'appartenance du point P à la droite d.

1.6.5 Le produit vectoriel de deux vecteurs

Orientation de l'espace

La définition du produit vectoriel nécessite l'introduction de la notion d'*orientation de l'espace.* Considérons les deux bases orthonormées suivantes.



Toute autre base orthonormée peut se ramener sur l'une ou (ou exclusif) l'autre de celles-ci par de simples déplacements dans l'espace (déplacements qui n'affectent pas sa "rigidité" : rotations, translations). Si on choisit une des deux bases (a) ou (b) (et toutes celles qui s'y ramènent), on dit que l'on a *orienté* l'espace ; si c'est la base (a) qui a été choisie, on dit que l'espace est orienté à droite ; dans le cas où l'on choisit (b), on dit que l'espace (ou le repère) est orienté à gauche.

Pour déterminer pratiquement l'orientation d'une base, on peut procéder de plusieurs manières. Par exemple, on imagine un tire-bouchon que l'on enfonce le long de l'axe 3. Si, dans cette manipulation, l'axe 1 se rabat sur l'axe 2 (par le plus court chemin), on est dans l'orientation droite ; dans le cas contraire, on est dans l'orientation gauche. On peut aussi visser le long de l'axe 1 : si l'axe 2 se rabat sur l'axe 3, on est dans l'orientation droite ; la base est orientée à gauche si 3 se rabat sur 2. Bien sûr, on peut aussi procéder avec l'axe 2 au départ. En résumé [25] :

25. En fait, tout ceci est lié à la répartition des 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$ en permutations paires et impaires.

orientation droite :
- on visse le long de 1 : 2 se rabat sur 3 (123)
- on visse le long de 2 : 3 se rabat sur 1 (231)
- on visse le long de 3 : 1 se rabat sur 2 (312) ;

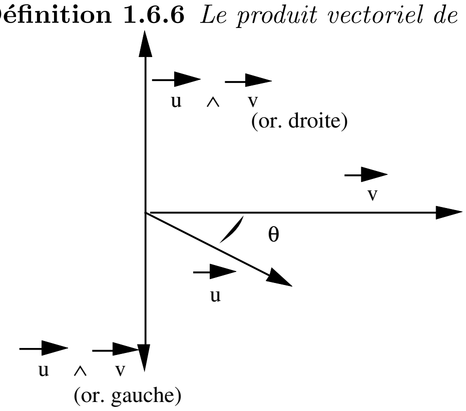
orientation gauche :
- on visse le long de 1 : 3 se rabat sur 2 (132)
- on visse le long de 2 : 1 se rabat sur 3 (213)
- on visse le long de 3 : 2 se rabat sur 1 (321).

Etant donné trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ qui ne sont pas dans un même plan (mais pas nécessairement orthonormés), on dira aussi que la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est d'orientation droite (resp. gauche) si, quand on visse le long de $\vec{u}_3$, $\vec{u}_1$ se rabat sur $\vec{u}_2$ (resp. $\vec{u}_2$ se rabat sur $\vec{u}_1$).

2) Etant donné une orientation de l'espace, on peut maintenant définir le produit vectoriel de deux vecteurs (libres) ; c'est un vecteur dont le sens dépend de l'orientation de l'espace ; on parle de *vecteur axial* ou encore de *pseudo-vecteur*. Les vecteurs (géométriques, ne dépendant pas du repère) sont par opposition appelés *vecteurs polaires*.

Définition du produit vectoriel

Définition 1.6.6 *Le produit vectoriel de deux vecteurs est défini géométriquement comme suit.*



Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas parallèles,
$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur (axial) qui est défini comme suit
- *norme donnée par 2 fois l'aire du triangle construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire de norme égale au réel positif $\|\vec{u}\|\;\|\vec{v}\|\;\sin\theta$*
- *direction orthogonale au plan défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*
- *sens tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ constitue une base orientée comme l'espace .*

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles, le produit vectoriel de ces vecteurs, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est par définition le vecteur nul.

On a donc directement la propriété suivante : le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs sont linéairement dépendants.

Sauf mention explicite du contraire, on suppose être dans le cas d'un espace orienté à droite.

Propriétés

Le produit vectoriel de deux vecteurs possède les propriétés importantes suivantes. Elles se démontrent géométriquement, à l'aide de la définition.

Propriété 1.6.7 *1) Représentation de $\vec{u} \wedge \vec{e}$ lorsque $\|\vec{e}\| = 1$ et $\vec{u}, \vec{e}$ orthogonaux : le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{e}$ est obtenu en appliquant au vecteur $\vec{u}$ une rotation de $\pi/2$ dans le plan L orthogonal à $\vec{e}$.*

2) Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et soit L le plan orthogonal à $\vec{u}$. Si $\vec{v}_L$ désigne la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur L, on a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}_L.$$

A partir de ce qui précède, on démontre alors les propriétés suivantes (à comparer avec celles du produit scalaire).

Propriété 1.6.8 *1) On a*

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \quad \textit{propriété d'antisymétrie}$$

$$(r_1\vec{u}_1 + r_2\vec{u}_2) \wedge \vec{v} = r_1(\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + r_2(\vec{u}_2 \wedge \vec{v}), \quad \vec{u} \wedge (r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2) = r_1(\vec{u} \wedge \vec{v}_1) + r_2(\vec{u} \wedge \vec{v}_2).$$

Ces deux dernières propriétés se généralisent au cas des combinaisons linéaires de plus de deux vecteurs. Elle est appelée "propriété de bilinéarité du produit vectoriel".

2) Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ désigne une base orthonormée orientée comme l'espace, on a

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{0} & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = \vec{0} & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = \vec{0}. \end{array}$$

Composantes et produit vectoriel

On a vu que le produit scalaire de deux vecteurs était un réel qui, vu les propriétés du produit scalaire, pouvait s'exprimer facilement en fonction des composantes des vecteurs dans une base orthonormée. On a une propriété analogue dans le cas du produit vectoriel : on utilise les composantes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ pour trouver les composantes du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tout cela dans une base orthonormée.

Propriété 1.6.9 *Dans une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ orientée comme l'espace, on a*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3,$$

où les u_i (resp. les v_i) sont les composantes de $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) dans cette base.

Preuve. Cela se démontre en utilisant la propriété de bilinéarité du produit vectoriel et les valeurs de $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j$ pour $i, j = 1, 2, 3$.□

1.7 Les coniques

1.7.1 Préambule et adoption d'une définition

Préambule

Les coniques ...vaste sujet ! Il s'agit de courbes planes, qui furent étudiées déjà dans la Grèce antique. Leurs propriétés géométriques sont remarquables et interviennent dans de nombreuses situations et phénomènes courants.

Pour découvrir les coniques "en s'amusant", rien de tel que de surfer un peu sur le web. Vous trouverez dans ce qui suit un petit exemple ...qui en cache de nombreux autres ! On peut ainsi facilement trouver de nombreuses représentations ou photos sur lesquelles le rôle des coniques et de leurs propriétés géométriques est clairement mis en évidence.

Mais présentons aussi ici un résumé succinct d'un point de vue très pratique quant à la description via des équations cartésiennes. Avec cette approche, les autres descriptions des coniques apparaissent comme des exercices d'analyse et de géométrie analytique plane (donc pouvant être abordés d'un point de vue très "calculatoire" par description et interprétation correctes d'une représentation graphique).

Définition via équations cartésiennes.

Rappelons que dans le plan muni d'un repère, on appelle équation cartésienne d'un ensemble, la [26] relation [27] entre les coordonnées cartésiennes (x, y) caractérisant l'appartenance d'un point de coordonnées (x, y) à l'ensemble ; autrement dit, dire que $E(x, y) = 0$ est l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{L}$ signifie qu'un point de coordonnées (x, y) appartient à $\mathcal{L}$ si et seulement si $E(x, y) = 0$.

Dans notre approche, nous définissons donc une conique comme un ensemble de points du plan dont la description via équation cartésienne est donnée via un polynôme du second degré à coefficients et variables réelles, à savoir

$$E(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

26. signalons toutefois que, dans un même repère, cette relation n'est pas nécessairement unique ; on utilise cependant l'article défini car bien souvent, l'unicité est obtenue à une constante multiplicative non nulle près

27. ou des relations, en toute généralité

où les coefficients des termes du second degré ne sont pas tous nuls. En toute généralité, l'équation d'une conique est donc du type

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

avec la condition mentionnée sur les coefficients.

Un changement de repère permet toujours d'obtenir une forme beaucoup plus simple pour l'équation cartésienne [28]. Sauf dans le cas où la conique est vide, réduite à un point ou formée de droites (cas dits "dégénérés"), cette forme est de l'un des trois types ci-dessous, dans lesquels les variables x et y peuvent être éventuellement permutées

$$\boxed{(i)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (ii)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (iii) y^2 = 2px}$$

où a et b sont des réels strictement positifs et où p est un réel non nul. On appelle ces formes d'équations des équations *canoniques* ou encore *réduites.*

1.7.2 Une brève étude des coniques

Première description

Commençons par une petite description immédiate des coniques, données via les équations canoniques ci-dessus.

L'ellipse

L'équation cartésienne canonique

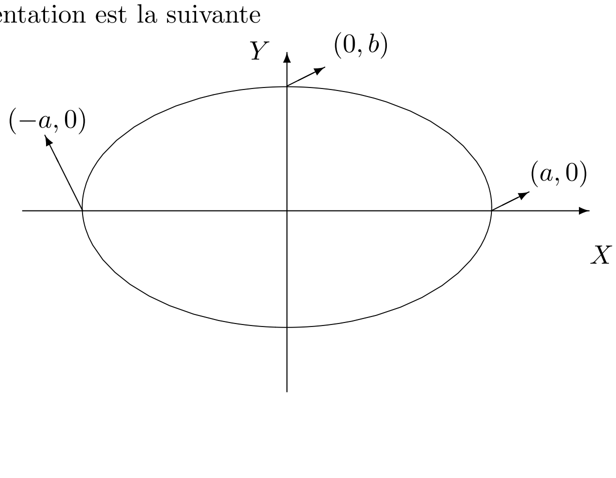
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est celle d'une conique que l'on appelle *ellipse.* On constate directement que les points de cet ensemble constituent un ensemble borné et on trouve directement ses intersections avec les axes du repère.

D'autres approches du graphique peuvent être envisagées.

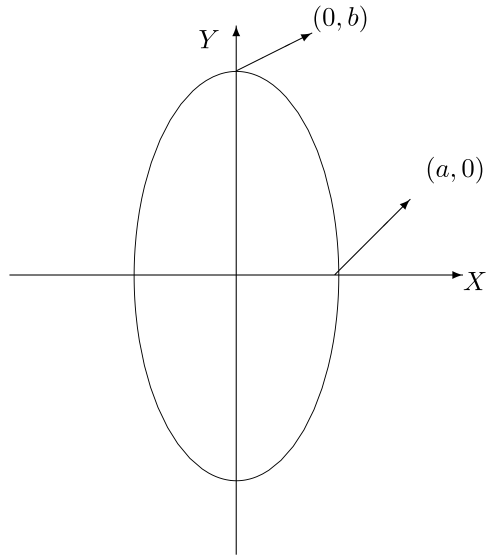
Quoi qu'il en soit, en étudiant les fonctions $x \mapsto b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ et $x \mapsto -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ et les symétries (afin de ramener l'étude au premier quadrant) on peut obtenir une représentation plus précise (mais cela implique l'étude de la représentation graphique des fonctions, voir chapitre suivant)

Lorsque $a > b$ la représentation est la suivante



28. Pour le montrer, on utilise des procédés tout à fait standards mais que nous ne présenterons pas ici, en première lecture. La littérature abonde de références sur le sujet.

Lorsque $a < b$ on obtient



Quand $a = b$, l'ellipse est le cercle centré à l'origine et de rayon $a = b$.

L'hyperbole

L'équation cartésienne canonique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

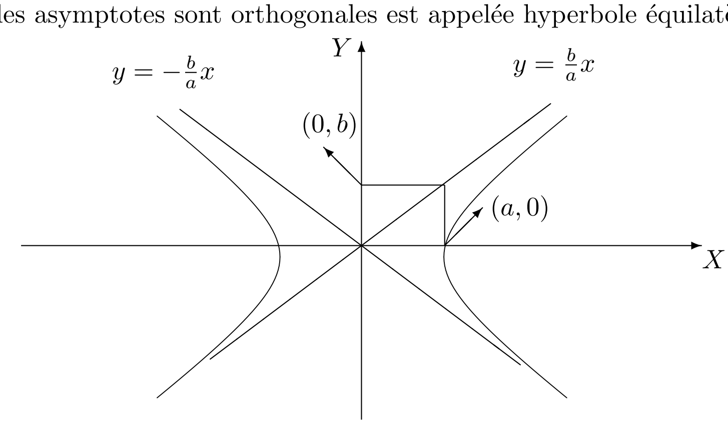
est celle d'une conique que l'on appelle *hyperbole*. On constate directement que cet ensemble de points n'est pas borné et on trouve immédiatement ses intersections avec les axes du repère.

D'autres approches du graphique peuvent être envisagées.

Quoi qu'il en soit, en étudiant les fonctions $x \mapsto b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ et $x \mapsto -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ et les symétries (pour se ramener au premier quadrant), on peut obtenir une représentation plus précise (mais cela implique l'étude de la représentation graphique des fonctions, voir chapitre suivant). On voit notamment apparaître les deux *asymptotes* d'équations cartésiennes

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

Une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales est appelée hyperbole équilatère.

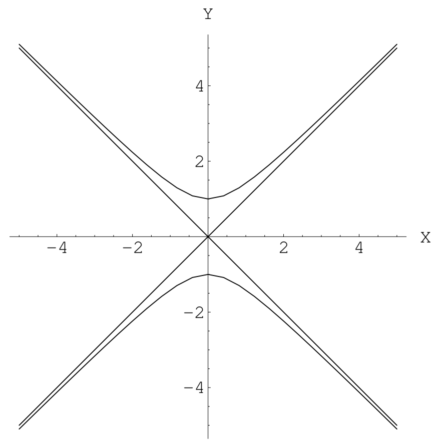


Dans le cas où le rôle des variables est permuté, c'est-à-dire si on considère l'hyperbole d'équation

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

la conique intersecte cette fois l'axe Y aux points de coordonnées $(0, a)$ et $(0, -a)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne

$$y = \frac{a}{b}x, \qquad y = -\frac{a}{b}x.$$



La parabole

L'équation cartésienne canonique

$$y^2 = 2px$$

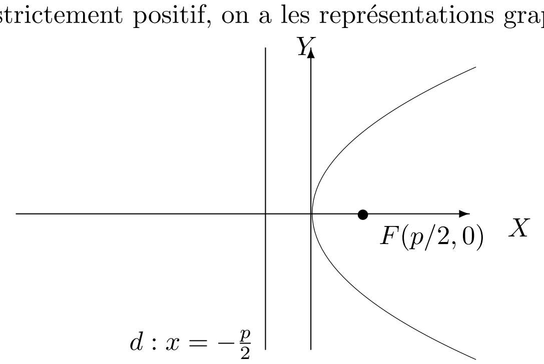
est celle d'une conique que l'on appelle *parabole.* On constate directement que cet ensemble de points n'est pas borné et que sa seule intersection avec les axes du repère est l'origine.

D'autres approches du graphique peuvent être envisagées. On constate notamment directement que tout point de cette parabole a des coordonnées (x, y) qui vérifient

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

ce qui signifie que *les points de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ sont situés à égale distance du point de coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et de la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$.* Ces point et droite particuliers sont respectivement appelés *foyer et directrice* de la parabole (notés respectivement F et d ci-dessous). Nous allons revenir sur ceci dans la suite.

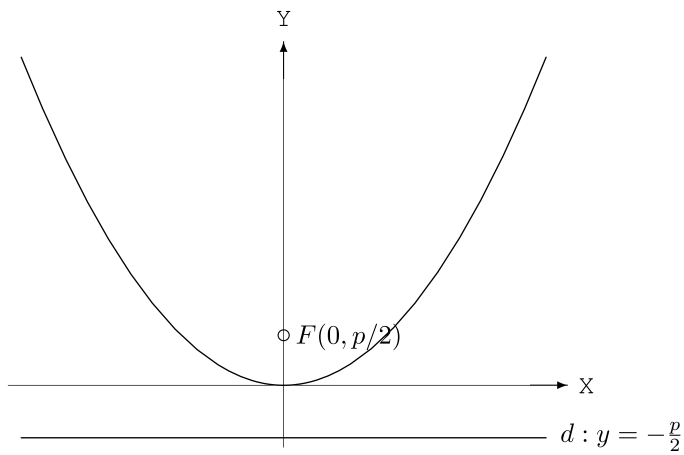
Lorsque p est strictement positif, on a les représentations graphiques qui suivent.



Lorsque l'on permute les variables, c'est-à-dire quand on étudie la parabole d'équation

$$x^2 = 2py$$

on obtient bien sûr une description tout à fait semblable



Axes, foyers, directrices, excentricité

Présentons quelques autres éléments “clefs” des coniques, à partir de la définition adoptée.

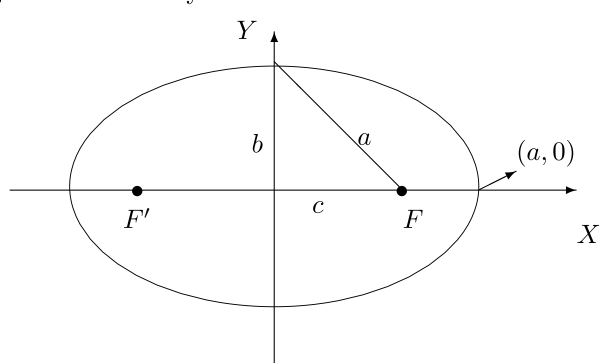
L'ellipse

Considérons l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ lorsque $a>b$. Dans ce cas, définissons

$$c=\sqrt{a^2-b^2}, \quad e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

On a $0\leq e<1$ et ces grandeurs s'interprètent sur le graphique comme décrit ci-dessous (se rappeler que $a^2=b^2+c^2$).

Les cas où l'excentricité est nulle correspond au cercle. Les points F et F', respectivement de coordonnées $(c,0)$ et $(-c,0)$ sont appelés *foyers* de l'ellipse et le réel e est appelé *excentricité.* La droite passant par les foyers est appelée *grand axe.* Il s'agit ici de l'axe des abscisses. Le *centre* de l'ellipse est le point milieu du segment joignant les deux foyers.

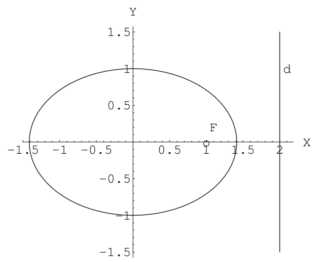


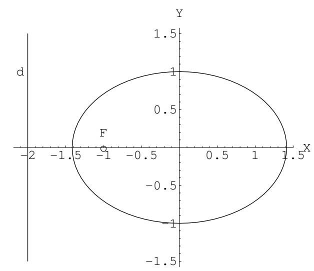
Si on considère la droite d d'équation cartésienne (quand $e\neq 0$) $d\ :\ x=\frac{a^2}{c}=\frac{a}{e}$ on démontre (exercice) que pour tout point P de l'ellipse, la distance entre P et le foyer F est égal à l'excentricité multipliée par la distance entre P et la droite d :

$$dist(P,F)\ =\ e\ dist(P,d)$$

Pour bien percevoir ce que signifie l'*excentricité*, il est utile de remarquer ceci : lorsque la valeur a est constante, l'excentricié augmente lorsque le réel c augmente (ce qui correspond à un écartement plus grand entre les foyers), c'est-à-dire lorsque le réel b diminue. Sur la représentation graphique, cela se traduit donc par le fait que l'ellipse devient “ de plus en plus écrasée” lorsque l'excentricité se rapproche de 1 et “ressemble de plus en plus” d'un cercle lorsque l'excentricité se rapproche de 0.

Bien sûr, on peut faire un raisonnement analogue avec F' et d' : $x=-a/e$. Les droites d et d' sont appelées *directrices* de l'ellipse.





Lorsque $a < b$, on a

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}, \quad F(0,c), \quad F'(0,-c)$$

et le grand axe est cette fois l'axe des ordonnées. On définit de même des directrices et on a bien sûr les mêmes propriétés que dans le cas précédent.

L'hyperbole

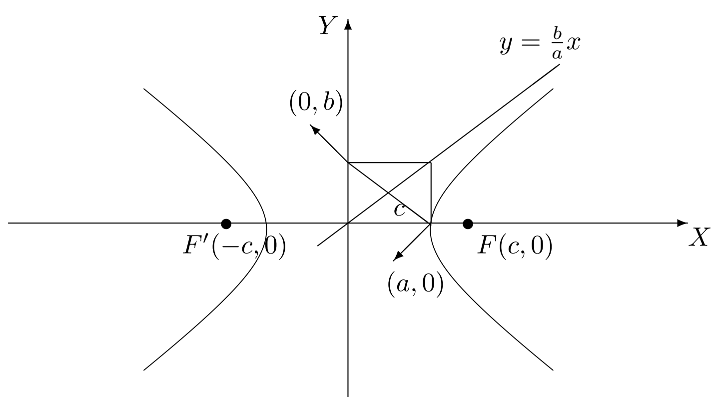
Considérons l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Le cas où on a permuté le rôle de x et y se traite de manière tout fait analogue.

Définissons

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

On a $e > 1$ et ces grandeurs s'interprètent sur le graphique comme décrit dans ce qui suit.

Les points F et F', respectivement de coordonnées $(c,0)$ et $(-c,0)$ sont appelés *foyers* de l'hyperbole et le réel e est appelé *excentricité.* La droite passant par les foyers est appelée *axe principal.* Il s'agit ici de l'axe des abscisses. Le *centre* de l'hyperbole est le point milieu du segment joignant les deux foyers.



Si on considère la droite d d'équation cartésienne

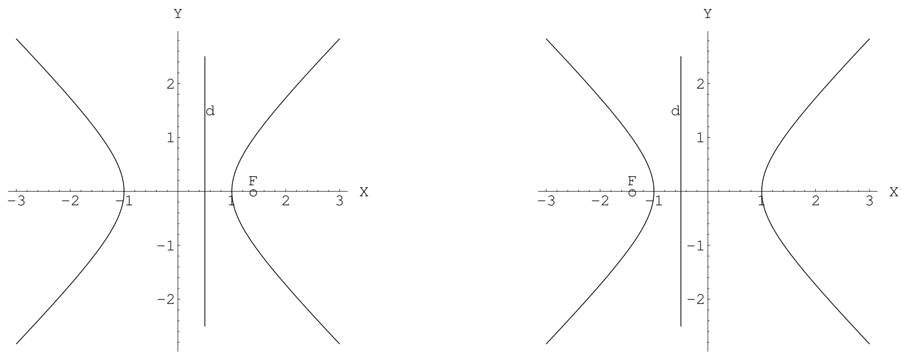
$$d \ : \ x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$$

on démontre (exercice) que pour tout point P de l'hyperbole, la distance entre P et le foyer F est égale à l'excentricité multipliée par la distance entre P et la droite d :

$$dist(P,F) \ = \ e \ dist(P,d)$$

Pour bien percevoir ce que signifie l'*excentricité* dans ce cas aussi, il est utile de remarquer ceci : lorsque la valeur a est constante, l'excentricié augmente lorsque le réel c augmente (ce qui correspond à un écart plus grand entre les foyers), c'est-à-dire lorsque le réel b augmente. Sur la représentation graphique, cela se traduit donc par le fait que l'hyperbole devient " de plus en plus écrasée" lorsque l'excentricité se rapproche de 1 (ce qui correspond à b qui se rapproche de 0) et "s'ouvre de plus en plus" lorsque l'excentricité augmente (ce qui correspond aussi à une augmentation de b.

On peut bien sûr faire un raisonnement analogue avec F et d' : $x = -a/e$. Les droites d et d' sont appelées *directrices* de l'hyperbole.



La parabole

Considérons l'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.

Soient

$$c = \frac{p}{2}, \quad F\,(c, 0) \quad d : x = -c, \quad e = 1.$$

Le point F est appelé foyer de la parabole et la droite d directrice de la parabole. On a vu que les points P de la parabole se trouvent à égale distance du foyer et de la directrice :

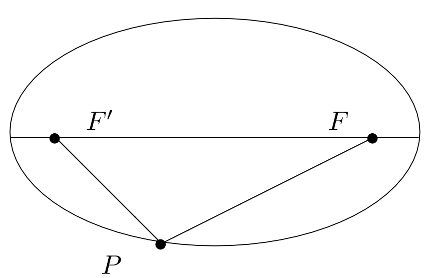
$$dist(P, F) = dist(P, d) = e\ dist(P, d).$$

L'excentricité est ici égale à 1. L'axe de la parabole est la droite passant par le foyer et orthogonale à la directrice.

Propriété supplémentaire de l'ellipse et de l'hyperbole

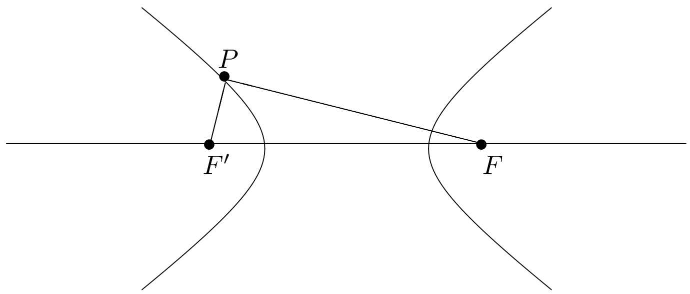
Reprenons le cas de l'ellipse traité ci-dessus. On démontre que les points de l'ellipse sont tels que la somme de leurs distances aux foyers est une constante, égale à $2a$ (on appelle aussi ce nombre la "longueur du grand axe", bien qu'il s'agisse bien sûr de la longuuer d'un segment de ce grand axe).

$$dist(F, P) + dist(F', P) = 2a \text{ pour tout point } P \text{ de l'ellipse.}$$



Passons à l'hyperbole. On démontre que les points de l'hyperbole sont tels que la valeur absolue de la différence de leurs distances aux foyers est une constante, égale à $2a$:

$$|dist(P, F) - dist(P, F')| = 2a \text{ pour tout point } P \text{ de l'hyperbole..}$$



Définition des coniques comme lieux géométriques

Les propriétés que nous venons de voir peuvent être prises comme point de départ pour définir les coniques. En choisissant un repère de manière adéquate, on retrouve alors les équations dont nous sommes partis.

Utilisations pratiques de propriétés spécifiques des coniques

Les utilisations des coniques, leurs occurrences dans les phénomènes naturels sont nombreuses.

Signalons simplement les multiples usages en optique [29], et, bien sûr, les travaux de Kepler [30] décrivant les orbites des planètes autour du soleil !

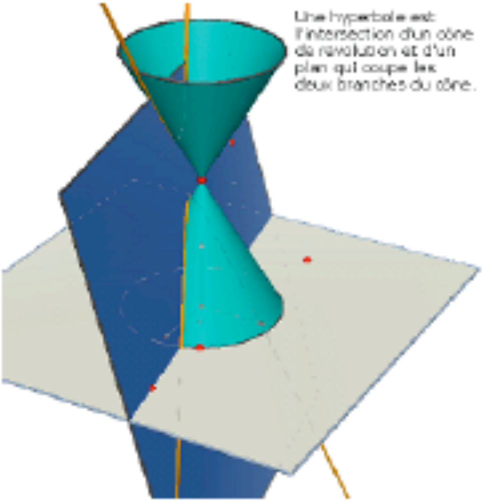
---

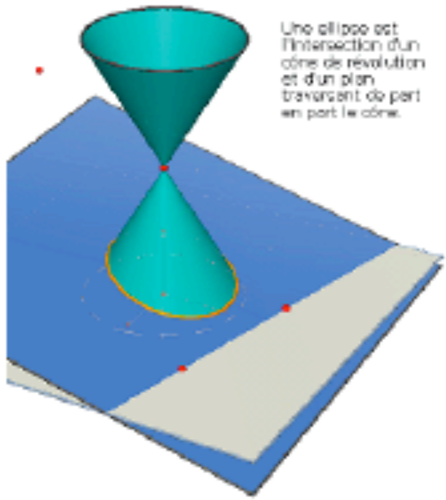
29. Propriété de l'ellipse et de l'hyperbole dans le domaine de l'optique : un rayon lumineux émis à partir d'un foyer est réfléchi vers l'autre foyer ; propriété de la parabole, fort utilisée en pratique (radars, phares, téléscope,...) : un rayon lumineux émis à partir du foyer d'une parabole est réfléchi selon une droite parallèle à l'axe de la parabole (voir par exemple Ellis-Gullick p667 et alentours.

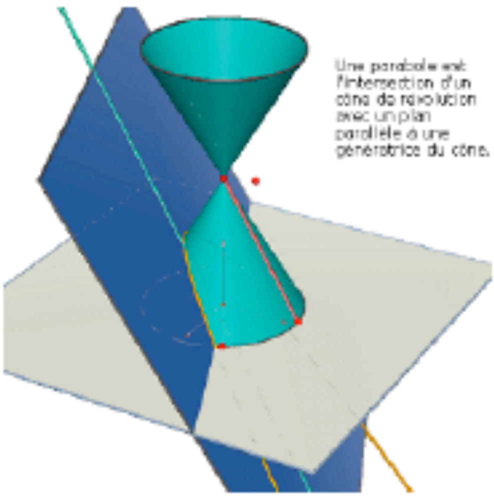
30. Johannes Kepler (ou Keppler), né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt dans le Bade-Wurtemberg et mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne en Bavière, est un astronome célèbre pour avoir étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses. Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leur orbite. Ces relations sont fondamentales car elles furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle.

Conique à la grecque

Pour les mathématiciens grecs, une conique est l'intersection d'un cône de révolution avec un plan. Suivant l'angle formé par le plan et les génératrices du cône, on trouve les 3 variétés de conique : ellipse, hyperbole et parabole.







Ellipses, hyperboles et paraboles sont les 3 types de coniques propres. Pour certaines configurations particulières, il est possible que l'intersection du plan et du cône soit l'ensemble vide, un point, une droite ou deux droites. Ces ensembles constituent des coniques dégénérées.

Définition géométrique moderne

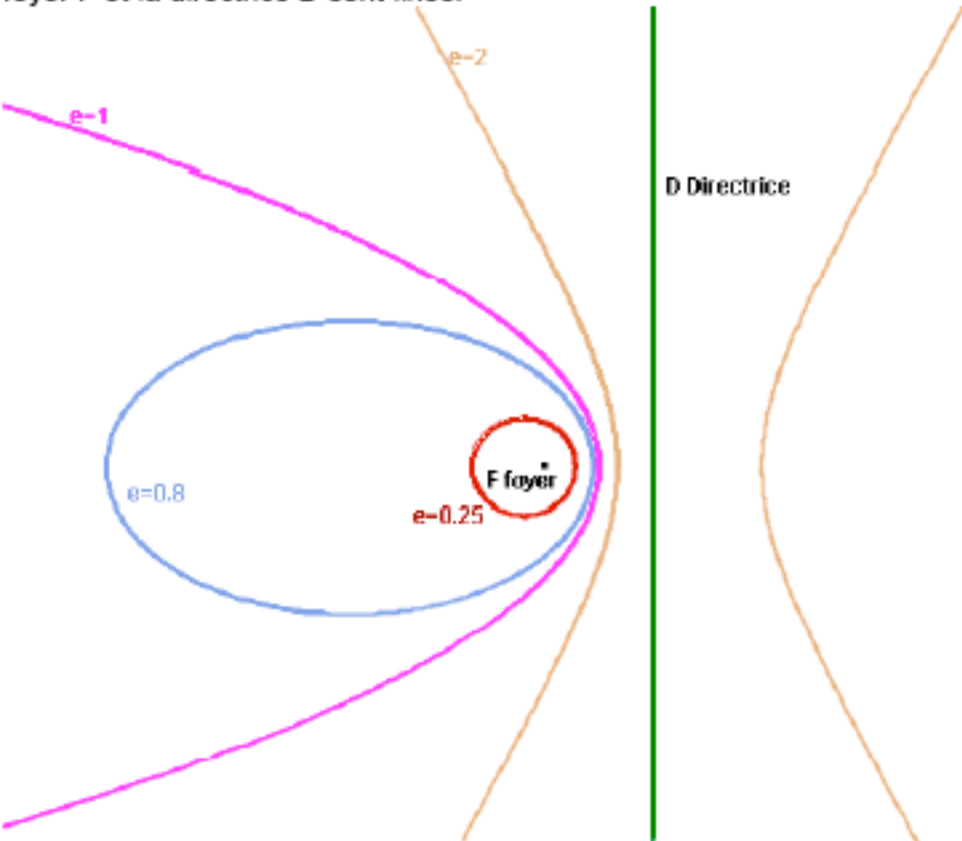
Soit un point F et une droite D (ne passant pas par F) du plan euclidien, et soit e un réel strictement positif. On appelle conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e$$

Suivant les diverses valeurs de e, on trouve les 3 types de conique :

- e<1 : ellipse,
- e=1 : parabole,
- e>1 hyperbole.

La figure ci-dessous permet de mesurer l'influence de l'excentricité e quand le foyer F et la directrice D sont fixés.



La droite perpendiculaire à la directrice D et passant par le foyer F s'appelle axe focal de la conique. Remarquons qu'ellipses et hyperboles possèdent un centre de symétrie. Voilà pourquoi on les appelle coniques à centre. Ces coniques possèdent alors une autre définition géométrique, dite définition bifocale. Voir les articles ellipse et hyperbole du dictionnaire.

Définition géométrique moderne

On appelle conique du plan euclidien toute courbe tel qu'il existe un repère orthonormé du plan dans lequel l'équation de la conique est de la forme :

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

On vérifie alors aisément que dans tout repère orthonormé du plan, la conique admet une équation de cette forme. On cherche souvent un repère où l'équation de la conique est la plus simple possible (on parle d'équation réduite). D'abord, en effectuant une rotation du repère, il est possible de trouver une équation sans terme en xy, ie une équation de la forme :

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Ensuite, en effectuant un changement d'origine, on arrive à 3 types d'équation principales :

1. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
   Il s'agit de l'équation cartésienne réduite d'une ellipse.
2. $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1.$$
   Il s'agit de l'équation cartésienne réduite d'une hyperbole.
3. $$y^2=2px.$$
   Il s'agit de l'équation cartésienne réduite d'une parabole.

1.8 Introduction des nombres complexes et résolution des équations du second degré

1.8.1 Définitions

Définition 1.8.1 *L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des couples de réels*

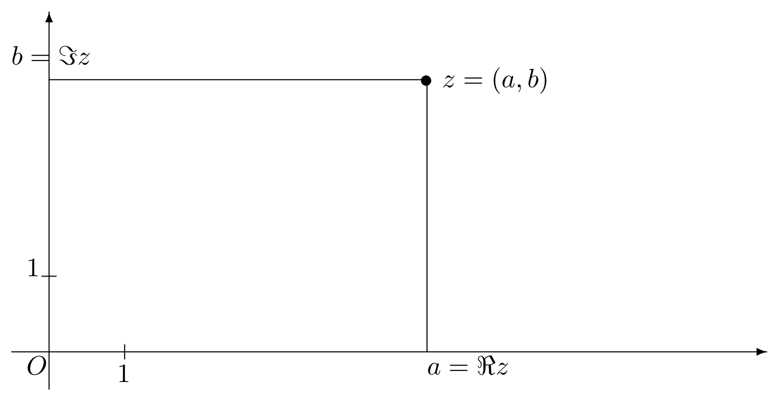
$$\mathbb{C} = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

On a directement à notre disposition une représentation graphique de $\mathbb{C}$: si on considère le plan muni d'un repère orthonormé, tout point du plan définit un complexe et tout complexe définit un point du plan.

Par définition, deux complexes (a, b) et (a', b') sont égaux lorsque $a = a'$ et $b = b'$.

Si $z = (a, b)$ est un complexe, le réel a s'appelle *la partie réelle* du complexe et le réel b s'appelle *la partie imaginaire* du complexe. On utilise les notations

$$\Re z = a, \quad \Im z = b.$$



On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est inclus dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes en identifiant les réels aux couples $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. Les réels sont donc les complexes dont la partie imaginaire est nulle. Le complexe nul est le couple $(0, 0)$. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle et dont la partie imaginaire est non nulle est appelé *nombre complexe imaginaire pur.*

Dans l'ensemble des nombres complexes, on définit deux opérations fondamentales, l'*addition de deux complexes* et la *multiplication de deux complexes.* L'addition aura immédiatement une interprétation claire (elle se traduira par l'addition de deux vecteurs du plan). Quant à la multiplication, on verra son interprétation plus tard, à l'aide de rotations ; il faut bien se garder de l'interpréter à l'aide d'un produit quelconque de vecteurs ! !

Définition 1.8.2 *ADDITION DE DEUX COMPLEXES, notée + :*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

MULTIPLICATION DE DEUX COMPLEXES, notée $\times$ (ou encore par un blanc, comme dans le cadre réel) :

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Insistons sur le fait que, dans $\mathbb{C}$, il n'y a *pas de relation d'ordre.*

1.8.2 Propriétés

La première propriété est une généralisation de ce qui se passe dans $\mathbb{R}$.

Propriété 1.8.3 *Soient (a,b) et (c,d) deux complexes. On a*

$$(a,b)\times(c,d)=(0,0) \quad \text{si et seulement si} \quad (a,b)=(0,0) \text{ ou } (c,d)=(0,0).$$

Preuve. On a

$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(0,0)$$

si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} ac-bd=0\\ ad+bc=0\end{array}\right.$$

Si $a\neq 0$, en exprimant c en fonction de a dans la première relation et en l'introduisant dans la seconde, on voit que le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} ac=bd\\ d(a^2+b^2)=0\end{array}\right.$$

donc est équivalent à $d=c=0$. Si $a=0$ et $b\neq 0$, on est conduit à la même conclusion.□

Passons aux propriétés essentielles des opérations introduites.

Propriété 1.8.4 *Pour l'addition et la multiplication entre deux complexes, on a les propriétés suivantes*
- *l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition est un* groupe commutatif *de neutre* $0=(0,0)$ [31]
- *l'ensemble $\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\}$ muni de la multiplication est un* groupe commutatif *de neutre* $(1,0)$ [32]
- *la multiplication distribue l'addition*[33]

On dit que $\mathbb{C}$ muni de l'addition $+$ et de la multiplication $\times$ est un corps commutatif.

Preuve. Tout se vérifie en appliquant les définitions. □

Parmi les propriétés ci-dessus, revenons sur celle qui dit que *pour tout complexe non nul* (a,b), *il existe une complexe* (c,d) *tel que*

$$(a,b)\times(c,d)=(1,0).$$

On dit que tout complexe non nul possède un inverse pour la multiplication. L'inverse du complexe non nul $z=(a,b)$ est noté $\frac{1}{z}$ ou encore z^{-1} ; il est donné par

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

31. Cela signifie que l'addition possède les propriétés suivantes
   - associativité : pour tous complexes z_1,z_2,z_3, on a $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
   - existence d'un neutre : le complexe $e=(0,0)$ est tel que $e+z=z+e=z$ pour tout complexe z
   - tout complexe possède un symétrique (ici, on parle aussi d'opposé) : pour tout z il existe z' tel que $z+z'=e$
   - commutativité : pour tous complexes z,z' on a $z+z'=z'+z$.

32. Cela signifie que la multiplication possède les propriétés suivantes
   - associativité : pour tous complexes z_1,z_2,z_3, on a $(z_1\times z_2)\times z_3=z_1\times(z_2\times z_3)$
   - existence d'un neutre : le complexe $e=(1,0)$ est tel que $e\times z=z\times e=z$ pour tout complexe z
   - tout complexe non nul possède un symétrique (ici, on parle plutôt d'inverse) : pour tout $z\neq 0$ il existe z' tel que $z\times z'=e$
   - commutativité : pour tous complexes z,z' on a $z\times z'=z'\times z$.

33. Cela signifie que pour tous complexes c,z_1,z_2, on a $c\times(z_1+z_2)=c\times z_1 \ + \ c\times z_2$

1.8.3 Introduction du complexe i et notations pratiques

Avec la convention d'écriture d'un blanc en lieu et place du signe $\times$ et l'identification d'un réel comme étant un complexe particulier, la relation

$$(r,0)\times(a,b)=(a,b)\times(r,0)$$

s'écrit

$$rz=zr,\quad 1z=z1=z \text{ si } r=1$$

avec $z=(a,b)$.

De même, les opérations d'addition et de multiplication que l'on vient de définir, restreintes à $\mathbb{R}$, rendent les opérations usuelles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.8.5 *On pose*

$$i=(0,1).$$

Propriété 1.8.6 *1) En tenant compte de l'identification de $\mathbb{R}$ comme sous-espace de $\mathbb{C}$, tout nombre complexe (a,b) s'écrit*

$$z=(a,b)=a+bi.$$

2) On a

$$i^2=(0,1)\times(0,1)=-1.$$

Preuve. 1) On a en effet $z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b(0,1)=a+bi$.

2) Il suffit d'appliquer la définition du produit entre complexes. □

Grâce à l'introduction du complexe i et aux propriétés vérifiées par l'addition et la multiplication, le calcul entre complexes apparaît comme une généralisation naturelle du calcul dans $\mathbb{R}$ en tenant compte de $i^2=-1$. Ainsi par exemple

$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

par définition. Si l'on écrit

$$z=(a,b)=a+bi,\quad z'=(c,d)=c+di$$

et que l'on applique les propriétés des opérations (d'abord la distributivité), on a

$$(a+ib)\ (c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac-bd+i(bc+ad)$$

ce qui est bien le complexe de partie réelle $ac-bd$ et de partie imaginaire $bc+ad$ comme annoncé.

L'inverse du complexe non nul $z=a+ib$ s'écrit donc

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Par exemple, on a

$$\begin{aligned}(3i+1)\ i\ (1-i) &= (3i+1)(i-i^2)=(3i+1)(i+1)\\ &= 3i^2+3i+i+1\\ &= -3+3i+i+1\\ &= -2+4i.\end{aligned}$$

De manière analogue, les parties réelles et imaginaires de $z=\frac{i}{2i-1}$ sont $2/5$ et $-1/5$, c'est-à-dire

$$z=\frac{i}{2i-1}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i.$$

En effet

$$\frac{i}{2i-1}=i\ \frac{1}{2i-1}=i\ \frac{-1-2i}{2^2+(-1)^2}=\frac{1}{5}(2-i).$$

1.8.4 Module et conjugué d'un complexe

Définition 1.8.7 *Soit $z = (a, b) = a + bi$ un complexe ($a, b \in \mathbb{R}$).*

Le complexe conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le complexe

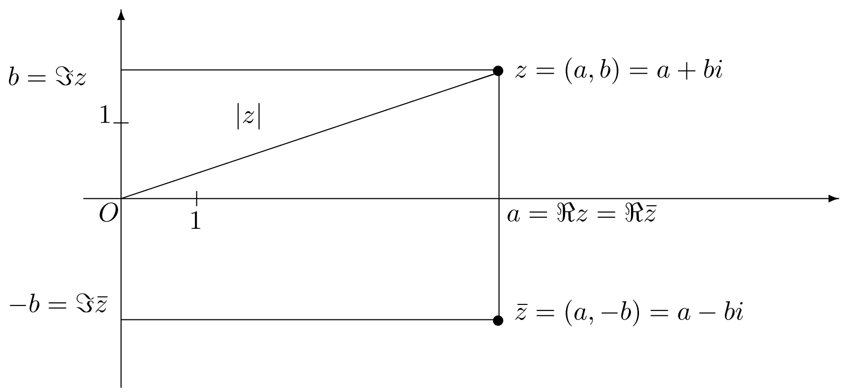
$$\bar{z} = (a, -b) = a - bi$$

c'est-à-dire le complexe qui a la même partie réelle que z mais dont la partie imaginaire est l'opposé de celle de z.

Le module du complexe z, noté $|z|$, est le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

c'est-à-dire la longueur du vecteur d'origine O et dont l'extrémité est le point du plan de coordonnées (a, b).



On vérifie directement les propriétés suivantes.

Propriété 1.8.8 – *$|\overline{z}| = |z|$ pour tout complexe z*
- *$|\Re z| \leq |z|$, $\quad |\Im z| \leq |z|$ pour tout complexe z*
- *$|z|^2 = z\bar{z}$ pour tout complexe z*
- *$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ pour tout complexe non nul z*
- *$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$, $\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ pour tous complexes z_1, z_2*
- *$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ pour tous complexes z_1, z_2.*

On voit aussi directement que

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \Re z, \qquad \frac{z - \bar{z}}{2i} = \Im z$$

pour tout nombre complexe z.

1.8.5 Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème 1.8.9 *On a $z^2 = 0$ si et seulement si $z = 0$.*

Si u est un complexe non nul, alors il possède deux racines carrées opposées. Cela signifie que l'équation en l'inconnue z

$$u = z^2$$

possède exactement deux solutions, qui sont des complexes opposés.

Preuve. Comme le produit de deux complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul, on obtient bien $z^2 = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Dans le cas $u \neq 0$, écrivons

$$u = a + bi, \qquad a = \Re u \in \mathbb{R}, \quad b = \Im u \in \mathbb{R}.$$

Si $b = 0$ et $a > 0$, on a $z^2 = u = a$ si et seulement si $z^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$, ou encore si et seulement si $(z - \sqrt{a})\ (z + \sqrt{a}) = 0$. L'équation $z^2 = a$ avec $a > 0$ a donc les deux solutions réelles $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $b = 0$ et $a < 0$, on a

$$\begin{aligned} z^2 = u = a &\Leftrightarrow z^2 + i^2 a = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - i^2(\sqrt{-a})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - i\sqrt{-a})\ (z + i\sqrt{-a}) = 0. \end{aligned}$$

L'équation $z^2 = a$ avec $a < 0$ a donc les deux solutions $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$, lesquelles sont des nombres complexes imaginaires purs.

Considérons maintenant le cas $b \neq 0$. On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que, en posant $z = x + iy$:

$$z^2 = (x + iy)^2 = u = a + ib.$$

Comme $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, on obtient

$$z^2 = u \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{b}{2x} \\ a = x^2 - \frac{b^2}{4x^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{b}{2x} \\ 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0. \end{array} \right.$$

L'équation $4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$ se résout en posant $X = x^2$. On a

$$4X^2 - 4aX - b^2 = 0 \ \Leftrightarrow X = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \text{ou } X = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

car $\Delta = 16(a^2 + b^2) > 0$. Comme $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$, on trouve finalement

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \ \Leftrightarrow X = x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Il s'ensuit que l'équation de départ possède bien deux solutions opposées.$\square$

En guise d'exemples, cherchons les racines carrées des complexes

$$z_1 = -4, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -5 + 12i.$$

On a $z_1 = 4i^2$; dès lors, les racines carrées de z_1 sont $2i$ et $-2i$.
Cherchons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x + iy)^2 = i$. On a

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 = i &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = x^2 - y^2 \\ 1 = 2xy \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ 1 = 2x^2 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ 1 = -2x^2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ 1 = 2x^2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les deux racines carrées de i sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Cherchons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x + iy)^2 = -5 + 12i$. On a

$$(x+iy)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5 = x^2 - y^2 \\ 6 = xy \end{array} \right.$$

En remplaçant y par $6/x$ dans la première équation, on trouve

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$$

Comme $\Delta = 25 + 4.36 = 169 = 13^2$, cette équation a comme solutions $x = 2$ et $x = -2$. Dès lors, les deux racines carrées de $-5 + 12i$ sont $2 + 3i$ et $-(2 + 3i)$.

1.8.6 Trinôme du second degré

Propriété 1.8.10 *Le polynôme $P(z) = az^2+bz+c$ où a, b, c sont des complexes et $a \neq 0$ admet toujours deux zéros (deux zéros distincts ou un zéro double).*

Plus précisément, si on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et si z_0 est un complexe tel que $z_0^2 = \Delta$ alors les zéros de ce polynôme sont

$$\frac{-b+z_0}{2a}, \quad \frac{-b-z_0}{2a}.$$

Si a, b, c sont réels, et si $\Delta < 0$ alors les zéros sont des complexes conjugués.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} P(z) &= a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{z_0^2}{4a^2}\right) = a\left(z + \frac{b-z_0}{2a}\right)\left(z+\frac{b+z_0}{2a}\right) \\ &= a(z-z_1)(z-z_2) \end{aligned}$$

avec $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0^2 = \Delta$ et

$$z_1 = \frac{-b+z_0}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b-z_0}{2a}.$$

On a $z_1 = z_2$ si et seulement si $\Delta = 0$, auquel cas $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.

Si a, b, c sont réels et $\Delta < 0$ alors z_0 est imaginaire pur. Vu la forme de z_1 et z_2 on a bien $\overline{z_1} = z_2$. □

1.8.7 Forme trigonométrique des complexes

Cette partie sera vue lorsque la fonction exponentielle sera présentée (les fonctions sinus et cosinus s'introduisent en toute rigueur, sans dessin, à partir de la fonction exponentielle ; bien sûr leur interprétation graphique sur un cercle trigonométrique permet de retrouver la définition géométrique que nous avons donnée précédemment).

1.9 Représentations graphiques

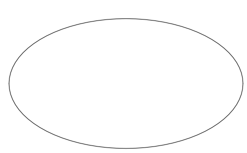
Insistons encore sur l'importance de pouvoir manipuler les descriptions géométriques (dessins, lieux) et analytiques (à l'aide de coordonnées cartésiennes, parfois en utilisant aussi un, plusieurs paramètres) d'ensembles.

Dans toute situation pratique, c'est le passage entre les deux descriptions qui permet de bien comprendre et de résoudre au mieux les problèmes (voir dans les autres cours, dans les listes d'exercices, dans la suite du cours, notamment le calcul intégral à une et plusieurs variables, ...)

1.9.1 Cas général

Un ensemble de points du plan peut être représenté *géométriquement* (c'est-à-dire par un dessin) ou encore *analytiquement* (c'est-à-dire en utilisant des coordonnées cartésiennes), lorsqu'un repère est fixé. Il est important de pouvoir passer d'une représentation à l'autre.

Par exemple, nous venons de définir ce que l'on entend par ellipse.



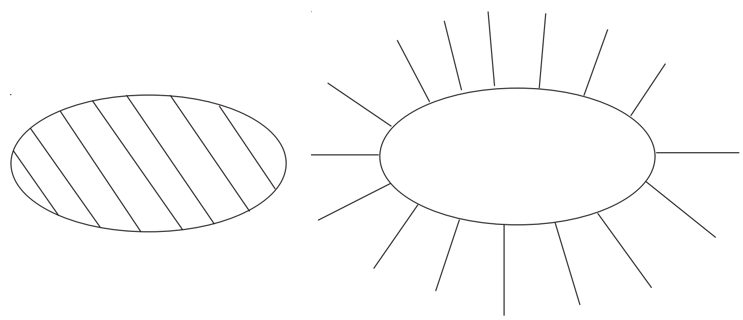
Lorsque le repère est bien choisi, l'ensemble des points de l'ellipse $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ c'est-à-dire que l'ellipse $\mathcal{E}$ est décrite analytiquement par

$$\left\{(x, y)\ :\ x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

Quant aux ensembles décrits analytiquement par

$$\left\{(x, y)\ :\ x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \qquad \left\{(x, y)\ :\ x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\right\}$$

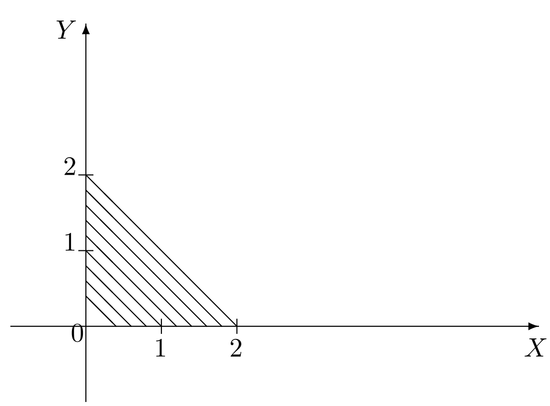
ils se représentent géométriquement respectivement par les parties hachurées ci-dessous



Considérons un autre exemple : on fixe un repère orthonormé et on considère l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points situés dans le premier quadrant et dont la somme des coordonnées est inférieure ou égale à 2. La représentation analytique de cet ensemble est

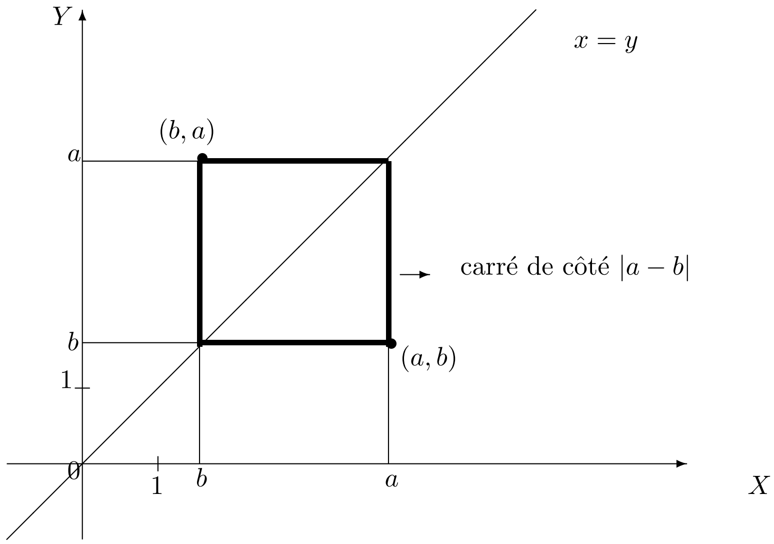
$$\{(x, y)\ :\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}.$$

La représentation géométrique (graphique) est la partie du plan hachurée ci-dessous



1.9.2 Points symétriques par rapport à la première bissectrice

Il est aussi fort important (cf définition et propriétés de la fonction inverse dans le chapitre suivant) de bien se représenter géométriquement dans un repère orthonormé les points de coordonnées (a, b) et (b, a). Il s'agit en fait de deux points symétriques (orthogonalement) par rapport à la droite d'équation cartésienne $y = x$ (encore appelée première bissectrice des axes).



1.10 Bornes supérieure et inférieure

Définir la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble de réels contenant un nombre fini d'éléments se fait de façon très naturelle et aisée.

Soit $\{r_1, \ldots, r_J\}$ un ensemble contenant un nombre fini de réels. Si on compare ces nombres les uns aux autres, on peut toujours en trouver un plus grand que tous les autres. De même, on peut toujours en trouver un plus petit que tous les autres. Dans le premier cas, le nombre sélectionné est appelé la *borne supérieure* de $\{r_1, \ldots, r_J\}$ et, dans le second cas, la *borne inférieure* de $\{r_1, \ldots, r_J\}$. Les notations utilisées sont

$$\sup_{1\leq j\leq J} r_j \quad \text{ou} \quad \sup\{r_1, \ldots, r_J\}$$

pour la borne supérieure et

$$\inf_{1\leq j\leq J} r_j \quad \text{ou} \quad \inf\{r_1, \ldots, r_J\}$$

pour la borne inférieure.

La notion générale de borne supérieure ou inférieure d'un ensemble quelconque de réels est plus délicate à introduire. Si l'idée est toujours d'"aller chercher le plus grand" ou "le plus petit" des nombres de l'ensemble, on voit en effet intuitivement que les choses ne se passent pas aussi facilement. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de se poser cette question pour les ensembles

$$]0, 1], \quad [-1, +\infty[, \quad] - \infty, 2], \quad \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}_0\}.$$

Comme on a l'idée d'aller chercher "le plus grand" (resp. "le plus petit") nombre d'un ensemble non vide A de réels, il est naturel de demander que A soit "majoré" (resp. minoré). On donne les définitions précises suivantes.

Définition 1.10.1 *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On dit que*
a) A est majoré s'il existe un réel R tel que $A \subset]-\infty, R]$, c'est-à-dire tel que

$$x \leq R, \quad \forall x \in A.$$

Un tel nombre R est alors appelé un majorant (ou une majorante) de A ;
b) A est minoré s'il existe un réel r tel que $A \subset [r, +\infty[$, c'est-à-dire tel que

$$x \geq r, \quad \forall x \in A.$$

Un tel nombre r est alors appelé un minorant (ou une minorante) de A ;
c) A est borné si A est à la fois majoré et minoré[34].

Cela étant, si R (resp. r) est un majorant (resp. minorant) de A, tout réel plus grand (resp. plus petit) l'est aussi. Mais il n'en va pas nécessairement de même pour des réels plus petits (resp. plus grands). On en arrive alors aux définitions suivantes.

Définition 1.10.2 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est majorée. Un réel M est appelé borne supérieure de A lorsque les deux conditions suivantes sont remplies*

- *M est un majorant de A*
- *pour tout autre majorant R de A, on a $M \leq R$.*

Définition 1.10.3 *Si A une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est minorée, un réel m est appelé borne inférieure de A lorsque les deux conditions suivantes sont remplies*

- *m est un minorant de A*
- *pour tout autre minorant r de A, on a $m \geq r$.*

On démontre qu'une partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède toujours une borne supérieure (resp. inférieure) unique.

Les notations employées pour désigner les bornes supérieure et inférieure de A sont respectivement

$$\sup_{a\in A} a = \sup\{a : \ a \in A\}, \quad \inf_{a\in A} a = \inf\{a : \ a \in A\}.$$

En d'autres termes, on peut aussi traduire les définitions précédentes de la manière suivante :
M est la borne supérieure de A si M est le plus petit des majorants de A ;
m est la borne inférieure de A si m est le plus grand des minorants de A.

Exemples

L'ensemble $]0, 1]$ est minoré et majoré, donc borné. Sa borne inférieure est 0 et sa borne supérieure est 1. Remarquons que la borne inférieure n'appartient pas à l'ensemble mais que la borne supérieure lui appartient bien.

L'ensemble $[-1, +\infty[$ est minoré et non majoré. Il admet la borne inférieure -1 (qui est un élément de l'ensemble).

L'ensemble $\{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}_0\}$ est minoré et majoré, donc borné. Sa borne inférieure est 0 (qui n'est pas un élément de l'ensemble) et sa borne supérieure est 1 (qui est un élément de l'ensemble).

L'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels est minoré et non majoré. Sa borne inférieure est 0 (qui est un élément de l'ensemble).

L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, 4]$ (c'est-à-dire l'ensemble des rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et 4) est minoré et majoré, donc borné. Sa borne inférieure est $\sqrt{2}$ (qui n'est pas un élément de l'ensemble) et sa borne supérieure est 4 (qui est un élément de l'ensemble).

Les définitions précédentes permettent d'obtenir facilement les propriétés suivantes.

Propriété 1.10.4 *1) S'il existe $a \in A$ qui soit majorant de A, alors a est la borne supérieure de A.*
2) S'il existe $a \in A$ qui soit minorant de A, alors a est la borne inférieure de A.

Dans ces cas, on dit que

la borne supérieure (resp. inférieure) est réalisée.

Dans le premier cas, on dit aussi que a est un *maximum* de A et, dans le second, que a est un *minimum* de A.

34. Vu les définitions précédentes, il est direct de voir que A est borné si et seulement s'il existe un réel $R > 0$ tel que $|x| \leq R$ pour tout $x \in A$.

Chapitre 2

Etude des fonctions d'une variable réelle

2.1 Définitions de base

2.1.1 Fonction, domaine, image, graphe, graphique

Une *fonction réelle d'une variable réelle* est une loi, une règle qui, à tout élément d'une partie A de $\mathbb{R}$ associe un réel unique. On dit que la fonction est définie sur A et que A est le *domaine de définition* de la fonction. Si la fonction est notée f, on désigne souvent ce domaine par la notation $\mathrm{dom}(f)$.

Par exemple, la fonction qui, à tout réel, associe son double diminué d'une unité est la loi

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto 2x - 1$$

ou encore, par exemple,

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; y \mapsto 2y - 1.$$

La fonction qui, à tout réel, associe la racine carrée de son carré augmenté de deux unités est la loi

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$$

ou encore

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; t \mapsto \sqrt{t^2 + 2}.$$

La fonction qui, à tout réel strictement inférieur à -1, associe son opposé et qui, à tout réel supérieur ou égal à -1 associe son carré est la loi

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

ou encore

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; u \mapsto \begin{cases} -u & \text{si } u < -1 \\ u^2 & \text{si } u \geq -1. \end{cases}$$

On désigne une fonction en toute généralité de la façon suivante

$$f \;:\; A \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto f(x)$$

ou tout simplement f si le contexte est clair.

Il faut bien souligner que la notation pour la variable est totalement libre ; on parle de notation ou de variable muette. Une fonction f définie sur A est ainsi notée également

$$f(x),\; x \in A \text{ ou encore } f(y),\; y \in A, \ldots$$

Il faut bien insister sur le fait que la fonction n'est pas $f(x)$; cette notation est utilisée pour représenter la valeur de la fonction f au point x de son domaine ; $f(x)$ est donc un réel.

L'*image* d'une fonction f de domaine $A = \mathrm{dom}(f)$ est l'ensemble des réels $f(x)$ lorsque x appartient au domaine de la fonction ; on désigne cet ensemble par $\mathrm{im}(f)$:

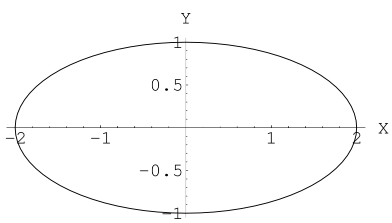
$$\mathrm{im}(f) = \{f(x) \ : \ x \in \mathrm{dom}(f)\}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble des couples de réels

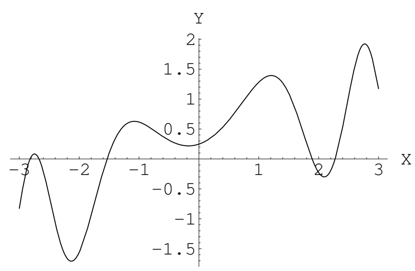
$$\{(x, f(x)) \ : \ x \in \mathrm{dom}(f)\}.$$

La représentation graphique, ou simplement *graphique* de f, est la représentation géométrique de son graphe (i.e. le "dessin").

Dans le plan muni d'un repère, on peut voir facilement si une figure G donnée est en fait la représentation graphique d'une fonction dont le domaine est une partie de X . On considère l'ensemble A des abscisses des points représentés ; d'un réel quelconque $x \in A$, on mène la parallèle à l'axe Y ; pour que la figure soit la représentation d'une fonction de domaine A, il faut et il suffit que chaque parallèle rencontre la figure une et une seule fois.



Ceci n'est pas le graphique d'une fonction.

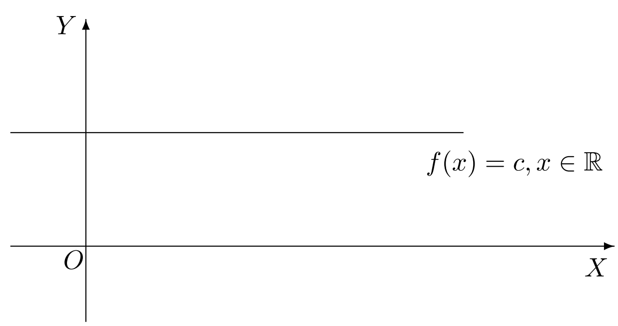


Ceci est le graphique d'une fonction.

Deux fonctions f, g définies sur A sont *égales sur A* lorsqu'elles prennent les mêmes valeurs en tout point de A ; ceci s'exprime donc par $f(x) = g(x), \ x \in A$.

2.1.2 Trois exemples fondamentaux

1) La représentation graphique d'une fonction constante (on parlera aussi de polynôme de degré 0) est une droite parallèle à l'axe des X.

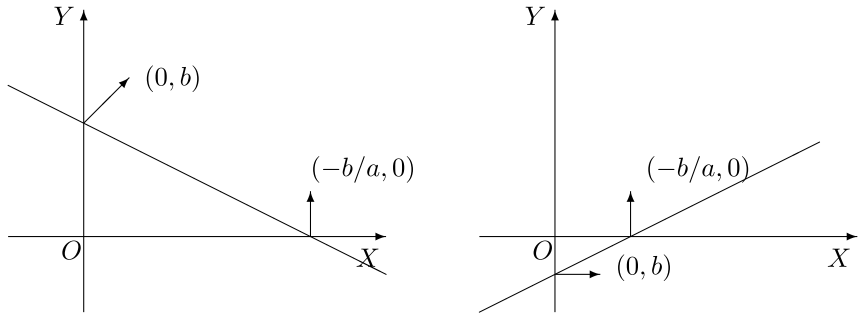


2) Un polynôme du premier degré (à coefficients et variable réels) est une fonction du type

$$f(x) = ax + b, \ x \in \mathbb{R}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

La représentation graphique de f est une droite non parallèle aux axes ; le coefficient angulaire de cette droite est a. Voici les divers cas qui peuvent se présenter en fonction du signe du réel a.

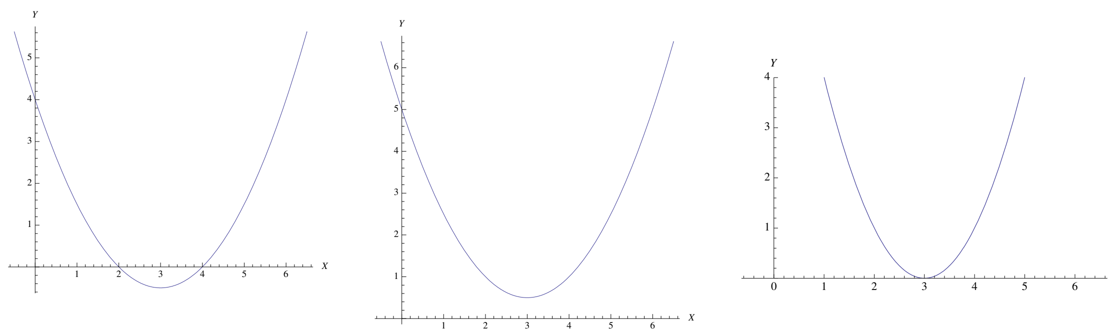


Représentation de la fonction $f(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$;
la figure de gauche correspond au cas $a < 0$ et celle de droite au cas $a > 0$.

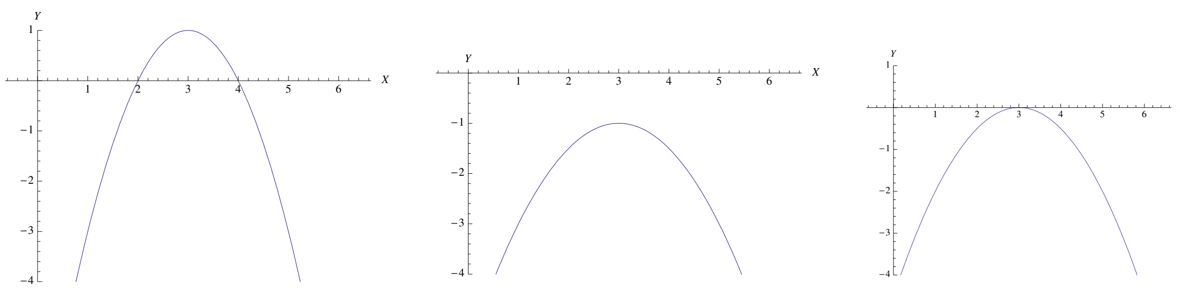
3) Un polynôme du deuxième degré (à coefficients et variable réels) est une fonction du type

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in \mathbb{R}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$; dans ce cas, on parle souvent de trinôme (du second degré). La représentation graphique de f est une parabole[1] d'axe parallèle à Y. Voici les divers cas qui peuvent se présenter en fonction du signe de a et de $\Delta = b^2 - 4ac$.



Cas $a > 0$ et, respectivement, $\Delta > 0,\ < 0,\ = 0$.



Cas $a < 0$ et, respectivement, $\Delta > 0,\ < 0,\ = 0$.

2.1.3 Opérations sur les fonctions

Somme, produit, quotient

Soient f, g deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$.

La somme de ces deux fonctions est la loi qui, à tout réel x de A, associe le réel $f(x) + g(x)$. On note cette nouvelle fonction $f + g$. Autrement dit, la somme des fonctions f et g définies sur A est la fonction

$$f + g\ :\ x \in A \mapsto f(x) + g(x).$$

1. Voir l'annexe pour la preuve.

Le produit de ces deux fonctions est la loi qui, à tout réel x de A, associe le réel $f(x)g(x)$. On note cette nouvelle fonction $f.g$ ou encore fg. Autrement dit, le produit des fonctions f et g définies sur A est la fonction

$$fg \ : \ x \in A \mapsto f(x)g(x).$$

Dans le cas où f est constant, par exemple $f(x) = c, \ x \in A$, le produit fg est simplement

$$cg \ : \ x \in A \mapsto cg(x).$$

Si g ne s'annule pas sur A, le quotient de f et g est la loi qui, à tout réel de A, associe le réel $f(x)/g(x)$. On note cette nouvelle fonction f/g ou encore $\frac{f}{g}$. Autrement dit, le quotient des fonctions f et g définies sur A, en supposant que g ne s'y annule pas, est la fonction

$$\frac{f}{g} \ : \ x \in A \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Fonction de fonction ou composition de fonctions dans le cadre d'une variable.

Soit une fonction f de domaine $\mathrm{dom}(f)$ et une fonction g définie sur une partie B du domaine de définition de g de telle sorte que lorsque x est un élément de B, le nombre $g(x)$ appartienne au domaine de définition de f. Autrement dit, on a l'inclusion

$$\{g(x) \ : \ x \in B\} \subset \mathrm{dom}(f).$$

Dans ces conditions, on définit la fonction qui, à tout réel x de B associe le réel

$$f(g(x)) = (fog)(x).$$

On note cette nouvelle fonction

$$fog.$$

On dit que cette fonction est une fonction de fonction ou encore une fonction composée car on la définit à partir de f que l'on évalue en les réels qui s'écrivent $g(x)$, c'est-à-dire en des réels qui font partie de l'image de g. On a donc

$$fog \ : \ x \in B \ \mapsto \ f(g(x)).$$

En pratique, on donne f et g de façon analytique ; on doit alors déterminer les domaines de définition de chacune de ces fonctions et l'ensemble B de telle sorte que la condition d'inclusion ci-dessus soit remplie. Le plus grand ensemble B possible est

$$B = \{x \in \mathrm{dom}(g) \ : \ g(x) \in \mathrm{dom}(f)\}.$$

Ainsi par exemple, soit à chercher le domaine de définition de

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}.$$

On a ici $g(x) = x^2 + 2x - 3$, fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = \sqrt{x}$, fonction définie sur $[0, +\infty[$. On a

$$B = \{x \in \mathrm{dom}(g) = \mathbb{R} \ : \ g(x) = x^2 + 2x - 3 \in \mathrm{dom}(f) = [0, +\infty[\}.$$

L'étude du signe du polynôme $x^2 + 2x - 3$ permet de dire que

$$B =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[.$$

2.1.4 Quelques types de fonctions

Il est bien utile de distinguer des propriétés particulières des fonctions que l'on doit étudier ; l'étude en est bien souvent facilitée, allégée.

Fonction monotone

Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. On dit que cette fonction est monotone sur A lorsqu'elle y est soit croissante, soit décroissante. Les définitions de la croissance et de la décroissance figurent ci-dessous.

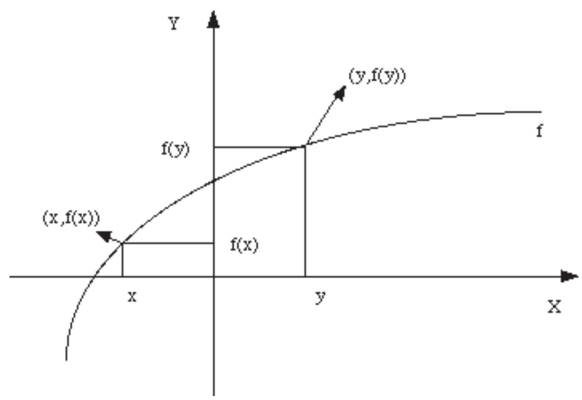
La fonction f est croissante sur A lorsque

$$x, y \in A \text{ et } x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

Cela signifie que chaque fois que l'on prend deux réels distincts de A, alors la relation d'ordre entre ces réels est conservée entre leurs images.

Elle est strictement croissante lorsque

$$x, y \in A \text{ et } x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y).$$



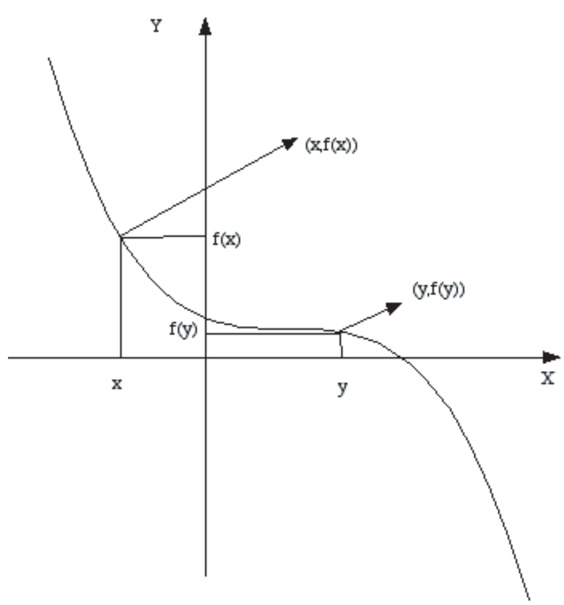
La fonction f est décroissante sur A lorsque

$$x, y \in A \text{ et } x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y).$$

Cela signifie que chaque fois que l'on prend deux réels distincts de A, alors la relation d'ordre entre ces réels est renversée entre leurs images.

Elle est strictement décroissante lorsque

$$x, y \in A \text{ et } x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y).$$



On montre directement que f est croissant sur A si et seulement si $-f$ est décroissant sur A.

Fonction concave ; fonction convexe.

Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et soit I un intervalle inclus dans A.
La fonction f est <u>convexe</u> sur I lorsque

$$x_0, x_1 \in I \text{ et } r \in [0,1] \quad \Rightarrow f(x_0 + r(x_1 - x_0)) \leq f(x_0) + r(f(x_1) - f(x_0)).$$

Interprétons cette définition. Lorsque $x_0 \neq x_1$, la droite d joignant les points Q, R du graphique de f d'abscisse x_0 et d'abcsisse x_1 a pour équations paramétriques cartésiennes

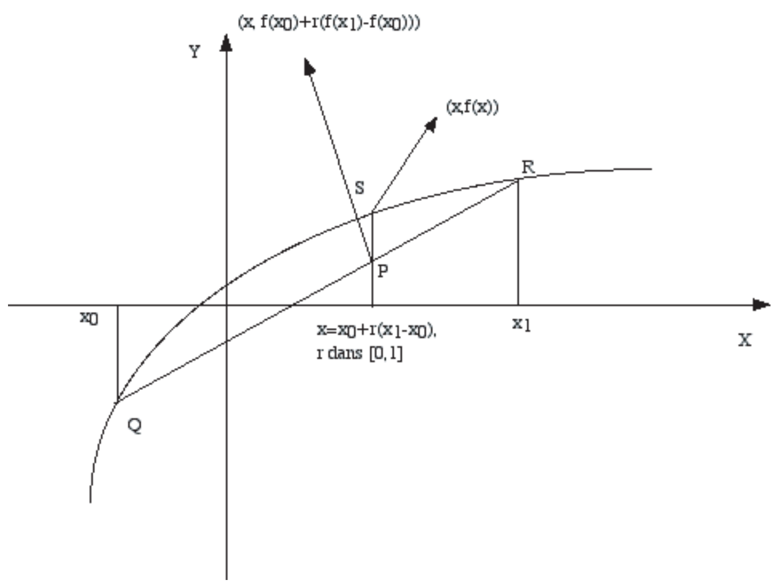
$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + r(x_1 - x_0) \\ y = f(x_0) + r(f(x_1) - f(x_0)) \end{array} \right. \qquad r \in \mathbb{R};$$

pour $x = x_0 + r(x_1 - x_0)$, l'ordonnée du point P d'abscisse x de cette droite est donc $f(x_0) + r\,(f(x_1) - f(x_0))$. Dès lors, la définition de la convexité signifie que, quels que soient les points x_0, x_1 de l'intervalle I où f est défini et quel que soit le réel x compris entre ceux-ci, la valeur de l'ordonnée du point S du graphique de f d'abscisse x est inférieure ou égale à la valeur de l'ordonnée du point P d'abscisse x de d. Intuitivement on peut dire que “entre deux points, le graphique de f est en dessous de la sécante joignant ces deux points”.

La fonction f est <u>concave</u> sur I lorsque

$$x_0, x_1 \in I \text{ et } r \in [0,1] \quad \Rightarrow f(x_0 + r(x_1 - x_0)) \geq f(x_0) + r(f(x_1) - f(x_0)).$$

Interprétons cette définition. De même que ci-dessus, l'ordonnée du point P d'abscisse x de d est $f(x_0) + r\,(f(x_1) - f(x_0))$. Dès lors, la définition de la concavité signifie que, quels que soient les points x_0, x_1 de l'intervalle I où f est défini et quel que soit le réel x compris entre ceux-ci, la valeur de l'ordonnée du point S du graphique de f d'abscisse x est supérieure ou égale à la valeur de l'ordonnée du point P d'abscisse x de d. Intuitivement on peut dire que “entre deux points, le graphique de f est au-dessus de la sécante joignant ces deux points”.

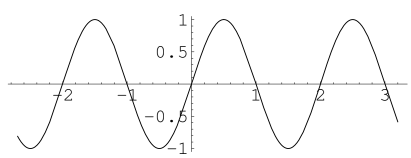


On montre directement que f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Fonction périodique

Une fonction f définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dite *périodique de période* T lorsque $x + T \in A$, $\forall x \in A$ et

$$f(x) = f(x+T), \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$



Fonction définie sur $\mathbb{R}$ périodique de période 2 (il s'agit de la fonction $\sin(\pi x)$)

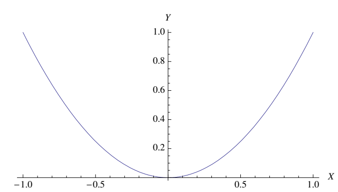
La période est le plus petit réel positif vérifiant la propriété ci-dessus.

Fonction paire ; fonction impaire

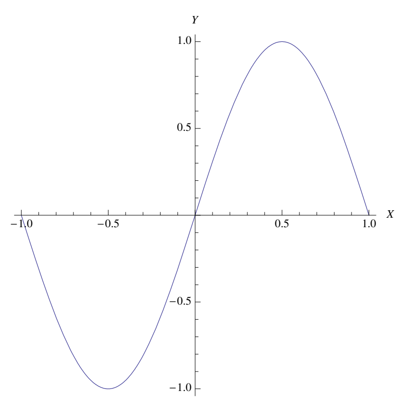
Une fonction f de domaine A est
- *paire* si $x \in A \Rightarrow -x \in A$ et si $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in A$
- *impaire* si $x \in A \Rightarrow -x \in A$ et si $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in A$.

Toute fonction se décompose de façon unique en une somme entre une fonction paire et une fonction impaire. La démonstration est laissée au lecteur.

La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Y ; celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Fonction paire. Il s'agit ici de $f(x) = x^2$ $x \in [-1, 1]$; cette fonction est convexe.



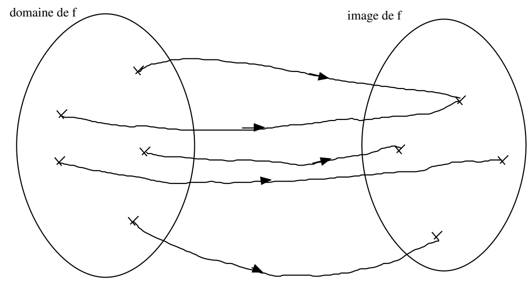
Fonction impaire. Il s'agit de $f(x) = \sin(\pi x)$ $x \in [-1, 1]$; cette fonction est convexe sur $[-1, 0]$ et concave sur $[0, 1]$

2.1.5 Fonction inverse

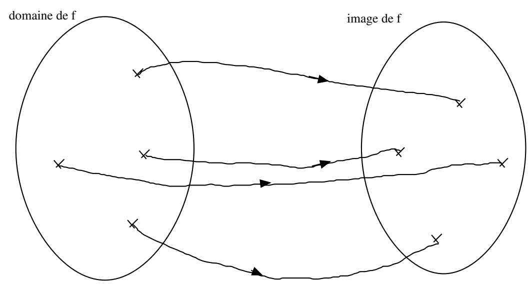
Introduction

Dans diverses situations, quand on a une fonction f, on aimerait pouvoir exprimer x en fonction de y lorsque $y = f(x)$ et ainsi définir une nouvelle fonction, que nous appellerons *fonction inverse, ou réciproque, de la fonction f*. Ce n'est pas toujours possible, comme le montrent les exemples suivants.

1) L'ensemble de gauche représente le domaine d'une fonction f et l'ensemble de droite son image.



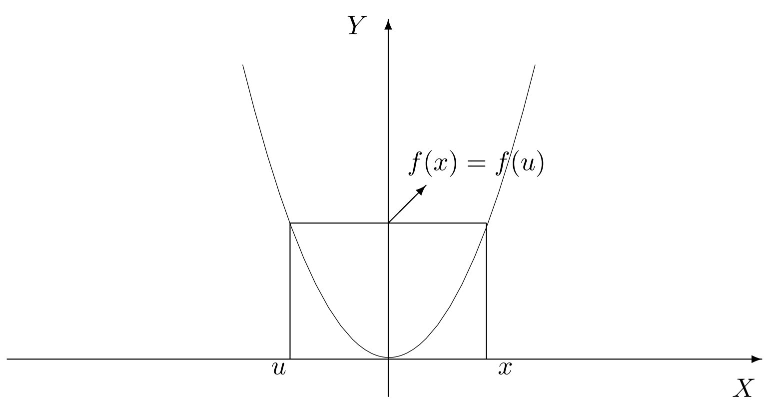
Il n'est pas possible de définir la fonction inverse de f

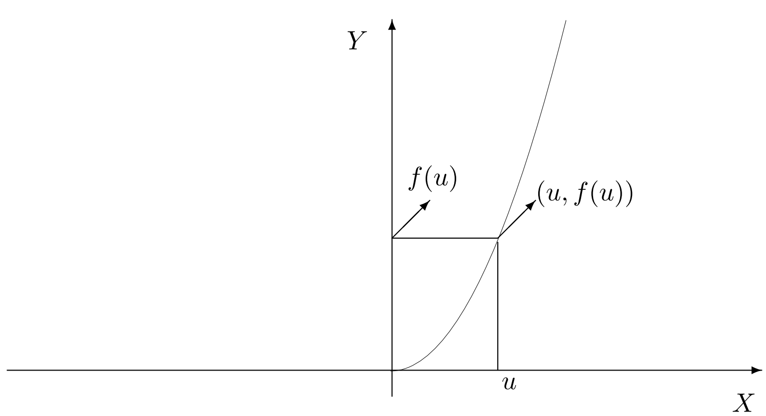


Il est possible de définir la fonction inverse de f

2) Voici la représentation de la fonction $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ puis de la fonction $f(x) = x^2,\ x \in [0, +\infty[$ dans un repère orthonormé.

Dans le premier cas, il n'est pas possible de définir la fonction inverse. Dans le second cas, il est possible de la définir.





3) Ainsi, pour définir l'inverse d'une fonction, il faut et il suffit que *les images de deux réels distincts du domaine soient dictinctes*

ou encore, de manière équivalente, il faut et il suffit que

tout réel de l'image provienne d'un et d'un seul réel du domaine.

Mathématiquement, cela s'écrit

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}(f): \ x \neq y \ \Rightarrow \ f(x) \neq f(y)$$

ou, de manière équivalente

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}(f): \ f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y.$$

Graphiquement, cela signifie que toute droite parallèle à l'axe X rencontre le graphique de f en un point au plus.

Définition : fonction injective

Une fonction f de domaine $A = \mathrm{dom}(f)$ qui est telle que

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}(f): \ f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y$$

est appelée une

fonction injective sur A.

On dit aussi que $f : A \to \mathbb{R}$ est une *injection.*

Ainsi, dans le paragraphe précédent, la fonction représentée en second lieu en 1) et la fonction $f(x) = x^2, \ x \in [0, +\infty[$ donnée dans 2) sont injectives.

Définition : fonction inverse

Vu ce qui précède, on peut donner la définition de l'inverse d'une fonction injective.
Soit f une fonction injective de domaine $\mathrm{dom}(f)$.

La *fonction inverse de* f est la fonction dont le domaine est l'image de f et qui, à tout réel $y \in \mathrm{im}(f)$ associe le réel $x \in dom(f)$ tel que $y = f(x)$. On désigne souvent cette fonction par f^{-1}. En d'autres termes,

$$\boxed{y \in \mathrm{im}(f) \text{ et } y = f(x), x \in \mathrm{dom}(f) \ \Rightarrow \ f^{-1}(y) = x.}$$

Cette définition a bien un sens car la fonction f est une injection.

Par exemple, la fonction $f(x) = x^2, \ x \in [0, +\infty[$ est injective car si x, y sont deux réels positifs tels que $x^2 = y^2$ alors $x = y$; l'image de f est l'intervalle $[0, +\infty[$ car f est à valeurs positives et tout réel positif peut s'écrire comme le carré d'un réel positif. Cela étant, la fonction inverse de f est la fonction

$$\mathrm{im}(f) = [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad y \mapsto \sqrt{y}$$

car $y = x^2$ et $x \geq 0$ implique $x = \sqrt{y}$. Bien sûr, cet inverse se note aussi

$$\mathrm{im}(f) = [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

ou encore, par exemple,

$$\mathrm{im}(f) = [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \sqrt{t}.$$

De même, la fonction $f(x) = 3x - 2, \ x \in \mathbb{R}$ est injective [2] et son image [3] est $\mathbb{R}$. Cela étant, son inverse est la fonction

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

car si $y = 3x - 2$ alors $x = \frac{y}{3} + \frac{2}{3}$.

Insistons ici fortement sur le fait que **l'inverse de la fonction f n'est PAS la fonction $\frac{1}{f}$! ! !**

2. car si x, y sont des réels tels que $3x - 2 = 3y - 2$ alors $3x = 3y$ donc $x = y$
3. car elle est à valeurs réelles et tout réel u s'écrit $u = 3(u/3 + 2/3) - 2 = f(u/3 + 2/3)$

Définition : fonction surjective, bijection

Soit f une fonction de domaine A, à valeurs dans un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$. Par définition, on dit que

$$f\ :\ A \to B \textit{ est une fonction surjective ou encore est une surjection} \text{ si } B = \mathrm{im}(f).$$

On voit donc qu'il est très aisé de rendre une fonction surjective : il suffit de spécifier son image ! Ainsi, pour toute fonction f de domaine $\mathrm{dom}(f)$, la fonction

$$f\ :\ \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(f)$$

est surjective.

On dit que

$$f\ :\ A \to B \text{ est une } \textit{bijection}$$

ou encore une *fonction bijective*

$$\text{si } f \text{ est une injection de domaine } A \text{ et d'image égale à } B.$$

Dès lors, si f est une fonction injective de domaine $A = \mathrm{dom}(f)$, la fonction

$$f\ :\ \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(f)$$

est une bijection.

Rechercher la fonction inverse de la fonction injective

$$f : A \to \mathbb{R}$$

revient donc à rechercher la fonction inverse de la fonction bijective

$$f : A \to \mathrm{im}(f).$$

Voici quelques exemples supplémentaires.

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$ n'est ni injective ni surjective.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[\quad x \mapsto x^2$ n'est pas injective mais est surjective.
- La fonction $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$ est injective mais n'est pas surjective.
- La fonction $f :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[\quad x \mapsto x^2$ est injective et surjective.

Propriétés de la fonction inverse d'une fonction injective

Etudions les propriétés immédiates de la fonction inverse de f. Elles se démontrent directement à partir de la définition.

1) Vu la définition on obtient directement

$$(f^{-1} o f)(x) = x \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f). \qquad (*)$$

En appliquant f à la dernière égalité de la définition, on trouve aussi

$$(f o f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in \mathrm{im}(f). \qquad (**)$$

2) Voici d'autres propriétés, lesquelles se démontrent aussi de manière immédiate.

- Le domaine de f^{-1} est l'image de f (c'est-à-dire $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$).
- L'image de f^{-1} est le domaine de f (c'est-à-dire $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$).
- La fonction f^{-1} est une injection.
  En effet : si $f^{-1}(u) = f^{-1}(v)$ avec $u, v \in \mathrm{im}(f)$ alors $u = f(f^{-1}(u)) = f(f^{-1}(v)) = v$ vu (**).

– La fonction $f(x),\ x \in \mathrm{dom}(f)$ est la fonction inverse de $f^{-1}(x),\ x \in \mathrm{im}(f)$. On a donc $(f^{-1})^{-1} = f$.
En effet, soit $y \in \mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$; si $x \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$ est tel que $f^{-1}(x) = y$ alors, par (**), on a $(f^{-1})^{-1}(y) = x = f(y)$.
– Dans un repère orthonormé, le graphique de f^{-1} est la figure symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice.
Pour s'en convaincre, il suffit en effet d'écrire le graphe de f de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\{(x, f(x))\ :\ x \in \mathrm{dom}(f)\} &= \{(f^{-1}(f(x)), f(x))\ :\ x \in \mathrm{dom}(f)\}\\ &= \{(f^{-1}(y), y)\ :\ y = f(x), x \in \mathrm{dom}(f)\}\\ &= \{(f^{-1}(y), y)\ :\ y \in \mathrm{im}(f)\}\end{aligned}$$

et de se rappeler que le symétrique par rapport à la première bissectrice du point du plan de coordonnées (a, b) est le point du plan de cordonnées (b, a).

Une étude pratique des fonctions injectives et des fonctions inverses sera effectuée dans la suite du cours.

3) Pour trouver l'inverse d'une fonction dans de nombreux cas, on peut utiliser tout simplement le résultat suivant, qui résulte immédiatement d'un examen un peu approfondi de la définition de l'inverse.

Propriété 2.1.1 *Soit* $f\ :\ \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(f)$.
1) Si g est une fonction dont le domaine est égal à l'image de f et qui vérifie

$$(gof)(x) = x \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f) \quad (1)$$

alors g est l'inverse de f.
2) Si g est une fonction vérifiant[4]

$$(i)\ (gof)(x) = x \quad \forall x \in \mathrm{dom}(f) \quad \text{et} \quad (ii)\ (fog)(x) = x \quad \forall x \in \mathrm{dom}(g)$$

alors g est l'inverse de f.

Preuve. 1) La relation (1) implique l'injectivité de f. De plus, comme le domaine de g est $\mathrm{im}(f)$, cette relation entraîne également que $g = f^{-1}$, par définition de l'inverse.
2) La relation (i) sous-entend que $\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$; la relation (ii) implique que $\mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{im}(f)$. Dès lors $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f)$ et on applique 1). $\square$

Remarquons que les conditions $(i), (ii)$ ci-dessus peuvent aussi s'écrire

$$y = f(x),\ x \in \mathrm{dom}(f) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y),\ y \in \mathrm{dom}(g).$$

Faisons encore quelques remarques, à démontrer en guise d'exercice.
Si f est strictement monotone sur un intervalle alors f est injectif sur cet intervalle.
Si f est bijectif et monotone, il s'agit nécessairement d'une monotonie stricte et l'inverse de f a la même propriété. Cependant, pour la concavité, cela dépend de la monotonie de f.

Exemples supplémentaires

A titre d'exemple, cherchons (si elle existe) la fonction inverse de chacune des fonctions suivantes

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x - 2, \quad f_4(x) = \frac{1}{x+1}.$$

On applique chaque fois la propriété 2.1.1.
Le domaine de f_1 est $\mathbb{R}$, de même que son image. Comme $(f_1 o f_1)(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$, on a $f^{-1} = f_1$.
Le domaine de f_2 est $\mathbb{R}$ et son image est $[0, +\infty[$. Comme $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout réel x, on a $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$ et $-\sqrt{x^2} = x$ si $x \leq 0$. L'image de f_2, restreinte au domaine $[0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0]$ est encore $[0, +\infty[$. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$, de domaine $[0, +\infty[$, est donc l'inverse de f_2 restreinte au domaine $[0, +\infty[$; de même la fonction $g(x) = -\sqrt{x}$, de domaine $[0, +\infty[$, est l'inverse de f_2 restreinte au domaine $]-\infty, 0]$. La fonction f_2 n'a donc pas d'inverse lorsqu'on la considère de domaine $\mathbb{R}$, ni lorsqu'on la restreint à un domaine du type $[a, b]$ ou $]a, b[$ avec $a < 0 < b$ (on voit d'ailleurs immédiatement qu'elle n'est pas injective sur ces domaines).

4. ce qui sous-entend que le domaine de g contient l'image de f et que le domaine de f contient l'image de g

Le domaine de f_3 est $\mathbb{R}$, de même que son image. On a $f_3(x)+2=x$ pour tout réel x ; il s'ensuit que l'inverse de f_3 est la fonction $g(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Le domaine de f_4 est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Si on prend $x\neq -1$ et que l'on pose $y=f_4(x)=\frac{1}{x+1}$, on a $y\neq 0$ et $x=\frac{1}{y}-1$. La fonction $g(y)=\frac{1}{y}-1$, de domaine $\mathbb{R}_0$ est donc l'inverse de f_4, pour autant que [5] l'image de f_4 soit exactement $\mathbb{R}_0=\mathrm{dom}(g)$ (sinon il faut restreindre le domaine de g). Comme on a $(fog)(y)=y$ pour tout $y\in\mathbb{R}_0=\mathrm{dom}(g)$ on conclut.

2.2 Fonctions élémentaires

Maintenant que les premiers concepts et définitions fondamentaux relatifs aux fonctions ont été présentés, il est naturel de donner les exemples des *fonctions élémentaires.*

Nous aurons l'occasion d'y revenir très bientôt et d'en affiner l'étude lorsque les notions de limite, de dérivée, de primitive, auront été clairement définis et lorsque leurs propriétés de base auront été démontrées (parfois laissées sous forme d'exercices, ou de seconde lecture).

En bref, les fonctions dites "élémentaires" sont les suivantes

– polynômes
– fractions rationnelles
– fonctions irrationnelles
– fonctions trigonométriques
– fonctions trigonométriques inverses
– fonctions exponentielle et logarithme

Dans ce qui précède, nous avons déjà rencontré des polynômes, fractions rationnelles, fonctions irrationnelles, fonctions trigonométriques ; grâce à la notion d'inverse de fonction (section précédente), nous allons définir les *fonctions trigonométriques inverses.*

Quand à la fonction exponentielle, nous en donnerons une définition rigoureuse dans un des chapitres qui suivent (à partir des séries). Ici, nous nous contentons d'en rappeler les premières propriétés et d'en déduire la définition de la fonction logarithme (fonction inverse de la fonction exponentielle).

Insistons encore sur le fait que ces fonctions élémentaires seront étudiées plus en détails dans ce qui suit, en utilisant les outils que nous allons introduire (limite, dérivée, primitive).

2.2.1 Polynômes

DÉFINITIONS

Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles, on appelle *polynôme* une fonction définie comme étant une somme finie de multiples réels de puissances entières positives d'une variable réelle [6]. Un polynôme est donc toujours défini sur $\mathbb{R}$. Sauf dans le cas où tous les coefficients sont nuls, il s'écrit

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_Nx^N,\quad x\in\mathbb{R}$$

ou encore

$$P(x)=\sum_{j=0}^{N}a_jx^j,\quad x\in\mathbb{R}$$

avec $a_j\in\mathbb{R}\ \forall 0\leq j\leq N$, $a_N\neq 0$; N est alors le *degré* du polynôme. Par extension, on dit que la fonction 0 (cas où tous les coefficients sont nuls) est un polynôme de degré 0.

On démontre que les coefficients d'un polynôme sont uniques. En particulier on a donc

$$a_0+a_1x+\ldots+a_Nx^N=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow a_j=0\ \forall j=0,\ldots,N.$$

5. Par exemple, l'inverse de la fonction $f(x)=x^2,\ x\in[0,2]$ est la fonction $g(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,4]$ et non pas la fonction $\sqrt{\ }$ de domaine $[0,+\infty[$; cela sera très important notamment dans le calcul d'intégrales.

6. Lorsqu'on travaille dans le cadre complexe, on définit un polynôme comme étant une somme (finie) de multiples complexes de puissances entières positives d'une variable complexe.

Un *zéro* réel d'un polynôme (on dit aussi parfois racine réelle) est un réel a qui annule P c'est-à-dire tel que $P(a) = 0$. Un polynôme non nul de degré 0 n'a pas de zéro. Tout réel est un zéro du polynôme nul.

Soit P un polynôme de degré $N \geq 1$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un zéro de P. On démontre qu'il existe toujours un naturel strictement positif α et un polynôme Q de degré $N - \alpha$ tels que

$$P(x) = (x-a)^{\alpha} Q(x), \ x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ Q(a) \neq 0. \tag{2.1}$$

On dit alors que *a est un zéro de P de multiplicité α*.

Nous démontrons plus loin un critère pratique pour la recherche de la multiplicité[7].

Par exemple, le polynôme

$$P(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \ (x+2)$$

possède 1 comme zéro de multiplicité 2 et -2 comme zéro de multiplicité 1.

Propriétés

Une propriété fondamentale des polynômes qui possède de nombreuses applications, est celle-ci. Nous ne la démontrerons pas ici (c'est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre).

Proposition 2.2.1 *Deux polynômes de degré inférieur ou égal à N qui sont égaux en $N+1$ points distincts sont égaux partout.*

On peut démontrer aussi les propriétés suivantes. Certaines découlent directement de la théorie générale de l'étude des polynômes à coefficients et variable complexes. Certaines seront effectivement démontrées dans le cadre réel lorsque le théorème des valeurs intermédiaires sera étudié.

– Un polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins un zéro réel.
– Un polynôme à coefficients réels de degré impair (resp. pair) a un nombre impair (resp. pair) de zéros réels, ces zéros étant comptés avec leur multiplicité.

  Voici quelques exemples :

  - le polynôme $x^4 + 1$ est de degré 4 et n'a pas de zéro réel ;

  - le polynôme $x^3 + 1$ est de degré 3 et se factorise de la manière suivante : $x^3 + 1 = (x+1)\ (x^2 - x + 1)$; il n'a donc qu'un seul zéro réel ;

  - le polynôme $x^2(x^2+1)$ est de degré 4 et a un zéro réel (0) de multiplicité 2.

– Un polynôme à coefficients réels

  $$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

  de degré N se factorise toujours de la manière suivante (*) :

  $$P(x) = a_N (x - r_1)^{\alpha_1} \ldots (x - r_J)^{\alpha_J} \ (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + b_K x + c_K)^{\beta_K}$$

  où les trinômes qui apparaissent ont des coefficients réels, n'ont pas de zéro réel, où les r_j sont les zéros réels du polynôme P et où

  $$\sum_{j=1}^{J} \alpha_j + \sum_{k=1}^{K} 2\beta_k = N.$$

  Voici quelques exemples :
  – $P(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$,
  – $P(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$,
  – $P(x) = x^2(x^2+1)$,
  – $P(x) = 2x^2 - x - 6 = 2(x + \frac{3}{2})(x-2)$.

7. Critère pour la recherche de la multiplicité : soient P un polynôme de degré au moins 1 et α un naturel strictement positif ; alors a est un zéro de multiplicité α pour P si et seulement si $D^j P(a) = 0$ pour $j = 0, \ldots, \alpha - 1$ et $D^{\alpha} P(a) \neq 0$.

Recherche des zéros

La méthode pour rechercher les zéros des polynômes du premier et du second degré est bien définie et aisée (cf Résolution d'équations du premier et du second degré).

Pour les polynômes du troisième et quatrième degré, des méthodes de résolution existent mais deviennent très lourdes. On peut aussi montrer (Galois) que pour des polynômes de degré 5 et plus, il n'existe pas de méthode générale de résolution à l'aide de formules faisant intervenir uniquement des fonctions rationnelles et des radicaux. On utilise en fait des méthodes numériques (approximations successives).

Représentation graphique

Les représentations graphiques des polynômes du premier et du second degré ont été présentées au début de ce chapitre (dans "Trois exemples fondamentaux" de représentations graphiques de fonctions).

Pour les polynômes de degré supérieur ou égal à trois, des outils supplémentaires sont nécessaires pour une étude complète de la représentation graphique (application de la dérivation à l'étude des fonctions ; TVI ;...) ; ils seront étudiés dans la suite et permettront d'ailleurs une étude complète de la représentation graphique des fonctions définies à partir des fonctions élémentaires standards.

Division des polynômes

On démontre de façon directe (et la preuve fournit une méthode pratique de calcul) le résultat suivant.

Proposition 2.2.2 *Etant donné des polynômes P, D (diviseur) de degré respectivement N et d avec $N \geq d$, il existe des polynômes uniques Q (quotient) et R (reste) de degré respectivement $N-d$ et strictement inférieur à d tels que*

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $R = 0$ on dit que le polynôme D divise P ou que P est divisible par D.

Ainsi, en utilisant ce qui précède et la propriété (2.1), on voit directement que

– le polynôme P est divisible par $(x-a)$ si et seulement si $P(a) = 0$

– le polynôme P est divisible par $(x-a)(x-b)$ avec $a \neq b$ si et seulement si $P(a) = 0$ et $P(b) = 0$.

Lorsque le degré du diviseur est 1, la méthode pour calculer le quotient et le reste s'appelle la méthode de Horner.

Voici un exemple de division de polynômes.

Considérons les polynômes $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ et $D(x) = x^2 - 1$. Effectuons la division de P par D. On peut effectivement le faire car le degré de D est inférieur à celui de P.

Les termes de plus haut degré de chacun des polynômes sont, respectivement, $3x^4$ et x^2. C'est par $\boxed{3x^2}$ qu'il faut multiplier x^2 pour obtenir $3x^4$ (*). On multiplie alors le diviseur par ce monôme $3x^2$ et on retranche de P le résultat obtenu. On trouve un polynôme dont le degré est strictement inférieur à celui de P.

On applique le même processus à ce nouveau polynôme. Ce processus s'arrête quand le degré du nouveau polynôme est strictement inférieur à celui du diviseur ; il s'agit alors du reste R de la division ; le quotient Q est le polynôme obtenu en additionnant successivement les monômes obtenus au cours du stade (*) du processus.

La disposition pratique est la suivante.

Première étape.

$$\begin{array}{ccccc|c}
3x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +1 & x^2-1 \\ \hline
3x^4 & & -3x^2 & & & \boxed{3x^2} \\
-- & -- & -- & -- & -- & \\
 & -2x^3 & +3x^2 & +2x & +1 &
\end{array}$$

Deuxième étape.

$$
\begin{array}{ccccc|l}
3x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +1 & x^2-1 \\
\hline
3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2-2x \\
-- & -- & -- & -- & -- & \\
 & -2x^3 & +3x^2 & +2x & +1 & \\
 & -2x^3 & & +2x & & \\
-- & -- & -- & -- & -- & \\
 & & +3x^2 & & 1 &
\end{array}
$$

Troisième étape.

$$
\begin{array}{ccccc|l}
3x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +2x & +1 & x^2-1 \\
\hline
3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2-2x+3 \\
-- & -- & -- & -- & -- & \\
 & -2x^3 & +3x^2 & +2x & +1 & \\
 & -2x^3 & & +2x & & \\
-- & -- & -- & -- & -- & \\
 & & +3x^2 & & 1 & \\
 & & +3x^2 & & -3 & \\
-- & -- & -- & -- & -- & \\
 & & & & 4 &
\end{array}
$$

Comme le degré du nouveau polynôme (ici 4) est 0, donc strictement inférieur à celui du diviseur $D(x) = x^2 - 1$, le processus s'arrête. Finalement, on a obtenu

$$\text{Quotient} = Q(x) = 3x^2 - 2x + 3, \quad \text{Reste} = R(x) = 4$$

donc

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x + 1 \ = \ (x^2-1)(3x^2-2x+3) \ + \ 4 = D(x)Q(x) + R(x)$$

ou encore

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 2x + 1}{x^2-1} = 3x^2 - 2x + 3 + \frac{4}{x^2-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

2.2.2 Fractions rationnelles

Définitions

Une *fraction rationnelle* est une fonction définie comme étant le quotient de deux polynômes. Son domaine de définition est donc le complémentaire des zéros du dénominateur.

Une fraction rationnelle F

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : D(x) = 0\}$$

est dite *propre* lorsque le degré du numérateur N est strictement inférieur à celui du dénominateur D et que ces deux polynômes $N(x), D(x),\ x \in \mathbb{R}$ n'ont pas de zéro commun.

Propriété fondamentale

Dans le cadre réel, appelons fraction rationnelle simple une fraction du type

$$\frac{r}{(x+s)^\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{dx+e}{(x^2+bx+c)^\beta}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0,\ r, s, d, e, b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4c < 0$. Ces fractions ont une grande importance pour la primitivation et le calcul intégral notamment.

Il est donc utile de pouvoir disposer d'un résultat permettant d'écrire toute fraction rationnelle sous la forme d'une somme de fractions simples. Par exemple, la fraction rationnelle propre

$$\frac{5}{(2x+1)x^2(x^2+1)}$$

peut se décomposer selon

$$\frac{5}{(2x+1)x^2(x^2+1)} = -\frac{10}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2x-1}{x^2+1} + \frac{16}{2x+1}.$$

Donnons un autre exemple : la fraction rationnelle propre donnée par

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-2)^3(x^2+x+1)^2}$$

peut toujours s'écrire sous la forme

$$F(x) = \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{(x-2)^2} + \frac{c_3}{(x-2)^3} + \frac{c_4x+d_4}{x^2+x+1} + \frac{c_5x+d_5}{(x^2+x+1)^2}$$

où les c_j, d_j sont des nombres réels déterminés univoquement.

Afin d'être en mesure de traiter tous les cas, il est bon d'avoir à sa disposition un résultat général. Il s'agit en fait de la généralisation de la dernière décomposition présentée. Nous ne démontrerons pas ce théorème dans le cadre de ce cours. Signalons également que le résultat présenté ici n'est pas le plus fort ; c'est celui le plus utilisé en pratique, pour des fractions rationnelles à coefficients et variable réels. On l'appelle

le théorème de décomposition d'une fraction rationnelle propre
en fractions rationnelles simples dans le cadre réel.

Nous renvoyons à des références classiques pour un énoncé complet. Signalons simplement que dans le cas réel, il s'agit d'un résultat qui permet d'affirmer que *toute fraction rationnelle propre se décompose de façon unique en une somme de fractions rationnelles simples, les nombre et type de fractions simples étant caractérisés par la factorisation du dénominateur en puissances de polynômes du premier et du second degré, selon le résultat énoncé dans la section consacrée aux polynômes (*).*

Traitons trois exemples.

1) Décomposer la fraction suivante en fractions rationnelles simples

$$\frac{x^4+3x^3+2x^2+1}{x^2(x+2)}.$$

Comme le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, on effectue d'abord la division. On trouve

$$\frac{x^4+3x^3+2x^2+1}{x^2(x+2)} = x+1+\frac{1}{x^2(x+2)}.$$

On sait ensuite qu'il existe des réels uniques A, B, C tels que

$$\frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}.$$

Déterminons ces réels. L'égalité précédente est équivalente à $1 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ donc à (propriété des polynômes)

$$1 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si on évalue cette relation en $x = 0, x = -2, x = 1$ on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2B & = & 1 \\ 4C & = & 1 \\ 3A+3B+C & = & 1 \end{array}\right.$$

Ce système admet pour solution unique

$$A = -\frac{1}{4}, \ B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Finalement, la réponse est

$$\frac{x^4+3x^3+2x^2+1}{x^2(x+2)} = x+1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4(x+2)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$$

2) Décomposer la fraction suivante en fractions rationnelles simples

$$\frac{1}{x^3+1}.$$

Il existe des réels uniques A, B, C tels que

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

En procédant de manière analogue au cas précédent, on trouve finalement

$$A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = \frac{2}{3}.$$

Finalement, la réponse est

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

3) Décomposer la fraction suivante en fractions rationnelles simples

$$\frac{1}{x(x+1)}.$$

On sait qu'il existe des réels uniques A, B tels que

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

On trouve immédiatement la solution car

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1+x-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Représentation graphique

La représentation graphique des fractions rationnelles s'inscrit dans le cadre de la représentation graphique des fonctions élémentaires ; dans la suite du cours, nous allons installer les outils suffisants pour une telle étude.

2.2.3 Fractions irrationnelles

Rappelons que l'on a introduit les fonctions "racines m-iemes" :

$$x \ \to\ \sqrt[m]{x}, \quad [0, +\infty[\text{ (resp. } \mathbb{R}) \ \to [0, +\infty[\text{ (resp. } \mathbb{R})$$

si m est un naturel pair (resp. impair). Une *fraction irrationnelle* est une fonction dont l'expression ne fait intervenir que les opérations algébriques fondamentales [8] et l'extraction de racines sur des polynômes. Par exemple, les expressions suivantes définissent des fractions irrationnelles

$$\sqrt[3]{\frac{x^2+x+3}{-4x^4+5}}, \quad \sqrt{\frac{5x^6+x^3+2}{x^3+2}}, \quad \sqrt[5]{x^2+2x+3}\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^5+8}} + x^3 + 32;$$

comme cas particulier, on a bien sûr les racines de polynômes.

Le domaine de définition d'une telle fonction composée se détermine de façon naturelle à partir des domaines de définition des fonctions qui interviennent dans son expression.

8. c'est-à-dire l'addition, la multiplication, la division

2.2.4 Fonctions trigonométriques

Nous renvoyons au chapitre précédent, dans lequel ont été introduites les notions de sinus, cosinus, tangente, cotangente.

C'est un bon exercice que de rassembler les définitions et propriétés générales vues précédemment, explicitées maintenant en utilisant les définitions et termes adéquats de la première section de ce chapitre (domaine, image, monotonie, représentation graphique, valeurs usuelles, etc).

En fait, les fonctions trigonométriques $\sin, \cos$ sont définies en toute rigueur, sans se servir de dessins, (et on peut ainsi démontrer leurs propriétés) à partir de la fonction exponentielle (complexe). Ceci sera revu en temps utile.

2.2.5 Fonctions trigonométriques inverses

Définitions

La fonction cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$; son inverse (fonction réciproque) est notée arcos ; on a donc

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos\ :\ [0,\pi]\ \to\ [-1,1] \quad \text{bijection} \\ (\cos)^{-1} = \text{arcos}\ :\ [-1,1]\ \to\ [0,\pi] \\ \cos(\text{arcos}\, x) = x,\ \forall x \in [-1,1] \quad \text{et} \quad \text{arcos}(\cos x) = x,\ \forall x \in [0,\pi]\,. \end{array}}$$

La fonction sin est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$; son inverse (fonction réciproque) est notée arcsin ; on a donc

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin\ :\ [-\pi/2,\pi/2]\ \to\ [-1,1] \quad \text{bijection} \\ (\sin)^{-1} = \arcsin\ :\ [-1,1]\ \to\ [-\pi/2,\pi/2] \\ \sin(\arcsin x) = x,\ \forall x \in [-1,1] \quad \text{et} \quad \arcsin(\sin x) = x,\ \forall x \in [-\pi/2,\pi/2]\,. \end{array}}$$

La fonction tg est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$; son inverse (fonction réciproque) est notée arctg ; on a donc

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{tg}\ :\ ]-\pi/2,\pi/2[\ \to\ \mathbb{R} \quad \text{bijection} \\ (\text{tg})^{-1} = \text{arctg}\ :\ \mathbb{R}\ \to\ ]-\pi/2,\pi/2[\\ \text{tg}(\text{arctg}\, x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{arctg}(\text{tg}\, x) = x,\ \forall x \in]-\pi/2,\pi/2[\,. \end{array}}$$

La fonction cotg est une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$; son inverse (fonction réciproque) est notée arcotg ; on a donc

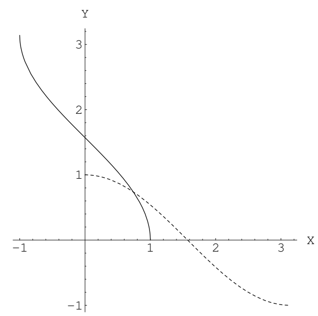
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{cotg}\ :\ ]0,\pi[\ \to\ \mathbb{R} \quad \text{bijection} \\ (\text{cotg})^{-1} = \text{arcotg}\ :\ \mathbb{R}\ \to\ ]0,\pi[\\ \text{cotg}(\text{arcotg}\, x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \text{arcotg}(\text{cotg}\, x) = x,\ \forall x \in]0,\pi[\,. \end{array}}$$

Propriétés

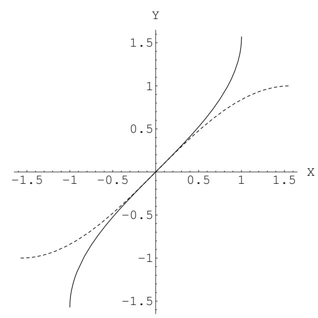
Les propriétés de ces fonctions se déduisent de la théorie générale des fonctions inverses (réciproques) et des propriétés des fonctions trigonométriques. Elles seront complétées par la suite (continuité, dérivation). Citons-en seulement quelques-unes qui se déduisent de ce que nous avons rappelé précédemment.

Représentation graphique

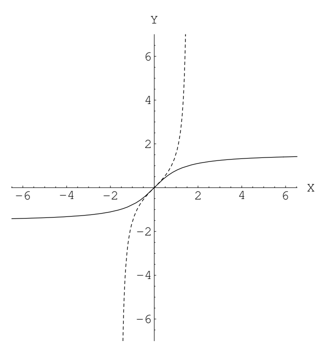
Voici (figure ci-dessous) la représentation de $\cos x,\ x \in [0, \pi]$ (en pointillés) et de $\text{arcos}\, x,\ x \in [-1, 1]$.



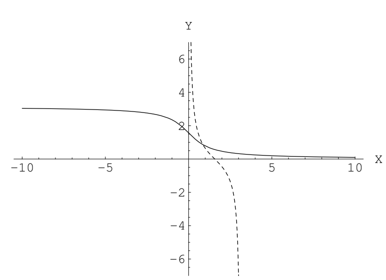
Voici (figure ci-dessous) la représentation de $\sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$ (en pointillés) et de $\arcsin x,\ x \in [-1, 1]$.



Voici (figure ci-dessous) la représentation de $\operatorname{tg} x,\ x \in]-\pi/2, \pi/2[$ (en pointillés) et de $\operatorname{arctg} x,\ x \in [-10, 10]$.



Voici (figure ci-dessous) la représentation de $\operatorname{cotg} x,\ x \in]0, \pi[$ (en pointillés) et de $\operatorname{arcotg} x,\ x \in [-10, 10]$.



Signe et monotonie

Les fonctions arcos, arcotg sont strictement décroissantes sur leur domaine de définition ; les fonctions arcsin, arctg sont strictement croissantes sur leur domaine de définition.

La fonction arcos est toujours à valeurs positives (à valeurs dans $[0, \pi]$) ; la fonction arcsin est à valeurs positives sur $[0, 1]$ et négatives $[-1, 0]$; la fonction arctg est à valeurs négatives sur $]-\infty, 0]$ et positives sur $[0, +\infty[$; la fonction arcotg est toujours à valeurs positives (à valeurs dans $]0, \pi[$).

Remarque

Bien sûr, comme les fonctions trigonométriques sont liées entre elles par plusieurs relations, il en est de même pour les fonctions trigonométriques inverses. Etablissons un exemple [9] (d'autres sont proposés dans les exercices).

On a

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcos} x \quad \forall x \in [-1, 1] .$$

En effet, soit $x \in [-1, 1]$. On a

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcos} x) = \cos(\operatorname{arcos} x) = x$$

donc

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcos} x).$$

Comme les réels $\arcsin x$ et $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcos} x$ appartiennent à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et que la fonction sin est injective sur cet intervalle, on en déduit

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcos} x.$$

Retour aux coordonnées polaires

Dans un paragraphe précédent, on a introduit les coordonnées polaires $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ d'un point différent de l'origine. L'expression de ces coordonnées à partir des coordonnées cartésiennes sont

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et, pour l'argument

$$\cos\theta = x/r \quad \sin\theta = y/r.$$

Exprimons maintenant θ directement en fonction des coordonnées x, y. Pour $x \neq 0$, on a

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta)) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}).$$

Ainsi, en fonction de la position du point dans le plan (en fait selon son appartenance à tel ou tel quadrant), on obtient les expression suivantes.

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) & \text{si } x < 0, y \in \mathbb{R} \\ 2\pi + \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0, y < 0 \end{cases}$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ si } y > 0, \qquad \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ si } y < 0.$$

2.2.6 Fonctions exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle

La définition de cette fonction à partir des séries de puissances sera vue dans un prochain chapitre ; ses propriétés seront démontrées à partir de là. Cependant, vu l'importance de cette fonction dans la pratique, rappelons ici ses propriétés fondamentales.

La fonction exponentielle est définie en tout réel ; on la désigne par

$$\exp(x), \ x \in \mathbb{R}$$

9. On verra plus loin que l'égalité entre fonctions dérivables sur un intervalle peut aussi être obtenue en dérivant les fonctions et en montrant l'égalité en un point.

ou encore $\exp x$ si aucune confusion sur la variable n'apparaît, ou encore e^x, $x \in \mathbb{R}$. Pour cette dernière notation : ATTENTION ! Il ne s'agit PAS d'un nombre (e, non défini) "exposant le réel x" (on n'a pas défini ce que signifie un réel exposant un réel !).

Ses premières propriétés fondamentales sont les suivantes.

- Le domaine de définition de exp est $\mathbb{R}$ et son image est l'intervalle $]0, +\infty[$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; la fonction

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

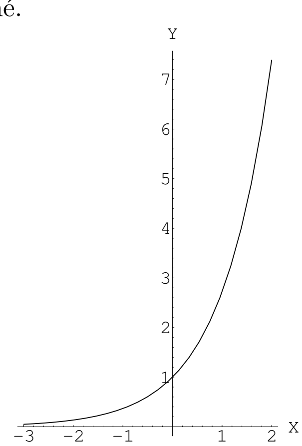
  est donc une bijection.
- On a

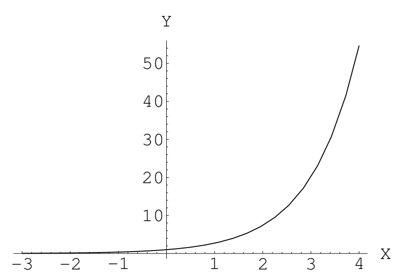
$$\exp(0) = 1.$$

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x + y) = \exp(x)\ \exp(y)$$

  ce qui s'écrit encore $e^{x+y} = e^x e^y$.
- Voici la représentation graphique de la fonction exponentielle. La première représentation est dans un repère orthonormé ; la seconde représentation est dans un repère orthogonal non normé.





On définit le nombre

$$e$$

par [10]

$$e = \exp(1).$$

Signalons aussi un cas particulier très utile de la propriété $\exp(x + y) = \exp(x)\ \exp(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$: $1 = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x) = e^x e^{-x}$ donc

$$e^{-x} = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{e^x}.$$

De même, cette propriété implique que, lorsque $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\ termes}) = \underbrace{\exp(1)\ldots\exp(1)}_{n\ facteurs} = (\exp(1))^n = e^n.$$

Ceci explique la raison de la notation e^x pour $\exp(x)$.

Signalons encore les propriétés suivantes (démontrées lorsque la fonction exponentielle aura été définie par une série) :

10. Ce nombre est irrationnel ; il est même transcendant, ce qui signifie qu'il ne peut être zéro d'un polynôme à coefficients entiers sur $\mathbb{R}$.

- on a l'estimation

$$e = \exp(1) \simeq 2.718281$$

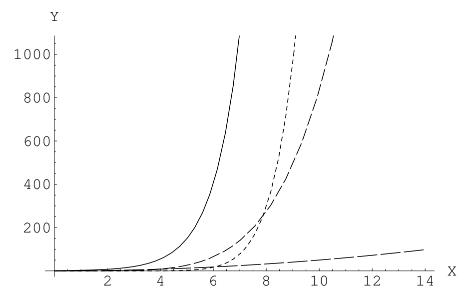
- on a

$$\exp(x) \geq \frac{x^M}{M!} \quad \forall M \in \mathbb{N}, x \geq 0;$$

il s'ensuit que

$$\exp(x) \leq \frac{M!}{|x|^M} \quad \forall M \in \mathbb{N}, x < 0.$$

La dernière propriété montre que cette fonction "devient très vite très grande lorsque x devient grand" ; elle "croît plus vite que tout polynôme" ; on parle de croissance exponentielle.



Représentations de $\exp(x)$ ($x \geq 0$) (trait plein), de $x^M/M!$ ($x \geq 0$) pour $M = 2, 5, 10$ (traits pointillés de plus en plus fins lorsque M augmente) dans un repère orthogonal non normé

La fonction logarithme népérien

La fonction *logarithme népérien*[11], notée ln, est définie comme *la fonction inverse de la fonction exponentielle*. Les propriétés de cette fonction se déduisent donc de celles de la fonction exponentielle. Les justifications de ces propriétés sont directes et laissées au lecteur.

– La fonction logarithme népérien est définie sur l'image de la fonction exponentielle, c'est-à-dire sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On a

$$\exp(\ln x) = x \quad \forall x > 0; \qquad \ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

– L'image de la fonction ln est $\mathbb{R}$ (= le domaine de la fonction exponentielle) et

$$\ln : \ ]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$$

est une bijection.

– La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

– On a

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(x) < 0 \text{ pour } x \in]0, 1[, \quad \ln(x) > 0 \text{ pour } x > 1.$$

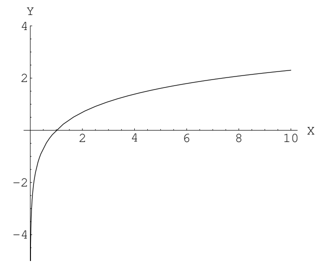
– Pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, on a

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

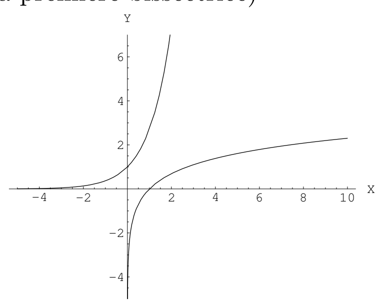
En particulier, on a $\ln(x^M) = M \ln(x)$, $\quad \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x) \qquad \forall x > 0, M \in \mathbb{N}_0$.

11. (Petit Larousse 1991.) *Napier ou Neper John*, baron de Merchiston ; mathématicien écossais, 1550-1617. On lui doit l'invention des logarithmes (1614).

– Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction logarithme népérien est la suivante.



Dans un repère orthonormé, les représentations de exp et ln sont les suivantes (graphiques symétriques par rapport à la première bissectrice)



Exponentielle et logarithme de base a

Grâce aux fonctions exponentielle et logarithme népérien rapppelées ci-dessus, on définit le *logarithme de base* a et *l'exponentielle de base* a. Tout comme les fonctions ln et exp, ces fonctions sont inverses l'une de l'autre. Si on prend $a = e$, on retrouve les fonctions exponentielle et logarithme népérien habituelles.

Introduction

Le système décimal est utilisé de manière courante dans beaucoup de domaines. Les nombres naturels y sont représentés à partir des puissances de 10 : 352 est en fait $3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0$. Un autre système souvent employé, notamment en informatique, est le système binaire, qui consiste à utiliser des puissances de 2 au lieu de puissances de 10 : 352 s'écrit $256 + 64 + 32 = 2^8 + 2^6 + 2^5 = 101100000$. Dans l'un et l'autre cas, après avoir choisi une base (ici 10 ou 2), on écrit le naturel comme somme de puissances successives de la base. Ainsi, on peut dire que ce qui "permet de compter", ce sont les exposants de la base. Si n est un naturel, on a ainsi introduit les fonctions

$$10^n \to n, \quad 2^n \to n$$

et on dit que si $x = 10^n$ (resp. $x = 2^n$) alors *le logarithme en base* 10 *de* x *est* n *(resp. le logarithme en base* 2 *de* x *est* n*)*.

Il est tentant de généraliser les fonctions introduites ci-dessus (10^n, $n \in \mathbb{N}$, logarithme en base naturelle) aux nombres réels. La suite de cette partie y est consacrée.

Exponentielle de base a

Soit $a > 0$; la fonction *exponentielle de base* a est définie de la manière suivante

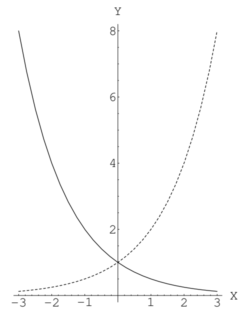
$$\boxed{a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a},\ x \in \mathbb{R}.}$$

Remarquons que pour $a = 1$, cette fonction est la fonction constante 1. Remarquons aussi que si $x = n$ est un naturel, alors on retrouve les puissances habituelles :

$$a^n = e^{n \ln a} = \underbrace{e^{\ln a} \dots e^{\ln a}}_{\text{n facteurs}} = \underbrace{a \dots a}_{\text{n facteurs}}.$$

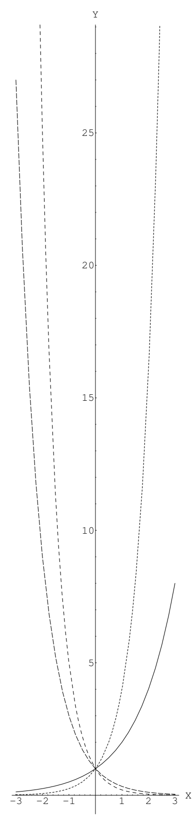
La représentation de cette fonction s'effectue à partir de la représentation de exp, en tenant compte du signe de $\ln a$ (donc de la position de a par rapport à 1). Ainsi, si $a \in]0,1[$ cette fonction est strictement décroissante et si $a > 1$, elle est strictement croissante. Bien sûr, on a

$$a^0 = 1 \ \forall a > 0, \qquad \exp(x \ln e) = \exp(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$



Représentation de $f(x) = 2^x$ $(x \in \mathbb{R})$ (en pointillé) et de $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ $(x \in \mathbb{R})$

Les représentations qui suivent comparent les fonctions a^x pour différentes valeurs de a. Il s'agit des fonctions $2^x, 4^x, (1/5)^x, (1/3)^x$ $(x \in \mathbb{R})$. A titre d'exercice, on demande de les identifier.



Remarquons que la définition donne immédiatement les propriétés fondamentales

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Logarithme de base a
Soit $a > 0, \neq 1$; la fonction *logarithme de base a* est définie de la manière suivante

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a},\ x \in]0,+\infty[\,.}$$

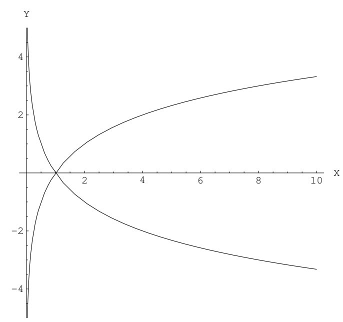
Remarquons que l'on généralise bien les exemples donnés : si a est un naturel, on a

$$\log_a(a^n) = \frac{\ln(a^n)}{\ln a} = \frac{n \ln a}{\ln a} = n.$$

La représentation de cette fonction s'effectue à partir de la représentation de ln, en tenant compte du signe de $\ln(a)$ (donc de la position de a par rapport à 1). Ainsi, si $a \in]0,1[$ cette fonction est strictement décroissante et si $a > 1$, elle est strictement croissante. Bien sûr, on a

$$\log_a(1) = 0\ \forall a \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,, \qquad \log_e(x) = \ln(x),\ \forall x > 0.$$

Voici les représentations de $\log_2(x), \log_{1/2}(x), x \in]0,+\infty[$. A titre d'exercice, on demande de les identifier.



Remarquons que la définition donne immédiatement la propriété fondamentale

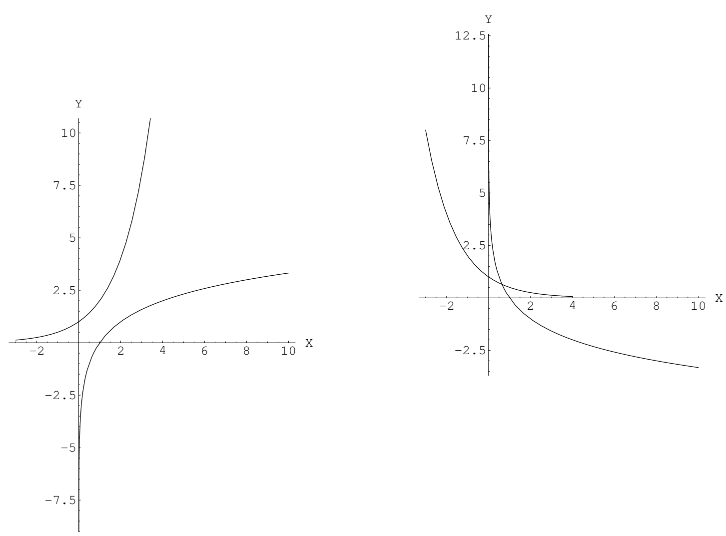
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad x, y \in]0,+\infty[$$

Pour terminer, signalons que *pour $a > 0$, $a \neq 1$, les fonctions logarithme de base a et exponentielle de base a sont des fonctions inverses l'une de l'autre.* On a en effet

$$\log_a(a^x) = \frac{\ln(\exp(x \ln a))}{\ln a} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad a^{\log_a x} = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln a}\ \ln a\right) = x,\ \forall x > 0.$$

Ainsi, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a(x).$$



Représentation des fonctions $2^x, x \in \mathbb{R}$, $\log_2(x), x > 0$ d'une part ;
représentation des fonctions $(1/2)^x, x \in \mathbb{R}$, $\log_{1/2}(x), x > 0$ d'autre part.

Fonction puissance a, avec $a \in \mathbb{R}$

Définition

Afin de généraliser la fonction puissance habituelle (x^m avec m nombre naturel) ainsi que les "puissances négatives" (x^{-m}, $m \in \mathbb{N}$) et "fractionnaires" ($\sqrt[m]{x}$, m naturel), on introduit la fonction puissance en toute généralité.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la *fonction "puissance" a*, notée x^a, comme suit [12] :

$$\boxed{x^a = \exp(a \ln x) = e^{a \ln x}, \quad x > 0.}$$

Propriétés

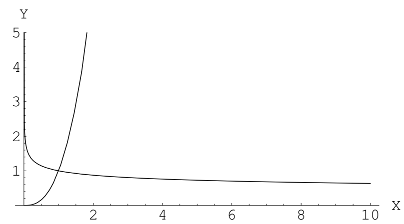
Pour étudier les propriétés de cette fonction, on utilise celles des fonctions exponentielle et logarithme népérien.

1) *La définition précédente généralise la fonction puissance.*

En effet, si $m \in \mathbb{N}$, on a

$$x^m = \exp(m \ln x) = \underbrace{\exp(\ln x) \ldots \exp(\ln x)}_{\text{m facteurs}} = \underbrace{x \ldots x}_{\text{m facteurs}}.$$

2) Voici quelques représentations pour différentes valeurs de a (Si $a > 0$, la fonction est croissante ; si $a < 0$, elle est décroissante).



Représentation de $x^{\sqrt{7}}$, $x^{-\pi/16}$.

3) Soulignons que l'introduction de cette fonction conduit aux relations suivantes, qui se justifient directement à l'aide de la définition.

On a

$$\ln(x^a) = a \ln x \quad \forall a \in \mathbb{R}, x > 0.$$

En effet : $\ln(x^a) = \ln(\exp(a \ln x)) = a \ln x$.

On a

$$(\exp x)^a = \exp(ax) \quad \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$(e^x)^a = e^{ax} \quad \forall a, x \in \mathbb{R}.$$

En effet : $(\exp(x))^a = \exp(a \ln(\exp(x))) = \exp(ax)$.

2.3 Suites de réels (complexes) ; convergence de suites

Notre but est d'introduire la notion délicate de $\boxed{\textit{limite des valeurs d'une fonction.}}$ L'histoire des limites, de l'adoption d'une définition rigoureuse, de son utilisation systématique, consiste en une longue épopée, faisant partie d'ailleurs de "la petite histoire" de la discipline. Pour en avoir une idée, il suffit d'un peu surfer sur internet ; les récits à ce propos ne manquent pas !, de même que les nombreuses références à d'autres sources.

Ici, étant donné l'importance que revêt en elle-même cette notion, nous avons choisi de commencer par $\boxed{\textit{la notion de suite, de convergence de suite.}}$

12. Remarquons que pour a et x fixés, on a x^a = fonction exponentielle de base x calculée en a

2.3.1 Définitions

Suites

Commençons par définir la notion de suite. On peut l'introduire à partir de la notion de fonction comme suit.

Une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des naturels ou des entiers, ou un sous-ensemble infini de ceux-ci.

Exemples

1) La suite qui, à tout entier, associe son carré est la suite

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad k \mapsto k^2.$$

2) La suite qui, à tout naturel strictement positif, associe son inverse pour la multiplication est la suite

$$\mathbb{N}_0 \to]0, +\infty[\quad n \mapsto \frac{1}{n}.$$

3) La suite qui, à tout naturel strictement positif N associe la somme des N premiers naturels est

$$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad N \mapsto 1 + \ldots + N = \sum_{n=1}^{N} n.$$

4) Si q est un complexe, la suite

$$\mathbb{N} \to \mathbb{C} \quad n \mapsto q^n$$

est appelée *suite géométrique de raison q et de premier terme égal* à 1. Si $q \neq 1$, la suite qui, à tout naturel strictement positif N, associe la somme des N premiers termes de la suite précédente est la suite

$$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C} \quad N \mapsto \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

introduite au chapitre 1.

Notation

Tout comme pour les fonctions, on utilise une notation générique pour les suites. Ainsi, rappelons qu'une fonction f de domaine A, à valeurs réelles, est notée $f : A \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$ ou encore $f(x),\ x \in A$. Une suite indicée par les naturels (resp. les naturels strictement positifs, les entiers) est notée en général

$$x_m,\ m \in \mathbb{N} \quad (\text{resp. } m \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{Z}).$$

On dit souvent que x_m est un élément (ou un terme) de la suite.

Ainsi, pour les suites données dans les exemples, on a successivement

$$(1) x_m = m^2,\ (m \in \mathbb{Z}), \quad (2) x_m = \frac{1}{m},\ (m \in \mathbb{N}_0), \quad (3) x_m = \sum_{j=1}^{m} j,\ (m \in \mathbb{N}_0),\ (4) x_m = q^m,\ (m \in \mathbb{N}).$$

Convergence

Si la notation $3,14$ est claire et représente le réel $3 + \frac{14}{100}$, la notation $0.33333\ldots$ l'est moins. En fait, elle signifie que l'on considère la suite

$$0.3, \quad 0.33, \quad 0.333, \quad 0.3333, \quad \ldots$$

c'est-à-dire la suite

$$x_m = 0.\underbrace{33\ldots3}_{m \text{nombres}} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{3}{10^m}.$$

La suite $x_m = \frac{1}{m}$, $(m \in \mathbb{N}_0)$ a également un comportement typique : ses éléments sont positifs et sont de plus en plus petits ; en fait, ils se rapprochent de plus en plus de 0 tout en étant strictement plus grands.

Quant à la suite $x_m = m^2$, $(m \in \mathbb{Z})$, elle a aussi un comportement typique : ses éléments sont positifs et sont de plus en plus grands.

Toutes ces remarques formulées en termes intuitifs sur divers comportements des termes d'une suite, vont maintenant faire l'objet de définitions afin de bien modéliser le phénomène et de pouvoir le manipuler aisément.

Définition 2.3.1 *Soit x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite de réels (ou de complexes).*

On dit que cette suite converge vers un nombre r si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$|x_m - r| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq M.$$

Cela s'écrit

$$\lim_{m \to +\infty} x_m = r.$$

Le nombre r est appelé la limite de la suite.

On dit que cette suite converge vers l'infini si, pour tout $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$|x_m| \geq R, \quad \forall m \geq M.$$

Cela s'écrit

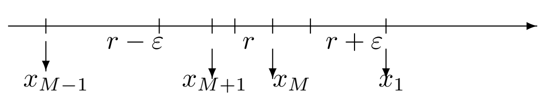
$$\lim_{m \to +\infty} x_m = \infty.$$

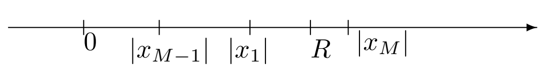
Lorsque les éléments de la suite sont positifs (resp. négatifs), on peut enlever les modules et on dit que la suite converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On démontre que si une suite converge, sa limite est unique.

La première définition signifie que, quel que soit l'intervalle de longueur 2ε centré sur r, les éléments de la suite finissent par être dans celui-ci pour autant que leurs indices soient suffisamment grands, ou encore que la distance de x_m à r est aussi petite que l'on veut pour autant que m soit suffisamment grand.

La seconde signifie que, quel que soit le nombre $R > 0$, les termes de la suite ont une valeur absolue plus grande que ce nombre pour autant que leurs indices soient suffisamment grands, ou encore que la valeur absolue de x_m est aussi grande que l'on veut pour autant que m soit suffisamment grand.





2.3.2 Deux propriétés très utilisées

1) On démontre que si la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de complexes non nuls converge vers 0 (resp. l'infini) alors la suite $1/x_m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l'infini (resp. vers 0).

2) Appelons sous-suite de la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ une suite dont les éléments sont pris dans l'ensemble $\{x_m \ : \ m \in \mathbb{N}_0\}$, en conservant la croissance stricte des indices. Par exemple, on considère la sous-suite $x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots$. Précisément,

$$\text{une sous-suite de la suite } x_m \ (m \in \mathbb{N}_0)$$

est une suite qui s'écrit

$$x_{k(m)} \ m \in \mathbb{N}_0$$

avec $k(m) < k(m+1)$ pour tout m. On démontre le résultat suivant : la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l (pouvant être infini) si et seulement si toute sous-suite de la suite x_m converge vers l.

Ce résultat fournit un critère très pratique pour démontrer qu'une suite ne converge pas : il suffit en effet d'en extraire deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes.

2.3.3 Exemples fondamentaux

Exemple 1. Soit $a \in \mathbb{R}$.
- Si $|a| < 1$ la suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0, c'est-à-dire $\lim_{m\to+\infty} a^m = 0$.
- Si $|a| > 1$ la suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l'infini, c'est-à-dire $\lim_{m\to+\infty} a^m = \infty$.
- Si $a = 1$ la suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 1, c'est-à-dire $\lim_{m\to+\infty} a^m = 1$.
- Si $a = -1$ la suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ ne converge pas.

Preuve. Considérons le cas $|a| > 1$. On peut alors écrire $|a| = 1 + r$ avec $r = |a| - 1 > 0$. En développant $|a^m| = |a|^m = (1 + r)^m$ selon la formule du binôme de Newton, on obtient

$$|a^m| = \sum_{j=0}^{m} C_m^j r^j \geq C_m^1 r^1 = mr$$

pour tout m. Comme la suite mr $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers $+\infty$, on en déduit que la suite $|a^m|$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers $+\infty$ donc que la suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l'infini.

Considérons le cas $|a| < 1$. Si $a = 0$, il est clair que la suite dont tous les éléments sont nuls converge vers 0. Si $a \neq 0$, on pose $b = 1/a$ et on applique le cas précédent. On obtient que la suite $b^m = 1/a^m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l'infini, donc la suite a^m $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0.

Les cas $a = 1$ et $a = -1$ sont clairs.□

Exemple 2. Fixons $q \in]-1, 1[$. On considère la suite

$$x_m = \sum_{j=0}^{m} q^j = 1 + q + q^2 + \ldots + q^m, \ m \in \mathbb{N}_0$$

La limite de cette suite est $1/(1 - q)$, c'est-à-dire

$$\lim_{m\to+\infty} x_m = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve. En effet, pour tout m, on a

$$x_m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}, \qquad \lim_{m\to+\infty} q^m = 0.$$

□

Dans la suite considérée ci-dessus, que se passe-t-il si on prend $q \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$?

Exemple 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite

$$x_m = \frac{a^m}{m!}, \ m \in \mathbb{N}_0.$$

Démontrons que cette suite converge vers 0, ce que l'on note

$$\lim_{m\to+\infty} x_m = 0.$$

Preuve. Remarquons que, si a est tel que $|a| \leq 1$, cette propriété est claire. Si $|a| > 1$, c'est moins clair et nécessite un peu de travail. La preuve qui suit convient en fait pour toutes les valeurs de a.

Comme $a \in \mathbb{R}$ est fixé, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $|a| \leq M$. Il s'ensuit que, pour $m > M$, on a

$$\frac{|a|^m}{m!} = \frac{|a|}{1} \ldots \frac{|a|}{M} \, \frac{|a|}{M+1} \ldots \frac{|a|}{m} \leq \frac{|a|}{1} \ldots \frac{|a|}{M} \left(\frac{|a|}{M+1} \right)^{m-M} \leq C \left(\frac{|a|}{M+1} \right)^m$$

où C est une constante strictement positive qui ne dépend pas de m (cette constante ne dépend que de a et de M). Comme $\frac{|a|}{M+1} \in [0,1[$, la suite $\left(\frac{|a|}{M+1}\right)^m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, converge vers 0, donc la suite $\frac{|a|^m}{m!}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, converge aussi vers 0.$\square$

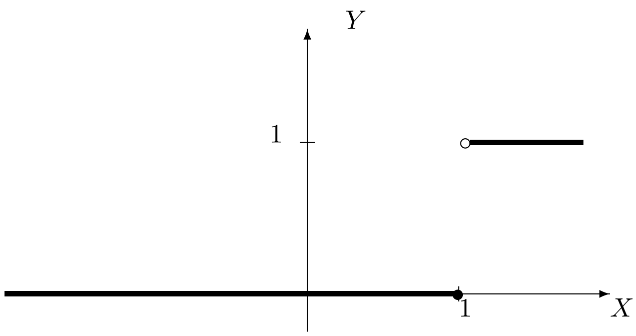
2.4 Limite des valeurs d'une fonction

2.4.1 Exemples

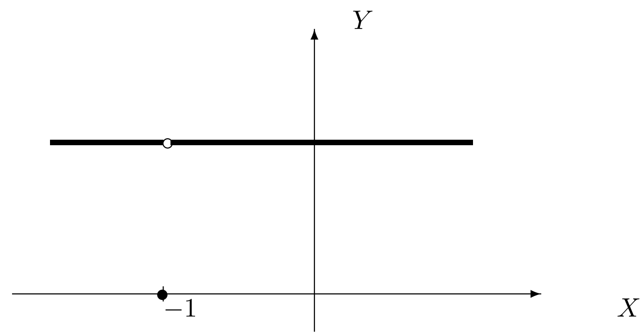
Considérons les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad f_2(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}_0,$$

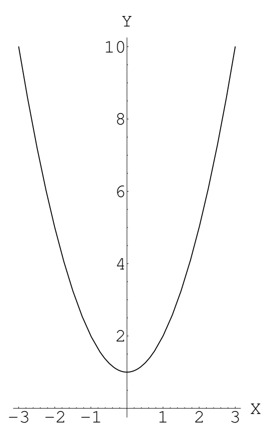
$$f_4(x) = \sin\left(\frac{1}{|x|}\right),\ x \in \mathbb{R}_0, \quad f_5(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}, \quad f_6(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in \mathbb{R}_0.$$



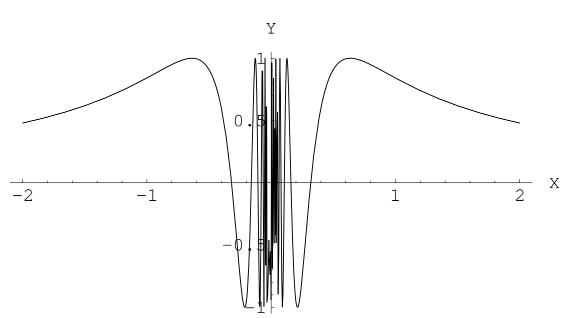
$\boxed{f_1}$



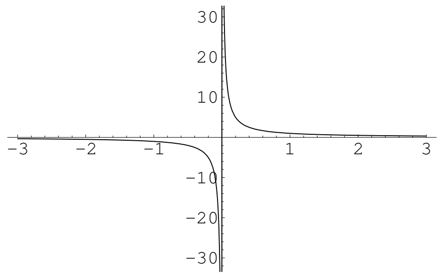
$\boxed{f_5}$

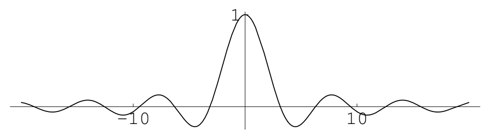


$\boxed{f_2}$



$\boxed{f_4}$





$\boxed{f_3}$ $\boxed{f_6}$

Sur ces exemples, on voit différents comportements au voisinage de 0, de 1, de -1 et en l'infini. L'expression de ces comportements peut être comparée à celle de suites, excepté le fait qu'ici, on ne travaille plus avec seulement des suites de points, mais avec toutes les valeurs d'une fonction. Il faut donc adapter les définitions de convergence, de limite, introduites dans le contexte des suites.

2.4.2 Définition de la limite en un réel, à partir des suites

Soit x_0 un réel tel que tout intervalle ouvert auquel il appartient rencontre le domaine de définition [13] A de f. Quand on travaille avec des limites à droite (resp. à gauche), on suppose que tout intervalle ouvert contenant x_0 rencontre $A \cap]x_0, +\infty[$ (resp. $A \cap]-\infty, x_0[$).

On utilisera souvent la locution suivante : "pour x voisin de x_0" ou pour "x dans un voisinage de x_0". Cela signifie précisément "pour x dans un intervalle ouvert contenant x_0".

Définition 2.4.1 *On dit que f admet une limite finie en x_0 s'il existe un nombre r tel que la suite $f(x_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers r quelle que soit la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de A qui converge vers x_0.*

On appelle r la limite de f en x_0 (on démontre que r est unique).

On utilise alors la notation
$$\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = r$$
ou tout simplement
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = r$$
s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

Définition 2.4.2 *On dit que f admet une limite infinie en x_0 si la suite $f(x_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l'infini quelle que soit la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de A qui converge vers x_0.*

On utilise alors la notation
$$\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = \infty$$
ou tout simplement
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

Remarques

1) Lorsqu'on se rapproche de x_0 uniquement par valeurs strictement plus grandes (resp. strictement plus petites), c'est-à-dire lorsque l'on ne considère que des suites telles que $x_m > x_0$ (resp. $x_m < x_0$), on parle de limite à droite (resp. à gauche) de x_0 et on écrit
$$\lim_{x \to x_0^+, x \in A} f(x) = r \qquad \text{(resp. } \lim_{x \to x_0^-, x \in A} f(x) = r)$$

13. Cette hypothèse permet de dire qu'il y a au moins une suite du domaine de f qui converge vers x_0

ou encore
$$\lim_{x\to x_0, x>x_0, x\in A} f(x) = r \qquad (\text{resp. } \lim_{x\to x_0, x<x_0, x\in A} f(x) = r)$$
ou encore
$$\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = r \qquad (\text{resp. } \lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = r)$$
s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A, dans le cas d'une limite finie.

On peut donner les mêmes précisions dans le cas où la limite est infinie.

2) Lorsque les valeurs de f peuvent être comparées à r de la même manière pour des réels voisins de x_0, on précise aussi
$$r^+, \quad r^-$$
lorsque, respectivement, $f(x) \geq r$ et $f(x) \leq r$ pour x voisin de x_0.

Dans le cas de l'infini, on peut préciser aussi s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ en fonction du signe de $f(x)$ pour x voisin de x_0.

Retour aux exemples Ainsi, on a
- $\lim_{x\to 1^+} f_1(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f_1(x) = 0$, la limite de f_1 en 1 n'existe pas ;
- $\lim_{x\to -1^-} f_5(x) = 1 = \lim_{x\to -1^+} f_5(x)$ mais la limite de f_5 en -1 n'existe pas car, par exemple, les suites $x_m = -1$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ et $y_m = -1 + 1/m$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ convergent vers -1 alors que les suites $f(x_m) = 0$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ et $f(y_m) = 1$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ convergent vers des limites différentes ;
- $\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^-} f_2(x) = 1^+$;
- $\lim_{x\to 0} f_3(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^+} f_3(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f_3(x) = -\infty$;
- $\lim_{x\to 0} f_4(x)$ n'existe pas (de même pour les limites en 0^+ et en 0^-). En effet, les suites $x_m = 1/m\pi$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ et $y_m = 1/(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ convergent vers 0 mais les suites $f_4(x_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ et $f_4(y_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ convergent vers des limites différentes, à savoir 0 et 1.

2.4.3 Définition de la limite en l'infini, à partir des suites

Quand on considère la limite en l'infini des valeurs de f, on doit vérifier que le domaine de définition A de f n'est pas borné ; quand on considère la limite en "plus l'infini", on doit vérifier que A n'est pas majoré ; quand on considère la limite en "moins l'infini", on doit vérifier que A n'est pas minoré.

Définition 2.4.3 *On dit que f admet une limite finie en l'infini s'il existe un nombre r tel que la suite $f(x_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers r quelle que soit la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de A qui converge vers l'infini.*

On appelle r la limite de f en l'infini (on démontre que r est unique).

On utilise alors la notation
$$\lim_{x\to\infty, x\in A} f(x) = r$$
ou tout simplement
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = r$$
s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

Définition 2.4.4 *On dit que f admet une limite infinie en l'infini si la suite $f(x_m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l'infini quelle que soit la suite x_m $(m \in \mathbb{N}_0)$ de A qui converge vers l'infini.*

On utilise alors la notation
$$\lim_{x\to\infty, x\in A} f(x) = \infty$$
ou tout simplement
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

Remarques

1) Examiner la limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) consiste à ne considérer que des suites de nombres positifs (resp. négatifs). On parle de limite en "plus l'infini" (resp. en "moins l'infini") et on écrit

$$\lim_{x\to+\infty, x\in A} f(x) = r \qquad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty, x\in A} f(x) = r)$$

ou encore

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = r \qquad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = r)$$

s'il n'y a pas d'ambiguïté sur A.

On peut donner les mêmes précisions dans le cas où la limite est infinie.

2) Lorsque les valeurs de f peuvent être comparées à r de la même manière pour des réels de module assez grand, on précise aussi

$$r^+, \quad r^-$$

lorsque, respectivement, $f(x) \geq r$ et $f(x) \leq r$ pour x de module assez grand.

Dans le cas de l'infini, on peut préciser aussi s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ en fonction du signe des valeurs de f.

Retour aux exemples Ainsi, on a
- $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = +\infty$;
- $\lim_{x\to\infty} f_4(x) = 0^+$;
- $\lim_{x\to\infty} f_3(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} f_3(x) = 0^+, \lim_{x\to-\infty} f_3(x) = 0^-$;
- $\lim_{x\to\infty} f_6(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} f_6(x) = 0, \lim_{x\to-\infty} f_6(x) = 0$.

Donnons quelques autres exemples, fréquemment utilisés.

Les limites suivantes n'existent pas

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x, \ \lim_{x\to-\infty} \sin x, \ \lim_{x\to+\infty} \cos x, \ \lim_{x\to-\infty} \cos x$$

En effet, considérons, par exemple, la première de ces limites. Les suites $x_m = m\pi$ ($m \in \mathbb{N}_0$) et $y_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ ($m \in \mathbb{N}_0$) convergent vers $+\infty$ mais les suites $\sin(x_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) et $\sin(y_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) convergent vers des limites différentes, à savoir 0 et 1.

2.4.4 Forme équivalente des définitions de limites

Nous allons donner sans démonstration (laissée à titre d'exercice) des propriétés permettant en fait de définir les limites d'une autre manière.

On se place chaque fois sous les mêmes hypothèses que dans la section précédente.

Cas d'une limite en un réel

Propriété 2.4.5 *1) On a*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = r$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} |x - x_0| \leq \eta \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - r| \leq \varepsilon.$$

2) On a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

si et seulement si

$$\forall R > 0, \ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} |x - x_0| \leq \eta \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| \geq R.$$

La première propriété signifie que si l'on choisit de façon quelconque un intervalle centré sur r (à savoir $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$), alors on peut trouver un intervalle centré sur x_0 dont tous les points (pour autant qu'ils soient dans le domaine de f) ont une image dans l'intervalle choisi au départ.

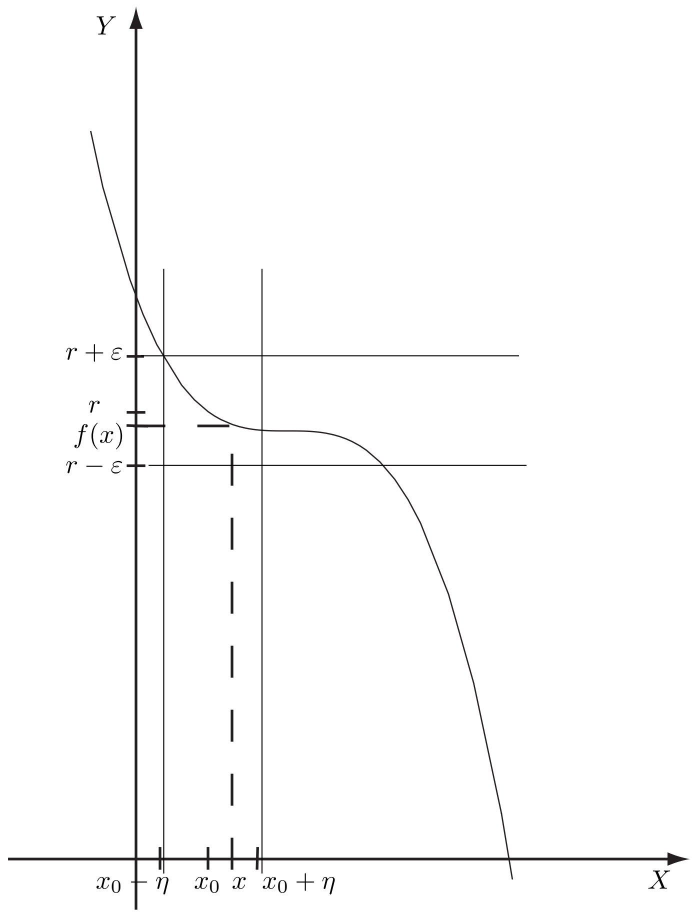


Illustration de $\lim_{x \in A, x \to x_0} f(x) = r$.

De la même manière, la seconde propriété signifie que si l'on choisit un nombre R strictement positif de façon quelconque, alors on peut trouver un intervalle centré sur x_0 dont tous les points (pour autant qu'ils soient dans le domaine de f) ont une image de module plus grand que le nombre R de départ.

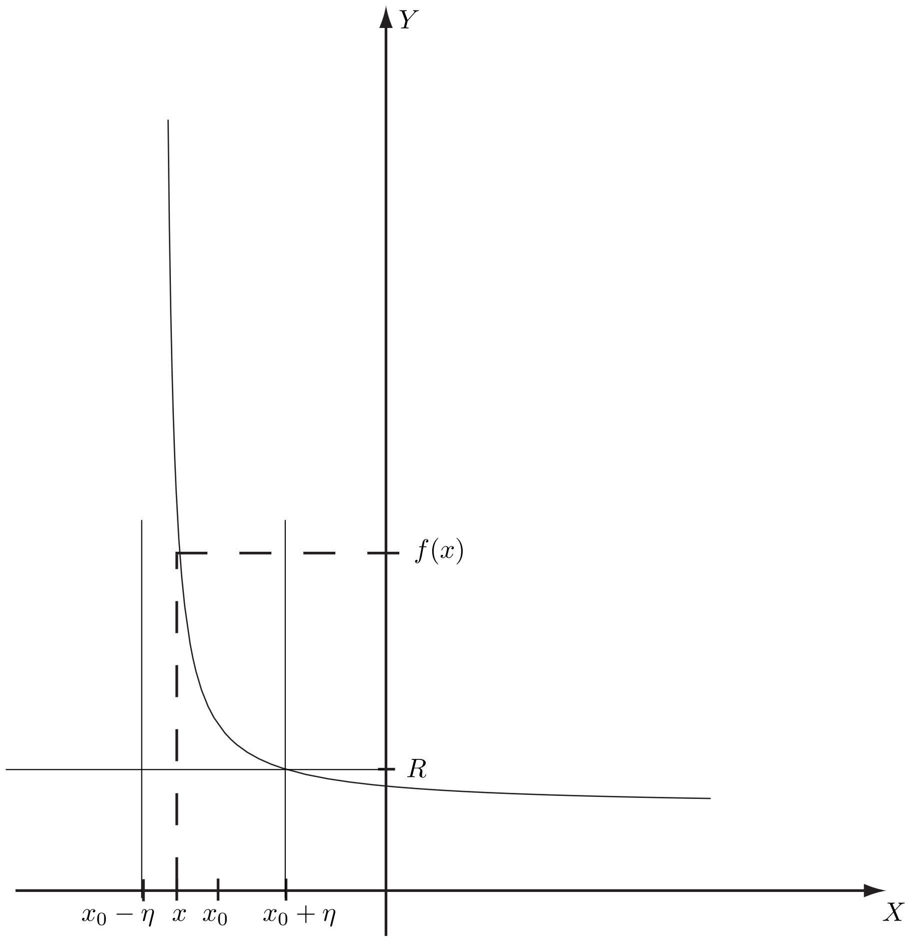


Illustration de $\lim_{x\in A, x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Les limites à gauche, à droite, se caractérisent de la même manière, avec les petits changements naturels adéquats.

Propriété 2.4.6 *1) On a*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = r \qquad (\textit{resp.} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = r)$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} 0 < x_0 - x \leq \eta \text{ (resp.} 0 < x - x_0 \leq \eta) \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - r| \leq \varepsilon.$$

2) On a

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \qquad (\textit{resp.} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty)$$

si et seulement si

$$\forall R > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} 0 < x_0 - x \leq \eta \text{ (resp.} 0 < x - x_0 \leq \eta) \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| \geq R.$$

Dans le cas où l'on a en outre $f(x) \geq r$ (resp. $f(x) \leq r$) pour x dans un voisinage de x_0 (c'est-à-dire quand les limites sont r^+ (resp. r^-)), les propriétés précédentes se réécrivent en spécifiant simplement $0 \leq f(x) - r \leq \varepsilon$ (resp. $0 \leq r - f(x) \leq \varepsilon$).

On a des précisions analogues dans le cas de "+l'infini" et de "-l'infini" .

Cas d'une limite en l'infini

On a des propriétés tout à fait analogues aux précédentes dans ce cas.

Propriété 2.4.7 *1) On a*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = r$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} |x| \geq N \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - r| \leq \varepsilon.$$

2) On a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

si et seulement si

$$\forall R > 0,\ \exists N > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} |x| \geq N \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| \geq R.$$

La première propriété signifie que si l'on choisit de façon quelconque un intervalle centré sur r (à savoir $[r-\varepsilon, r+\varepsilon]$), alors on peut trouver un réel strictement positif N tel que, pour tout x de module plus grand que N et dans le domaine de f, la valeur de f en x est dans l'intervalle choisi au départ.

De la même manière, la seconde propriété signifie que si l'on choisit un nombre R strictement positif de façon quelconque, alors on peut trouver un réel strictement positif N tel que, pour tout x de module plus grand que N et dans le domaine de f, la valeur de f en x est de module plus grand que le nombre choisi au départ.

Les limites en "plus l'infini", en "moins l'infini", se caractérisent de la même manière, avec les petits changements naturels adéquats.

Propriété 2.4.8 *1) On a*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = r \qquad (\textit{resp.}\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = r)$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} x \leq -N \text{ (resp. } x \geq N) \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - r| \leq \varepsilon.$$

2) On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad (\textit{resp.}\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty)$$

si et seulement si

$$\forall R > 0,\ \exists N > 0 \text{ tel que } \left.\begin{array}{l} x \leq -N \text{ (resp. } x \geq N) \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| \geq R.$$

Dans le cas où on a en outre $f(x) \geq r$ (resp. $f(x) \leq r$) pour x de module assez grand (ou assez grand, assez petit dans le cas $+\infty$, $-\infty$ respectivement), c'est-à-dire quand les limites sont r^+ (resp. r^-), les propriétés précédentes se réécrivent en spécifiant simplement $0 \leq f(x) - r \leq \varepsilon$ (resp. $0 \leq r - f(x) \leq \varepsilon$).

On a des précisions analogues dans le cas infini.

2.4.5 Propriétés

Les propriétés suivantes se démontrent de façon directe en utilisant les définitions introduites ci-dessus. Elles constituent un bon exercice pour le lecteur intéressé.

Dans les énoncés qui suivent, nous omettons d'indiquer précisément les domaines de définition et les limites considérées ; les précisions à apporter aux énoncés sont claires par le contexte et ne feraient qu'alourdir l'énoncé de cette succession de propriétés.

– Si f admet une limite, cette limite est unique.
– Si f admet la limite 0 (resp. ∞) alors $1/f$ admet la limite ∞ (resp. 0).

- Cas de limites finies.
  - Une combinaison linéaire de fonctions qui admettent chacune une limite finie admet une limite finie égale à la combinaison linéaire des limites.
  - Un produit de fonctions qui admettent chacune une limite finie admet une limite finie égale au produit des limites.
- Cas d'une limite finie et d'une limite infinie.
  - Si f admet une limite finie et si g admet une limite infinie, alors la fonction $f+g$ admet une limite infinie.
  - Si f admet une limite finie non nulle et si g admet une limite infinie, alors la fonction fg admet une limite infinie.
    Attention : pas de conclusion si f admet 0 comme limite ; c'est le <u>cas indéterminé</u> "$0.\infty$"
- Cas de deux limites infinies.
  - Si f et g admettent la limite $+\infty$ alors la fonction $f+g$ admet la limite $+\infty$.
  - Si f et g admettent la limite $-\infty$ alors la fonction $f+g$ admet la limite $-\infty$.
  - *Attention :* pas de conclusion si f admet la limite $+\infty$ et g admet la limite $-\infty$; c'est le <u>cas indéterminé</u> "$+\infty-\infty$".
  - Si f et g admettent la limite ∞ alors la fonction fg admet la limite ∞.
- Résultats concernant les inégalités entre fonctions.
  - Si les fonctions f et g admettent des limites finies en x_0, respectivement r et s et si $f \leq g$ ou $f < g$ au voisinage de x_0, alors $r \leq s$.
    Une propriété analogue concerne le cas où on prend la limite en l'infini plutôt qu'en x_0.
  - Le résultat suivant porte le nom de **théorème de l'étau.**
    Si f, g, h sont trois fonctions telles que $g \leq f \leq h$ au voisinage de x_0 et si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = r \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = r$.
    Un résultat analogue existe lorsqu'on prend la limite en l'infini plutôt qu'en x_0.
  - Si $f \leq g$ au voisinage de x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$) alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$).
    Un résultat analogue existe lorsqu'on prend la limite en l'infini plutôt qu'en x_0.
  - Si $\lim_{x\to x_0} f(x) > l$ (resp. $< l$) alors il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) > l$ (resp. $f(x) < l$) pour tout $x \in A \cap]x_0-\eta, x_0+\eta[$.
    Un résultat analogue existe lorsqu'on prend la limite en l'infini plutôt qu'en x_0.
- Résultats concernant les limites à gauche et à droite.
  - Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe (et est fini ou infini), alors les limites $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existent et sont égales à $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
  - Soit $x_0 \notin A$. Si les limites $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existent et sont égales, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et est égal à la valeur commune des limites à gauche et à droite de x_0.
  - Soit $x_0 \in A$. Si les limites $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existent et sont égales à $f(x_0)$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et est égal à $f(x_0)$.
- Résultat concernant les limites lorsque $x_0 \in A$ et utilisé dans l'étude de la continuité.
  Soit $x_0 \in A$. Alors $\lim_{x\to x_0} f(x)$ diffère toujours de l'infini. De plus, si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors on a nécessairement $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
  Les dernières propriétés sont illustrées par l'exemple de f_5.
- Résultats concernant les fonctions de fonctions.
  Dans cet énoncé, l, l' désignent des réels, ∞, $+\infty$ ou $-\infty$.
  Si $\lim_{x\to l} f(x) = l'$, si $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ alors $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l'$.
  Un résultat analogue existe lorsqu'on prend la limite en l'infini plutôt qu'en x_0.

2.4.6 Illustration des cas indéterminés

Illustrons par des exemples les cas indéterminés rencontrés ci-dessus. Dans ce qui suit, $r \in \mathbb{R}$.

– Cas "0.∞"

$f(x)$	$g(x)$	$(f.g)(x)$	$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to 0} g(x)$	$\lim_{x\to 0}(f.g)(x)$
rx	$\frac{1}{x}$	r	0	∞	r
x	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	0	∞	∞
$x\sin(\frac{1}{x})$	$\frac{1}{x}$	$\sin(\frac{1}{x})$	0	∞	n'existe pas

– Cas "$+\infty-\infty$"
Remarquons que, si $f(x)\neq 0$, on a $f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$; dès lors, si $g/f\to 1$, on se ramène au cas d'indétermination précédent.

$f(x)$	$g(x)$	$(f+g)(x)$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim_{x\to+\infty} g(x)$	$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)$
$r+x$	$-x$	r	$+\infty$	$-\infty$	r
x^2+x	$-x$	x^2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$x+\sin x$	$-x$	$\sin x$	$+\infty$	$-\infty$	n'existe pas

Les cas "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$" se ramènent au cas "0.∞" et vice-versa. Les cas "0^0", "∞^0", "1^∞" se ramènent aux cas précédents car, par définition, $f(x)^{g(x)}=\exp(g(x)\ln(f(x)))$.

2.4.7 Asymptotes

• Soit $x_0\in\,]a,b[$ et f défini sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$. Par définition, la droite d'équation cartésienne $x=x_0$ est *asymptote* verticale à droite (resp. à gauche) au graphique de f si

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \text{ ou } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \text{ ou } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty).$$

En abrégé, on dit que f admet la droite d'équation $x=x_0$ comme asymptote verticale à droite (resp. à gauche).

• Soit f défini sur $]a,+\infty[$ (resp. sur $]-\infty,a[$). Par définition, la droite d'équation cartésienne $y=mx+p$ est *asymptote oblique* en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) au graphique de f lorsque

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx-p)=0 \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx-p)=0)\,.$$

En abrégé, on dit que f admet la droite d'équation $y=mx+p$ comme asymptote oblique en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

• On démontre que f défini sur $]a,+\infty[$ (resp. sur $]-\infty,a[$) admet la droite d'équation $y=mx+p$ comme asymptote oblique en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=p$$

$$(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=p).$$

2.4.8 Limites des valeurs d'une fonction monotone

Le résultat suivant donne des propriétés très utiles concernant les limites des fonctions monotones aux bords de leur domaine de définition. Nous allons notamment l'utiliser dans un résultat pratique concernant les fonctions inverses. Sur une représentation graphique, on se convainc aisément que ces propriétés "semblent vraies". Cependant, l'observation d'un dessin n'a jamais été et ne sera jamais une démonstration. Une vraie preuve est donc nécessaire mais, dans le contexte de ce cours, nous l'omettrons et admettrons donc ce résultat.

Proposition 2.4.9 *1) Soit f une fonction réelle croissante sur $I =]a,b[$. Alors*
- *pour tout $y \in I$, les limites $\lim_{x\to y, x>y} f(x)$ et $\lim_{x\to y, x<y} f(x)$ existent et sont finies,*
- *les limites $\lim_{x\to a, x>a} f(x)$ et $\lim_{x\to b, x<b} f(x)$ existent,*
- *pour tout $y \in I$, on a*

$$\lim_{x\to a, x>a} f(x) \leq \lim_{x\to y, x<y} f(x) \leq f(y) \leq \lim_{x\to y, x>y} f(x) \leq \lim_{x\to b, x<b} f(x)$$

- *si f est strictement croissant, on a même*

$$\lim_{x\to a, x>a} f(x) < \lim_{x\to y, x<y} f(x) \leq f(y) \leq \lim_{x\to y, x>y} f(x) < \lim_{x\to b, x<b} f(x)$$

2) Soit f une fonction réelle décroissante sur $I =]a,b[$. Alors
- *pour tout $y \in I$, les limites $\lim_{x\to y, x>y} f(x)$ et $\lim_{x\to y, x<y} f(x)$ existent et sont finies,*
- *les limites $\lim_{x\to a, x>a} f(x)$ et $\lim_{x\to b, x<b} f(x)$ existent,*
- *pour tout $y \in I$, on a*

$$\lim_{x\to b, x<b} f(x) \leq \lim_{x\to y, x>y} f(x) \leq f(y) \leq \lim_{x\to y, x<y} f(x) \leq \lim_{x\to a, x>a} f(x)$$

- *si f est strictement décroissant, on a même*

$$\lim_{x\to b, x<b} f(x) < \lim_{x\to y, x>y} f(x) \leq f(y) \leq \lim_{x\to y, x<y} f(x) < \lim_{x\to a, x>a} f(x)$$

Preuve. Résultat admis.$\square$

2.5 Continuité

La continuité d'une fonction f s'interprète de la façon suivante : "on peut tracer le graphique de f sans lever le crayon". Donnons une définition rigoureuse ayant ce fait comme interprétation.

2.5.1 Définitions

Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et soit x_0 un point de A.
- On dit que

  $$\boxed{f \text{ est continu en } x_0}$$

  ou que x_0 est un point de continuité pour f si

  $$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existe.}}$$

  Etant donné les résultats précédents concernant les limites des valeurs d'une fonction,

  $$\boxed{\text{cette limite est alors nécessairement finie et égale à } f(x_0).}$$
- On dit que f est continu à gauche en x_0 si $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$; de manière analogue on dit que f est continu à droite en x_0 si $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existe et vaut $f(x_0)$.
- Soit f défini sur A. Le *domaine de continuité* de f est le sous-ensemble de A constitué des points où f est continu.
- Soit f défini sur A. On dit que la fonction f est continue sur A si elle est continue en tout point de A. L'ensemble des fonctions continues sur A est noté $C_0(A)$.

Ainsi, la notion de continuité est tout simplement la notion de limite utilisée dans un cadre précis.

2.5.2 Propriétés

En utilisant la définition de la limite et ses caractérisations, on obtient directement le résultat suivant.

Propriété 2.5.1 *Soit f défini sur A et soit $x_0 \in A$. Les propositions suivantes sont équivalentes*
- *la fonction f est continue en x_0*
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A, |x - x_0| \leq \eta$

– *pour toute suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) d'éléments de A qui converge vers x_0, la suite $f(x_m)$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers $f(x_0)$.*

□

A partir des définitions précédentes, on obtient également le résultat suivant.

Propriété 2.5.2 *Soit f défini sur A et soit $x_0 \in A$. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0 (pour autant que ces limites puissent être définies).*

Preuve. Un coup d'oeil aux définitions montre immédiatement que si f est continu en x_0, alors f est continu à gauche et à droite en x_0 (le même η convient). Si f est continu à gauche et à droite en x_0, alors étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < x - x_0 \leq \eta_1 \text{ ou } 0 < x_0 - x \leq \eta_2.$$

Dès lors, comme $x_0 \in A$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A,\ |x - x_0| \leq \inf\{\eta_1, \eta_2\}$$

et on conclut en prenant $\eta = \inf\{\eta_1, \eta_2\}$. □

De plus, on a l'important résultat suivant.

Propriété 2.5.3 *Si f est défini sur A, continu en $x_0 \in A$ et si le réel r est tel que*

$$f(x_0) < r \text{ (resp. } f(x_0) > r\text{)}$$

alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$f(x) < r \text{ (resp. } f(x) > r\text{) pour tout } x \in A \cap \,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[.$$

Preuve. On procède par l'absurde : s'il n'existe pas de tel η, alors pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe

$$x_m \in A \cap]x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m}[$$

tel que

$$f(x_m) \geq r \text{ (resp. } f(x_m) \leq r\text{)}.$$

La suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) est une suite d'éléments de A qui converge vers x_0. La continuité de f en x_0 donne alors

$$\lim_{m \to +\infty} f(x_m) = f(x_0)$$

donc

$$f(x_0) \geq r \quad \text{(resp. } f(x_0) \leq r\text{)}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.□

2.5.3 Exemples fondamentaux

On démontre directement les résultats de continuité suivants.

– La fonction $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
– Les fonctions élémentaires introduites précédemment sont continues sur leur domaine de définition : polynômes, fractions rationnelles, fonctions "racine n-ieme", fonctions trigonométriques, fonctions trigonométriques inverses, fonction exponentielle, fonction logarithme.
– Toute combinaison linéaire, tout produit de fonctions continues est une fonction continue.
– Si f est continu sur A et ne s'annule en aucun point de A alors $1/f$ est une fonction continue sur A.

– Si f est continu sur A, si g est continu sur B et si $\{g(x) : x \in B\} \subset A$ alors la fonction de fonction $f(g) = fog$ est continue sur B.
– Soit $x_0 \in A$ et f défini et continu sur $A \setminus \{x_0\}$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = r \in \mathbb{R}$ alors la fonction

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \setminus \{x_0\} \\ r & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue sur A et égale à f sur $A \setminus \{x_0\}$. On dit que F est *le prolongement continu de* f sur A.

2.5.4 Théorèmes relatifs à la continuité

Le résultat suivant est appelé

$$\boxed{\text{théorème des valeurs intermédiaires,}}$$

en abrégé TVI et est d'une très grande importance dans l'étude des fonctions continues à valeurs réelles.

Théorème 2.5.4 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Si les limites*

$$A = \lim_{x \to a^+} f(x), \quad B = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

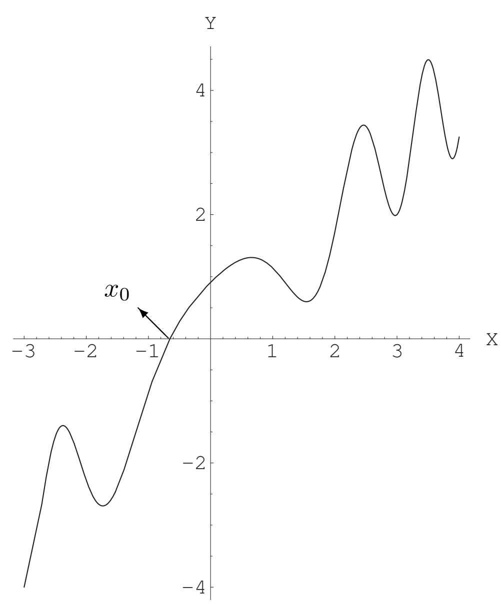
existent (A, B pouvant être infinis) et diffèrent, alors, pour tout réel R compris strictement entre A et B, il existe $r \in]a, b[$ tel que

$$f(r) = R.$$

Preuve. Résultat admis.□

Un cas particulier de ce résultat est fort utilisé en pratique, notamment dans la recherche des zéros d'une fonction continue à valeurs réelles. Nous l'énonçons ci-dessous.

Corollaire 2.5.5 *Si f est continu sur $[a, b]$ et si $f(a)\ f(b) < 0$ alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.*



A partir de ce théorème, on déduit les résultats suivants.

Corollaire 2.5.6 *1) Toute fonction réelle, continue et injective sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est strictement monotone sur cet intervalle.*[14]

2) Soient I, I' deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to I'$ est continu et bijectif, alors $f^{-1} : I' \to I$ est continu.

3) Tout polynôme de degré impair et à coefficients réels admet au moins un zéro réel.

Preuve. 1) Résultat admis.

2) Si f est une bijection continue de I sur I' alors elle est strictement monotone (vu sa bijectivité et le résultat 1)). L'inverse est donc aussi strictement monotone. En utilisant le critère par les suites, on démontre alors que cet inverse est aussi continu.

3) Supposons le polynôme P de degré N, avec N impair ; soit a_N le coefficient de x^N. Si $a_N > 0$ (resp. $a_N < 0$) alors

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \text{ (resp. } -\infty), \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \text{ (resp. } +\infty).$$

Comme $R = 0 \in]-\infty, +\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires donne un réel $r \in \mathbb{R}$ tel que $P(r) = 0$. D'où la conclusion.□

Le théorème qui suit porte le nom de

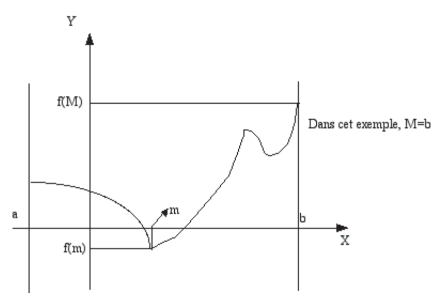
$\boxed{\text{théorème des limites atteintes ou des bornes atteintes.}}$

Ce résultat indique tout simplement que $\text{im}(f) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ est minoré et majoré et que les bornes inférieure et supérieure sont atteintes, c'est-à-dire réalisées. Il est d'une grande utilité dans l'étude des fonctions continues à valeurs réelles.

Théorème 2.5.7 (Théorème des bornes atteintes) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si f est une fonction réelle continue sur $[a,b]$, alors il existe $m, M \in [a,b]$ tels que*

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M), \ \forall x \in [a,b].$$

Preuve. Résultat admis.□



Dans le résultat précédent, le fait que l'on travaille avec un intervalle borné fermé $[a,b]$ est essentiel ; en effet si nous considérons par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, définie et continue sur $]0,1]$, on constate immédiatement que l'image de f, à savoir l'intervalle $[1, +\infty[$ n'est pas majoré.

2.6 Dérivation

2.6.1 Définitions

1) Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de cet intervalle. On dit que

$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0}$

14. Une fonction strictement monotone est bien sûr injective ; le résultat énoncé en 1) est une réciproque.

si la limite

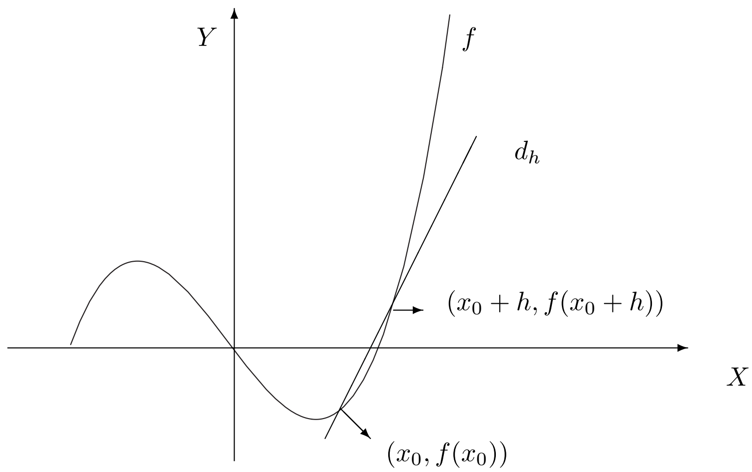
$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad \text{existe et est finie;}}$$

cette limite est alors notée

$$D_x f(x_0)\quad \text{ou}\quad Df(x_0)\quad \text{ou}\quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

et est appelée

dérivée de f au point x_0 ou encore nombre dérivé de f au point x_0.



Pour tout h assez petit, la droite sécante d_h est la droite passant par les points de la représentation de f d'abscisses x_0 et x_0+h ; cette droite a donc pour coefficient angulaire le réel $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

La limite donnée comme définition de la dérivée de f en x_0 est donc la limite des coefficients angulaires de ces sécantes.

On dit que f est *dérivable dans* I si elle est dérivable en tout point de I. On définit ainsi la fonction

$$Df\ :\ I\to\mathbb{R}\quad x\mapsto Df(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

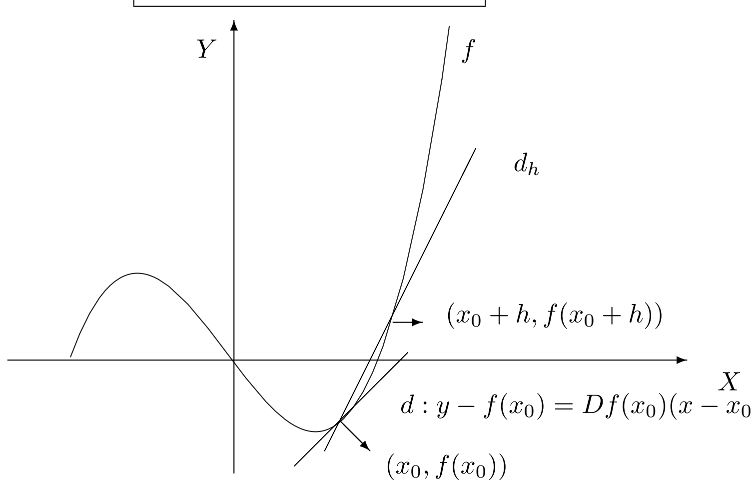
appelée *fonction dérivée de* f ou tout simplement dérivée de f.

2) La droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient angulaire $Df(x_0)$ est appelée

$$\boxed{\textit{tangente}}$$

à la représentation graphique de f au point x_0. Son équation cartésienne [15] est

$$\boxed{y-f(x_0)=Df(x_0)(x-x_0).}$$



15. On verra que $f(x_0)+Df(x_0)(x-x_0)$ est l'approximation polynomiale à l'ordre 1 de f en x_0.

3) Comme nous avons déjà introduit la notion de limite à gauche et à droite, il est facile ici de définir de façon analogue les notions de dérivée à gauche, à droite de f.

On dit que

$$f : [x_0, b[\to \mathbb{R} \text{ est dérivable à droite en } x_0$$

lorsque la limite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe et est finie.}$$

On définit alors aussi la tangente à droite à la représentation graphique de f en x_0. Si on note $d(x_0)$ la limite précédente, il s'agit de la droite d'équation cartésienne

$$y - f(x_0) = d(x_0)\ (x - x_0).$$

De même on dit que

$$f :]a, x_0] \to \mathbb{R} \text{ est dérivable à gauche en } x_0$$

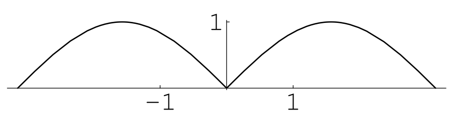
lorsque la limite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe et est finie.}$$

On définit alors aussi la tangente à gauche à la représentation graphique de f en x_0. Si on note $g(x_0)$ la limite précédente, il s'agit de la droite d'équation cartésienne

$$y - f(x_0) = g(x_0)\ (x - x_0).$$

Si f, défini dans $]a, b[$, admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en $x_0 \in]a, b[$ qui diffèrent, on dit que le point d'abscisse x_0 du graphique de f est un point anguleux.



2.6.2 Propriétés importantes

PROPRIÉTÉS

La propriété suivante est importante ; elle relie les notions de dérivabilité et de continuité. Cependant, elle n'est vraie que si l'on travaille avec une seule variable.

Propriété 2.6.1 *Si la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ alors f est continue sur $]a, b[$.*
La réciproque de cette propriété est fausse.

Preuve. Soit f dérivable sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I,\ x \neq x_0$, on peut écrire

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Comme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0) \in \mathbb{R},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= 0\ Df(x_0) = 0 \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

La réciproque de cette propriété est fausse car, par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (elle est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ mais elle n'est pas dérivable en 0).$\square$

Les propriétés suivantes sont démontrées aisément en utilisant la définition de la dérivabilité.

Propriété 2.6.2 *Si f et g sont dérivables sur $I =]a, b[$ et si $r, s \in \mathbb{R}$ alors*

– *la fonction $rf + sg$ est dérivable sur I et*

$$D(rf + sg)(x) = rDf(x) + sDg(x),\ x \in I$$

– *la fonction fg est dérivable sur I et*

$$D(fg)(x) = Df(x)\ g(x) + f(x)\ Dg(x),\ x \in I$$

– *si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f/g est dérivable sur I et*

$$D(\frac{f}{g})(x) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{(g(x))^2}, \quad x \in I;$$

en particulier $D\frac{1}{g(x)} = -\frac{Dg(x)}{(g(x))^2}$, $D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$.

Cas fondamentaux

Examinons à présent quelques cas fondamentaux.

Proposition 2.6.3 *1) Une fonction constante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction nulle.*

2) Soit $m \in \mathbb{N}_0$. Le polynôme $P(x) = x^m$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$Dx^m = mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R};$$

en particulier $Dx = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Soit $m \in \mathbb{N}_0$. Si m est pair, la fonction $f(x) = \sqrt[m]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$D\sqrt[m]{x} = \frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x}}{x} = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1},\ x \in]0, +\infty[\,.$$

Si m est impair, la fonction $f(x) = \sqrt[m]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et

$$D\sqrt[m]{x} = \frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x}}{x} = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1},\ x \in \mathbb{R}_0.$$

4) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J et soit g une fonction définie et dérivable sur $I =]a, b[$ telle que $\{g(x)\ :\ x \in]a, b[\} \subset J$. Alors la fonction de fonction $F(x) = f(g(x)) = fog(x) = (fog)(x),\ x \in]a, b[$ est dérivable sur $]a, b[$ et on a

$$D(fog)(x) = (Df)(g(x))\ Dg(x)$$

ce qui s'écrit encore

$$Df(g)(x) = D(fog)(x) = (Df)(g(x))\ Dg(x) = D_X f(X)|_{X=g(x)}\ Dg(x).$$

Pour alléger l'écriture, on écrit aussi $D(fog) = (Df)og\ Dg$.

5) La fonction $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ mais n'est pas dérivable en 0.

Preuve. 1) est immédiat en utilisant la définition de la dérivée.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P(x) = x^m - x_0^m$ est divisible par $x - x_0$; on a

$$P(x) = (x - x_0)\ (x^{m-1} + x_0x^{m-2} + \ldots + x_0^{m-2}x + x_0^{m-1}).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{x^{m-1} + x_0x^{m-2} + \ldots + x_0^{m-2}x + x_0^{m-1}}_{\text{m termes}} \right) = mx_0^{m-1}.$$

3) Traitons le cas m pair. Soit $x_0 > 0$. Posons $y_0 = \sqrt[m]{x_0}$ et, pour $x > 0$, posons $y = \sqrt[m]{x}$. Le polynôme $P(y) = y^m - y_0^m$ est divisible par $y - y_0$ et on a

$$P(y) = (y - y_0)\ (y^{m-1} + y_0 y^{m-2} + \ldots + y_0^{m-2} y + y_0^{m-1}).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{x_0}}{x - x_0} &= \frac{1}{y^{m-1} + y_0 y^{m-2} + \ldots + y_0^{m-2} y + y_0^{m-1}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[m]{x})^{m-1} + \sqrt[m]{x_0}(\sqrt[m]{x})^{m-2} + \ldots + (\sqrt[m]{x_0})^{m-2}\sqrt[m]{x} + (\sqrt[m]{x_0})^{m-1}} \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{m(\sqrt[m]{x_0})^{m-1}} = \frac{\sqrt[m]{x_0}}{m x_0}.$$

4) Soit $x_0 \in I$. Posons $y_0 = g(x_0)$. On a, pour $x \in I,\ x \neq x_0$,

$$\frac{f(g(x)) - f(y_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{f(g(x)) - f(y_0)}{(g(x) - y_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} & \text{si } g(x) \neq g(x_0) \\ Df(y_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} & \text{si } g(x) = g(x_0). \end{cases}$$

Comme $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$ (car une fonction dérivable est continue), on obtient que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(y_0)}{x - x_0} = Df(y_0)\ Dg(x_0),$$

c'est-à-dire la thèse.

On peut aussi démontrer ce résultat en se servant de suites.

5) Comme $f(x) = x$ (resp. $f(x) = -x$) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0[$) on a $Df(x) = 1$ sur $]0, +\infty[$ et $Df(x) = -1$ sur $]-\infty, 0[$. De plus, comme

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

et

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

la fonction n'est pas dérivable en 0.

Dérivation et fonction inverse

Voici à présent un résultat très important reliant la dérivée d'une fonction bijective et la dérivée de son inverse.

Propriété 2.6.4 *Si $f :\ I =]a, b[\to J =]c, d[$ est une bijection dérivable et telle que*[16] *$Df(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors la fonction inverse $f^{-1} :\ J \to I$ est dérivable sur J et on a*

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(y)}, \quad \text{avec } y = f^{-1}(x).$$

Preuve. Soit $x_0 \in J$ et soit $x \in J$, $x \neq x_0$. Avec $y, y_0 \in I,\ f(y) = x, f(y_0) = x_0$, on a

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{f^{-1}(f(y)) - f^{-1}(f(y_0))}{f(y) - f(y_0)} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}. \quad (*)$$

16. Noter que $f(x) = x^3$ est une bijection dérivable sur $\mathbb{R}$, d'image $\mathbb{R}$; la fonction inverse de celle-ci est la fonction $g(x) = \sqrt[3]{x}$, qui est seulement dérivable sur $\mathbb{R}_0$; l'hypothèse de non annulation de la dérivée de f est donc importante.

Comme f est dérivable sur I, cette fonction f est continue sur I ; par conséquent, son inverse est aussi continue sur J. Ainsi, on obtient

$$\lim_{x\to x_0} y = \lim_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0) = y_0;$$

comme on a aussi

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = Df(y_0)$$

le résultat concernant les limites de fonctions de fonction donne

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(f^{-1}(x))-f(y_0)}{f^{-1}(x)-y_0} = Df(y_0).$$

Par hypothèse, cette limite est un réel non nul ; on a donc, en reprenant (*)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{Df(y_0)}.$$

On peut aussi démontrer ce résultat en se servant de suites. □

2.6.3 Dérivées multiples et formule de Leibniz

Définitions

La dérivée d'une fonction est aussi appelée dérivée d'ordre 1 de cette fonction et on utilise la notation $D^1 f = Df$; la fonction elle-même est appelée dérivée d'ordre 0 et on utilise la notation $D^0 f = f$.

Par définition, une fonction f est deux fois dérivable sur $I =]a,b[$ si elle est dérivable sur I et si sa dérivée Df est encore dérivable sur I. Dans ces conditions, la dérivée de la dérivée est notée $D^2 f$ (ou $D_x^2 f(x),\ x \in I$) ; cette fonction est appelée la dérivée d'ordre 2 de f.

Pour $p \in \mathbb{N}_0$, on introduit de la même manière la notion de fonction p fois dérivable sur I, donc de dérivée d'ordre p de f.

La notation $C_1(I)$ désigne l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur I et dont la dérivée est continue sur I. On a $C_1(I) \subset C_0(I)$. Une fonction appartenant à $C_1(I)$ est dite fonction une fois continûment dérivable sur I.

De même, la notation $C_p(I)$ (avec $p \in \mathbb{N}_0$) désigne l'ensemble des fonctions qui sont p fois dérivables sur I et dont la dérivée d'ordre p est continue ; l'ensemble $C_p(I)$ est donc l'ensemble des fonctions p fois dérivables sur I dont les dérivées jusqu'à l'ordre p sont continues sur I. Une fonction de $C_p(I)$ est appelée fonction p fois continûment dérivable sur I.

La notation $C_\infty(I)$ désigne l'ensemble des fonctions qui sont p fois dérivables quel que soit $p \in \mathbb{N}_0$ et telles que $D^p f \in C_0(I)$ quel que soit $p \in \mathbb{N}_0$. C'est l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur I.

Remarque importante

Il faut bien noter qu'une fonction dérivable n'est pas nécessairement continûment dérivable !

Par exemple, on vérifie que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \in \mathbb{R}_0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée

$$Df(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & x \in \mathbb{R}_0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

n'est pas une fonction continue en 0.

La formule de Leibniz

Propriété 2.6.5 (Formule de Leibniz.) *Soit $p \in \mathbb{N}_0$ et soient f, g deux fonctions p fois dérivables sur I. Alors le produit fg est une fonction p fois dérivable sur I et on a*

$$D^p(fg)(x) = \sum_{j=0}^{p} C_p^j D^j f(x) D^{p-j} g(x), \ x \in I.$$

Preuve. On démontre ce résultat par récurrence.

Pour $p = 1$, le produit de deux fonctions dérivables est dérivable et on a (propriété vue précédemment)

$$D(fg)(x) = f(x)\ Dg(x) + g(x)\ Df(x), \ x \in I.$$

Comme

$$\sum_{j=0}^{1} C_1^j D^j f(x) D^{1-j} g(x) = C_1^0 f(x) Dg(x) + C_1^1 Df(x) g(x) = f(x) Dg(x) + Df(x) g(x)$$

on en déduit que l'égalité annoncée est vraie pour $p = 1$.

Supposons la propriété vraie pour $p-1$ et démontrons-la pour p. Par hypothèse de récurrence, on sait donc que le produit fg est $p-1$ fois dérivable sur I et que l'on a

$$D^{p-1}(fg)(x) = \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^j D^j f(x) D^{p-1-j} g(x), \ x \in I.$$

Vu l'hypothèse sur f et g, on en déduit donc que $D^{p-1}(fg)$ est encore dérivable sur I et que

$$\begin{aligned} D^p(fg)(x) = DD^{p-1}(fg)(x) &= \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^j D\left(D^j f(x) D^{p-1-j} g(x)\right), \ x \in I \\ &= \ldots \\ &= \sum_{j=0}^{p} C_p^j D^j f(x) D^{p-j} g(x), \ x \in I. \end{aligned}$$

(le calcul qui doit être fait à l'endroit "..." est analogue à celui effectué dans le cadre du binôme de Newton).□

2.6.4 Interprétation et utilisation de la dérivée

1) Nous avons déjà vu (cf Définition 2.6.1) l'interprétation géométrique de la notion de dérivée d'une fonction en un point.

La notion de dérivée intervient dans de nombreux autres contextes : en effet, le quotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

représente le taux de changement moyen d'une quantité f évaluée en x et en x_0 ; le passage à la limite $\lim_{x \to x_0}$ est interprété comme le taux de changement ("instantané") en x_0.

Ainsi par exemple, si f représente une longueur, fonction du temps t, le quotient

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

représente la vitesse moyenne entre les moments t_0 et t ; la limite, à savoir

$$Df(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

représente la vitesse au moment t_0 (taux de changement de la distance parcourue en fonction du temps). L'exemple qui vient naturellement à l'esprit après la vitesse est l'accélération : l'accélération en t_0 est la dérivée de la vitesse en t_0 (l'accélération est le taux de changement de la vitesse).

2) L'utilisation d'une seule fonction à valeurs réelles pour décrire le mouvement d'un point, d'un objet, ne se fait que si ce point se déplace dans une seule direction. Quand on doit repérer le mouvement complet dans le plan, dans l'espace, on utilise non plus une seule fonction à valeurs réelles mais deux (pour le plan) ou trois (pour l'espace) : les coordonnées cartésiennes du point qui se déplace, exprimées en fonction du temps (par exemple) sont ces fonctions. Un point est donc repéré par un vecteur (vecteur position), celui dont les composantes sont les fonctions réelles dont il est question ci-dessus ; la vitesse et l'accélération sont aussi des vecteurs, obtenus par dérivation du "vecteur position" (dérivée d'ordre un pour la vitesse, deux pour l'accélération).

Prenons un exemple concret et complet (cf *Mécanique rationnelle*, R. Simon, éditions Derouaux, Liège).

Les coordonnées cartésiennes d'un point soumis à la seule force de pesanteur sont fonction du temps ; elles s'écrivent (cf cours de physique : problème de la chute libre d'un corps)

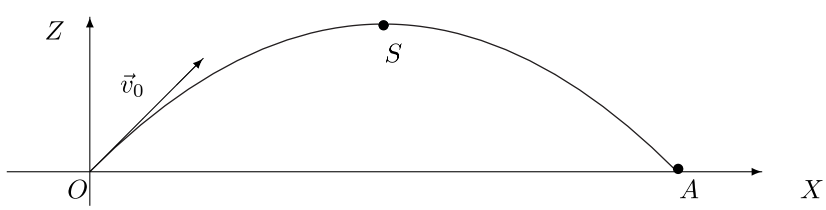
$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t \\ z(t) = v_3 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

lorsqu'on suppose qu'au départ (c'est-à-dire au temps $t = 0$) le point se trouve à l'origine des axes (vecteur position initiale nul), où v_1, v_2, v_3 sont les trois composantes de la vitesse initiale (au temps $t = 0$) du point et où g est une constante strictement positive (g est la norme de l'accélération de la pesanteur, c'est-à-dire la gravité ; pour rappel : $g \simeq 981 cm/s^2$).

Lorsqu'on choisit les axes X, Y de telle sorte que la vitesse initiale selon Y soit nulle, à savoir $v_2 = 0$, on trouve finalement que le point évolue dans le plan vertical formé par X, Z et que ses coordonnées dans ce plan sont $x(t) = v_1 t,\ z(t) = v_3 t - \frac{1}{2} g t^2,\ t \geq 0$. L'élimination du paramètre t indique alors que le point P évolue sur la courbe d'équation cartésienne

$$z = \frac{v_3}{v_1} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_1^2} x^2 ;$$

l'ensemble des points vérifiant une telle équation est une parabole "de concavité tournée vers le bas".



Le point S, sommet de la parabole, a pour coordonnées $(v_1 v_3 / g, v_3^2/(2g))$; ce point est atteint au temps $t = v_3/g$.

Le point A a pour abscisse le réel $2 v_1 v_3 / g$; il est atteint au temps $t = 2 v_3 / g$.

On imagine l'importance de ce problème pour la balistique. Il permet en effet de calculer la vitesse initiale permettant d'atteindre un point de coordonnées connues. Imaginons en effet que l'on désire atteindre A avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de longueur donnée $\|\vec{v}_0\| = v_0$; on a alors $v_1 = v_0 \cos\theta_0,\ v_3 = v_0 \sin\theta_0$ et, pour connaître cette vitesse, il suffit donc de déterminer $\theta_0 \in [0, \pi/2]$. Comme l'abscisse de A est $2 v_1 v_3 / g = v_0^2 \sin(2\theta_0)/g$, on voit donc qu'atteindre A, fixé au départ (par son abscisse, par exemple $r > 0$), consiste à trouver $\theta_0 \in [0, \pi/2]$ tel que

$$v_0^2 \sin(2\theta_0) = rg.$$

La résolution de cette équation (lorsqu'elle est résoluble) fournit deux angles possibles. Deux tirs sont donc programmables pour atteindre A.

2.6.5 Le gradient, la dérivation implicite

2.7 Applications de la dérivation

2.7.1 Le théorème des accroissements finis et le développement limité de Taylor

Le théorème des accroissements finis est très important car il permet d'obtenir des estimations lors de l'étude des approximations linéaires de fonctions. Pour le démontrer, deux résultats sont nécessaires : un lemme concernant les bornes supérieure (et inférieure), ainsi qu'une propriété suffisamment importante pour qu'elle porte le nom de théorème (théorème de Rolle). Nous verrons ensuite que le théorème des accroissements finis est en fait une application du théorème de Rolle.

Lemme 2.7.1 *Soit un intervalle ouvert* $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$ *et soit* f *une fonction à valeurs réelles, dérivable sur* $]a, b[$. *Si* $x_0 \in]a, b[$ *est tel que* $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in]a, b[$ *(resp.* $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in]a, b[$*), alors* $Df(x_0) = 0$.

Preuve. Par les propriétés des limites, on sait que

$$Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Supposons par exemple que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \forall x \in]a, b[\,,\ x > x_0; \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \forall x \in]a, b[\,,\ x < x_0.$$

Le passage à la limite sur x dans les deux inégalités précédentes conduit à

$$Df(x_0) \geq 0, \quad \text{et} \quad Df(x_0) \leq 0$$

donc $Df(x_0) = 0$. $\square$

Théorème 2.7.2 (Rolle) *Soient des réels* a, b *tels que* $a < b$ *et soit* f *une fonction à valeurs réelles, continue sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$. *Si on a* $f(a) = f(b)$, *alors il existe* $x_0 \in]a, b[$ *tel que* $Df(x_0) = 0$.

Preuve. Vu le lemme précédent, il suffit de prouver qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$ ou tel que $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Par le théorème des bornes atteintes, il existe $m, M \in [a, b]$ tels que

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Si m ou M appartient à $]a, b[$, on conclut.

Sinon, on a $m, M \in \{a, b\}$. Dans ce cas, si $m = M$, alors f est constant sur $[a, b]$ et Df est identiquement nul ; si $m \neq M$, on a par exemple $m = a$ et $M = b$ (l'autre cas est $m = b, M = a$). Comme $f(a) = f(b)$ par hypothèse, on obtient

$$f(a) = f(m) \leq f(x) \leq f(b) = f(M), \forall x \in [a, b]$$

donc f est aussi constant sur $[a, b]$ et Df est donc identiquement nul sur $]a, b[$.$\square$

Théorème 2.7.3 (Théorème des accroissements finis, en abrégé TAF) *Soient des réels* a, b *tels que* $a < b$ *et soit* f *une fonction à valeurs réelles, continue sur l'intervalle fermé* $[a, b]$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$. *Alors il existe un point* $x_0 \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) = f(a) + (b - a)Df(x_0)$$

ou encore

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Df(x_0).$$

Preuve. Définissons le réel k par

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et la fonction F par

$$F(x) = f(x) - kx, \quad x \in [a, b].$$

Montrons que cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Rolle :
- $F \in C_0([a, b])$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $[a, b]$
- $F(a) = F(b)$ car on a successivement

$$F(a) = f(a) - ka, \quad F(b) = f(b) - kb$$

$$\begin{aligned} F(a) - F(b) &= f(a) - f(b) - k(a - b) \\ &= f(a) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - b) \\ &= f(a) - f(b) + f(b) - f(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- F est dérivable sur $]a, b[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Dès lors, par le théorème de Rolle, il existe un réel $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$DF(x_0) = 0.$$

Comme

$$DF(x) = Df(x) - k, \quad x \in]a, b[$$

on obtient que

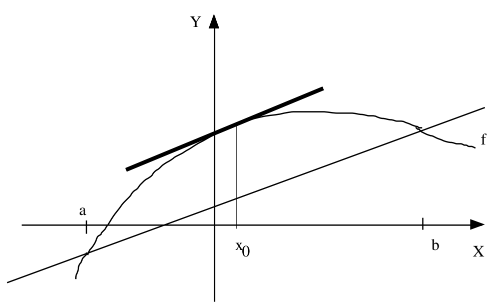
$$DF(x_0) = Df(x_0) - k = 0$$

donc

$$Df(x_0) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

L'interprétation graphique est la suivante :



Le réel $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient angulaire de la droite passant par les points du graphique de f dont les abscisses sont a, b ; le théorème des accroissements finis dit qu'il existe un réel de l'intervalle $]a, b[$ qui est tel que la tangente au graphique de f au point dont l'abscisse est ce réel est parallèle à la droite sécante mentionnée plus haut.

Théorème 2.7.4 (TAF sur un ouvert) *Soit f une fonction réelle et dérivable sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in I$ il existe un point u compris entre x et y tel que*

$$\boxed{f(x) = f(y) + (x - y)Df(u).}$$

Si $x \neq y$, on peut supposer u strictement compris entre x et y.

Ce théorème est en fait une conséquence du résultat précédent.

Preuve. Si $x = y$ alors $u = x = y$ convient. Si $x \neq y$, on applique le théorème des accroissements finis avec $a = x, b = y$ si $x < y$ et avec $a = y, b = x$ si $y < x$.$\square$

Grâce au théorème des accroissements finis, on peut démontrer que, sur un intervalle, seules les fonctions constantes ont une dérivée nulle. Ce résultat sera utilisé lors de la caractérisation des primitives d'une fonction.

Théorème 2.7.5 *Si f est une fonction réelle et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ alors $Df = 0$ sur $]a, b[$ si et seulement s'il existe une constante c telle que $f(x) = c$ pour tout $x \in]a, b[$.*

Preuve. On sait déjà que la dérivée d'une constante est la fonction nulle.

Démontrons la réciproque. Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ telle que $Df = 0$ sur $]a, b[$. Fixons $x_0 \in]a, b[$. Pour tout réel $x \in]a, b[$ l'application du TAF aux points x, x_0 fournit un réel u compris entre x et x_0 tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)Df(u).$$

Comme la dérivée de f est nulle dans $]a, b[$, on obtient $f(x) = f(x_0)$.$\square$

Le résultat qui suit est une généralisation du théorème des accroissements finis ; il correspond en effet à ce théorème lorsque $n = 1$.

Théorème 2.7.6 (Développement limité de Taylor) *Soient n un naturel strictement positif et f une fonction réelle n fois dérivable sur $]a, b[$. Pour tous $x, x_0 \in]a, b[$, $x \neq x_0$ il existe un point u compris strictement entre x_0 et x tel que*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x - x_0)^j}{j!} D^j f(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} D^n f(u).$$

Si $x = x_0$ le résultat est encore vrai avec u quelconque dans l'intervalle (en particulier égal à x_0).

Preuve. Pour $n = 1$, il s'agit du théorème des accroissements finis.

Pour démontrer ce résultat lorsque[17] $n > 1$, on procède de la manière suivante. De manière analogue à ce qui a été fait pour la preuve du TAF, définissons la constante k par

$$k = \left(f(x) - f(x_0) - (x - x_0)Df(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2!} D^2 f(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(x_0) \right) \frac{n!}{(x - x_0)^n}$$

et la fonction F dans l'intervalle fermé d'extrémités x_0, x par

$$F(u) = f(x) - f(u) - (x - u)Df(u) - \frac{(x - u)^2}{2!} D^2 f(u) - \ldots - \frac{(x - u)^{n-1}}{(n-1)!} D^{n-1} f(u) - \frac{(x - u)^n}{n!} k.$$

Vu les hypothèses sur f, cette fonction est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités x_0, x, dérivable sur l'intervalle ouvert correspondant. De plus, on a

$$F(x) = 0, \quad F(x_0) = 0.$$

Le théorème de Rolle donne donc un point u_0 strictement compris entre x_0 et x tel que

$$D_u F(u_0) = 0.$$

Comme on a

$$D_u \left(\frac{(x - u)^j}{j!} D_u^j f(u) \right) = -\frac{(x - u)^{j-1}}{(j-1)!} D_u^j f(u) + \frac{(x - u)^j}{j!} D_u^{j+1} f(u)$$

17. La preuve du TAF, c'est-à-dire le cas $n = 1$, peut aussi être effectuée en suivant la même preuve

pour $j = 1, \ldots, n-1$, on obtient

$$D_u F(u) = -\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} D_u^n f(u) + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} k = \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} \left(-D_u^n f(u) + k\right)$$

donc

$$k = D^n f(u_0);$$

dès lors la thèse est démontrée. □

2.7.2 Le théorème de l'Hospital

Introduction

Ce résultat mathématique (que nous admettrons) est très utile dans le calcul de plusieurs limites. Il permet de lever de nombreuses indéterminations. Brièvement, ce résultat est le suivant :

$$\boxed{\text{si } (\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{“}\frac{0}{0}\text{” ou “}\frac{\infty}{\infty}\text{”) et si } \lim_{x\to a} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = l \qquad \text{alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.}$$

Mais faisons immédiatement quelques remarques.

– Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ on ne peut pas dire que $\lim_{x\to a} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = l$ comme le montre l'exemple de $f(x) = x + \sin(x)$, $g(x) = x$, $a = +\infty$.
– On peut avoir $\lim_{x\to a} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = l^+$ et $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l^-$ comme le montre l'exemple de $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, $a = +\infty$.
– Dans la levée d'indétermination, l'utilisation du théorème de l'Hospital ne permet pas toujours de conclure comme le montre l'exemple de $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, $a = +\infty$. (Cette limite se calcule aisément par des moyens algébriques classiques.)

Théorème

Soit un réel r. On désigne par ξ soit r^+, soit r^-, soit $+\infty$, soit $-\infty$ et par V un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ pour lequel il existe
- $\varepsilon > 0$ tel que $V \supset]r, r+\varepsilon[$ si on calcule $\lim_{x\to r^+}$,
- $\varepsilon > 0$ tel que $V \supset]r-\varepsilon, r[$ si on calcule $\lim_{x\to r^-}$,
- $N > 0$ tel que $V \supset]N, +\infty[$ si on calcule $\lim_{x\to +\infty}$,
- $N > 0$ tel que $V \supset]-\infty, -N[$ si on calcule $\lim_{x\to -\infty}$.

Théorème 2.7.7 (Théorème de l'Hospital) *Si f et g sont des fonctions réelles dérivables sur V et si*

– *g et Dg diffèrent de 0 en tout point de V (*)*
– *on a le cas noté “$\frac{0}{0}$” (c'est-à-dire $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$) ou le cas noté “$\frac{\infty}{\infty}$” (c'est-à-dire $\lim_{x\to\xi} g(x) = \infty$) (**)*
– *on a (l pouvant être réel ou encore $+\infty$, $-\infty$)*

$$\lim_{x\to\xi} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = l$$

alors

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Preuve. Résultat admis.□

Remarques

1) Dans l'énoncé du théorème, commentons les points (*) et (**).

Cas (*) Si Dg diffère de 0 en tout point de V, alors, par le théorème de Rolle, g ne peut s'annuler qu'une seule fois dans V. On peut donc se passer de l'hypothèse "g diffère de 0 en tout point de V", quitte à restreindre V au départ.
Cas (**) Le cas r/∞, avec $r \in \mathbb{R}$ n'est pas indéterminé ; l'utilisation du théorème de l'Hospital n'est donc justifiée que dans les cas où f admet une limite infinie ou n'admet pas de limite en ξ. Par exemple
i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$; le théorème de l'Hospital ne permet pas de conclure ;
ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$; calcul direct mais le théorème de l'Hospital permet aussi de conclure.

2) Si on cherche la limite en x_0 (resp. l'infini) sans que ce soit x_0^+, x_0^- (resp. $+\infty, -\infty$), on peut également appliquer le théorème de l'Hospital. Pour le justifier, il suffit de constater qu'on applique deux fois le théorème (une fois pour $+$, une fois pour $-$) puisqu'on utilise le résultat donnant la limite lorsqu'on a la même limite à gauche et à droite (le point où on calcule la limite n'étant pas dans le domaine).

Exemples fondamentaux

En utilisant le théorème de l'Hospital, on établit les résultats très importants suivants.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0; \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^r} = 0$ pour $r > 0$ fixé
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1; \ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp x}{x^r} = +\infty; \ \lim\limits_{x\to+\infty} x^r \exp(-x) = 0$ pour $r > 0$ fixé
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \exp a$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé.

2.7.3 Monotonie, concavité, extrema

Rappelons que les notions de monotonie (fonction croissante, décroissante), de concavité (fonction convexe, concave) ont été introduites dans ce chapitre. Dans la partie du chapitre consacrée aux limites, nous avons également énoncé plusieurs propriétés relatives à la limite des valeurs d'une fonction monotone ; ces propriétés vont être utilisées dans ce qui suit.

Démontreons les propriétés fondamentales reliant les notions de monotonie, concavité, extrema à celle de dérivée.

Monotonie

Proposition 2.7.8 (Lien entre dérivation et monotonie) *Soit f une fonction réelle dérivable sur $I =]a, b[$. On a les propriétés suivantes.*

1) f est croissant (respectivement décroissant) sur $I \Leftrightarrow Df$ est une fonction positive (resp. négative) sur I.

2) Si Df est strictement positif (resp. strictement négatif) sur I, alors f est strictement croissant (resp. décroissant) sur I.

La réciproque de cette propriété est fausse.

Preuve. 1) Supposons f croissant. Alors, pour tout $x \in I$, on a

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Réciproquement, supposons que Df soit une fonction positive. Soient $x, y \in I$ tels que $x \leq y$. Par application du théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe un nombre $u \in [x, y]$ tel que $f(y) = f(x) + (y - x)Df(u)$. Les deux nombres $y - x$ et $Df(u)$ étant positifs, on en déduit que $f(y) \geq f(x)$.

2) La démonstration s'effectue exactement comme celle du cas 1).

La réciproque est fausse : en effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée $Df(x) = 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$. □

Lorsque f est continu sur $[a, b]$ (ce qui implique nécessairement que a et b sont des réels), on a les améliorations suivantes (qui se démontrent de façon directe en utilisant ce qui précède).

Corollaire 2.7.9 *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On a les résultats suivants.*
1) f est croissant (resp. décroissant) sur $[a, b]$ si et seulement si $Df \geq 0$ (resp. $Df \leq 0$) sur $]a, b[$;
2) si $Df > 0$ (resp. $Df < 0$) sur $]a, b[$ alors f est strictement croissant (resp. décroissant) sur $[a, b]$.

Concavité

Examinons maintenant le cas de la concavité.

Proposition 2.7.10 (Lien entre dérivation et concavité) *Soit f une fonction réelle dérivable sur $I =]a, b[$.*

1) f est convexe (respectivement concave) sur $I \Leftrightarrow Df$ est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I.

2) Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe (respectivement concave) sur $I \Leftrightarrow D^2 f$ est une fonction positive (resp. négative) sur I.

Preuve. 1) Résultat admis.

2) Cela résulte de 1) et de la première partie du résultat concernant le lien entre la dérivation et la monotonie.□

Extrema

Les définitions qui suivent sont celles des extrema (minimum, maximum) de fonctions à valeurs réelles. Comme on va le voir dans la définition, un extremum local (resp. global) d'une fonction f apparaît comme étant un point du domaine de définition de f en lequel la valeur de f réalise la borne supérieure ou inférieure des valeurs de f dans un voisinage de ce point (resp. dans A).

Définition 2.7.11 *Soit f une fonction réelle définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de cet ensemble.*

– *Le point x_0 est appelé maximum local de f dans A s'il existe $r > 0$ tel que*

$$f(x) \leq f(x_0) \ (*) \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap A.$$

Le point x_0 est même qualifié de maximum local strict si l'inégalité (*) est stricte pour tout point x tel que $x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap A,\ x \neq x_0$.
La valeur du maximum est $f(x_0)$.

– *Le point x_0 est appelé minimum local de f dans A s'il existe $r > 0$ tel que*

$$f(x) \geq f(x_0) \ (**) \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap A.$$

Le point x_0 est même qualifié de minimum local strict si l'inégalité (**) est stricte pour tout point x tel que $x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap A,\ x \neq x_0$.
La valeur du minimum est $f(x_0)$.

- *Un* <u>*extremum local*</u> *de f est un maximum ou un minimum local.*
- *Si, dans le premier point (resp. le second point), l'inégalité (*) (resp. (**)) est vérifiée pour tout $x \in A$, on dit que x_0 est un* <u>*maximum (resp. minimum) global*</u> *de f dans A.*

Comment rechercher les extrema de façon pratique ? Si f est dérivable, on va voir ci-dessous une méthode permettant de les trouver. Si f n'est pas dérivable ou si une autre difficulté se présente, on pensera à revenir à la définition.

Proposition 2.7.12 *Soit f une fonction dérivable sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.*
1) Si x_0 est un extremum local de f sur I, alors $Df(x_0) = 0$.
2) S'il existe $r > 0$ tel que $Df(x) \geq (>) 0 \ \forall x \in]x_0 - r, x_0[$ et $Df(x) \leq (<) 0 \ \forall x \in]x_0, x_0 + r[$, alors x_0 est un maximum local (strict) de f dans I.

Preuve. 1) est connu : nous l'avons en fait démontré dans le lemme qui précède le théorème de Rolle.
2) Par hypothèse, la fonction est croissante (strictement) sur $]x_0 - r, x_0[$; dès lors, pour tout $x \in]x_0 - r, x_0[$, on a

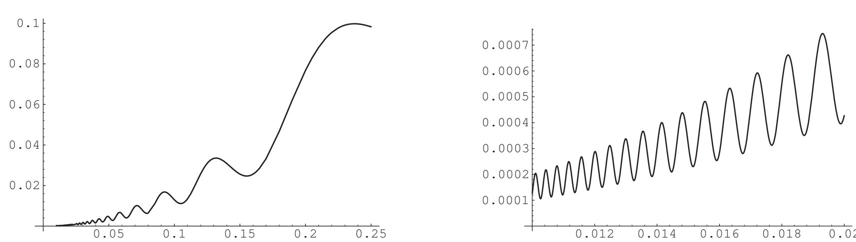
$$f(x) \leq (<) \lim_{t \to x_0, t < x_0} f(t) = f(x_0)$$

L'égalité ci-dessus provient du fait que f est continu en x_0.
De même, la fonction est décroissante (strictement) sur $]x_0, x_0 + r[$; dès lors, pour tout réel $x \in]x_0, x_0 + r[$, on a

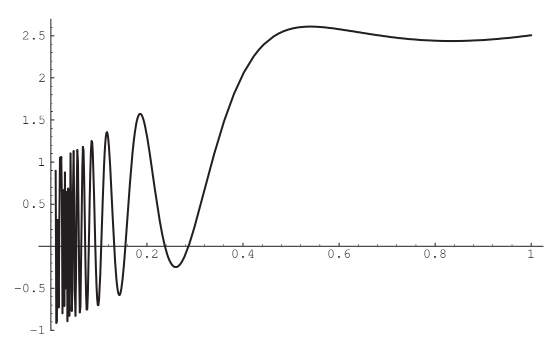
$$f(x) \leq (<) \lim_{t \to x_0, t > x_0} f(t) = f(x_0)$$

L'égalité ci-dessus provient du fait que f est continu en x_0.$\square$

Remarque 2.7.13 *a) On obtient un énoncé analogue à celui de la propriété 2) pour un minimum local.*
b) La propriété 2) ci-dessus reste vraie pour f dérivable dans I sauf en x_0 et f continu dans I.
c) La réciproque de la propriété 1) est fausse (exemple : $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$).
d) Lorsque la fonction appartient à $C_2(I)$, pour caractériser un extremum, on peut donner un critère utilisant la valeur de la dérivée seconde : si $Df(x_0) = 0$ et $D^2 f(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local ; si $Df(x_0) = 0$ et $D^2 f(x_0) > 0$ alors x_0 un minimum local.
La preuve s'obtient à partir du développement limité de Taylor, que l'on verra dans un prochain chapitre. La réciproque est fausse (exemple : $f(x) = x^4$ en $x_0 = 0$).
e) La réciproque de la propriété 2) ci-dessus est fausse (exemple : $f(x) = x^2(1 + \sin^2(1/x))$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$), représentation ci-dessous, avec un zoom et Df).



Représentations de la fonction (le graphique de droite est un zoom) $f(x) = \begin{cases} x^2(1 + \sin^2(1/x)) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; le graphique ci-dessus est une représentation de Df.

Définition 2.7.14 *On appelle point d'inflexion au graphique d'une fonction f définie sur $]a, b[$ un point $(x_0, f(x_0))$ de son graphe pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction soit convexe (resp. concave) sur $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ et concave (resp. convexe) sur $]x_0, x_0 + \varepsilon[$.*

On démontre aisément que si la fonction est deux fois dérivable sur $]a, b[$ et si elle admet $(x_0, f(x_0))$ comme point d'inflexion, alors $D^2 f(x_0) = 0$. La réciproque est fausse.

Souvent, on utilisera la locution "x_0 est un point d'inflexion pour f" au lieu de "$(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion au graphique de f".

Pour terminer cette partie, énonçons encore un résultat liant concavité et continuité d'une fonction.

Proposition 2.7.15 *Toute fonction réelle et convexe (resp. concave) sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est continue sur cet intervalle.*

Preuve. Résultat admis.□

Le résultat précédent ne s'étend pas au cas des intervalles non ouverts. Par exemple, considérer la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1[$ et $f(0) = 1$: celle-ci est convexe sur l'intervalle considéré mais certainement pas continue en 0.

2.7.4 Graphiques de fonctions

Soit une fonction réelle f. Pour représenter cette fonction, on a maintenant à notre disposition beaucoup d'outils.

Voici un plan d'étude de fonction. Il faut bien sûr l'adapter au cas étudié, afin de répondre au mieux à la question posée.

1. Détermination des domaines de définition, de continuité, de dérivabilité (tangentes, demi-tangentes), de continue dérivabilité.
2. Examiner si la fonction est paire, impaire, périodique,. . .afin d'avoir une idée générale de sa représentation (symétries,. . .)
3. Etude de la fonction aux extrémités du domaine de définition (limites, asymptotes).
4. Etude de la monotonie et de la concavité de la fonction (étude du signe de la dérivée première et de la dérivée seconde).
5. Graphique.

2.7.5 Théorème pratique de la fonction inverse

Le résultat intitulé "théorème pratique de la fonction inverse" donne des conditions très faciles à vérifier sous lesquelles une fonction est une bijection d'un intervalle $I =]a, b[$ sur un intervalle $I' =]a', b'[$. Il fait intervenir la dérivabilité, c'est la raison pour laquelle il est question d'intervalles ouverts dans l'énoncé.

On démontre ce résultat en utilisant des propriétés qui figurent dans les précédentes sections de ce chapitre. Il sera d'une grande utilité pour la primitivation et pour l'intégration (méthode de primitivation et d'intégration par changement de variable c'est-à-dire par intervention d'une fonction bijective dérivable d'inverse aussi dérivable).

Théorème 2.7.16 (Théorème pratique de la fonction inverse) *Soit f une fonction réelle, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $D_x f(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$ (resp. $D_x f(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[$). Alors*

1. *f est une fonction strictement croissante (resp. décroissante) donc injective sur $]a, b[$*
2. *les limites*
$$a' = \lim_{x \to a^+} f(x), \quad b' = \lim_{x \to b^-} f(x)$$
existent et diffèrent

3. *$f :]a,b[\to]a',b'[$ (resp. $f :]a,b[\to]b',a'[$) est une bijection*
4. *$f^{-1} :]a',b'[\to]a,b[$ (resp. $f^{-1} :]b',a'[\to]a,b[$) est une bijection dérivable et on a*

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{D_y f(y)},\ y = f^{-1}(x)$$

$$\lim_{x \to a'} f^{-1}(x) = a, \quad \lim_{x \to b'} f^{-1}(x) = b$$

5. *si $f \in C_p(I)$ alors $f^{-1} \in C_p(I')$ où $I =]a,b[$ et $I' =]a',b'[$ (resp. $I' =]b',a'[$).*

2.8 Primitivation

2.8.1 Définition et résultats d'existence

Définition 2.8.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable F sur I telle que $DF(x) = f(x),\ x \in I$.*

Si f admet une primitive sur I on dit que f est primitivable sur I.
On utilise souvent la notation

$$\int f(x)\ dx$$

pour désigner une primitive de $f(x),\ x \in I$.

Remarquons qu'il est faux d'affirmer que toute fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ admet une primitive sur cet intervalle. Par exemple, la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$. [18]

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction admette une primitive.

Théorème 2.8.2 *Une fonction continue sur $]a,b[$ admet toujours une primitive sur cet intervalle.*

Preuve. Résultat admis.□

Insistons sur le fait que ce résultat donne une condition suffisante d'existence de primitive ; mais cette condition n'est pas nécessaire. [19]

18. En effet, si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a $DF(x) = 1$ pour $x > 0$ et $DF = 0$ pour $x < 0$. Il s'ensuit qu'il existe deux constantes $r, r' \in \mathbb{R}$ telles que $F(x) = x + r$ pour $x > 0$ et $F(x) = r'$ pour $x < 0$ (cf 2.7.5). On a donc $\lim_{x \to 0^+} F(x) = r$ et $\lim_{x \to 0^-} F(x) = r'$; comme F est continu sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), on a $r = r' = F(0)$. On trouve donc finalement

$$F(x) = \begin{cases} x + r \text{ si } x \geq 0 \\ r \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Or une telle fonction n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0$.

19. Toute fonction qui est la dérivée d'une fonction dérivable non continûment dérivable est un exemple ; citons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

qui est définie mais non continue sur $\mathbb{R}$ et qui est la dérivée de

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

2.8.2 Propriétés

Si une fonction admet une primitive, elle en admet une infinité ; on peut caractériser ces primitives de la manière précise suivante.

Propriété 2.8.3 *1) Si F est une primitive de f sur $]a,b[$, alors pour toute constante c, la fonction $F+c$ est aussi une primitive de f sur $]a,b[$.*

Réciproquement, si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur $]a,b[$, il existe une constante c telle que $F_1(x)=F_2(x)+c$ pour tout $x\in\,]a,b[$.

2) Soit f une fonction primitivable sur $]a,b[$ et soit $x_0\in\,]a,b[$. Pour tout $r\in\mathbb{R}$, il existe une primitive unique F de f qui vérifie $F(x_0)=r$.

Preuve. 1) Comme la dérivée d'une fonction constante est nulle, on a $D_x(F(x)+c)=f(x),\ x\in\,]a,b[$.

Réciproquement, comme $D_x(F_1(x)-F_2(x))=0$ sur l'intervalle $]a,b[$, on obtient que F_1-F_2 est en fait constant sur cet intervalle (cf résultat (2.7.5).

2) Montrons l'unicité. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur $]a,b[$ qui vérifient $F_1(x_0)=r=F_2(x_0)$. Vu 1), il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $F_1(x)=F_2(x)+c$ pour tout $x\in\,]a,b[$; en particulier, cette égalité est vérifiée pour x_0, ce qui donne $c=0$ car $F_1(x_0)=F_2(x_0)$.

L'existence est facile à prouver : si g est une primitive de f sur l'intervalle $]a,b[$ alors la fonction $F(x)=g(x)-g(x_0)+r$ ($x\in\,]a,b[$) répond à la question. □

Si F_1 et F_2 sont deux fonctions définies sur un même intervalle I, on utilise la notation $F_1\simeq F_2$ pour signifier qu'il existe une constante $\in\mathbb{R}$ telle que $F_1(x)=F_2(x)+r,\ x\in I$. Si f est primitivable sur $I=\,]a,b[$ et si F est une primitive de f sur cet intervalle, on écrit donc

$$F(x)\simeq\int f(x)\ dx.$$

Le résultat suivant donne des indications sur le comportement des primitives aux bords du domaine. Sa preuve est directe et laissée à titre d'exercice.

Proposition 2.8.4 *Soient $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$. Si f est continu sur $[a,b]$, alors toute primitive F de f sur $]a,b[$ admet des limites finies en a^+ et en b^-. Il s'ensuit que la fonction*

$$G(x)=\begin{cases} F(x) \text{ si } & x\in\,]a,b[\\ \lim_{y\to a^+}F(y) \text{ si } & x=a\\ \lim_{y\to b^-}F(y) \text{ si } & x=b\end{cases}$$

est une fonction continue sur $[a,b]$ qui prolonge F.

2.8.3 Primitives immédiates

La liste de primitives qui suit s'obtient directement à partir de la connaissance des fonctions élémentaires et de leur dérivée. C'est la raison pour laquelle on les nomme "primitives immédiates".

1. *Primitives immédiates de polynômes.* Soient $a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}$. On a

$$\int(x-a)^m\ dx\simeq\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1},\quad x\in\mathbb{R}$$

2. *Primitives immédiates de fractions rationnelles.* Soient $a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}_0,\ m\neq 1$. On a

$$\int\frac{1}{(x-a)^m}\ dx\simeq\frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}}\qquad x\in\,]-\infty,a[\ \text{(resp. } x\in\,]a,+\infty[\text{)}$$

$$\int\frac{1}{x-a}\ dx\simeq\ln(|x-a|)\qquad x\in\,]-\infty,a[\ \text{(resp. } x\in\,]a,+\infty[\text{)}$$

3. On a

$$\int\exp x\ dx\ \simeq\ \exp x,\quad x\in\mathbb{R}.$$

4. Si m est un naturel pair strictement positif, on a

$$\int \sqrt[m]{x}dx = \int x^{1/m}dx \simeq \frac{x^{1+1/m}}{1+1/m} = \frac{x\sqrt[m]{x}}{1+1/m}, \quad x \in [0,+\infty[;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[m]{x}}dx = \int x^{-1/m}dx \simeq \frac{x^{1-1/m}}{1-1/m} = \frac{x}{(1-1/m)\sqrt[m]{x}}, \quad x \in]0,+\infty[;$$

si m est un naturel impair, on a

$$\int \sqrt[m]{x}dx = \int x^{1/m}dx \simeq \frac{x^{1+1/m}}{1+1/m} = \frac{x\sqrt[m]{x}}{1+1/m}, \quad x \in \mathbb{R};$$

si m est un naturel impair strictement plus grand que 1, on a

$$\int \frac{1}{\sqrt[m]{x}}dx = \int x^{-1/m}dx \simeq \frac{x^{1-1/m}}{1-1/m} = \frac{x}{(1-1/m)\sqrt[m]{x}}, \quad x \in \mathbb{R}_0.$$

5. *Primitive de la fonction puissance x^r en toute généralité.* Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$\int x^r dx \ \simeq \ \frac{x^{r+1}}{r+1}, \quad x \in \,]0,+\infty[\,.$$

6. On a

$$\int \sin x \ dx \simeq -\cos x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\int \cos x \ dx \simeq \sin x \qquad x \in \mathbb{R}$$

7. On a

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \ dx \simeq \operatorname{tg} x \qquad x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \ dx \simeq -\operatorname{cotg} x \qquad x \in \,]0,\pi[$$

8. On a

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx \simeq \arcsin x \qquad x \in \,]-1,1[$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} \ dx \simeq \operatorname{arctg} x \qquad x \in \mathbb{R}$$

2.8.4 Techniques de primitivation

Les techniques suivantes reposent sur des résultats directs à démontrer et dont les hypothèses sont faciles à vérifier. Pour la primitivation par parties et par substitution, les hypothèses sont automatiquement vérifiées pour les fonctions qui sont continûment dérivables (sur des domaines à préciser).

Primitivation de combinaisons linéaires

Propriété 2.8.5 *Si f et g sont primitivables sur $I = \,]a,b[$ et si $r,s \in \mathbb{R}$ alors la fonction $rf+sg$ est primitivable sur I et on a*

$$\int (rf(x)+sg(x)) \ dx \ \simeq r\int f(x) \ dx \ + \ s\int g(x) \ dx.$$

Preuve. En effet, la fonction $r\int f(x) \ dx \ + \ s\int g(x) \ dx$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $rf(x)+sg(x), \ x \in I.\square$

PRIMITIVATION PAR PARTIES

Propriété 2.8.6 *Si f et g sont dérivables sur $I =]a, b[$ et si $f\ Dg$ est primitivable sur I alors $g\ Df$ est primitivable sur I et on a*

$$\int g(x)\ Df(x)\ dx \ \simeq f(x)g(x) - \int f(x)\ Dg(x)\ dx.$$

Preuve. C'est direct car la fonction $f(x)g(x) - \int f(x)\ Dg(x)\ dx$ est dérivable sur $]a, b[$ de dérivée $g(x)\ Df(x)$.□

Exemple. On a

$$\int x \sin x\ dx = -\int x D_x \cos x\ dx \simeq -x\cos x + \int \cos x\ dx \simeq -x \cos x + \sin x$$

avec $I = \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $f(x) = -\cos x$.

PRIMITIVATION PAR SUBSTITUTION

Ce résultat fournit une technique de calcul de primitive d'une fonction qui s'écrit sous la forme $(fog)(x)\ Dg(x)$ en utilisant la primitivation de f.

Propriété 2.8.7 *Si f est primitivable sur $J =]a, b[$ et si g est dérivable sur I et vérifie l'inclusion $\{g(x) : x \in I\} \subset J$, alors $(fog)(x)\ Dg(x)$ est primitivable sur I et on a*

$$\int (fog)(x)\ Dg(x)dx \ \simeq \left(\int f(t)\ dt\right)_{t=g(x)}. \qquad (**)$$

Preuve. C'est direct car le résultat de dérivation des fonctions de fonctions donne la dérivabilité de $\left(\int f(t)\ dt\right)_{t=g(x)}$ sur I et l'expression suivante pour la dérivée : $f(g(x))\ Dg(x)$.□

Exemples. 1) On a

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x^2}\ dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2} D_x(1+x^2)\ dx \\ &\simeq \frac{1}{2}\left(\int \sqrt{t}\ dt\right)_{t=1+x^2} \\ &\simeq \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

avec $I = \mathbb{R}$, $J =]0, +\infty[$, $g(x) = 1 + x^2$, $f(t) = \sqrt{t}$.

2) On a

$$\begin{aligned} \int \arcsin x\ dx &= \int D_x x\ \arcsin x\ dx \\ &\simeq x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ &\simeq x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{D(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ &\simeq x \arcsin x + \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt\right)_{t=1-x^2} \\ &\simeq x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

pour $x \in]-1, 1[$.

PRIMITIVATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLES

L'énoncé (*) de la technique de calcul par changement de variables est proche de l'énoncé (**) relevant de la primitivation par substitution. Mais ici, on donne une technique de calcul d'une primitive de f qui utilise la primitivation d'une fonction du type $fog\ Dg$. L'idée est d'écrire $f(t)$ sous la forme $f(g(x))$ avec $t = g(x)$ puis de repasser à une expression en terme de t ; cela s'effectue à l'aide de g, bijection qu'il faut déterminer au mieux pour donner une forme qui permette effectivement le calcul ; la difficulté est de trouver "une bonne fonction" g.

Appelons changement de variables de classe C_1 une fonction bijective $g :]a,b[\to]a',b'[$ qui appartient à $C_1(]a,b[)$ et dont l'inverse appartient à $C_1(]a',b'[)$. Remarquons que dans ce cas, Dg (resp. Dg^{-1}) est une fonction qui ne s'annule pas sur $]a,b[$ (resp. $]a',b'[$) donc garde un signe constant sur cet intervalle (par application du TVI).

Propriété 2.8.8 *Soit f défini sur $J =]a',b'[$. Si $g : I =]a,b[\to J$ est un changement de variables, si la fonction $(fog)(x)\ Dg(x)$ est primitivable sur I alors f est primitivable sur J et on a*

$$\int f(t)\ dt \simeq \left(\int (fog)(x)\ Dg(x)dx\right)_{x=g^{-1}(t)}. \qquad (*)$$

Preuve. Vu les hypothèses, le résultat de dérivation des fonctions de fonctions donne la dérivabilité de la fonction $\left(\int (fog)(x)\ Dg(x)dx\right)_{x=g^{-1}(t)}$ sur J et l'expression suivante pour la dérivée :

$$((fog)(x)Dg(x))_{x=g^{-1}(t)}\ D_tg^{-1}(t).$$

Comme $g(g^{-1}(t)) = t$ sur J et que les fonctions g et g^{-1} sont dérivables, on trouve finalement (en appliquant le résultat relatif à la dérivation des fonctions de fonctions)

$$(D_xg(x))_{x=g^{-1}(t)}\, D_tg^{-1} = 1$$

donc

$$((fog)(x)Dg(x))_{x=g^{-1}(t)}\ D_tg^{-1}(t) = (fog)(g^{-1}(t)) = f(t).$$

et finalement la thèse.□

Exemples.

1) Primitiver la fonction

$$f(t) = \sqrt{1-t^2}.$$

Suggestion. La fonction f est continue sur $[-1,1]$, elle est donc primitivable sur $]-1,1[$. Considérons le changement de variables $g(x) = \cos x$ entre $]0,\pi[$ et $]-1,1[$. On a

$$f(g(x))\ D_xg(x) = -\sqrt{1-\cos^2 x}\ \sin x = -\sin^2 x = \frac{\cos(2x)-1}{2}$$

donc

$$\int f(g(x))\ D_xg(x)\ dx\ \simeq \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\sin x\cos x - x)$$

et finalement

$$\int \sqrt{1-t^2}\ dt \simeq \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} - \arccos t\right),\ t \in]-1,1[.$$

2) Calculer

$$\int \frac{1}{2+\sin t}dt.$$

Suggestion. La fonction $f(t) = \frac{1}{2+\sin t}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc primitivable sur $\mathbb{R}$.

Une méthode standard de calcul de cette primitive (et d'autres du même type) consiste à exprimer $\sin t$ en fonction de $\mathrm{tg}(t/2)$ puis à effectuer une primitivation par changement de variables en posant $x = h(t) = \mathrm{tg}(t/2)$. La fonction h est effectivement une bijection de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}$, qui appartient à $C_1(]-\pi,\pi[)$ et dont l'inverse appartient aussi à $C_1(\mathbb{R})$.

On a

$$\sin t = 2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2}) = 2\,\mathrm{tg}(\frac{t}{2})\cos^2(\frac{t}{2}) = \frac{2\,\mathrm{tg}(\frac{t}{2})}{1+\mathrm{tg}^2(\frac{t}{2})}$$

pour t tel que $\cos(\frac{t}{2}) \neq 0$.

Avec $g(x) = h^{-1}(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,x$, on a

$$f(t) = \frac{1}{2+\sin t} = \frac{1}{2}\ \frac{1+\mathrm{tg}^2(t/2)}{1+\mathrm{tg}(t/2)+\mathrm{tg}^2(t/2)} = \frac{1}{2}\ \frac{1+x^2}{1+x+x^2}, \quad x = \mathrm{tg}(t/2) = h(t)$$

pour $t \in]-\pi,\pi[$ donc

$$fog(x)\ D_xg(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Pour terminer, il suffit maintenant de calculer une primitive de $\frac{1}{1+x+x^2}$ puis de l'exprimer en fonction de t.

On a

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\ \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ D_x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right).$$

Ainsi, une primitivation par substitution donne directement

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}\, dx \;\simeq\; \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que

$$\int \frac{1}{2+\sin t} dt \simeq \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\mathrm{tg}(\frac{t}{2})+\frac{1}{2})\right), \quad t \in]-\pi,\pi[\,.$$

Si on désire obtenir une primitive sur $\mathbb{R}$, il faut prolonger la fonction arctg $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\mathrm{tg}(\frac{t}{2})+\frac{1}{2})\right)$, $t \in]-\pi,\pi[$. Si, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(\mathrm{tg}(\frac{t}{2})+\frac{1}{2})\right)+k\pi\right) & t \in](2k-1)\pi,(2k+1)\pi[\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\right) & t=(2k-1)\pi \end{cases}$$

on obtient de la sorte une primitive sur $\mathbb{R}$.

3) Il existe des méthodes générales pour le calcul par changement de variables des primitives des fractions irrationnelles trinômes (c'est-à-dire des fractions qui font intervenir des racines de polynômes du second degré).

Chapitre 3

Retour aux fonctions élémentaires

Dans ce chapitre, nous reprenons l'étude des fonctions élémentaires en utilisant les outils installés au chapitre précédent : limite, continuité, dérivation, primitivation.

Il s'agit donc en fait d'une collecte, d'un "formulaire", d'une "boîte à outils" relatifs aux propriétés à connaître au sujet de ces fonctions, et à savoir appliquer dans les situations qui le requièrent. Par ailleurs, il est tout aussi important de savoir d'où ces propriétés sont tirées : elles ne "tombent pas du ciel" mais peuvent être démontrées à partir des définitions et notions introduites précédemment.

3.1 Limites des fonctions élémentaires

3.1.1 Polynômes et fractions rationnelles

Par des procédés directs, on montre qu'en un réel x_0, la limite des valeurs d'un polynôme est égale à la valeur du polynôme en ce point. On a le même résultat pour une fraction rationnelle pour autant que x_0 appartienne à son domaine de définition.

Cela étant, on a le résultat suivant en l'infini.

Proposition 3.1.1 *Soient $P(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_Nx^N$ et $Q(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_Mx^M$ deux polynômes de degré respectivement N et M. On a*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_Nx^N = \left\{\begin{array}{l} +\infty \text{ si } a_N > 0 \\ -\infty \text{ si } a_N < 0 \end{array}\right. ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_Nx^N = \left\{\begin{array}{l} +\infty \text{ si } N \text{ est pair et } a_N > 0 \\ -\infty \text{ si } N \text{ est pair et } a_N < 0 \\ -\infty \text{ si } N \text{ est impair et } a_N > 0 \\ +\infty \text{ si } N \text{ est impair et } a_N < 0 \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_Nx^N}{b_Mx^M} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_N}{b_M} \text{ si } M = N \\ 0 \text{ si } N < M \\ \infty \text{ si } N > M \end{array}\right.$$

Si on considère $\lim_{x\to+\infty} P(x)/Q(x)$ ou $\lim_{x\to-\infty} P(x)/Q(x)$, on peut préciser si la limite est 0^+ ou 0^- (cas $N < M$) et si la limite est $+\infty$ ou $-\infty$ (cas $N > M$) en fonction de la parité de la différence $N - M$ et du signe du produit a_Nb_M.

Preuve. D'une part, on a

$$P(x) = x^N \left(a_N + \frac{a_{N-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{N-1}} + \frac{a_0}{x^N}\right)$$

donc P s'écrit sous la forme d'un produit de deux fonctions f, g avec

$$f(x) = x^N, \quad g(x) = a_N + \frac{a_{N-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{N-1}} + \frac{a_0}{x^N}$$

et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = a_N \neq 0.$$

D'autre part, on a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_N x^N}{b_M x^M} \; \frac{1 + \frac{a_{N-1}}{a_N x} + \ldots + \frac{a_1}{a_N x^{N-1}} + \frac{a_0}{a_N x^N}}{1 + \frac{b_{M-1}}{b_M x} + \ldots + \frac{b_1}{b_M x^{M-1}} + \frac{b_0}{b_M x^M}},$$

donc la fraction rationnelle P/Q s'écrit

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_N x^N}{b_M x^M} \; g(x)$$

avec

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1.$$

On conclut directement en étudiant le signe de l'entier $N - M$.$\square$

3.1.2 Racines $m$ièmes

On montre facilement que la limite des valeurs d'une "fonction racine" en un point de son domaine de définition est égale à la valeur de la fonction en ce point.

On démontre également de façon directe que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[m]{x} = +\infty$$

si m est pair et que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[m]{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[m]{x} = -\infty$$

si m est impair.

3.1.3 Fonctions trigonométriques

1) La limite des valeurs des fonctions trigonométriques sin et cos en un point x_0 de leur domaine de définition est égale à la valeur de la fonction en ce point. Cela résulte des propriétés générales de la fonction exponentielle complexe à partir de laquelle les fonctions sin et cos sont définies (voir plus loin).

Rappelons que nous avons déjà vu que les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x, \quad \lim_{x\to-\infty} \sin x, \quad \lim_{x\to+\infty} \cos x, \quad \lim_{x\to-\infty} \cos x$$

n'existent pas.

2) A partir des propriétés générales des limites et des propriétés particulières des fonctions sin et cos, on déduit les propriétés suivantes, relatives aux fonctions tangente et cotangente.

La limite des valeurs des fonctions trigonométriques tg et cotg en un point x_0 de leur domaine de définition est égale à la valeur de la fonction en ce point.

On a

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x\to(\frac{-\pi}{2})^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty, \quad \lim_{x\to\pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty.$$

En utilisant la définition des limites (par les suites), on démontre immédiatement que les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{tg} x, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{cotg} x, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{cotg} x$$

n'existent pas.

3.1.4 Fonctions trigonométriques inverses

Les propriétés relatives aux fonctions trigonométriques inverses s'obtiennent à partir des propriétés des fonctions trigonométriques et de résultats généraux concernant les fonctions inverses.

– La limite des valeurs des fonctions trigonométriques inverses en un point x_0 de leur domaine de définition est égale à la valeur de la fonction en ce point.
– On a aussi

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcotg} x = \pi^-, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcotg} x = 0^+$$

3.1.5 Fonctions exponentielle et logarithme

Citons les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle relatives aux limites ; elles seront démontrées dans la suite, lorsque la définition de la fonction exponentielle sera étudiée.

Les propriétés fondamentales de la fonction logarithme se déduisent de celles de la fonction exponentielle en utilisant le fait que la fonction logarithme est définie comme étant la fonction inverse de la fonction exponentielle et le théorème pratique de la fonction inverse.

– La limite des valeurs des fonctions exponentielle et logarithme en un point x_0 de leur domaine de définition est égale à la valeur de la fonction en ce point.
– On a

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$$

– On a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$$

3.2 Continuité

On démontre directement les résultats de continuité suivants.

– La fonction $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
– Les fonctions élémentaires introduites dans le chapitre précédent sont continues sur leur domaine de définition : polynômes, fractions rationnelles, fonctions "racine n-ieme", fonctions trigonométriques, fonctions trigonométriques inverses, fonction exponentielle, fonction logarithme.

3.3 Dérivation et fonctions élémentaires

La dérivabilité et la dérivée des polynômes et des fractions rationnelles s'obtiennent directement en utilisant les propriétés précédentes vues au chapitre précédent.

La dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions trigonométriques sin et cos peuvent être établies en utilisant la fonction exponentielle (exponentielle complexe ; voir la suite). La dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions tg et cotg s'obtiennent à partir de la définition de ces fonctions.

La dérivabilité de la fonction exponentielle et l'expression de sa dérivée seront établies dans la partie consacrée à la définition de la fonction exponentielle (par utilisation des séries).

La dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions inverses (trigonométriques inverses, logarithme népérien) s'obtiennent en utilisant les propriétés précédentes.

3.3.1 Polynômes et fractions rationnelles

Pour rappel, tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, toute fraction rationnelle $P(x)/D(x)$ est dérivable dans le complémentaire des zéros du dénominateur $D(x)$; l'expression des dérivées de ces fonctions s'obtient en utilisant les résultats

$$\boxed{D_x x^m = m x^{m-1},\ m \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}}$$

Si $c \in \mathbb{R}$ alors

$$\boxed{D_x c = 0,\ x \in \mathbb{R}}$$

et les propriétés régissant la dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions et d'un quotient de fonctions.

3.3.2 Fonctions trigonométriques

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\boxed{D_x \cos x = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}; \qquad D_x \sin x = \cos x,\ x \in \mathbb{R}.}$$

En utilisant le fait que les fonctions tg et cotg sont des quotients des fonctions sin et cos, on obtient que
- la fonction tg est dérivable sur son domaine de définition $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
- la fonction cotg est dérivable sur son domaine de définition $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
et

$$\boxed{D_x \operatorname{tg} x = D_x \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \in A; \qquad D_x \operatorname{cotg} x = D_x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{\sin^2 x},\ x \in B.}$$

3.3.3 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{D_x \exp x = \exp x,\ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Il s'ensuit que pour $a > 0$, la fonction $a^x = \exp(x \ln a),\ x \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$D_x a^x = D_x \exp(x \ln a) = \exp(x \ln a)\ \ln a = \ln a\ a^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

3.3.4 Fonctions trigonométriques inverses

Fonction arcos.

La fonction cos est une bijection dérivable de $]0, \pi[$ dans $]-1, 1[$ et $D \cos x = -\sin x \neq 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$. Il s'ensuit que

$$\operatorname{arcos}\ :\ ]-1, 1[\to]0, \pi[$$

est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\boxed{D_x \operatorname{arcos} x = -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in]-1, 1[\,.}$$

En effet, l'application du résultat concernant la dérivation des fonctions inverses donne

$$\begin{aligned} D_x \operatorname{arcos} x &= \frac{1}{D_y \cos y},\ \text{avec } y = \operatorname{arcos} x,\ x \in]-1, 1[\\ &= \frac{1}{-\sin(\operatorname{arcos}(x))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{arcos}(x))}} \quad \text{car } \operatorname{arcos}(x) \in]0, \pi[\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Fonction arcsin.

La fonction sin est une bijection dérivable de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $]-1, 1[$ et $D \sin x = \cos x \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Il s'ensuit que

$$\arcsin\ :\ ]-1, 1[\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\boxed{D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in]-1,1[\,.}$$

En effet, l'application du résultat concernant la dérivation des fonctions inverses donne

$$\begin{aligned}
D_x \arcsin x &= \frac{1}{D_y \sin y},\ \text{avec } y = \arcsin x,\ x \in]-1,1[\\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \quad \text{car } \arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi démontrer ce résultat en utilisant la relation

$$\arcsin x + \operatorname{arcos} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

et en utilisant les propriétés de dérivabilité de la fonction arcos établies juste ci-dessus.

Fonction arctg.

La fonction tg est une bijection dérivable de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et $D\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{arctg}\ :\ \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{D_x \,\mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.}$$

En effet, l'application du résultat concernant la dérivation des fonctions inverses donne

$$\begin{aligned}
D_x \,\mathrm{arctg}\, x &= \frac{1}{D_y \,\mathrm{tg}\, y},\ \text{avec } y = \mathrm{arctg}\, x,\ x \in \mathbb{R}\\
&= \cos^2(\mathrm{arctg}(x))\\
&= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}(x))}\\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Fonction arcotg.

La fonction cotg est une bijection dérivable de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$ et $D\,\mathrm{cotg}\,x = -\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0$ pour tout $x \in]0,\pi[$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{arcotg}\ :\ \mathbb{R} \to]0,\pi[$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{D_x \,\mathrm{arcotg}\, x = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.}$$

En effet, l'application du résultat concernant la dérivation des fonctions inverses donne

$$\begin{aligned}
D_x \,\mathrm{arcotg}\, x &= \frac{1}{D_y \,\mathrm{cotg}\, y},\ \text{en prenant } y = \mathrm{arcotg}\, x,\ x \in \mathbb{R}\\
&= -\sin^2(\mathrm{arcotg}(x))\\
&= \frac{-1}{1+\mathrm{cotg}^2(\mathrm{arcotg}(x))}\\
&= \frac{-1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi démontrer ce résultat en utilisant la relation

$$\text{arcotg}\, x + \text{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et en utilisant les propriétés de dérivabilité de la fonction arctg établies juste ci-dessus.

3.3.5 Fonction logarithme népérien

On a

$$\boxed{f(x) = \ln x \text{ dérivable sur }]0,+\infty[\quad \text{et } D \ln x = \tfrac{1}{x},\ x > 0.}$$

En effet, en utilisant le résultat relatif à la dérivation des fonctions inverses, on obtient que la fonction logarithme népérien est dérivable sur son domaine de définition et

$$\begin{aligned} D_x \ln x &= \frac{1}{D_y \exp y} \quad \text{en prenant } y = \ln x \\ &= \frac{1}{\exp(\ln x)} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On déduit de là que,
- pour $a > 0,\ a \neq 1$, la fonction $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},\ x \in]0,+\infty[$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a},\ x \in]0,+\infty[$$

- pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x^a = \exp(a \ln x),\ x \in]0,+\infty[$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que

$$D_x x^a = D_x \exp(a \ln x) = \frac{a}{x}\ \exp(a \ln x) = \frac{a}{\exp(\ln x)}\ \exp(a \ln x) = a \exp((a-1) \ln x);$$

finalement, en repassant à la définition de la fonction puissance :

$$\boxed{D_x x^a = a x^{a-1},\ x \in]0,+\infty[\,.}$$

Rappelons que cette formule s'étend à $\mathbb{R}_0$ dans le cas $a = 1/m$ avec m naturel impair et à $\mathbb{R}$ dans le cas $a = m$ avec m naturel.

3.4 Primitivation

Nous renvoyons au chapitre précédent pour une liste de primitives immédiates.

3.5 Fonction exponentielle

Une fois la convergence des suites étudiée, on peut s'attaquer à la notion de convergence de *séries*, qui sont en fait des suites bien particulières. C'est alors grâce à elles que l'on peut définir la fonction exponentielle et ensuite en démontrer les propriétés fondamentales. Cette fonction a en fait pour domaine l'ensemble des complexes et permet de définir mathématiquement les fonctions sinus et cosinus.

Dans le cadre du cours du premier quadrimestre, nous n'étudierons pas les séries ; nous y reviendrons dans la suite.

Cependant, comme les suites ont été étudiées, nous pouvons dès à présent *définir ce que l'on entend par série.*

Etant donné une suite de réels ou de complexes r_m $(m \in \mathbb{N}_0)$, on construit la *suite des sommes partielles associée*, à savoir la suite

$$S_1 = r_1,\ S_2 = r_1 + r_2,\ S_3 = r_1 + r_2 + r_3, \quad \ldots$$

c'est-à-dire

$$S_M = \sum_{m=1}^{M} r_m, \quad M \in \mathbb{N}_0.$$

Il est clair que la nouvelle suite construite est très particulière. Comme nous l'avons dit plus haut, une étude des séries et de leur convergence sera faite plus tard. Dans ce cadre, on dit qu'*une série est convergente* si la suite des sommes partielles converge vers une limite finie. On utilise la notation suivante

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{m=1}^{M} r_m = \sum_{m=1}^{+\infty} r_m.$$

3.5.1 Définition

Etant donné $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on considère la suite $r_m = \frac{x^m}{m!}$ $(m \in \mathbb{N})$ et on construit la suite des sommes partielles (la série) associée ; c'est ce processus qui définit la fonction exponentielle.

Définition 3.5.1 *La fonction exponentielle réelle est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\exp(x) = \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=0}^{M} \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

On définit de la même manière la fonction $\exp(z)$, avec z nombre complexe quelconque.

On démontre évidemment que cette définition a un sens, c'est-à-dire que la suite des sommes partielles

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{x^m}{m!},\ M \in \mathbb{N}_0$$

converge quel que soit le complexe x.

3.5.2 Propriétés fondamentales

A l'aide de cette définition et des propriétés relatives aux séries, on est en mesure de démontrer les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle (voir les chapitres et sections précédentes pour une liste complète). Nous le ferons plus tard.

3.5.3 Exponentielle complexe

Définitions et propriétés

Comme déjà annoncé ci-dessus, on définit

$$\exp z = \lim_{M\to+\infty} \sum_{m=0}^{M} \frac{z^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

La fonction exponentielle de domaine $\mathbb{R}$ en est la restriction. De nombreuses propriétés sont encore vérifiées par cette fonction complexe MAIS plus question de parler de croissance, ni de positivité,…car il s'agit d'une fonction définie dans $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Propriété 3.5.2 *1) On a*
$$\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z') \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}.$$

2) On a
$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

3) On a
$$D_t \exp(z_0 t) = z_0\ \exp(z_0 t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } z_0 \in \mathbb{C} \text{ fixé.}$$

4) On a
$$\exp(z) = \exp(z') \ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ :\ z = z' + 2ik\pi.$$

En particulier, pour $x, x' \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(ix) = \exp(ix') \ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ :\ x = x' + 2k\pi.$$

Preuve. Résultat admis.□

On utilise encore la notation
$$\exp(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Définissons à présent les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.5.3 *On définit*

$$\boxed{\cos x = \Re(e^{ix}), \quad \sin x = \Im(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R}}$$

On en <u>déduit</u> que

$$\boxed{\cos x + i \sin x = \exp(ix) = e^{ix}, \quad \cos x - i \sin x = \overline{e^{ix}} = e^{-ix}}$$

pour tout réel x.

De plus, comme $\Re z = \frac{z+\bar z}{2}$ et $\Im z = \frac{z-\bar z}{2i}$ pour tout complexe z, on <u>déduit</u> aussi de la définition que

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

On a les propriétés suivantes.

Propriété 3.5.4 *1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$|e^{ix}| = 1.$$

2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *pour tout réel x.*
3) On a $(\cos x + i \sin x)^m = \cos(mx) + i \sin(mx)$ *pour tout naturel m et tout réel x.*
4) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, il existe $x \in [0, 2\pi[$ unique tel que

$$z = e^{ix}.$$

Preuve. 1) On a $z\bar z = |z|^2$ pour tout complexe z. Il s'ensuit que

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\ \overline{e^{ix}} = e^{ix}\ e^{-ix} = e^{ix-ix} = 1$$

d'où la conclusion car le module d'un complexe est un réel positif ou nul.

2) On a
$$1 = |e^{ix}|^2 = (\Re(e^{ix}))^2 + (\Im(e^{ix}))^2 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

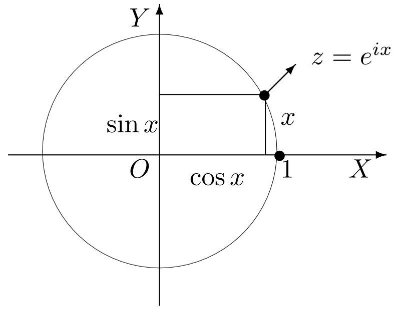
3) On a
$$(\cos x + i \sin x)^m = \left(e^{ix}\right)^m = e^{imx} = \cos(mx) + i \sin(mx).$$

4) Résultat admis.□

Complexes et trigonométrie

1) Etant donné un complexe z de module 1, c'est-à-dire un point du plan situé sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1, on sait qu'il existe un réel unique $x \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{ix}$. On montre aussi que la longueur de l'arc de cercle joignant le complexe 1 au complexe z vaut x.

On obtient donc la représentation suivante.



2) La forme trigonométrique d'un nombre complexe consiste simplement à écrire celui-ci en se servant des coordonnées polaires du point du plan qu'il détermine.

Etant donné $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$, on sait qu'il existe une réel $x \in [0, 2\pi[$, unique, tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{ix}.$$

En posant $r = |z|$ on a

$$z = re^{ix};$$

c'est ce que l'on appelle la forme trigonométrique du complexe z. Les réels r et x constituent également les coordonnées polaires du point P d'abscisse $\Re z$ et d'ordonnée $\Im z$.

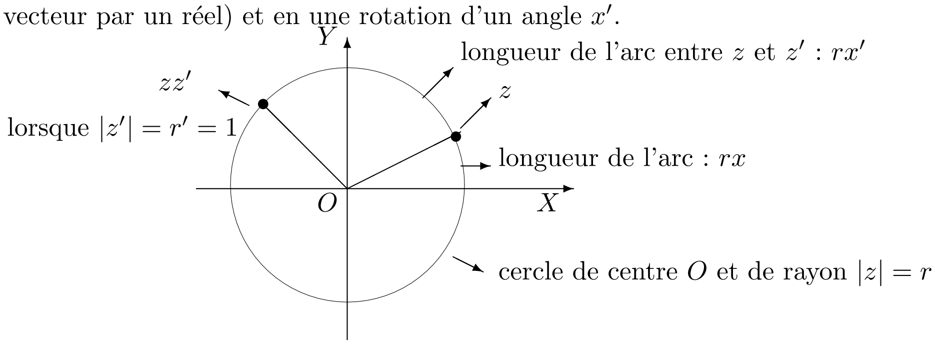
3) Interprétons à présent la *multiplication de deux complexes.* Soient z, z' deux complexes non nuls. On peut écrire

$$z = re^{ix}, \quad z' = r'e^{ix'}$$

donc

$$zz' = rr'e^{i(x+x')}.$$

La multiplication de z par z' consiste donc en une multiplication par le réel r' (qui s'interprète comme la multiplication d'un vecteur par un réel) et en une rotation d'un angle x'.



4) Grâce à la forme trigonométrique des complexes, on peut aussi démontrer que, pour tout complexe non nul z et tout naturel $n \geq 1$, il existe n complexes distincts $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ tels que

$$z_k^n = z.$$

On dit que les complexes z_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ sont les racines n-ièmes du complexe z.

La preuve est constructive : si

$$z = re^{ix}, \quad r > 0, x \in [0, 2\pi[$$

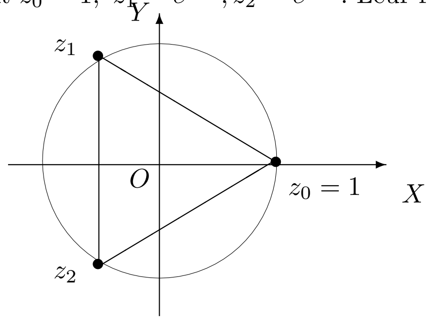
on obtient en effet

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{ix'_k}, \quad x'_k = \frac{x+2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Les n racines $n-$ièmes d'un complexe sont donc les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[n]{r}$; la mesure des angles entre les vecteurs joignant l'origine à deux racines consécutives est $\frac{2\pi}{n}$ radian(s).

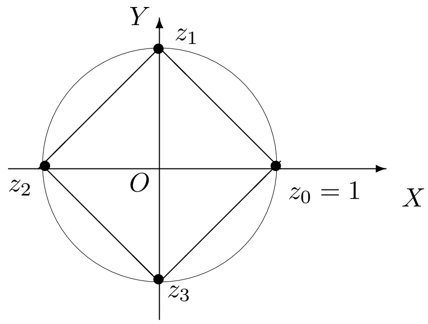
Voici trois exemples.

Les racines cubiques de $1 = e^{i0}$ sont $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Leur représentation est la suivante.



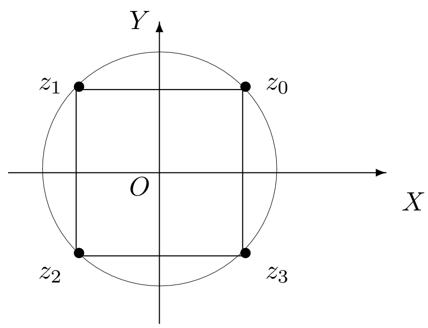
Représentation des racines cubiques de 1

Les racines quatrièmes de $1 = e^{i0}$ sont $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Leur représentation est la suivante.



Représentation des racines quatrièmes de 1

Les racines quatrièmes de $-1 = e^{i\pi}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Leur représentation est la suivante.



Représentation des racines quatrièmes de -1

Chapitre 4

Calcul intégral

4.1 Intégrale d'une fonction sur $[a, b]$

4.1.1 Introduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle borné fermé $I = [a, b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$).
Appelons

découpage "à la Riemann"

de $[a, b]$ la donnée
- (i) d'un naturel strictement positif n, de $n-1$ points[1] $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ de $]a, b[$
- (ii) de n points $r_1 \in [a, x_1], r_2 \in [x_1, x_2], \ldots, r_n \in [x_{n-1}, b]$.

On note un tel découpage σ ou plus précisément :

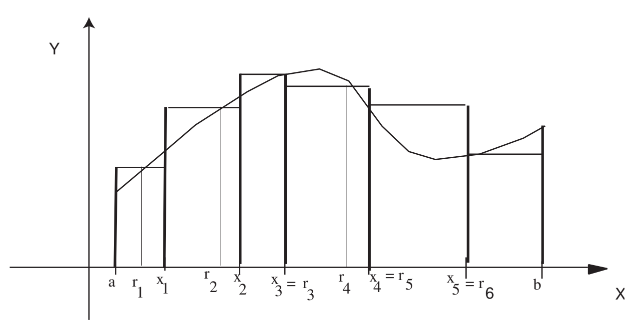
$$\{[a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b], (r_j)_{1 \leq j \leq n}\}.$$

Plus simplement, un *découpage* est la donnée du seul point (i) ci-dessus. Par abus de langage, on utilisera souvent uniquement le substantif "découpage" pour désigner un découpage ou un découpage à la Riemann.

Etant donné un découpage,

la *largeur du découpage* est le nombre $L(\sigma) := \sup\{x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots, b - x_{n-1}\}$.

Pour simplifier les notations, posons aussi $x_0 = a, x_n = b$.



Sur ce dessin on a $n = 6, r_3 = x_3, r_5 = x_4, r_6 = x_5$ et la somme $S(\sigma, f)$ correspond à la somme des aires des rectangles qui apparaissent (en traits pleins).

Considérons l'expression suivante

$$S(\sigma, f) = \sum_{k=1}^{n} f(r_k)(x_k - x_{k-1}).$$

1. Si $n = 1$, on ne donne pas de points supplémentaires

Cette somme $S(\sigma, f)$ dépend du choix des x_k, des r_k et de f. Elle représente la somme des aires des rectangles (avec leur signe, car $f(r_k)$ peut être négatif) de côtés $x_k - x_{k-1}$ et $f(r_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. L'idée est de regarder ce qui se passe lorsqu'on prend des découpages de plus en plus fins, pour "coller" au mieux à la représentation graphique. Et si, à un certain sens que nous allons définir, tout se passe bien quand on passe à la limite, on dira que cette limite est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Vu la construction géométrique, si f est à valeurs positives, l'aire de la surface délimitée par le graphique de f, l'axe X et les droites verticales $x = a, x = b$ sera définie comme étant l'intégrale de f sur $[a, b]$.

En toute généralité, on va considérer une suite de découpages de $[a, b]$ c'est-à-dire la donnée de

$$\sigma_N = \{[a = x_0, x_1, \ldots, x_{J(N)-1}, b = x_{J(N)}], (r_j^N)_{1 \leq j \leq J(N)}\},\ (N \in \mathbb{N}_0)$$

où $J(N) \in \mathbb{N}_0$, $a < x_1 < \ldots < x_{J(N)-1} < b$, $r_j^N \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, \ldots, J(N))$ et où les largeurs $L(\sigma_N)$ des découpages forment une suite qui tend vers 0.

4.1.2 Définition et exemples fondamentaux

DÉFINITION

Définition 4.1.1 *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. On dit qu'elle est Riemann- intégrable sur $[a, b]$ si, pour toute suite de découpages σ_N $(N \in \mathbb{N}_0)$ de $[a, b]$ tels que $\lim_{N \to +\infty} L(\sigma_N) = 0$, la suite $S(\sigma_N, f)$ $(N \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une limite finie.*

Dans ce cas, on montre que toutes ces limites sont les mêmes.

Définition 4.1.2 *La valeur commune de ces limites est appelée intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$.*
L'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est notée

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

ou même simplement $\int_a^b f\ dx$ si le contexte est clair.

Dans la suite, on omettra souvent de signaler "Riemann-intégrable" ; on dira plus simplement "intégrable".

EXEMPLES FONDAMENTAUX

En guise de premier exemple et comme illustration directe de l'introduction que nous avons donnée, montrons le résultat suivant.

Exemple 4.1.3 *Toute fonction constante est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et*

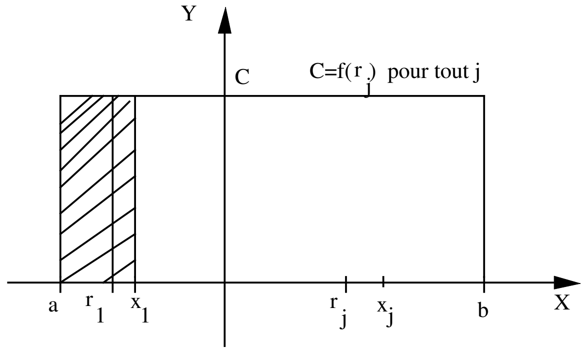
$$\int_a^b f(x)\ dx = C(b - a)$$

si $f(x) = C$ pour tout $x \in [a, b]$.

Preuve. De fait, pour tout découpage $\{[x_0, x_1, \ldots, x_{J(N)}], (r_j^N)_{1 \leq j \leq J(N)}\}$ de $[a, b]$, on a

$$S(\sigma_N, f) = \sum_{j=1}^{J(N)} f(r_j^N)(x_j - x_{j-1}) = C \sum_{j=1}^{J(N)} (x_j - x_{j-1}) = C(b - a)$$

d'où la conclusion.□



On a le résultat fort important suivant ; il donne de nombreux exemples de fonctions Riemann-intégrables.

Proposition 4.1.4 *Une fonction continue (resp. monotone) sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

Preuve. Résultat admis.□

Néanmoins, remarquons qu'il existe des fonctions Riemann-intégrables qui ne sont ni monotones ni continues [2].

Première approximation de l'intégrale

La proposition précédente donne immédiatement la propriété suivante d'approximation [3].

Propriété 4.1.5 *Si f est continu sur $[a, b]$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout découpage $\{[a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b], (r_j)_{1 \le j \le n}\}$ de $[a, b]$ de largeur inférieure ou égale à η, on a*

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx\ -\ \sum_{j=1}^{n} f(r_j)\ (x_j - x_{j-1}) \right|\ \le\ \varepsilon.$$

Preuve. Résultat admis [4] □

Ce résultat d'approximation dit qu'une approximation de l'intégrale de f est obtenue par l'intégrale de f_A, où f_A est une fonction constante par morceaux définie à partir de valeurs de f.

D'autres approximations sont aussi courantes. Citons
- la méthode du trapèze : on remplace f par une fonction f_A linéaire par morceaux et une approximation de l'intégrale de f est fournie par l'intégrale de f_A
- la méthode de Simpson : on remplace f par un polynôme du second degré f_A par morceaux et une approximation de l'intégrale de f est fournie par l'intégrale de f_A.

Remarques importantes

1) Il faut bien remarquer que si f est à valeurs réelles (resp. complexes) alors $\int_a^b f(x)\ dx$ est un nombre réel (resp. complexe) qui ne dépend que de f, a, b et que, dans cette expression, x est <u>une variable muette</u> c'est-à-dire que l'on a

$$\int_a^b f(x)\ dx\ =\ \int_a^b f(y)\ dy\ =\ \int_a^b f(t)\ dt\ =\ \ldots$$

2. Par exemple la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(1/m) = 0$ pour tout naturel m et $f(x) = 1$ sinon ; plus simplement, la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2]$ et $f(x) = -1$ sinon.

3. Pour ceux qui sont habitués à l'intégrale de Lebesgue, ceci est appelé "interprétation de Riemann de l'intégrale".

4. Ceci est dû au fait que ce sont des fonctions bornées pour lesquelles l'ensemble des points où elles ne sont pas continues est dénombrable, donc négligeable. Dans ce cas, l'intégrale de Riemann coïncide avec l'intégrale de Lebesgue. On peut aussi le montrer directement en passant à l'intégrale de Darboux.

(La notation fait penser aux primitives ; cela va être justifié dans ce qui suit.) Signalons encore que, lorsque $a = b$ on pose

$$\int_a^a f\ dx = 0$$

et

$$\int_a^b f\ dx = -\int_b^a f\ dx \qquad \text{si } a > b$$

(repenser à l'indice sommatoire muet dans le cas des sommes du chapitre 1).

2) Toutes les fonctions ne sont pas Riemann-intégrables. Par exemple, la fonction f définie sur $[0, 1]$ qui vaut 1 en tout rationnel de $[0, 1]$ et 0 en tout irrationnel de $[0, 1]$ (le graphique de f est très difficile à représenter !) n'est pas Riemann-intégrable.

En effet, si on considère les découpages σ_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ définis par

$$0 = x_0, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1 = \frac{n}{n}, \qquad r_k = \frac{k}{n}\ (k = 1, \ldots n)$$

on a $L(\sigma_n) = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} L(\sigma_n) = 0$ et

$$S(\sigma_n, f) = \sum_{k=1}^n f(r_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Par contre, si on considère les découpages σ'_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ définis par

$$0 = x_0, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1 = \frac{n}{n}, \qquad r_k = \frac{k - 1 + \sqrt{2}/2}{n}\ (k = 1, \ldots n)$$

on a $L(\sigma'_n) = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} L(\sigma'_n) = 0$ et

$$S(\sigma'_n, f) = \sum_{k=1}^n f(r_k)(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Compléments

Il existe en fait plusieurs définitions de l'intégrale. La plus pratique (car elle peut être directement considérée sur un ensemble mesurable, et pas seulement sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$), la mieux adaptée au cas de plusieurs variables, la plus utilisée, est celle de Lebesgue. Cependant, son introduction nécessite des préparatifs qu'il serait trop long de développer ici (notion d'ensemble négligeable, d'ensemble mesurable,...). La définition de Riemann de l'intégrale est, quant à elle, facilement introduite dans le contexte d'un cours de mathématiques générales ; c'est la raison pour laquelle nous avons adopté la définition précédente. Signalons toutefois que les notions de Riemann-intégrabilité et Lebesgue-intégrabilité coïncident pour la plupart des fonctions usuelles sur des intervalles bornés fermés ; dans la suite, quand on va généraliser la notion d'intégrale à des intervalles plus généraux, c'est la notion de Lebesgue-intégrabilité qui guidera nos pas.

Pour des compléments d'information concernant la définition de l'intégrale, on renvoie àux annexes.

4.1.3 Propriétés de l'intégrale sur $[a, b]$

On démontre les propriétés fort utiles suivantes sur l'intégrale introduite dans la section précédente.

Propriété 4.1.6 *1) (Linéarité de l'intégrale) Si f et g sont des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ et si $c \in \mathbb{C}$ alors les fonctions $f + g$ et cf sont aussi Riemann-intégrables et on a*

$$\int_a^b (f + g)\ dx = \int_a^b f\ dx\ +\ \int_a^b g\ dx, \quad \int_a^b (cf)\ dx = c\int_a^b f\ dx.$$

2) (Comparaison) Si f, g sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, à valeurs réelles et telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f\ dx \leq \int_a^b g\ dx.$$

En particulier, si $g \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b g\ dx \geq 0$.

3) (Sous-intervalles) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et soit $c \in]a, b[$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f\ dx \ = \ \int_a^c f\ dx \ + \ \int_c^b f\ dx.$$

4) Si f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$, la fonction $|f|$ est aussi Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\left| \int_a^b f\ dx \right| \ \leq \ \int_a^b |f|\ dx.$$

5) Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors f est Riemann-intégrable sur tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$ et on a

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\ dx \ = \ \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx \ = \ \int_a^b f(x)\ dx.$$

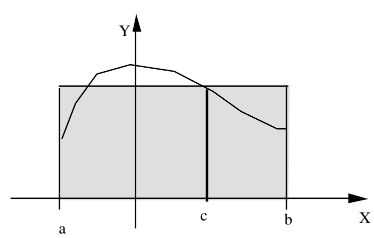
Preuve. 1),2),3),4),5) : preuves directes mais qui seront admises en première lecture.

Pour 4), signalons que la réciproque est fausse : la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1$ en tout rationnel et $f(x) = -1$ en tout irrationnel n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ alors que $|f|$ l'est.□

Le théorème qui suit, appelé théorème de la moyenne (pour les intégrales), exprime que l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est l'aire d'un rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $f(c)$, pour un réel c convenablement choisi dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 4.1.7 (Théorème de la moyenne) *Si f est à valeurs réelles, continu sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ (b - a) f(c).$$



Preuve. Si $a = b$, le résultat est immédiat.

Supposons $a < b$. Comme f est continu sur $[a, b]$, il existe [5] $m, M \in [a, b]$ tels que

$$f(m) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(M) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

On a donc

$$f(m)(b - a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \ \leq f(M)(b - a).$$

Puisque $a < b$, on en déduit que

$$f(m) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\ dx \ \leq f(M).$$

5. utilisation du théorème des bornes atteintes énoncé précédemment

Si $f(m)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ou $f(M)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ on conclut. Sinon, on a

$$f(m)\ <\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\ <\ f(M).$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient l'existence de c appartenant à l'intervalle formé par m et M tel que

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).$$

D'où la conclusion. □

Signalons que si f est à valeurs réelles et continu sur $[a,b]$, on définit la *moyenne de* f *sur* $[a,b]$ par le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Le théorème qui suit donne une méthode simple pour calculer l'intégrale en utilisant les primitives.

Théorème 4.1.8 (Intégration par variation de primitive) *Si f est continu sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

où F est une primitive de f sur $]a,b[$.

Preuve. Rappelons d'abord que toute primitive de f sur $]a,b[$ admet des limites finies en a,b, notées respectivement $F(a)$ et $F(b)$ (cf un résultat du chapitre 2).

Fixons $n\in\mathbb{N}_0$ et des points $x_k\in\,]a,b[$ $(k=1,\ldots,n-1)$ tels que $a=x_0<x_1<x_2\ldots<x_{n-1}<b=x_n$. On peut écrire

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) &= \sum_{k=1}^n (F(x_k)-F(x_{k-1}))=\sum_{k=1}^n DF(r_k)(x_k-x_{k-1})\\ &= \sum_{k=1}^n f(r_k)(x_k-x_{k-1})\\ &= S(\sigma_n,f)\end{aligned}$$

avec $\sigma_n=\{[a,x_1,\ldots,x_{n-1},b],(r_k)_{1\le k\le n}\}$ où les $r_k\in\,]x_{k-1},x_k[$ sont obtenus par le théorème des accroissements finis. Si on prend alors une suite de découpages $\{x_k^{(n)}:1\le k\le n-1\}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ de $[a,b]$ dont la largeur tend vers 0, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}S(\sigma_n,f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

donc

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}S(\sigma_n,f)=F(b)-F(a).$$

□

On utilise souvent la notation

$$[F]_a^b \quad \text{pour} \quad F(b)-F(a).$$

Corollaire 4.1.9 *Si f est continu*[6] *sur $]a,b[$ alors pour tout $x_0\in\,]a,b[$ la fonction G définie par*

$$G(t)=\int_{x_0}^t f(x)\,dx,\quad t\in\,]a,b[$$

est une primitive de f sur $]a,b[$; c'est même la primitive qui s'annule pour $t=x_0$.

6. si f est continu sur $[a,b]$, on peut prendre $G(t)=\int_a^t f(x)\,dx$

Preuve. Soit F une primitive de f sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in]a,b[$. La fonction F est donc aussi une primitive de f sur l'intervalle d'extrémités x_0, t quel que soit $t \in]a,b[$ et f est continu sur l'intervalle fermé correspondant. Vu le théorème précédent, on a donc

$$\int_{x_0}^{t} f(x)\ dx \ = \ F(t) - F(x_0),\ t \in]a,b[$$

dès lors,

$$\int_{x_0}^{t} f(x)\ dx,\ t \in]a,b[$$

est une primitive de f sur $]a,b[$ car F en est une.□

Remarque. La démonstration du théorème d'intégration par variation de primitive donnée ci-dessus présente l'avantage de se baser sur la définition de l'intégrale et du théorème des accroissements finis uniquement. En première lecture, on peut donc omettre le théorème de la moyenne.

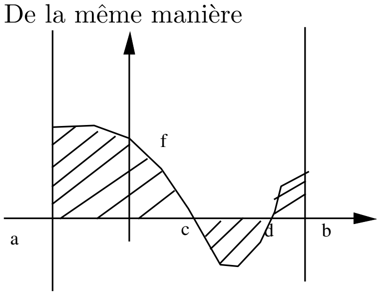
Une autre preuve est présentée dans les annexes. Elle se base sur le théorème de la moyenne.

4.1.4 Interprétations de l'intégrale

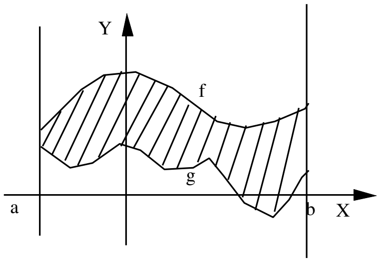
Rappelons que si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$ on a appelé aire de la surface délimitée par le graphique de f, l'axe X et les droites parallèles à Y d'équations $x = a,\ x = b$, le réel

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

De la même manière



Aire hachurée $= \int_a^c f(x)\ dx \ - \ \int_c^d f(x)\ dx \ + \ \int_d^b f(x)\ dx$



Aire hachurée $= \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$

Avertissement

Dans ce qui suit, afin de généraliser aisément la notion d'intégrale qui vient d'être définie[7] nous considérons des fonctions continues sur des intervalles.

Cependant, si f est continu sur I sauf en un nombre fini de points, on scinde I (moins les points de discontinuité) en une union finie d'intervalles disjoints $I_1, \ldots, I_N$ où f est continu et on étudie l'intégrabilité sur chacun de ces intervalles I_n. La fonction f est alors dite intégrable sur I si et seulement si elle l'est sur chacun des I_n et son intégrale sur I est égale à la somme des intégrales sur les I_n.

7. les notions d'intégrabilité s'entendront alors au sens de Lebesgue, ce qui coïncide avec l'intégrale de Riemann dans le cas de fonctions continues sur $[a,b]$

4.2 Intégrale d'une fonction continue sur $[a,b[\,,]a,b]\,,]a,b[$

Considérons le cas des intervalles $[a,b[$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, ou $b = +\infty$) $]a,b]$ ($b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, ou $a = -\infty$) et aussi des intervalles $]a,b[$, bornés ou non.

Supposons que $\underline{f \text{ soit continu}}$ sur $I = [a,b[$. Le cas $]a,b]$ se traite de même. Le cas des intervalles ouverts se traite en coupant l'intervalle en deux parties.

Remarquons d'abord que, sous cette hypothèse de continuité, les fonctions f et $|f|$ sont intégrables sur l'intervalle $[a,t]$ quel que soit t appartenant à $[a,b[$. Cela signifie que

$$\int_a^t f(x)\ dx \quad \text{et} \quad \int_a^t |f(x)|\ dx$$

représentent bien des nombres quel que soit t dans $[a,b[$.

4.2.1 Définition lorsque f est de signe constant sur $[a,b[$

Considérons la fonction

$$F(t) = \int_a^t f(x)\ dx, \quad t \in [a,b[.$$

Cette fonction étant monotone sur $[a,b[$ (elle est croissante si f est positif et décroissante si f est négatif), elle admet une limite en b^-. Deux cas peuvent donc se présenter : soit la limite est finie, soit elle est infinie.

Définition 4.2.1 *Si*

$$\lim_{t\to b} \int_a^t f(x)\ dx \quad \text{est fini}$$

on dit que

$$f \text{ est intégrable sur } \ [a,b[$$

ou tout simplement que f est intégrable en b^- si $b \in \mathbb{R}$, en $+\infty$ si $b = +\infty$. On utilise alors la notation suivante pour cette limite :

$$\lim_{t\to b} \int_a^t f(x)\ dx \ = \ \int_a^b f(x)\ dx.$$

4.2.2 Introduction au cas où f n'est pas de signe constant sur $[a,b[$

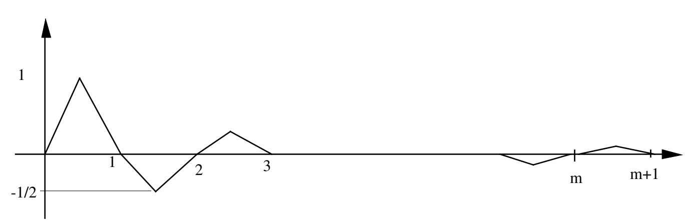
Les comportements des fonctions

$$\int_a^t f(x)\ dx,\ t \in [a,b[\quad \text{et} \quad \int_a^t |f(x)|\ dx, t \in [a,b[$$

peuvent être très différent, comme nous allons le voir ci-dessous.

<u>Exemple 1</u> Par le graphique suivant, on donne une fonction f définie et continue sur $[0,+\infty[$, linéaire par morceaux. Montrons que, pour cette fonction, on a

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^m |f(x)|\ dx \ = \ +\infty \qquad \lim_{m\to+\infty} \int_0^m f(x)\ dx \ = \ \frac{1}{2}\ln 2.$$



On a, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$

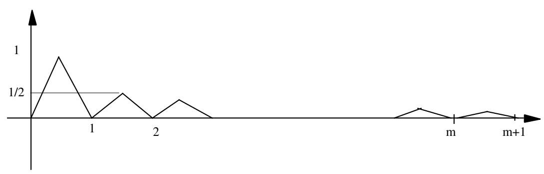
$$\int_0^m f(x)\ dx = \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k f(x)\ dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

donc (voir les annexes pour le calcul de cette limite)

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^m f(x)\ dx = \frac{1}{2} \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Cela peut s'interpréter de la manière suivante : lorsque l'on fait la somme de l'aire d'un triangle situé au-dessus de l'axe X puis qu'on lui retranche l'aire du triangle suivant situé sous l'axe X et qu'on itère ce calcul, on trouve finalement un réel.

La représentation de $|f|$ est la suivante



On a, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^m |f(x)|\ dx = \sum_{k=1}^m \int_{k-1}^k |f(x)|\ dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \ln(m+1)$$

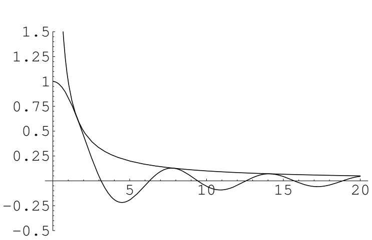
(voir les annexes pour une preuve de la dernière inégalité) donc

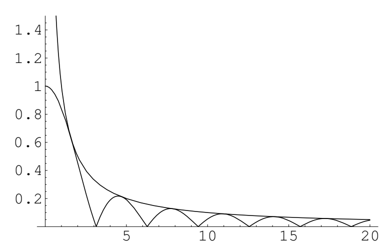
$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^m |f(x)|\ dx = +\infty.$$

Cela peut s'interpréter de la manière suivante : lorsque l'on fait la "somme infinie" des aires des triangles formés par f on trouve $+\infty$.

Exemple 2 Le second exemple concerne la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in]0, +\infty[$ prolongée continûment en 0 par 1. On a [8]

$$(i) \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{|\sin x|}{x} dx \ = +\infty \qquad (ii) \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \text{ existe et est fini.}$$





Graphique (en repère orthogonal non normé) de $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ à gauche et de $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ à droite.

L'interprétation de ces résultats en termes d'aires est analogue au cas précédent : le résultat (i) signifie que l'aire délimitée par le graphique de la fonction $|\sin x|/x$ $(x > 0)$ et l'axe X est infinie ; le résultat (ii) signifie que la "somme infinie" des différences entre les aires délimitées d'une part par le

8. Plus tard dans le cours, en étudiant les intégrales multiples, on démontra que $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$.

graphique de la fonction $\sin x/x,\ x \in [2k\pi,(2k+1)\pi]$ et X, d'autre part par le graphique de $\sin x/x,\ x \in [(2k+1)\pi,(2k+2)\pi]$ et X est un réel.

Pour une preuve de ces résultats, nous renvoyons aux annexes.

On peut aussi trouver des exemples de fonctions pour lesquelles

$$\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\ dx \quad \text{n'est pas fini et} \qquad \lim_{t\to b^-}\int_a^t |f(x)|\ dx = +\infty.$$

Cependant, on démontre que si $\lim_{t\to b^-}\int_a^t |f(x)|\ dx$ est fini alors $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\ dx$ existe et est fini.

4.2.3 Définition lorsque f n'est pas de signe constant sur $[a,b[$

Comme on vient de le voir dans l'introduction, le comportement des intégrales

$$\int_a^t f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^t |f(x)|dx$$

peut être différent lorsque t tend vers b.

On est alors amené à faire la distinction entre différentes situations. Cette distinction est contenue dans les définitions qui suivent.

Considérons la fonction

$$F(t) = \int_a^t |f(x)|, \quad t \in [a,b[.$$

Cette fonction étant croissante sur $[a,b[$, elle admet une limite en b^-. Deux cas peuvent donc se présenter : soit la limite est finie, soit elle est infinie.

On introduit alors les définitions suivantes.

Définition 4.2.2 *Si*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx \quad \text{est fini}$$

on dit que

$$f \text{ est intégrable sur } [a,b[$$

ou tout simplement que f est intégrable en b^- si $b \in \mathbb{R}$, en $+\infty$ si $b = +\infty$.

Par contre, si

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx \text{ existe et est fini}$$

on dit que f admet une intégrale fléchée en *b sur $[a,b[$.*

On remarque tout de suite que la définition de l'intégrabilité dans le cas où f a un signe constant est un cas particulier de l'intégrabilité définie en toute généralité ici.

Si les comportements de $\int_a^t |f(x)|,\ t \in [a,b[$ et de $\int_a^t f(x),\ t \in [a,b[$ peuvent être différents, il existe cependant toujours un lien entre eux comme l'énonce la propriété suivante.

Propriété 4.2.3 *Si f est intégrable sur $[a,b[$ c'est-à-dire si*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx \qquad \textit{est fini}$$

alors

$$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx \qquad \textit{existe et est fini.}$$

Preuve. Résultat admis.□

La définition de l'intégrale d'une fonction f est alors donnée ci-dessous.

Définition 4.2.4 *Si f est intégrable sur $[a,b[$ c'est-à-dire si*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx \qquad \textit{est fini}$$

alors on note

$$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

et on appelle ce nombre

l'intégrale de f sur $[a,b[$.

Envisageons maintenant l'autre cas.

Définition 4.2.5 *Si*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx \quad \textit{existe et est fini}$$

on dit que

f admet une intégrale fléchée en b^- .

On utilise la notation

$$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx = \int_a^{\to b} f(x)\ dx$$

et cette limite est appelée intégrale fléchée *de f en $b-$ si $b\in\mathbb{R}$ en $+\infty$ si $b=+\infty$.*

4.2.4 Remarques et propriétés

Remarquons tout de suite que comme $|f| = ||f||$ alors

f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I

Cela étant, rappelons que $\int_a^t f(x)\ dx,\ t\in]a,b[$ est une primitive de f sur $]a,b[$.

1) Remarquons que la définition donne immédiatement lieu au résultat suivant : si f est continu sur $[a,b[$ alors $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\ dx$ existe et est fini si et seulement si une (resp. toute) primitive de f sur $]a,b[$ admet une limite finie en b^-.

2) Remarquons que si f est une fonction qui garde un signe constant au voisinage de b, alors elle est intégrable en b^- si et seulement si elle admet une intégrale fléchée en b^-.

3) On démontre aussi facilement que les propriétés de linéarité énoncées pour l'intégrabilité sur $[a,b]$ sont aussi valables dans ce cas.

On démontre aussi que si f est intégrable sur I alors f est intégrable sur $J\subset I$.

De même, on a le résultat suivant : si f est continu sur I alors f y est intégrable si et seulement si $|f|$ l'est ; dans ce cas on a

$$\left|\int_I f(x)dx\right| \ \le\ \int_I |f(x)|dx.$$

4.2.5 Exemples fondamentaux, de référence

Nous allons donner ici des exemples fondamentaux de fonctions intégrables (qui seront les fonctions de référence pour les critères d'intégrabilité).

Proposition 4.2.6 *Soit $s \in \mathbb{R}$. La fonction f définie par*

$$f(x) = \frac{1}{x^s}$$

- *est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $s < 1$*
- *est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $s > 1$.*

Preuve. On a $|f(x)| = f(x)$ pour tout $x > 0$. On examine si les limites suivantes sont finies (on sait déjà qu'elles existent)

$$\lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^s}\, dx, \quad \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^s}\, dx.$$

Pour $s = 1$, on a

$$\int_t^1 \frac{1}{x}\, dx = \ln 1 - \ln t = -\ln t, \qquad \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \ln t - \ln 1 = \ln t;$$

comme

$$\lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty,$$

la fonction $1/x$ n'est intégrable ni en 0, ni en $+\infty$.

Pour $s \neq 1$, comme une primitive de $\frac{1}{x^s}$ sur $]0, +\infty[$ est $\frac{x^{-s+1}}{1-s}$, on a

$$\int_t^1 \frac{1}{x^s} dx \;=\; \frac{1 - t^{-s+1}}{-s+1}, \qquad \int_1^t \frac{1}{x^s} dx \;=\; \frac{t^{-s+1} - 1}{-s+1}.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^s} dx \text{ est fini si et seulement si } 1 - s > 0$$

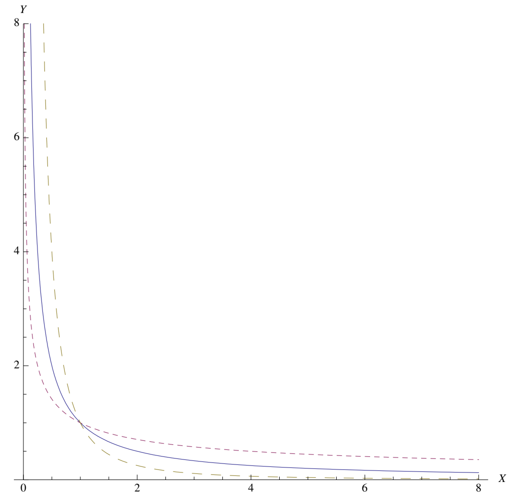
et que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^s} dx \text{ est fini si et seulement si } \; 1 - s < 0.$$

□

Bien sûr, si $a \in \mathbb{R}$, des résultats analogues existent pour $1/(x-a)^s$ et pour $1/(a-x)^s$:
$1/(x-a)^s$ est intégrable en a^+ si et seulement si $s < 1$;
$1/(a-x)^s$ est intégrable en a^- si et seulement si $s < 1$;
$1/(x-a)^s$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $s > 1$;
$1/(a-x)^s$ est intégrable en $-\infty$ si et seulement si $s > 1$.

Voici des représentations des fonctions $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = 1/\sqrt{x}$, $f_3(x) = 1/x^2$ $(x > 0)$; les graphiques des fonctions f_2, f_3 sont en pointillés (plus fins pour f_2). L'interprétation du résultat précédent est celle-ci :
- pour tout $a > 0$, l'aire comprise sous la courbe de $f_1 :]0, a] \to \mathbb{R}$ (resp. $f_1 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$) est infinie ;
- pour tout $a > 0$, l'aire comprise sous la courbe de $f_2 :]0, a] \to \mathbb{R}$ (resp. $f_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$) est finie (resp. infinie) ;
- pour tout $a > 0$, l'aire comprise sous la courbe de $f_3 :]0, a] \to \mathbb{R}$ (resp. $f_3 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$) est infinie (resp. finie).



f_1, f_2, f_3 sur $]0, +\infty[$

4.3 Critères d'intégrabilité

Afin de reconnaître si une fonction continue sur un intervalle y est intégrable, on dispose des critères suivants (les preuves sont aisées : elles découlent de quelques manipulations classiques et des exemples fondamentaux ; la propriété 4 découle même directement de la définition). Cependant, en première lecture, nous considérons que ces résultats sont admis.

Dans ce qui suit, on considère le cas de f continu sur $[a, b[$; le cas des intervalles $]a, b]$ et $]a, b[$ se traite de même.

Propriété 4.3.1 *1) Si g est continu et intégrable sur $[a, b[$ et si $|f(x)| \leq |g(x)|$ sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$.*

2) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et si la limite $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existe et est finie, alors f admet un prolongement continu sur $[a, b]$ et y est donc intégrable.

3) Si $b \in \mathbb{R}$ et s'il existe $C > 0$, $\theta < 1$ tels que $|f(x)| \leq \frac{C}{(b-x)^\theta}$ sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$. Cela arrive notamment s'il existe $\theta < 1$ tel que

$$\text{la limite } \lim_{x \to b^-} |f(x)|\ (b-x)^\theta \text{ existe et est finie.}$$

4) Si $b = +\infty$ et s'il existe $C > 0$, $\theta > 1$ tels que $|f(x)| \leq \frac{C}{x^\theta}$ sur $[a, +\infty[$ alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Cela arrive notamment s'il existe $\theta > 1$ tel que

$$\text{la limite } \lim_{x \to +\infty} |f(x)|\ x^\theta \text{ existe et est finie.}$$

5) Si f garde un signe constant sur $[a, b[$ et a une primitive qui admet une limite finie en b^-, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

6) Si $b \in \mathbb{R}$ et si

$$\lim_{x \to b^-} (b-x)|f(x)| \text{ existe et diffère de } 0$$

alors f n'est pas intégrable en b^-.

Si $b = +\infty$ et si

$$\lim_{x \to +\infty} x|f(x)| \text{existe et diffère de } 0$$

alors f n'est pas intégrable en $+\infty$.

4.4 Méthodes d'intégration

4.4.1 Variation de primitive

Propriété 4.4.1 *Si f est continu et intégrable sur $]a,b[$ alors*

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

pour toute primitive F de f sur $]a,b[$.

Preuve. Soit $c \in\ ]a,b[$. Si F est une primitive de f sur $]a,b[$, vu ce qui précède, on a

$$F(t) = \int_c^t f(x)\ dx\ + F(c),\ t \in]a,b[.$$

Dès lors, comme par définition

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ \lim_{t\to a^+} \int_t^c f(x)\ dx \ + \ \lim_{t\to b^-} \int_c^t f(x)\ dx$$

on obtient

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ -\lim_{t\to a^+}(F(t) - F(c)) \ + \ \lim_{t\to b^-}(F(t) - F(c))$$

et on conclut.□

On utilise souvent la notation suivante

$$[F]_a^b$$

en lieu et place de

$$\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

4.4.2 Intégration par parties

Enonçons et démontrons le résultat pratique d'intégration par parties. Le cas général est cité en annexe (la preuve est analogue).

Propriété 4.4.2 *Si $f, g \in C_1(]a,b[)$ et si fDg et gDf sont intégrables sur $]a,b[$, alors fg admet des limites finies en a^+ et en b^- et on a*

$$\int_a^b f(x)Dg(x)\ dx \ + \int_a^b Df(x)g(x)\ dx \ = \ f(b)g(b) \ - \ f(a)g(a)$$

où on a écrit $f(a)g(a)$ (resp. $f(b)g(b)$) au lieu de $\lim_{x\to a^+} f(x)g(x)$ (resp. $\lim_{x\to b^-} f(x)g(x)$).

Preuve. On a

$$D(fg) = fDg + gDf$$

donc

$$f(t)g(t) - f(t')g(t') = \int_{t'}^t D_x(fg)(x)\ dx = \int_{t'}^t fDg(x)\ dx \ + \ \int_{t'}^t gDf(x)\ dx$$

pour tous $t, t' \in\ ]a,b[$. Comme le membre de droite admet une limite finie si t tend vers b (de même si t' tend vers a), on conclut que

$$\lim_{t\to a^+} f(t)g(t)$$

et

$$\lim_{t'\to b^-} f(t')(g(t')$$

existent et sont finies. En passant à la définition de l'intégrale, on obtient aussi la formule annoncée.□

4.4.3 Intégration par changement de variables

Propriété 4.4.3 *Soit $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction qui appartient à $C_1(]a,b[)$ et dont la dérivée est strictement positive (resp. négative) sur $]a,b[$.*

Posons

$$a' = \lim_{x \to a^+} g(x), \; b' = \lim_{x \to b^-} g(x).$$

Si f est une fonction définie sur $]a',b'[$ (resp. $]b',a'[$) alors f est intégrable sur $]a',b'[$ (resp. $]b',a'[$) si et seulement $fog\ Dg$ est intégrable sur $]a,b[$ auquel cas on a

$$\int_{a'}^{b'} f(x')dx' \;=\; \int_a^b (fog)(x)Dg(x)dx.$$

Preuve. Résultat admis.□

Un moyen simple (et qui n'est pas rigoureux mais dont la justification est justement le résultat ci-dessus) pour utiliser cette formule consiste à poser

$$x' = g(x),$$

à remplacer dx' par $Dg(x)dx$ et à remplacer les bornes d'intégration de manière correspondante (a pour a' et b pour b'). La difficulté de cette méthode consiste à trouver une fonction g qui va permettre de mener à bien les calculs.

Définition 4.4.4 *Une fonction g avec les propriétés énoncées dans la propriété précédente sera appelée un changement de variables entre $]a,b[$ et $]a',b'[$ (resp. $]b',a'[$).*

4.4.4 Exemples

Bien souvent, on se pose uniquement la question "f est-elle intégrable sur $]a,b[$" ? On commence par vérifier que f est continu sur $I =]a,b[$. Sinon, on scinde l'intervalle en une union d'intervalles où f est continu (cf avertissement) et on étudie l'intégrabilité sur chacun des intervalles où f est continu.

Cela étant, si $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) et si f est continu en a (resp. en b), bien sûr il ne faut regarder l'intégrabilité qu'en b (resp. a).

Il est vraiment important de vérifier la continuité de f sur $]a,b[$. Par exemple, pour $f = 1/x^2$ sur $]-1,1[$, il est FAUX d'écrire $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} = [-1/x]_{-1}^1 = -2$ car la fonction $1/x^2$ n'est pas intégrable en 0. D'ailleurs le résultat est absurde car on trouve un nombre négatif (-2) comme valeur de l'intégrale d'une fonction positive.

0) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0,1]$
- en utilisant la défintion de l'intégrabilité
- en utilisant les critères d'intégrabilité.

1) La fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ car elle y est continue.

2) La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1[$ (et sur $]0,1]$) car elle est continue sur $]0,1]$ et

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 1.$$

3) La fonction $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car elle y est continue et
- $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^{3/2} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

4) Etablir que la fonction $\ln(1 + \frac{1}{x^2})$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et calculer son intégrale.

La fonction est continue sur $]0,+\infty[$ et on a (appliquer par exemple le théorème de l'Hospital)

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x^2})=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}x^2\ln(1+\frac{1}{x^2})=1.$$

Au total, f est bien intégrable sur $]0,+\infty[$.

On applique le résultat d'intégration par parties avec $f(x)=x$ et $g(x)=\ln(1+\frac{1}{x^2})$. Comme $fDg=\frac{-2}{x^2+1}$, la fonction fDg est intégrable sur $]0,+\infty[$; il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{x^2})dx &= \int_0^{+\infty}Dfg\ dx\\ &= \lim_{x\to+\infty}f(x)g(x)-\lim_{x\to 0^+}f(x)g(x)+\int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2+1}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2+1}dx\\ &= 2(\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x-\lim_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}x)\\ &= \pi\end{aligned}$$

5) Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Etablir que la fonction $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ est intégrable sur $]a,b[$ et calculer son intégrale au moyen du changement de variables $g(t)=a\cos^2 t+b\sin^2 t$.

La fonction est intégrable sur $]a,b[$ car elle y est continue et
- $\lim_{x\to a^+}\sqrt{x-a}f(x)=1/\sqrt{b-a}$
- $\lim_{x\to b^-}\sqrt{b-x}f(x)=1/\sqrt{b-a}$.

La fonction g est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $Dg(t)=(b-a)\sin(2t)$. Comme $Dg(t)>0$ pour tout $t\in]0,\pi/2[$ et que $g(0)=a$, $g(\pi/2)=b$, la fonction g est un changement de variables de $I'=]0,\pi/2[$ sur $I=]a,b[$. On obtient ainsi

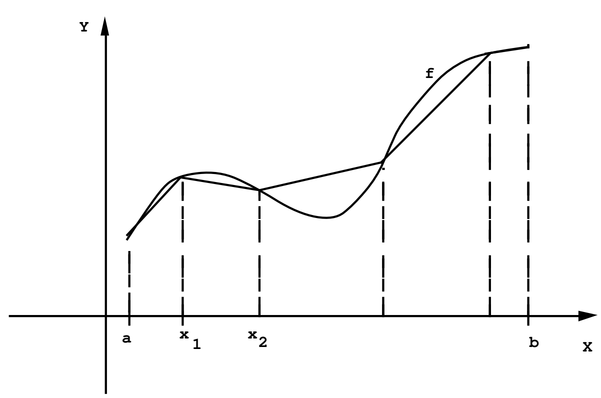
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_0^{\pi/2}(fog)(t)Dg(t)\ dt=\int_0^{\pi/2}\frac{(b-a)\sin(2t)}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}}\ dt=2\int_0^{\pi/2}1dt=\pi$$

4.5 Applications

4.5.1 Calcul de longueurs de courbes

Définition et interprétation

Considérons la représentation graphique d'une fonction f telle que Df existe et soit continu sur $[a,b]$. Considérons une succession de segments de droite qui approchent la courbe représentative.



Ces segments sont construits à partir de points $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b=x_n$. La longueur du segment dont les extrémités sont les points du graphique de f dont les abscisses sont x_{k-1} et x_k est

$$l_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}$$

et la somme des longueurs de ces segments est

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} l_k.$$

Par application du théorème des accroissements finis, il existe $r_k \in]x_{k-1}, x_k[$ $(k = 1, \ldots, n)$ tels que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = Df(r_k)\ (x_k - x_{k-1}).$$

Dès lors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (Df(r_k))^2}\ (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F(r_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec

$$F(x) = \sqrt{1 + (Df(x))^2}.$$

Cette fonction F est, par hypothèse, continue sur $[a, b]$. Si on prend successivement des points $t_0, \ldots t_n$ tels que la suite $\sup_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0, la définition de l'intégrale fournit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b F(x)\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dt.$$

On est ainsi amené à la définition suivante.

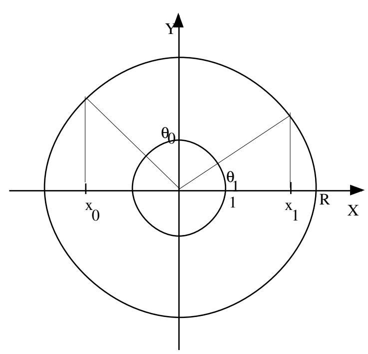
Définition 4.5.1 *Soit une fonction f dont la dérivée est continue sur $[a, b]$. La longueur de la courbe qui représente f est définie par*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dx.$$

La définition donnée ci-dessus se généralise au cas où $x \mapsto \sqrt{1 + (Df(x))^2}$ est une fonction intégrable sur $]a, b[$.

Exemple

Par exemple, calculons la longueur d'un arc de cercle.



Supposons que la courbe soit une partie de la représentation graphique de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. On a

$$Df(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Si $\theta_0, \theta_1 \in [0, \pi]$ sont tels que $R\cos\theta_0 = x_0,\ R\cos\theta_1 = x_1$ alors

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\ dx \\ &= -R\int_{x_0}^{x_1} D\arccos(\frac{x}{R})\ dx = R\ \left(\arccos(\frac{x_0}{R}) - \arccos(\frac{x_1}{R})\right) \\ &= R\ (\theta_0 - \theta_1). \end{aligned}$$

Si l'arc n'est pas entièrement compris au-dessus de l'axe des X, on ajuste le calcul. L'expression reste correcte.

Définition dans le cas général

Dans le cas d'une courbe $\mathcal{C}$ qui est la représentation graphique d'une fonction f, on écrit

$$\mathcal{C} = \{(x, f(x)) \ : \ x \in I\}$$

et dans ce cas, les points de la courbe sont simplement paramétrés par les couples $(x, f(x))$ lorsque x varie dans l'intervalle I. Mais on généralise bien sûr la définition de la longueur dans le cas de courbes qui ne sont pas des représentations graphiques de fonctions.

Ainsi, dans l'espace, si on considère la courbe

$$\mathcal{C} = \{(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \ : \ t \in]a, b[\}$$

et si $t \mapsto \sqrt{(Df_1)^2 + (Df_2)^2 + (Df_3)^2}$ est intégrable sur $]a, b[$ alors la longueur de $\mathcal{C}$ est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{(Df_1(t))^2 + (Df_2(t))^2 + (Df_3(t))^2} \, dt = \int_a^b \|D\vec{f}(t)\| \, dt$$

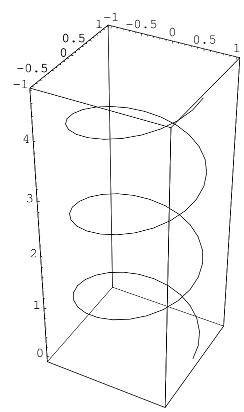
si $\vec{f}(t)$ a pour composantes $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$.

Par exemple, la longueur de l'hélice circulaire

$$\mathcal{C} = \{(r\cos t, r\sin t, Rt) \ : \ t \in [t_0, t_1]\}$$

est

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + R^2} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r^2 + R^2} \, dt = \sqrt{r^2 + R^2} \, (t_1 - t_0).$$



On peut effectuer le calcul de la longueur d'un arc de cercle en toute généralité en utilisant la description suivante d'un arc de cercle :

$$\mathcal{C} = \{(R\cos\theta, R\sin\theta) \ : \ \theta \in [\theta_0, \theta_1]\}.$$

Dans ce cas, on a

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2} \, d\theta = R(\theta_1 - \theta_0).$$

4.5.2 Intégrale sur une courbe (ou intégrale sur un chemin)

La notation habituelle pour désigner la longueur d'une courbe $\mathcal{C}$(ou d'un chemin) est [9]

$$L = \int_{\mathcal{C}} ds$$

En fait, si g est une fonction continue définie sur la courbe $\mathcal{C}$ et si $\vec{f}(t)$ $(t \in [a,b])$ est un paramétrage de cette courbe, on définit *l'intégrale de g sur la courbe $\mathcal{C}$* par

$$\int_{\mathcal{C}} g(s)\ ds = \int_a^b g(\vec{f}(t))\ \|D\vec{f}(t)\|\ dt.$$

La longueur de la courbe correspond donc tout simplement au cas où $g = 1$.

4.5.3 Intégrale curviligne (ou intégrale "le long d'un chemin ou d'une courbe")

Nous traitons ici un cas un peu différent du précédent. Dans le cas qui précède, les intégrales ne dépendent pas de l'orientation que l'on donne à la courbe. Ici, elles en dépendent.

On considère une courbe $\mathcal{C}$ paramétrée comme expliqué précédemment. Cependant, afin d'alléger les notations, écrivons

$$f_1(t) = x(t), \quad f_2(t) = y(t), \quad f_3(t) = z(t), \qquad t \in I.$$

On impose (souvent) que la courbe soit *régulière* (au moins par morceaux), c'est-à-dire que les fonctions $t \mapsto x(t), y(t), z(t)$ sont supposées continûment dérivables et telles que $(Dx(t), Dy(t), Dz(t))$ ne soit nul pour aucun t (on dit dans ce cas que la courbe possède un vecteur tangent en chaque point).

Etant donné une fonction à valeurs vectorielles $\vec{F}$ (c'est-à-dire la donnée de trois fonctions à valeurs réelles F_1, F_2, F_3) définie dans un ensemble de l'espace contenant la courbe, on peut parfaitement considérer la fonction d'une variable réelle, toujours à valeurs vectorielles

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix}$$

ce qui revient à considérer trois fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles. Pour peu que l'intégrabilité soit assurée sur $I = [a,b]$ (ou $I =]a,b[$), on peut alors considérer l'intégrale

$$\boxed{\int_a^b \Big(F_1(t)Dx(t) + F_2(t)Dy(t) + F_3(t)Dz(t) \Big)\ dt}$$

où on a utilisé la notation abrégée $F_j(t) = F_j(x(t), y(t), z(t))$. Cette intégrale s'appelle

l'intégrale de $\vec{F}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$, ou plutôt le long du paramétrage (ou du chemin) donné.

Il s'agit en fait de la modélisation d'une grandeur physique très importante :

le travail d'une force $\vec{F}$ qui se déplace le long de la courbe $\mathcal{C}$.

Expliquons pourquoi le travail s'exprime par cette intégrale, partant du fait que travail d'une force constante $\vec{F}$ qui se déplace d'un point P à un point Q est le produit scalaire de $\vec{F}$ avec le vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

Si l'on imagine que la force $\vec{F}$ se déplace non plus le long d'un segment, mais le long d'une courbe (paramétrée par $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I$) et que cette force n'est plus constante mais dépend du point P où elle s'applique (donc du paramètre t), le travail total est la "la somme du travail effectué sur chaque petit morceau de courbe", ce qui se modélise par une somme de Riemann, donc par l'intégrale

9. s désigne en fait l'abscisse curviligne

telle que nous l'avons présentée dans le chapitre précédent. En effet, considérons des points P_k de la courbe, repérés par les valeurs t_k du paramètre (k varie par exemple de 0 à n). En utilisant le théorème des accroissements finis on trouve

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = Dx(s_k)\ \ (t_{k+1} - t_k)$$

pour une valeur s_k du paramètre comprise entre t_k et t_{k+1} ; de même bien sûr pour les autres composantes.

Cela étant, on sait que le produit scalaire de $\vec{F}(t_k)$ avec le vecteur $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ s'exprime par

$$F_1(t_k)\ \ (x(t_{k+1}) - x(t_k))\ +\ F_2(t_k)\ \ (y(t_{k+1}) - y(t_k))\ +\ F_3(t_k)\ \ (z(t_{k+1}) - z(t_k))\,.$$

En supposant que $\vec{F}$ est continu sur la courbe, on considère que ce vecteur est constant sur le segment [10] joignant P_k à P_{k+1}. Ainsi, on assimile la somme des premiers termes (on fait de même pour les termes relatifs aux autres composantes) à

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_1(s_k)\ \ (x(t_{k+1}) - x(t_k))\ =\ \sum_{k=0}^{n-1} F_1(s_k)\ Dx(s_k)\,(t_{k+1} - t_k)\,,$$

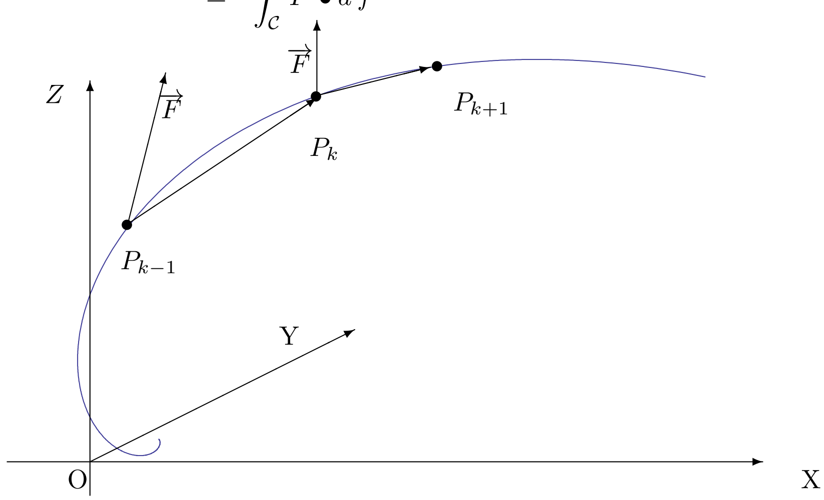
ce qui est bien une somme de Riemann telle que présentée au chapitre précédent. En supposant que la largeur des découpages tend vers 0 et en passant à la limite sur n, on obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
&\text{Travail le long du chemin } = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(F_1(t_k)\ \ (x(t_{k+1}) - x(t_k))\ +\ F_2(t_k)\ \ (y(t_{k+1}) - y(t_k))\ +\ F_3(t_k)\ \ (z(t_{k+1}) - z(t_k)) \Big) \\
&= \int_a^b \big(F_1(t)Dx(t) + F_2(t)Dy(t) + F_3(t)Dz(t) \big)\ dt \\
&= \int_a^b \overrightarrow{F}(t) \bullet D\vec{f}(t)\ dt
\end{aligned}$$

On se rapellera aussi que $D\vec{f}(t)$, de composantes $Dx(t),\ Dy(t),\ Dz(t)$, est le vecteur tangent au chemin considéré, au point paramétré par t.

Les notations usuelles (souvent on utilise la notation $\vec{r}$ au lieu de $\vec{f}$) sont les suivantes

$$\begin{aligned}
\int_a^b \overrightarrow{F}(t) \bullet D\vec{f}(t)\ dt &= \int_a^b \Big(F_1(t)Dx(t) + F_2(t)Dy(t) + F_3(t)Dz(t) \Big)\ dt \\
&= \int_{\mathcal{C}} F_1dx + F_2dy + F_3dz \\
&= \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{f}
\end{aligned}$$

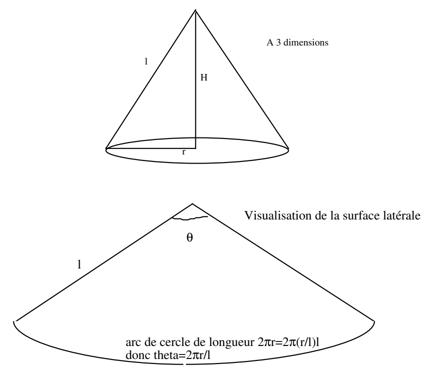


10. On peut montrer aisément que cette approximation se justifie de façon correcte mathématiquement

4.5.4 Aire d'une surface de révolution

Aire latérale d'un tronc de cône

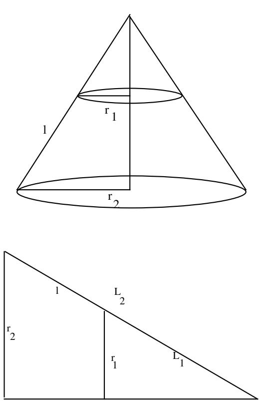
Commençons par calculer l'aire latérale d'un cône droit de base circulaire.



L'aire complète du disque de rayon l est πl^2 donc l'aire du secteur représenté ci-dessus, c'est-à-dire l'aire latérale du cône, est

$$\frac{l^2}{2}\ \theta = \pi r l.$$

Cela étant, un tronc de cône de longueur d'arête l et de sections circulaires de rayons r_1, r_2 peut être vu comme la différence entre deux cônes, l'un d'arête L_1 et de base de rayon r_1, l'autre de longueur d'arête L_2 et de base de rayon r_2 (cf représentation graphique).



L'aire latérale S de ce tronc de cône est donc $S = \pi\ (r_2 L_2 - r_1 L_1)$. L'utilisation de triangles semblables donne lieu à l'égalité $\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$. Il s'ensuit qu'en utilisant cela et $l = L_2 - L_1$, on trouve

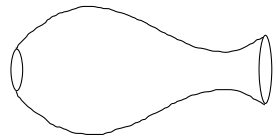
$$r_2 L_2 - r_1 L_1 = r_2 l + r_2 L_1 - r_1 L_1 = r_2 l + r_1 L_2 - r_1 L_1 = (r_1 + r_2) l$$

donc

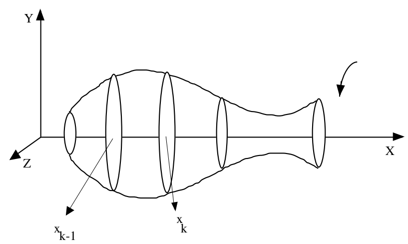
l'aire latérale du tronc de cône d'arête l et de bases de rayons r_1, r_2 est
$S = \pi(r_1 + r_2) l$.

Aire latérale d'une surface de révolution

Soit une fonction f telle que Df existe, soit continue sur $[a, b]$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$. Considérons la surface obtenue en faisant tourner la représentation graphique de f autour de l'axe X.



Considérons une succession de tronc de cônes (droits, de bases circulaires) qui approchent la surface. Ces troncs sont construits à partir de points $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$.



Pour k fixé, il s'agit du tronc de cône de longueur d'arête égale à la longueur du segment joignant les points du graphique de f d'abscisses x_{k-1} et x_k et de bases de rayons $f(x_{k-1})$ et $f(x_k)$. L'aire latérale de ce tronc de cône est donc

$$\pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Par application du théorème des accroissements finis, il existe $r_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tel que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = Df(r_k)\ (x_k - x_{k-1}).$$

De plus, comme f est continu, $f(x_{k-1})$ et $f(x_k)$ sont des réels proches de $f(r_k)$ donc

$$f(x_{k-1}) + f(x_k) \text{ est proche de } 2f(r_k).$$

Dès lors, la somme des aires des troncs de cône ainsi construits est approximativement donnée par

$$A_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(r_k)\ (x_k - x_{k-1})\ \sqrt{1 + (Df(r_k))^2} = \sum_{k=1}^{n} F(r_k)(x_k - x_{k-1})$$

avec

$$F(x) = 2\pi\ f(x)\sqrt{1 + (Df(x))^2}.$$

Cette fonction F est, par hypothèse, continue sur $[a, b]$. Si on prend successivement des points $x_0, \ldots x_n$ tels que la suite $\sup_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0, la définition de l'intégrale fournit

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \int_a^b F(x)\ dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dx.$$

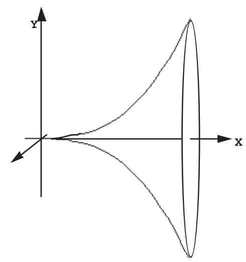
On est ainsi amené à la définition suivante.

Définition 4.5.2 *Soit une fonction f dont la dérivée est continue sur $[a, b]$. L'aire latérale de la surface obtenue en faisant tourner le graphique de f autour de X est définie par*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (Df(x))^2}\ dx.$$

Exemples

Par exemple, calculons l'aire latérale de la surface obtenue en faisant tourner le graphique de $f(x) = x^3,\ x \in [0,1]$, autour de l'axe X.



On a $Df(x) = 3x^2$ donc

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\ dx.$$

Comme $D(1 + 9x^4) = 36x^3$, on a

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{1+9x^4}\ dx &= \frac{1}{36} \left(\int \sqrt{X}\ dX \right)_{X=1+9x^4} \\ &= \frac{1}{36}\ \frac{2}{3} \sqrt{(1+9x^4)^3} = \frac{1}{54} \sqrt{(1+9x^4)^3} \end{aligned}$$

donc

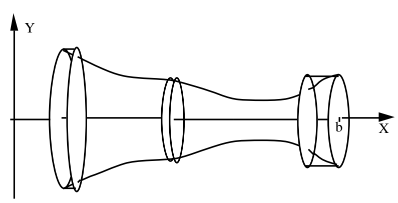
$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4}\ dx = \frac{\pi}{27} \left[\sqrt{(1+9x^4)^3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{27} (\sqrt{10^3} - 1).$$

4.5.5 Quelques calculs de volumes

Un cas général

Considérons un corps ayant la description suivante. Pour tout $x \in [a,b]$, le plan orthogonal à X intersecte l'objet selon une surface d'aire $A(x)$. On suppose aussi que $A \in C_0([a,b])$.

Considérons une succession de cylindres qui approchent le volume du corps. Ces cylindres sont construits à partir de points $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$.



Pour k fixé, le cylindre k a comme volume $(x_k - x_{k-1}) A(x_{k-1})$. La somme des volumes des cylindres vaut

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\ A(x_{k-1}).$$

Si on prend successivement des points $x_0, \ldots x_n$ tels que la suite $\sup_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0, la définition de l'intégrale fournit

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \int_a^b A(x)\ dx.$$

On est ainsi amené à la définition suivante.

Définition 4.5.3 *Le volume d'un corps dont les sections perpendiculaires à X, pour $x \in [a,b]$, ont une aire donnée par $A(x)$, avec $A \in C_0([a,b])$, est défini par*

$$V = \int_a^b A(x)\ dx.$$

Cas du volume d'un corps de révolution

Dans le cas où le corps est obtenu en faisant tourner le graphique d'une fonction positive et continue f sur $[a,b]$ autour de l'axe X, la fonction $A(x)$ est donnée par

$$A(x) = \pi f^2(x).$$

Il s'ensuit que le volume du corps est égal à

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx.$$

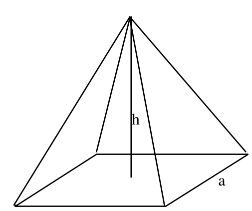
On peut ainsi calculer le volume d'un corps de révolution obtenu en faisant tourner autour d'un axe la partie du plan située entre le graphique de deux fonctions continues f, g sur $[a,b]$: il est égal à

$$\pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\ dx$$

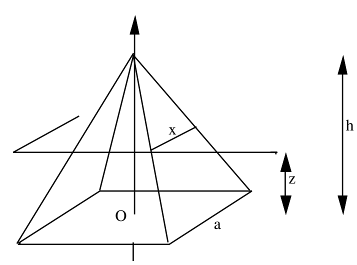
lorsque $f \geq g$ sur $[a,b]$.

Exemples

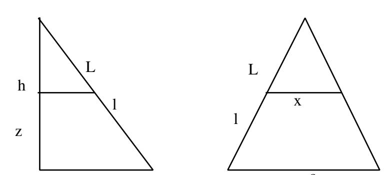
1) Calculons le volume d'une pyramide de hauteur h et de base carrée de côté a.



Calculons l'aire de la surface obtenue en coupant la pyramide par un plan orthogonal à sa hauteur. A une distance z de la base, on doit donc calculer x.



On utilise les triangles suivants : (l est la longueur de l'arête du tronc de pyramide, L est la longueur totale de l'arête de la pyramide)



On a

$$\frac{h-z}{h} = \frac{L-l}{L} \qquad \frac{L-l}{L} = \frac{x}{a}$$

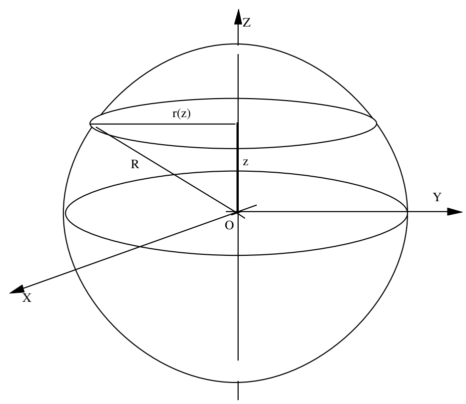
donc

$$x = a\frac{h-z}{h} = a\left(1 - \frac{z}{h}\right).$$

Le volume de cette pyramide est donc

$$V = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h (h-z)^2\ dz = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{(z-h)^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}a^2h.$$

2) Calculons le volume d'une boule de rayon R. Plaçons le centre de la boule à l'origine d'un repère orthonormé. L'aire de la surface obtenue en coupant la boule par un plan orthogonal à Z à une distance z de l'origine est égal à $\pi r^2(z)$ où $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$. Ici, on fait varier z de $-R$ à R.



On a donc

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \pi r^2(z)\ dz = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)\ dz \\ &= 2\pi\int_0^R (R^2 - z^2)\ dz = 2\pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = 2\pi(R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

4.5.6 La projection (cylindrique conforme) de Mercator

Cet exemple est tiré du cours de cartographie mathématique du Professeur J.-P. Donnay. Nous renvoyons à cet ouvrage pour de plus amples informations. Le texte ci-dessous n'engage que son auteur.

On considère une projection des points de la surface de la Terre sur un cylindre tangent à la terre à l'équateur (projection cylindrique, cas direct). On la suppose telle que, lorsqu'on "ouvre" le cylindre pour en faire un plan, on obtient un quadrillage du plan où les lignes horizontales sont les images des parallèles et les lignes verticales les images des méridiens. L'altération [11] h selon un méridien est donnée par (φ est la latitude, λ la longitude, x, y les coordonnées cartésiennes)

$$h = \frac{1}{R}D_\varphi y$$

et l'altération k selon un parallèle est donnée par

$$k = \frac{1}{R\cos\varphi}D_\lambda x$$

11. L'altération peut être vue comme une mesure de la variation entre les différentes échelles, sur la Terre et sur la carte

Le principe de la projection de Mercator (dite conforme) demande en outre que les altérations (d'échelles) soient conservées dans toutes les directions. La projection de Mercator (qui demande $k = h$) conduit, à proximité de l'équateur, à la relation suivante

$$D_\varphi y = \frac{1}{\cos\varphi} D_\lambda x = \frac{R}{\cos\varphi}$$

car on considère que $x = R\lambda$ à proximité de l'équateur (relation exacte à l'équateur). On obtient donc que l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est φ, est donnée, sur une carte de Mercator, par

$$\boxed{y(\varphi) = R \int_0^\varphi \frac{1}{\cos u} du.}$$

Le calcul de cette intégrale peut s'effectuer par le changement de variables

$$t = g^{-1}(u) = \mathrm{tg}(\frac{u}{2}), u \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

On a $u = g(t) = 2\,\mathrm{arctg}\, t$ et $D_t g(t) = 2\frac{1}{1+t^2}$ et

$$\cos u = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(u/2)}{1 + \mathrm{tg}^2(u/2)}$$

donc

$$\begin{aligned} y &= R \int_0^{\mathrm{tg}(\varphi/2)} \frac{1+t^2}{1-t^2} 2 \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ &= R \int_0^{\mathrm{tg}(\varphi/2)} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= R \ln \left(\left| \frac{1 + \mathrm{tg}(\varphi/2)}{1 - \mathrm{tg}(\varphi/2)} \right| \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b}$$

et comme φ est petit en module, on obtient finalement

$$y = R \ln \left(\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}) \right).$$

4.6 Annexes

4.6.1 Annexe 1 : Deux résultats utiles

Propriété 4.6.1 *Pour tout*[12] $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, *on a*

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x).$$

En particulier, on a

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

12. Ce résultat est en fait valable pour tout $x \in]-1, 1]$

Preuve. Ceci se démontre en utilisant le développement limité de Taylor.
La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$D^k f(t) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+t)^k}, \quad t > -1.$$

Dès lors, pour tout $x > -1$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe un réel $u = u(x,m)$ compris entre 0 et x tel que

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \; + \; \frac{(-1)^m}{m+1}\frac{x^{m+1}}{(1+u)^{m+1}}.$$

Pour tout m, posons

$$R_m = \frac{(-1)^m}{m+1} \; \frac{x^{m+1}}{(1+u)^{m+1}}.$$

Pour conclure, il suffit de prouver que $\lim_{m\to+\infty} R_m = 0$.
Si x est positif, alors u est positif aussi, donc $1+u \geq 1$; il s'ensuit que

$$|R_m| \leq \frac{1}{m+1} \; \frac{x^{m+1}}{(1+u)^{m+1}} \leq \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Dès lors, si $x \in [0,1]$, on a bien $\lim_{m\to+\infty} R_m = 0$.
Si x est négatif, alors $u \geq x$ donc

$$|R_m| \leq \frac{1}{m+1} \; \frac{|x|^{m+1}}{(1+u)^{m+1}} \leq \frac{1}{m+1} \; \frac{|x|^{m+1}}{(1+x)^{m+1}}.$$

Cela étant, puisque x est négatif, on a

$$\frac{|x|}{1+x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq 1+x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x.$$

Il s'ensuit que pour $x \in [-1/2, 0]$, on a encore

$$|R_m| \leq \frac{1}{m+1}$$

donc aussi $\lim_{m\to+\infty} R_m = 0$.

Propriété 4.6.2 *Pour tout naturel strictement positif* m*, on a*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \geq \ln(m+1).$$

Preuve. Démontrons d'abord que l'on a

$$x \geq \ln(x+1) \quad \forall x > 0.$$

La fonction $x \mapsto f(x) = x - \ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et vérifie $Df(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Il s'ensuit que f est strictement croissant sur $]0,+\infty[$ et, dès lors,

$$f(x) = x - \ln(x+1) > \lim_{y\to 0^+} f(y) = 0, \quad \forall x > 0.$$

Utilisons ce résultat [13] pour toutes les valeurs $x = 1/k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) : on a

$$\frac{1}{k} \geq \ln(\frac{1}{k}+1) = \ln(k+1) - \ln k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{m} (\ln(k+1) - \ln k) \geq \ln(m+1), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

13. Voir aussi *Calculus*, R. Ellis and D. Gulick, 1994, p. 572

4.6.2 Annexe 2 : Définition de l'intégrale

Remarque 1 : intégrale de Darboux.

Si on reprend l'exemple d'introduction de l'intégrale, on se dit qu'au lieu de considérer des valeurs de f en des points particuliers des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on pourrait tout aussi bien prendre $\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ ou de la même manière la borne inférieure. C'est ce que l'on fait si l'on veut introduire l'intégrale dite "au sens de Darboux".

Plus précisément, on introduit les notions et démontre les résultats suivants.

Soit f une fonction réelle et bornée sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout découpage (noté $\mathcal{D}$) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ de $[a, b]$ on peut considérer les sommes

$$S_+(f, \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)\ (x_j - x_{j-1}), \quad S_-(f, \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)\ (x_j - x_{j-1}).$$

Comme

$$S_+(f, \mathcal{D}) \geq \inf_{x\in[a,b]} f(x)\ (b-a), \quad S_-(f, \mathcal{D}) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)\ (b-a)$$

on peut aussi définir

$$D_-(f\,[a, b]) = \sup\{S_-(f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ découpage de } [a, b]\},$$

$$D_+(f\,[a, b]) = \inf\{S + (f, \mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ découpage de } [a, b]\}.$$

De plus, on a aussi

$$S_-(f, \mathcal{D}_1) \leq S_+(f, \mathcal{D}_2)$$

quels que soient les découpages $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ de $[a, b]$. Dès lors

$$D_-(f\,[a, b]) \leq D_+(f\,[a, b]).$$

On donne alors la définition suivante : si la fonction f est réelle et bornée sur $[a, b]$, elle est *Darboux-intégrable* sur $[a, b]$ si $D_-(f\,[a, b]) = D_+(f\,[a, b])$; ce nombre est alors appelé l'intégrale de Darboux de f sur $[a, b]$. On démontre alors qu'une fonction réelle et continue (resp. monotone) sur $[a, b]$ est Darboux-intégrable sur cet intervalle.

Le résultat liant les intégrales de Riemann et de Darboux est le suivant. *Une fonction réelle sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur cet intervalle si et seulement si elle y est bornée et Darboux-intégrable. Dans ce cas, on a l'égalité des intégrales.*

Remarque 2 : intégrale de Lebesgue.

Et en ce qui concerne l'intégrale de Lebesgue, on a le résultat suivant, appelé critère de Riemann-intégrabilité de Lebesgue. Il nécessite la notion d'ensemble (Lebesgue-) négligeable (dont les exemples qui seront le plus rencontrés ici sont les ensembles dénombrables). *Une fonction f définie sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est bornée sur $[a, b]$ et telle que l'ensemble des points où elle n'est pas continue soit négligeable ; dans ce cas les intégrales de Lebesgue et de Riemann coïncident.*

4.6.3 Annexe 3

Preuve du théorème d'intégration par variation de primitive se basant sur le théorème de la moyenne.

Théorème 4.6.3 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. La fonction*

$$F(t) = \int_a^t f(x)\ dx, \quad t \in [a, b]$$

est une primitive de f sur $]a, b[$.

Preuve. Soit $t \in]a,b[$. Nous devons montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = f(t).$$

On a, pour h de module assez petit

$$F(t+h)-F(t) = \int_t^{t+h} f(x)\ dx;$$

par le théorème de la moyenne, il existe donc c, compris entre t et $t+h$ tel que

$$F(t+h)-F(t) = \ h\ f(c).$$

Quand h tend vers 0, c tend vers t car c est toujours entre t et $t+h$. Vu la continuité de la fonction f, on a donc $\lim_{h\to 0} f(c) = f(t)$ d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(t).$$

□

Théorème 4.6.4 (Intégration par variation de primitive) *Si f est continu sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b)-F(a)$$

où F est une primitive de f sur $]a,b[$.

Preuve. Vu le résultat précédent, si F est une primitive de f sur $]a,b[$, alors il existe une constante r telle que

$$\int_a^t f(x)\ dx \ = \ F(t)+r, \quad t \in]a,b[.$$

Il s'ensuit que F admet une limite finie en a^+ et en b^-, dont la valeur est notée $F(a), F(b)$ respectivement.

Cela étant on obtient $r = -F(a)$ car $\int_a^a f(x)\ dx \ = \ 0$ donc

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b)+r = F(b)-F(a).$$

□

4.6.4 Annexe 4

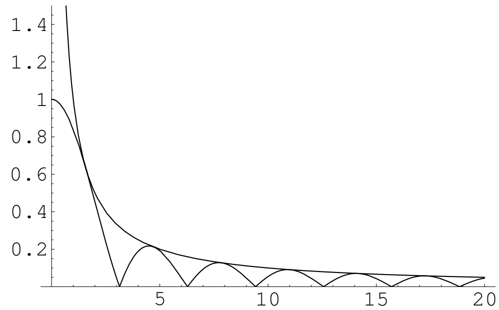
On a

$$(i)\ \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{|\sin x|}{x} dx \ = +\infty \qquad (ii)\ \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \ = \ \frac{\pi}{2}.$$

Preuve. Pour $t \geq 0$, posons

$$F(t) = \int_0^t \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Démontrons (i). La fonction $F(t)(t \geq 0)$ est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$; elle admet donc une limite en $+\infty$. Pour trouver cette limite, il suffit donc de calculer $\lim_{m\to+\infty} F(m\pi) = \lim_{m\to+\infty} \int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$.



Pour tout naturel m on a

$$\begin{aligned} F(m\pi) &= \int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx + \ldots + \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx \end{aligned}$$

et, si $k\pi < x \leq (k+1)\pi$, on a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$, $(k \in \mathbb{N})$. Dès lors

$$F(m\pi) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx \geq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\ dx.$$

Pour tout naturel k, on a $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\ dx = 2$ donc

$$F(m\pi) \geq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\ dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \geq \frac{2}{\pi} \ln(m+1)$$

(voir annexe 1 pour la dernière inégalité). D'où la conclusion.

Pour (ii), nous renvoyons à la seconde partie du cours (utilisation de l'intégration à plusieurs variables).

4.6.5 Annexe 5 : critère d'intégration par parties

Propriété 4.6.5 *Si f et g sont des fonctions qui appartiennent à $C_1(]a,b[)$ et si deux des trois assertions suivantes sont vérifiées*
- la fonction fDg admet une intégrale fléchée en a^+ et en b^-
- la fonction gDf admet une intégrale fléchée en a^+ et en b^-
- la fonction fg admet une limite finie en a^+ et en b^-

alors la troisième est vérifiée et on a

$$\int_{\to a}^{\to b} f(x)Dg(x)\ dx\ + \int_{\to a}^{\to b} Df(x)g(x)\ dx\ =\ \lim_{x\to b^-} f(x)g(x)\ -\ \lim_{x\to a^+} f(x)g(x).$$

Preuve. Elle est analogue à celle effectuée dans le cas pratique.□

4.6.6 Annexe 6 : la formule intégrale de Taylor

On peut donner une formulation intégrale du développement de Taylor ; elle consiste à exprimer le reste à l'aide d'une intégrale. Cette expression peut se révéler très utile dans plusieurs cadres de l'analyse.

Propriété 4.6.6 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \in \mathbb{N}_0$ et soit f une fonction qui appartient à $C_p(]a,b[)$ telle que*[14] *$D^k f \in C_0([a,b])$ pour tout $k = 0, \ldots, p$. On a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b-a)^k}{k!} D^k f(a) \; + \; (b-a)^p \int_0^1 \frac{(1-x)^{p-1}}{(p-1)!} (D^p f)_{a+x(b-a)} \, dx.$$

Preuve. La preuve s'effectue par récurrence sur p.□

En particulier, pour $p = 1, 2$ successivement, cette formule s'écrit

$$f(b) = f(a) + (b-a) \int_0^1 (Df)_{a+x(b-a)} dx$$

$$f(b) = f(a) + (b-a) Df(a) + (b-a)^2 \int_0^1 (1-x)(D^2 f)_{a+x(b-a)} \, dx.$$

14. ce qui signifie que les dérivées de f sur $]a,b[$ admettent un prolongement continu sur $[a,b]$; le prolongement est noté de la même manière que la fonction

Chapitre 5

Equations différentielles

5.1 Introduction

Les équations différentielles interviennent dans toutes les disciplines des sciences. Elles permettent de traduire, de modéliser des phénomènes (de physique, de chimie, d'océanographie, d'évolution de population, de finance, d'assurance, ...) et d'obtenir, de prévoir des réponses.

Si l'inconnue (la réponse cherchée) est modélisée par une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$, le phénomène à décrire fait souvent intervenir non seulement f, mais aussi ses dérivées (vitesse, taux d'accroissement, ...) d'ordre $1, \ldots, p$. Une équation différentielle est une relation liant l'inconnue f et ses dérivées. Résoudre l'équation, c'est trouver f et un intervalle ouvert I, tels que f soit p fois dérivable sur I et vérifie la relation demandée sur I. La fonction f est alors bien sûr appelée *solution* de l'équation sur I.

Par exemple, l'équation

$$D_x^2 f(x) + \frac{1}{x} D_x f(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f(x) = 0$$

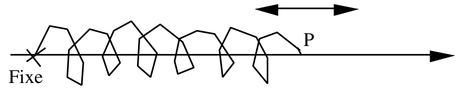
où ν est un nombre donné et où la fonction inconnue est f est une équation différentielle que l'on rencontre beaucoup [1]. Elle porte le nom d'*équation de Bessel* et ses solutions sont appelées *fonctions de Bessel*.

L'équation précédente est une équation différentielle d'ordre 2 (car des dérivées secondes apparaissent) linéaire (car une combinaison linéaire de solutions est encore solution) à coefficients non constants (les coefficients devant les dérivées de l'inconnue f sont des fonctions). Mais un type d'équation, plus simple à résoudre, apparaît aussi fréquemment dans une première approche des phénomènes physiques, chimiques, biologiques. Il s'agit d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ce chapitre présente notamment la théorie de ce type d'équations pour l'ordre 1 et 2. Le but essentiel est de montrer que toutes les fonctions d'un certain type sont solutions de ces équations, mais aussi et surtout de prouver que toutes les solutions sont de ce type ! On s'attache aussi à montrer que sous certaines conditions (dites initiales), la solution d'une équation différentielle est unique !, ce qui est essentiel pour la description de phénomènes.

Voici quelques autres exemples.

<u>Mouvement d'une masse attachée au bout d'un ressort</u>

Nous renvoyons au cours de physique pour l'explication et la modélisation de ce mouvement. Nous ne donnons ici que l'équation qui régit ce mouvement. Dans ce qui suit, t est la variable (le temps), f représente le déplacement du point P de masse m.



1. Changement de variables et séparation de variables dans l'équation aux dérivées partielles de Laplace.

– Mouvement harmonique simple du ressort :

$$D^2 f(t) + \frac{k}{m} f(t) = 0$$

où m est la masse attachée au ressort, k la constante de raideur du ressort ($k > 0$).

– Mouvement harmonique amorti :

$$D^2 f(t) + \frac{\gamma}{m} Df(t) + \frac{k}{m} f(t) = 0$$

où m est la masse attachée au ressort, k la constante de raideur du ressort ($k > 0$), γ la constante d'amortissement ($\gamma > 0$).

– Mouvement entretenu :

$$D^2 f(t) + \frac{\gamma}{m} Df(t) + \frac{k}{m} f(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

où m est la masse attachée, k la constante de raideur du ressort, γ la constante d'amortissement et où $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ est une force extérieure appliquée au ressort [2].

Variation de population

Considérons par exemple une population de cellules dans une culture. Supposons qu'une cellule donne naissance à une cellule supplémentaire toutes les s_0 secondes et que les cellules ne meurent pas. En h seconde(s), une cellule donne donc naissance à h/s_0 cellules. Soit $P(t)$ le nombre de cellules à l'instant t. Si h est petit, on peut donc considérer que l'accroissement de population (c'est-à-dire $P(t+h) - P(t)$) est donné par

$$P(t+h) - P(t) = P(t)\ \frac{h}{s_0}.$$

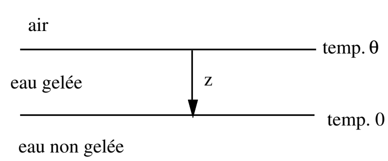
La population vérifie donc la relation

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{1}{s_0} P(t)$$

c'est-à-dire

$$DP(t) = \frac{1}{s_0} P(t).$$

Pour terminer cette introduction, citons un autre exemple simple d'équation différentielle. Il s'agit d'une équation rencontrée dans l'étude du gel de l'eau d'un lac [3] ; cette fois elle n'est plus linéaire à coefficients constants.



Soit $z(t)$ l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t. Si le système est sous caractéristiques thermiques constantes, on a

$$\text{Flux de chaleur} \quad = Q = K \frac{0 - \theta}{z}$$

2. Si F est la force extérieure (fonction du temps), elle peut se développer, sous de faibles hypothèses, en une série trigonométrique de Fourier c'est-à-dire, sous forme réelle, en une somme de deux séries, l'une faisant apparaître des $\sin(\omega_n t)$, l'autre des $\cos(\omega_n t)$. Par linéarité, il suffit donc de considérer une seule fonction sinus et cosinus ; c'est la raison pour laquelle on a pris cette forme pour F dans l'exemple

3. Wilson A.G, Kirbly M.G., *Mathematics for geographers and planers*, Clarendon Press Oxford 1975

où K est une constante thermique. Cette perte d'énergie va provoquer la solidification de l'eau (c'est-à-dire z va augmenter au cours du temps) selon la loi

$$D_t z(t) = \frac{Q}{L}$$

où L est la chaleur latente dans la transformation. Dès lors, on obtient que le système est régi par l'équation

$$D_t z(t) = -\frac{K}{L}\ \frac{\theta}{z}$$

dont on donnera une méthode de résolution plus loin.

5.2 Equations différentielles linéaires à coefficients constants (en abrégé EDLCC) d'ordre 1 et 2

5.2.1 Définitions

Il s'agit d'équations différentielles qui s'écrivent

$\boxed{aD_x f(x) + bf(x) = g(x)}$ (ordre 1) $\boxed{aD^2 f(x) + bDf(x) + cf(x) = g(x)}$ (ordre 2)

où a, b, c sont des constantes complexes, où $a \neq 0$ et où g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Lorsque

$$g = 0$$

on dit que l'équation est

homogène.

Etant donné une équation générale d'ordre 1 ou 2, on dira que la même équation, mais avec le second membre g égal à 0, est l'équation homogène associée à l'équation de départ.

La propriété ci-dessous justifie l'appellation "linéaire" de ce type d'équations.

Propriété 5.2.1 *Si f_1, f_2 sont solutions de l'équation homogène (1) (ou (2)) et si r, s sont des complexes, alors la fonction $rf_1 + sf_2$ est aussi solution de la même équation.*

Preuve. Considérons le cas de l'équation d'ordre 1. L'ordre 2 se traite de même.
On a

$$\begin{aligned} aD(rf_1(x) + sf_2(x)) + b(rf_1(x) + sf_2(x)) &= r(aDf_1(x) + bf_1(x)) + s(aDf_2(x) + bf_2(x)) \\ &= r.0 + s.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

5.2.2 Forme générale des solutions

Proposition 5.2.2 *Soit f_0 une solution de l'équation générale d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) encadrée ci-dessus.*

Si f est une solution de la même équation, alors $f - f_0$ est une solution de l'équation homogène associée.

Réciproquement, si h est une solution de l'équation homogène associée, alors la fonction $f = f_0 + h$ est solution de la même équation que f_0.

Preuve. Considérons le cas de l'équation d'ordre 2. Celui de l'équation d'ordre 1 est tout à fait analogue.

D'une part, si f_0 et f sont solutions de l'équation générale d'ordre 2 alors

$$\begin{aligned}
&aD^2(f(x)-f_0(x))+bD(f(x)-f_0(x))+c(f(x)-f_0(x)) \\
&= aD^2f(x)-aD^2f_0(x)+bDf(x)-bDf_0(x)+cf(x)-cf_0(x) \\
&= aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x)-\big(aD^2f_0(x)+bDf_0(x)+cf_0(x)\big) \\
&= g(x)-g(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'autre part, si h est une solution de l'équation homogène, on a

$$\begin{aligned}
&aD^2(f_0(x)+h(x))+bD(f_0(x)+h(x))+c(f_0(x)+h(x)) \\
&= aD^2f_0(x)+aD^2h(x)+bDf_0(x)+bDh(x)+cf_0(x)+ch(x) \\
&= aD^2f_0(x)+bDf_0(x)+cf_0(x)+\big(aD^2h(x)+bDh(x)+ch(x)\big) \\
&= g(x)+0 \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

□

5.2.3 Solutions de l'équation homogène d'ordre 1

Nous allons donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 1.

Théorème 5.2.3 *L'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre* 1

$$\boxed{aDf+bf=0}$$

($a,b\in\mathbb{C}, a\neq 0$) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui s'écrivent

$$\boxed{f(x)=ce^{-\frac{b}{a}x}}$$

où c est une constante arbitraire complexe. Si a,b sont réels et si on cherche uniquement les solutions réelles de l'équation, on ne prendra que $c\in\mathbb{R}$.

Preuve. Si f est solution sur I, alors $F(x)=\exp(\frac{b}{a}x)f(x)$ vérifie

$$DF(x)=\frac{b}{a}\exp(\frac{b}{a}x)f(x)+\exp(\frac{b}{a}x)Df(x)=\exp(\frac{b}{a}x)\left(\frac{b}{a}f(x)-\frac{b}{a}f(x)\right)=0.$$

Il s'ensuit [4] qu'il existe une constante c telle que

$$c=F(x)=\exp(\frac{b}{a}x)f(x),\quad x\in I$$

donc

$$f(x)=c\exp(-\frac{b}{a}x),\quad x\in I.$$

Réciproquement, on vérifie directement qu'une telle fonction est toujours solution. En effet :

$$D\exp(-\frac{b}{a}x)=-\frac{b}{a}\exp(-\frac{b}{a}x)$$

donc

$$aD(c\exp(-\frac{b}{a}x))+b(c\exp(-\frac{b}{a}x))=-cb\exp(-\frac{b}{a}x)+cb\exp(-\frac{b}{a}x)=0.$$

4. Le résultat démontré dans le cadre des fonctions à valeurs réelles est aussi valable dans le cadre des fonctions à valeurs complexes (la même démonstration convient)

□

Remarquons que le coefficient qui apparaît dans l'exponentielle de la solution, à savoir $-b/a$, est la solution de l'équation

$$az + b = 0$$

appelée

équation caractéristique

associée à l'équation différentielle $aDf + bf = 0$.

Le polynôme $az + b$

est appelé

polynôme caractéristique

associé à l'équation différentielle.

Théorème 5.2.4 *On considère l'équation homogène $aDf(x) + bf(x) = 0$ où $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.*
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit un complexe u_0. L'équation $aDf(x) + bf(x) = 0$ admet une solution unique vérifiant $f(x_0) = u_0$.

Preuve. On cherche c tel que $f(x_0) = u_0$ avec $f(x) = ce^{-\frac{b}{a}x}$. Le complexe $c = u_0 e^{\frac{b}{a}x_0}$ convient.
Supposons maintenant que f et f' soient deux solutions de l'équation vérifiant $f(x_0) = f'(x_0) = u_0$. Alors $F = f - f'$ est encore solution de l'équation et s'annule en x_0 ; il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que $F(x) = ce^{-\frac{b}{a}x}$ et $0 = ce^{-\frac{b}{a}x_0}$; dès lors $c = 0$ donc $F = f - f' = 0$.□

A titre d'exemple, déterminons les solutions des équations homogènes d'ordre 1 suivantes :

$$(1)\ 3Df(x) + 2f(x) = 0, \qquad (2)\ iDf(x) + \pi f(x) = 0.$$

Solution. (1) L'équation caractéristique associée est $3z + 2 = 0$; elle admet comme unique solution le réel $-2/3$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation $3Df(x) + 2f(x) = 0$ est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$f(x) = ce^{-\frac{2}{3}x},\ c \in \mathbb{C}.$$

(2) L'équation caractéristique associée est $iz + \pi = 0$; elle admet comme unique solution le complexe $i\pi$. L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$f(x) = ce^{i\pi x}, c \in \mathbb{C}.$$

5.2.4 Solutions de l'équation homogène d'ordre 2

Zéros d'un polynôme du second degré

Rappelons le résultat suivant, démontré dans le chapitre 1.

Propriété 5.2.5 *Le polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ où a, b, c sont des complexes et $a \neq 0$ admet toujours deux zéros (deux zéros distincts de multiplicité 1 ou un zéro de multiplicité 2).*
Si a, b, c sont réels, et si $b^2 - 4ac < 0$ alors les zéros sont des complexes conjugués.

Rappelons aussi la forme de ces zéros : si on définit $\Delta = b^2 - 4ac$ et si z_0 est un complexe qui vérifie $z_0^2 = \Delta$, alors les zéros sont donnés par

$$\frac{-b + z_0}{2a}, \qquad \frac{-b - z_0}{2a}.$$

SOLUTIONS DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE (CAS GÉNÉRAL)

Considérons l'équation $\boxed{aD^2f + bDf + cf = 0}$ avec a, b, c complexes, $a \neq 0$. Le polynôme

$$az^2 + bz + c$$

est appelé

polynôme caractéristique

associé à l'équation différentielle et l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

est appelée

équation caractéristique

associée à l'équation différentielle.

On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

et on désigne par

z_1, z_2 les zéros du polynôme caractéristique.

Théorème 5.2.6 *Lorsque $\Delta = 0$, on a $z_1 = z_2 = -b/(2a)$; l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent*

$$\boxed{f(x) = (c_1x + c_2)e^{-\frac{b}{2a}x},\ x \in \mathbb{R}}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Lorsque $\Delta \neq 0$, on a $z_1 \neq z_2$; l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = c_1e^{z_1x} + c_2e^{z_2x},\ x \in \mathbb{R}}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Preuve. Cas $\Delta = 0$. Posons $u_1(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}$ et $u_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$.

D'une part, montrons que les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont des solutions. Par la propriété 5.2.1, la fonction $f(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$ est donc également solution.

Posons $z_0 = -\frac{b}{2a}$. On a

$$Du_1(x) = e^{z_0x} + z_0xe^{z_0x},\ D^2u_1(x) = 2z_0e^{z_0x} + z_0^2xe^{z_0x},\ Du_2(x) = z_0e^{z_0x},\ D^2u_2(x) = z_0^2e^{z_0x}$$

donc

$$\begin{aligned} aD^2u_1(x) + bDu_1(x) + cu_1(x) &= (-b + \frac{b^2}{4a}x + b - \frac{b^2}{2a}x + cx)\ e^{z_0x} \\ &= 0 \\ aD^2u_2(x) + bDu_2(x) + cu_2(x) &= (\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c)\ e^{z_0x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $b^2 = 4ac$.

D'autre part, montrons que si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ qui vérifie $aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0$ alors il existe des constantes c_1, c_2 telles que
$f(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x),\ x \in I$ (donc f est en fait aussi défini sur $\mathbb{R}$).

Définissons $F(x) = e^{\frac{b}{2a}x} f(x)$. Cette fonction est deux fois dérivable sur I et on a, en utilisant la formule de Leibniz et $b^2 = 4ac$:

$$\begin{aligned} D^2F(x) &= \frac{b^2}{4a^2} e^{\frac{b}{2a}x} f(x) + 2\frac{b}{2a} e^{\frac{b}{2a}x} Df(x) + e^{\frac{b}{2a}x} D^2 f(x) \\ &= \left(\frac{c}{a} f(x) + \frac{b}{a} Df(x) + D^2 f(x) \right) \ e^{\frac{b}{2a}x} \\ &= \frac{1}{a} \left(cf(x) + bDf(x) + aD^2 f(x) \right) \ e^{\frac{b}{2a}x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dès lors, il existe une constante c_1 telle que $DF(x) = c_1, \ x \in I$ donc

$$D(F(x) - c_1 x) = 0, \ x \in I.$$

Il s'ensuit qu'il existe encore une constante c_2 telle que

$$F(x) - c_1 x = c_2, \ x \in I.$$

Finalement, comme $f(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} F(x)$, on a

$$f(x) = (c_1 x + c_2) e^{-\frac{b}{2a}x} = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Cas $\Delta \neq 0$. Posons $u_1(x) = e^{z_1 x}$ et $u_2(x) = e^{z_2 x}$.

D'une part, montrons que u_1 et u_2 sont des solutions de l'équation. Par la propriété 5.2.1, la fonction $f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$ est donc également solution. Effectuons le calcul pour u_1 ; l'autre cas est le même. On a

$$Du_1(x) = z_1 u_1(x), \quad D^2 u_1(x) = z_1^2 u_1(x)$$

donc

$$aD^2 u_1(x) + bDu_1(x) + cu_1(x) = (az_1^2 + bz_1 + c) \ u_1(x) = 0$$

car z_1 est solution de l'équation caractéristique.

D'autre part, montrons que si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ qui vérifie $aD^2 f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0$ alors il existe des constantes c_1, c_2 telles que $f(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \ x \in I$ (donc f est en fait aussi défini sur $\mathbb{R}$).

On peut écrire f sous la forme suivante :

$$f(x) = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(Df(x) - z_2 f(x) \right) \ - \ \frac{1}{z_1 - z_2} \left(Df(x) - z_1 f(x) \right), \ x \in I.$$

Posons

$$f_1(x) = Df(x) - z_2 f(x), \quad f_2(x) = Df(x) - z_1 f(x).$$

On a

$$\begin{aligned} Df_1(x) - z_1 f_1(x) &= D^2 f(x) - z_2 Df(x) - z_1 Df(x) + z_1 z_2 f(x) \\ &= D^2 f(x) + \frac{b}{a} Df(x) + \frac{c}{a} f(x) \\ &= 0 \\ Df_2(x) - z_2 f_2(x) &= D^2 f(x) - z_1 Df(x) - z_2 Df(x) + z_1 z_2 f(x) \\ &= D^2 f(x) + \frac{b}{a} Df(x) + \frac{c}{a} f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat relatif aux solutions des équations homogènes d'ordre 1, on obtient donc qu'il existe des constantes c_1', c_2' telles que

$$f_1(x) = c_1' e^{z_1 x}, \quad f_2(x) = c_2' e^{z_2 x}.$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{1}{z_1 - z_2} f_1(x) - \frac{1}{z_1 - z_2} f_2(x) = \frac{c_1'}{z_1 - z_2} e^{z_1 x} + \frac{c_2'}{z_2 - z_1} e^{z_2 x} = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}.$$

□

Solutions de l'équation homogène dans le cas où les coefficients sont réels

Lorsque a, b, c sont réels, $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif ou négatif. S'il est positif, alors z_1 et z_2 sont réels. S'il est négatif, on a vu que les zéros z_1, z_2 de $P(z) = az^2 + bz + c$ sont complexes conjugués. Il s'ensuit que les combinaisons linéaires de $e^{z_1 x}$ et $e^{z_2 x}$ vont s'écrire comme combinaisons linéaires de deux fonctions faisant intervenir les fonctions sinus et cosinus prises en le même argument.

Propriété 5.2.7 *Supposons $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = r_1 e^{z_1 x} + r_2 e^{z_2 x}}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = r_1 x e^{-\frac{b}{2a} x} + r_2 e^{-\frac{b}{2a} x}}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = e^{\frac{-b}{2a} x} \left(r_1 \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x) + r_2 \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x) \right)}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Preuve. Le cas correspondant à $\Delta > 0$ est immédiat à partir du Théorème 5.2.6.

Lorsque $\Delta < 0$, les zéros du polynôme caractéristique sont

$$z_1 = \frac{-b}{2a} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \overline{z_1}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent (en reprenant la forme donnée par le Théorème 5.2.6)

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 \, e^{\frac{-b}{2a} x} e^{i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x} + c_2 \, e^{\frac{-b}{2a} x} e^{-i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x} \\ &= (c_1 + c_2) e^{\frac{-b}{2a} x} \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x) \; + i(c_1 - c_2) e^{\frac{-b}{2a} x} \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x) \end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires. De façon équivalente on obtient la forme

$$f(x) = c_1' e^{\frac{-b}{2a} x} \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x) \; + c_2' e^{\frac{-b}{2a} x} \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} x)$$

où c_1', c_2' sont des constantes complexes arbitraires. Quand on ne considère que les solutions réelles, on ne doit prendre que des constantes réelles dans cette expression. □

Définition 5.2.8 *On appelle solutions fondamentales (ou base de solutions) de l'équation homogène $aD^2 f + bDf + cf = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0)$ des fonctions u_1, u_2 définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$*

- *qui sont solutions de l'équation*
- *et qui sont telles que toute autre solution de l'équation s'écrive comme une somme de multiples de ces fonctions.*

Par exemple, dans le cas $\Delta = 0$, les fonctions $u_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}, u_2(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}$ sont des solutions fondamentales de l'équation homogène.

Dans le cas $\Delta \neq 0$, les fonctions $u_1(x) = e^{z_1 x}, u_2(x) = e^{z_2 x}$ sont des solutions fondamentales de l'équation homogène. Lorsque $z_1 = ir, z_2 = -ir$ avec $r \in \mathbb{R}$, les fonctions $u_1(x) = \cos(rx), u_2(x) = \sin(rx)$ sont aussi des solutions fondamentales de l'équation homogène.

Remarque. Pour tous réels r_1, r_2 il existe des réels A, φ tels que

$$r_1 = A\sin\varphi, \qquad r_2 = A\cos\varphi.$$

Les solutions ci-dessus peuvent donc aussi s'écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{-b}{2a}x}\left(A\sin\varphi\ \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + A\cos\varphi\ \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x)\right) \\ &= Ae^{\frac{-b}{2a}x}\sin\left(\varphi + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \end{aligned}$$

où A, φ sont des constantes réelles arbitraires.

Unicité

Théorème 5.2.9 *On considère l'équation homogène d'ordre 2* $aD^2 f(x) + bDf(x) + cf(x) = 0$ *($a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$).*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soient deux complexes d_1 et d_2. Dans chacun des cas cités précédemment (cas $\Delta = 0$ et $\Delta \neq 0$), il existe une solution unique f telle que $f(x_0) = d_1$ et $Df(x_0) = d_2$.

En particulier, la fonction nulle est la seule qui vérifie $f(x_0) = 0, Df(x_0) = 0$.

Preuve. Notons u_1, u_2 des solutions fondamentales de l'équation homogène d'ordre 2.

Démontrons l'unicité : soient f et f' des solutions de l'équation homogène vérifiant $f(x_0) = f'(x_0) = d_1$ et $Df(x_0) = Df'(x_0) = d_2$. Dès lors $F = f - f'$ est solution de l'équation homogène et vérifie $F(x_0) = 0, DF(x_0) = 0$. Il existe ainsi des constantes c_1, c_2 telles que

$$F(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

avec

$$\begin{cases} c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) = 0 \\ c_1 Du_1(x_0) + c_2 Du_2(x_0) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, homogène. Après quelques calculs, on trouve que l'unique solution est $c_1 = c_2 = 0$; dès lors F est nul et finalement $f = f'$.

La démonstration de l'existence s'effectue de la même manière : on doit trouver c_1, c_2 tels que

$$\begin{cases} c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) = d_1 \\ c_1 Du_1(x_0) + c_2 Du_2(x_0) = d_2; \end{cases}$$

la fonction $f = c_1 u_1 + c_2 u_2$ répondra donc à la question. Et en effet, le système ci-dessus admet bien une solution (unique) car il s'agit d'un système de Cramer (vu ce qui a été dit dans le cas de l'unicité). □

Exemples

1) Déterminer l'ensemble des solutions des équations homogènes d'ordre 2 suivantes

$$(1)\ D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0, \quad (2)\ D^2 f(x) + 2iDf(x) = 0.$$

Solution. (1) Cette équation est homogène d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 = 0$; elle admet la solution double-1. L'ensemble des solutions de l'équation (1) est donc

$$\{c_1 xe^{-x} + c_2 e^{-x} :\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\};$$

l'ensemble des solutions réelles est
$$\{c_1xe^{-x}+c_2e^{-x}\ :\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\}.$$

(2) Cette équation est homogène d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $z^2+2iz=0$; elle admet les solutions 0 et $-2i$. L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc

$$\{c_1+c_2e^{-2ix}\ :\ c_1,c_2\in\mathbb{C}\}.$$

Résolvons complètement les équations différentielles linéaires à coefficients constants données dans l'introduction.

2)

$$DP(t)=\frac{1}{s_0}P(t).$$

Solution. Cette équation est homogène d'ordre 1. L'équation caractéristique est $z-\frac{1}{s_0}=0$. L'ensemble des solutions est donc

$$\{ce^{\frac{1}{s_0}t}\ :\ c\in\mathbb{C}\}.$$

3) Considérons le cas de l'oscillateur harmonique simple, à savoir l'équation

$$D^2f(t)+\frac{k}{m}f(t)=0$$

avec $k,m>0$.

C'est une équation homogène. L'équation caractéristique associée est

$$z^2+\frac{k}{m}=0.$$

Comme k/m est strictement positif, on peut écrire $\frac{k}{m}=\omega^2$ avec $\omega=\sqrt{k/m}>0$ appelé *fréquence propre de l'oscillateur.* Les zéros du polynôme caractéristique sont donc

$$z_1=i\omega \qquad z_2=-i\omega.$$

Finalement, l'ensemble des solutions réelles de l'équation est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

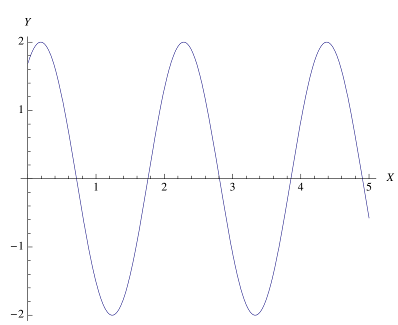
$$f(t)=r_1\cos(\omega t)+r_2\sin(\omega t)$$

où r_1,r_2 sont des constantes réelles arbitraires, ou encore l'ensemble des fonctions

$$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

où A,φ sont des constantes réelles arbitraires.

Voici une représentation de $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ (pour $A=2,\ \omega=3,\varphi=1$, sur l'intervalle $[0,5]$).



3) Considérons le cas de l'oscillateur harmonique amorti [5], c'est-à-dire l'équation

$$D^2f(t)+\frac{\gamma}{m}Df(t)+\frac{k}{m}f(t)=0$$

5. Ce cas se présente par exemple si le point matériel lié au ressort est contraint de se déplacer dans un milieu fluide.

avec $k, m, \gamma > 0$.

C'est une équation homogène. L'équation caractéristique associée est

$$z^2 + \frac{\gamma}{m} z + \frac{k}{m} = 0.$$

Posons $\omega = \sqrt{k/m}$ et $\Delta = \frac{\gamma^2}{m^2} - 4\omega^2$. Plusieurs cas sont à envisager :

– Lorsque $\Delta < 0$ c'est-à-dire lorsque $\frac{\gamma}{m} < 2\omega$ (on parle d'amortissement faible), les zéros du polynôme caractéristique sont

$$z_1 = -\frac{\gamma}{2m} + \frac{i}{2}\sqrt{-\Delta}, \qquad z_2 = \overline{z_1}.$$

La solution générale de l'équation s'écrit donc

$$f(t) = e^{\frac{-\gamma}{2m} t}(r_1 \cos(\alpha t) + r_2 \sin(\alpha t)), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$f(t) = e^{\frac{-\gamma}{2m} t} A \sin(\alpha t + \varphi), \quad A, \varphi \in \mathbb{R}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}.$$

On constate donc que le mouvement est une oscillation (présence du sinus) dont l'amplitude décroît exponentiellement au cours du temps (présence de l'exponentielle décroissante).

– Lorsque $\Delta > 0$ c'est-à-dire lorsque $\frac{\gamma}{m} > 2\omega$ (on parle d'amortissement fort), les zéros du polynôme caractéristique sont

$$z_1 = -\frac{\gamma}{2m} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \qquad z_2 = -\frac{\gamma}{2m} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}.$$

La solution générale de l'équation s'écrit donc

$$f(t) = r_1 e^{z_1 t} + r_2 e^{z_2 t} = e^{\frac{-\gamma}{2m} t}(r_1 e^{\alpha t} + r_2 e^{-\alpha t}), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}.$$

Comme z_1 et z_2 sont strictement négatifs, le mouvement n'est plus une oscillation mais est simplement amorti au cours du temps.

– Lorsque $\Delta = 0$ c'est-à-dire lorsque $\frac{\gamma}{m} = 2\omega$ (on parle d'amortissement critique), les zéros du polynôme caractéristique sont

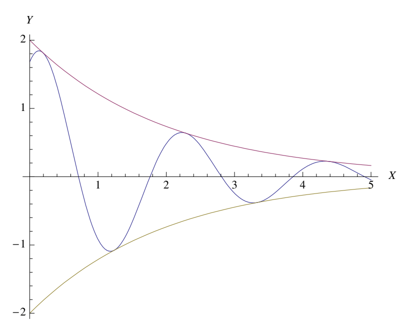
$$z_1 = z_2 = -\frac{\gamma}{2m} = -\omega.$$

La solution générale de l'équation s'écrit donc

$$f(t) = (r_1 + r_2 t)e^{-\omega t}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme dans le cas précédent, le mouvement est simplement amorti au cours du temps, sans oscillation.

Voici une représentation de $f(t) = Ae^{\frac{-\gamma}{2m} t} \sin(\omega t + \varphi)$ (pour $A = 2,\ \omega = 3, \varphi = 1, \gamma/m = 1$, sur l'intervalle $[0, 5]$) et de $Ae^{\frac{-\gamma}{2m} t}, -Ae^{\frac{-\gamma}{2m} t}$ sur le même intervalle.



4) Pour le mouvement entretenu, à savoir pour l'équation

$$D^2 f(t) + \frac{\gamma}{m} Df(t) + \frac{k}{m} f(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

où $k, m > 0$ et $\gamma \geq 0$, nous constatons que nous devons aussi trouver une solution particulière car l'équation n'est pas homogène . Des méthodes pour trouver une telle solution font l'objet d'une des sections suivantes. La résolution de l'équation homogène a déjà été faite : il s'agit en effet de l'exemple précédent.

C'est dans ce cas que peuvent apparaître des phénomènes de résonance.

5.2.5 Solutions de l'équation non homogène d'ordre 1

Remarques importantes

1) Si les coefficients de l'équation sont réels, si $g = \mathcal{R}G$ et si F vérifie

$$aD_xF(x) + bF(x) = G(x), \qquad x \in I$$

alors $f = \mathcal{R}F$ vérifie

$$aD_xf(x) + bf(x) = g(x), \qquad x \in I.$$

On peut aussi procéder de même avec la partie imaginaire.

2) Si le second membre g s'écrit $g = g_1 + \ldots + g_J$, et si $f_1, \ldots, f_J$ sont respectivement des solutions de l'équation avec second membre $g_1, \ldots, g_J$, alors la fonction

$$f = f_1 + \ldots + f_J$$

est une solution particulière de l'équation avec second membre g.

Méthode générale : la "variation des constantes"

Proposition 5.2.10 *Soit l'équation différentielle (d'ordre 1)*

$$aDf(x) + bf(x) = g(x),$$

où $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et g est continu sur un intervalle ouvert I.

Pour tout $x \in I$, désignons par $C(x)$ la solution[6] de l'équation

$$C(x)e^{-\frac{b}{a}x} = \frac{g(x)}{a}.$$

Si P est une primitive de C sur I alors les solutions de l'équation différentielle s'écrivent

$$(P(x) + c)\ e^{-\frac{b}{a}x},\ x \in I$$

où c est une constante arbitraire.

Preuve. Pour toute constante c, la fonction $f(x) = (P(x) + c)\ e^{-\frac{b}{a}x}$ est effectivement dérivable sur I et

$$Df(x) = \frac{1}{a}g(x) - \frac{b}{a}e^{-\frac{b}{a}x}\,(P(x) + c) = \frac{1}{a}g(x) - \frac{b}{a}f(x)$$

donc

$$aDf(x) + bf(x) = g(x),\ x \in I.$$

Réciproquement, toute solution est de cette forme. En effet, une solution est une somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène. Dès lors, comme la fonction $P(x)e^{-b/ax}$, $x \in I$, est une solution particulière de l'équation, on conclut. □

Méthode lorsque le second membre est une fonction exponentielle polynôme

Lorsque le second membre g est une fonction qui s'écrit comme le produit d'un polynôme par une exponentielle $e^{\alpha x}$, il existe toujours une solution qui a une forme semblable.

6. On appelle cette méthode la "variation des constantes" (ici en fait, de la constante) car elle consiste à exprimer, à partir de la solution générale de l'équation homogène $f(x) = ce^{-(b/a)x}$, la constante c comme une fonction (de x).

Propriété 5.2.11 *Soit l'équation*

$$aDf(x) + bf(x) = P(x)e^{\alpha x}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, P *polynôme et* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $\alpha \neq -\frac{b}{a}$, *il existe un polynôme* Q *de même degré que celui de* P *tel que*

$$f(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si $\alpha = -\frac{b}{a}$, *il existe un polynôme* Q *de même degré que celui de* P *tel que*

$$f(x) = x\ Q(x)e^{-\frac{b}{a}x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Preuve. Résultat admis.□

Unicité

Le résultat d'existence et d'unicité qui suit est fondamental car il permet d'affirmer que si l'évolution d'un système est gouvernée par une équation différentielle de type étudié ici, alors l'évolution s'effectue de manière unique une fois que l'on a déterminé la condition initiale.

Théorème 5.2.12 *On considère l'équation* $aDf(x) + bf(x) = g(x)$ *où* $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ *et* $g \in C_0(I)$.

Soit $x_0 \in I$ *et soit un complexe* u_0. *L'équation* $aDf(x) + bf(x) = g(x)$ *admet une solution unique vérifiant* $f(x_0) = u_0$.

Preuve. Notons f_1 une solution particulière de cette équation. On cherche c tel que $f(x_0) = u_0$ avec $f(x) = f_1(x) + ce^{-\frac{b}{a}x}$. Le complexe $c = (u_0 - f_1(x_0))e^{\frac{b}{a}x_0}$ convient.

Supposons maintenant que f et f' soient deux solutions de l'équation vérifiant $f(x_0) = f'(x_0) = u_0$. Alors $F = f - f'$ est solution de l'équation homogène et s'annule en x_0 ; il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que $F(x) = ce^{-\frac{b}{a}x}$ et $0 = ce^{-\frac{b}{a}x_0}$; dès lors $c = 0$ donc $F = f - f' = 0$.□

Exemples

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes

$$(1)\ Df(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x}, \qquad (2)\ Df(x) + 2f(x) = xe^x.$$

Solution.

(1) L'équation caractéristique est $z + 1 = 0$; le réel -1 est l'unique solution. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\{ce^{-x}\ :\ c \in \mathbb{C}\}$.

Cherchons à présent une solution particulière. La fonction $g(x) = \frac{1}{e^x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$; déterminons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\frac{e^x}{e^x+1}$: la fonction $\ln(1+e^x)$ convient.

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation (1) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$\left\{e^{-x}\left(c + \ln(e^x+1)\right) : c \in \mathbb{C}\right\}.$$

(2) L'équation caractéristique est $z + 2 = 0$; le réel -2 est l'unique solution. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\{ce^{-2x}\ :\ c \in \mathbb{C}\}$.

Le second membre $xe^x = xe^{1.x}$ est une fonction exponentielle polynôme. Comme 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique et que x est un polynôme de degré 1, on sait qu'il existe une solution particulière de la forme $f(x) = (Ax+B)e^x$. Il faut maintenant déterminer A, B. On a

$$Df(x) = Ae^x + (Ax+B)e^x = (A+B+Ax)e^x$$

donc

$$Df + 2f = xe^x$$

si et seulement si

$$A + B + Ax + 2Ax + 2B = x$$

ou encore si et seulement si

$$\begin{cases} A+3B=0 \\ 3A=1. \end{cases}$$

Ce système fournit les solutions $A=\frac{1}{3}$ et $B=-\frac{1}{9}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (2) est

$$\left\{ce^{-2x}+\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)e^x \ : \ c\in\mathbb{C}\right\}.$$

5.2.6 Solutions de l'équation non homogène d'ordre 2

Les méthodes de l'ordre 1 s'adaptent aussi aux équations d'ordre 2.

Les mêmes remarques préliminaires peuvent aussi être faites.

Méthode générale : la "variation des constantes"

Proposition 5.2.13 *Soit l'équation différentielle (d'ordre 2)*

$$aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x)=g(x),$$

où $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ et g est continu sur un intervalle ouvert I. Notons u_1,u_2 des solutions fondamentales de cette équation.

Soient C_1,C_2 les fonctions de $x\in I$ uniques solutions[7] *continues du système (en fait un système d'équations linéaires pour chaque $x\in I$)*

$$\begin{cases} C_1(x)u_1(x)+C_2(x)u_2(x) & = & 0 \\ C_1(x)Du_1(x)+C_2(x)D_xu_2(x) & = & \frac{g(x)}{a}. \end{cases}$$

Si P_1,P_2 désignent deux primitives respectivement de C_1,C_2 alors les solutions de l'équation différentielle s'écrivent

$$(P_1(x)+c_1))\ u_1(x)+(P_2(x)+c_2)\ u_2(x),\ x\in I$$

où $c_1,c_2\in\mathbb{C}$.

Preuve. Nous admettrons[8] l'existence et la continuité des fonctions C_1,C_2.

Cela étant, démontrons que pour toutes constantes c_1,c_2, la fonction

$$f(x)=(P_1(x)+c_1))\ u_1(x)+(P_2(x)+c_2)\ u_2(x),\ x\in I,$$

est bien solution de l'équation non homogène.

Cette fonction est, par construction, dérivable sur I et on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= C_1(x)u_1(x)+(P_1(x)+c_1)Du_1(x)+C_2(x)u_2(x)+(P_2(x)+c_2)Du_2(x) \\ &= (P_1(x)+c_1)Du_1(x)+(P_2(x)+c_2)Du_2(x). \end{aligned}$$

La fonction Df est donc encore dérivable sur I et on a

$$\begin{aligned} D^2f(x) &= C_1(x)Du_1(x)+(P_1(x)+c_1)D^2u_1(x)+C_2(x)Du_2(x)+(P_2(x)+c_2)D^2u_2(x) \\ &= \frac{g(x)}{a}+(P_1(x)+c_1)D^2u_1(x)+(P_2(x)+c_2)D^2u_2(x). \end{aligned}$$

7. On appelle cette méthode la "variation des constantes" car elle consiste à exprimer, à partir de la solution générale de l'équation homogène $f(x)=c_1e^{z_1x}+c_2e^{z_2x}$ ou $f(x)=c_1xe^{z_1x}+c_2e^{z_1x}$, les constantes c_1,c_2 comme des fonctions (de x).

8. En fait, il suffit de résoudre explicitement, pour tout $x\in I$, ce système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Dès lors

$$\begin{aligned} aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x) &= a\left(\frac{g(x)}{a}+(P_1(x)+c_1)D^2u_1(x)+(P_2(x)+c_2)D^2u_2(x)\right)\\ &\quad + b\left((P_1(x)+c_1)Du_1(x)+(P_2(x)+c_2)Du_2(x)\right)\\ &\quad + c\left(P_1(x)+c_1\right)\,u_1(x)+\left(P_2(x)+c_2\right)\,u_2(x))\\ &= g(x)+\left(P_1(x)+c_1\right)\,(aD^2u_1(x)+bDu_1(x)+cu_1(x))\\ &\quad + \left(P_2(x)+c_2\right)\,(aD^2u_2(x)+bDu_2(x)+cu_2(x))\\ &= g(x). \end{aligned}$$

Réciproquement, une solution est nécessairement une fonction de ce type. En effet, une telle fonction est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène. Comme une solution particulière s'écrit (vu ce qui précède) $P_1(x)u_1(x)+P_2(x)u_2(x),\ x\in I$, et comme les solutions de l'équation homogène s'écrivent $c_1u_1(x)+c_2(x)u_2(x),\ x\in\mathbb{R}$, on conclut. □

Méthode lorsque le second membre est une fonction exponentielle polynôme.

Lorsque le second membre g est une fonction qui s'écrit comme le produit d'un polynôme par une exponentielle $e^{\alpha x}$, il existe toujours une solution qui a une forme semblable.

Propriété 5.2.14 *Soit l'équation*

$$aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x)=P(x)e^{\alpha x}$$

avec $a,b,c\in\mathbb{C},\ a\neq 0,\ P$ *polynôme et* $\alpha\in\mathbb{C}$.

Si α n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x)=Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si α est un zéro simple du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x)=x\ Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si α est un zéro double du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x)=x^2\ Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Preuve. Résultat admis.□

Unicité

Le résultat d'existence et d'unicité qui suit est fondamental car il permet d'affirmer que si l'évolution d'un système est gouvernée par une équation différentielle de type étudié ici, alors l'évolution s'effectue de manière unique une fois que l'on a déterminé les conditions initiales.

Théorème 5.2.15 *On considère l'équation d'ordre 2* $aD^2f(x)+bDf(x)+cf(x)=g(x)$ $(a,b,c\in\mathbb{C},a\neq 0,\ g\in C_0(I))$.

Soit $x_0\in I$ et soient deux complexes d_1 et d_2. Il existe une solution unique f de l'équation telle que $f(x_0)=d_1$ et $Df(x_0)=d_2$.

Preuve. Unicité. Si f_1, f_2 sont deux solutions sur I qui vérifient les conditions initiales, alors la fonction $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ est solution de l'équation homogène sur I et vérifie les conditions initiales $h(x_0) = 0, Dh(x_0) = 0$. Vu le résultat relatif à l'unicité des solutions dans le cas homogène, on conclut que $f_1 = f_2$ sur I.

Existence. Soit f_0 une solution de l'équation (son existence est assurée par le résultat relatif à la méthode de variation des constantes). Vu le résultat relatif à l'existence des solutions de l'équation homogène vérifiant des conditions initiales, il existe une solution h de l'équation homogène vérifiant $h(x_0) = d_1 - f_0(x_0),\ Dh(x_0) = d_2 - Df_0(x_0)$. Il s'ensuit que la fonction $f = f_0 + h$ remplit les conditions de l'énoncé : c'est une solution de l'équation qui possède les conditions initiales demandées.□

Exemples

1) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$D^2 f(x) + Df(x) = 3.$$

Rechercher ensuite la solution qui vérifie $f(0) = 0,\ Df(0) = 1$.

a) On commence par résoudre complètement l'équation homogène $D^2 f(x) + Df(x) = 0$.

Le polynôme caractéristique de cette équation est $z^2 + z$; ses zéros sont donc 0 et -1. L'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène est donc l'ensemble des fonctions

$$f(x) = r_1 + r_2 e^{-x}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

b) Une solution particulière de l'équation s'obtient ici directement : on voit immédiatement que $f(x) = 3x$ vérifie $D^2 f(x) + Df(x) = 3$.

Si on ne voit pas immédiatement cette solution, on peut procéder comme suit. Le second membre est une exponentielle polynôme ; l'exponentielle qui intervient est $\exp(0x)$. Comme 0 est un zéro simple du polynôme caractéristique, il existe donc une solution particulière qui s'écrit $f(x) = Ax$ où A est une constante à déterminer. On a $Df(x) = A, D^2 f(x) = 0$ donc f vérifie l'équation si et seulement si $A = 3$ et on trouve finalement qu'une solution particulière est donnée par $f(x) = 3x$.

c) L'ensemble des solutions réelles de l'équation $D^2 f(x) + Df(x) = 3$ est donc l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$f(x) = r_1 + r_2 e^{-x} + 3x$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

d) Cherchons alors $f(x) = r_1 + r_2 e^{-x} + 3x$ qui vérifie $f(0) = 0$ et $Df(0) = 1$. On a $f(0) = r_1 + r_2$ et $Df(0) = -r_2 + 3$. Il s'ensuit que f répond aux conditions si et seulement si

$$r_1 + r_2 = 0 \quad \text{et} \quad -r_2 + 3 = 1.$$

On trouve $r_2 = 2$ et $r_1 = -2$ donc la fonction qui répond à la dernière question est

$$f(x) = -2 + 2e^{-x} + 3x,\ x \in \mathbb{R}.$$

2) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$D^2 f(x) + f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) On commence par résoudre l'équation homogène $D^2 f + f = 0$.

L'équation caractéristique associée est $z^2 + 1 = 0$. Elle admet donc comme solutions les complexes i et $-i$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions complexes de cette équation est

$$\{c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\} = \{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

et que l'ensemble des solutions réelles est

$$\{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

b) Déterminons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ (car le second membre est défini et continu sur $\mathbb{R}$). Comme l'équation est à coefficients réels et que $\sin x = \Im(e^{ix})$, une solution particulière sera fournie par la partie imaginaire d'une solution particulière de l'équation

$$D^2 f(x) + f(x) = e^{ix}.$$

Le second membre de cette dernière équation étant l'exponentielle polynôme $1.e^{ix}$, i étant zéro du polynôme caractéristique, on sait qu'une solution particulière est du type $f(x) = Axe^{ix}$. On a $D^2 f(x) = 2Aie^{ix} - Axe^{ix}$ donc

$$D^2 f(x) + f(x) = e^{ix}$$

si et seulement si

$$2iA - Ax + Ax = 1$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$A = -\frac{i}{2}.$$

Il s'ensuit que la fonction

$$\Im(-\frac{i}{2}xe^{ix}) = -\frac{x}{2}\cos x$$

est solution particulière de l'équation de départ.

Finalement, l'ensemble des solutions de $D^2 f(x) + f(x) = \sin x$ est l'ensemble des fonctions

$$\{-\frac{x}{2}\cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

et que l'ensemble des solutions réelles est

$$\{-\frac{x}{2}\cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

3) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$D^2 f(x) + f(x) = \frac{1}{\cos x},\ x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[.$$

Solution. a) On commence par résoudre l'équation homogène $D^2 f + f = 0$.

L'équation caractéristique associée est $z^2 + 1 = 0$. Elle admet donc comme solutions les complexes i et $-i$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions complexes de cette équation est

$$\{c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\} = \{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

et que l'ensemble des solutions réelles est

$$\{c_1 \cos x + c_2 \sin x : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

b) Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière. Pour tout $x \in] - \pi/2, \pi/2[$, résolvons le système

$$\left\{\begin{array}{l} C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = 0 \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{array}\right.$$

Si $x \neq 0$, en multipliant la première équation par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, puis en additionnant les deux, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} C_2(x) = 1 \\ C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = 0 \end{array}\right.$$

donc

$$C_2(x) = 1, \quad C_1(x) = -\operatorname{tg} x.$$

Pour $x = 0$, on trouve $C_1(x) = 0, C_2(x) = 1$, ce qui peut être écrit aussi sous la forme précédente.

Cela étant, une primitive de C_2 sur $\mathbb{R}$ est x, et une primitive de $C_1(x)$ sur $] - \pi/2, \pi/2[$ est $\ln(\cos x)$.

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions réelles de l'équation $D^2 f(x) + f(x) = \frac{1}{\cos x}$ définies sur $] - \pi/2, \pi/2[$ est l'ensemble des fonctions

$$\{\ln(\cos x)\ \cos x\ +\ x\ \sin x\ +\ c_1 \cos x + c_2 \sin x\ :\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

4) Reprenons l'exemple de l'oscillateur entretenu c'est-a-dire de l'équation

$$D^2 f(t) + \frac{\gamma}{m} Df(t) + \frac{k}{m} f(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t).$$

Recherchons une solution particulière de cette équation. Cette équation est une équation à coefficients réels et le second membre

$$g(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

est la partie réelle de

$$G(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_0 t}.$$

Si $\gamma \neq 0$, la partie réelle des zéros du polynôme caractéristique est non nulle ; $i\omega_0$ n'est donc pas zéro du polynôme caractéristique. Si $\gamma = 0$, on a $\Delta = -4k/m < 0$; les zéros du polynôme caractéristique sont $i\omega$ et $-i\omega$ (où $\omega = \sqrt{k/m}$). Dès lors, plusieurs cas se présentent.

– Cas $\gamma \neq 0$.
Cherchons une solution particulière F de l'équation

$$D^2F(t)+\frac{\gamma}{m}DF(t)+\frac{k}{m}F(t)=G(t)$$

sous la forme

$$F(t)=ce^{i\omega_0 t}$$

où c est une constante à déterminer.
On a

$$DF(t)=ci\omega_0 e^{i\omega_0 t},\quad D^2F(t)=-c\omega_0^2e^{i\omega_0 t}$$

donc

$$D^2F(t)+\frac{\gamma}{m}DF(t)+\frac{k}{m}F(t)=e^{i\omega_0 t}(-c\omega_0^2+ci\omega_0\frac{\gamma}{m}+c\omega^2).$$

Dès lors $D^2F(t)+\frac{\gamma}{m}DF(t)+\frac{k}{m}F(t)=G(t)$ si et seulement si

$$\frac{F_0}{m}=-c\omega_0^2+ci\omega_0\frac{\gamma}{m}+c\omega^2=c(\omega^2-\omega_0^2+i\omega_0\frac{\gamma}{m})$$

donc si et seulement si

$$c=\frac{F_0}{m}\;\frac{\omega^2-\omega_0^2-i\omega_0\frac{\gamma}{m}}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega_0^2\frac{\gamma^2}{m^2}}.$$

La fonction

$$f(t)=\mathcal{R}(F(t))=\mathcal{R}(ce^{i\omega_0 t})=\mathcal{R}c\;\cos(\omega_0 t)\;-\;\mathcal{I}c\;\sin(\omega_0 t)$$

est donc une solution particulière du problème de départ.

– Cas $\gamma=0$. Deux cas se présentent.
<u>1er cas</u> : $\omega=\omega_0$.
Cherchons une solution particulière F de l'équation

$$D^2F(t)+\frac{k}{m}F(t)=G(t)$$

sous la forme

$$F(t)=cte^{i\omega_0 t}=cte^{i\omega t}$$

où c est une constante à déterminer.
On a

$$D^2F(t)=-ct\omega^2e^{i\omega t}+2ci\omega e^{i\omega t}$$

donc

$$D^2F(t)+\frac{k}{m}F(t)=e^{i\omega t}(-ct\omega^2+2ci\omega+\omega^2ct)=2ci\omega e^{i\omega t}.$$

Dès lors on a

$$D^2F(t)+\frac{k}{m}F(t)=G(t)$$

si et seulement si

$$2ci\omega=\frac{F_0}{m}$$

donc si et seulement si

$$c=-i\frac{F_0}{2m\omega}.$$

La fonction

$$f(t)=\mathcal{R}(F(t))=\mathcal{R}(cte^{i\omega t})=\frac{F_0}{2m\omega}t\sin(\omega t)$$

est donc une solution particulière de l'équation de départ.
<u>2ème cas</u> : $\omega\neq\omega_0$.
Cherchons une solution particulière F de l'équation

$$D^2F(t)+\frac{k}{m}F(t)=G(t)$$

sous la forme

$$F(t)=ce^{i\omega_0 t}$$

où c est une constante à déterminer.
On a

$$D^2F(t)=-c\omega_0^2e^{i\omega_0 t}$$

donc

$$D^2F(t)+\frac{k}{m}F(t)=e^{i\omega_0 t}(-c\omega_0^2+\frac{k}{m}c)=e^{i\omega_0 t}c(-\omega_0^2+\omega^2).$$

Dès lors on a

$$D^2F(t)+\frac{k}{m}F(t)=G(t)$$

si et seulement si

$$c = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

La fonction

$$f(t) = \mathcal{R}(F(t)) = \mathcal{R}(ce^{i\omega_0 t}) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\cos(\omega_0 t)$$

est donc une solution particulière de l'équation de départ.

Signalons que l'on voit apparaître ici (c'est-à-dire dans l'exemple de l'oscillateur entretenu) des phénomènes de résonance.

Par exemple, lorsque $\gamma = 0$ (c'est-à-dire quand on ne tient pas compte de l'amortissement de l'oscillateur) et $\omega = \omega_0$, la solution la plus générale de l'équation est

$$f(t) = \frac{F_0}{2m\omega}t\sin(\omega t) + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t).$$

Lorsque t est grand, f se comporte donc comme

$$f_A(t) = \frac{F_0}{2m\omega}t\sin(\omega t);$$

ainsi, l'amplitude du mouvement, à savoir la fonction $\frac{F_0}{2m\omega}t$ croît proportionnellement au temps. C'est ce qu'on appelle un phénomène de résonance.

Lorsque $\gamma \neq 0$, un phénomène de résonance apparaît également lorsque l'amortissement est relativement faible (γ petit devant ω). Après un certain temps (après lequel la solution de l'équation homogène devient négligeable par rapport à la solution particulière), on obtient un maximum de l'amplitude du mouvement pour une donnée extérieure $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2/2m^2}$.

De plus amples détails et explications peuvent être trouvés notamment dans le livre “Mécanique rationnelle 1, R. Simon, ULg, Editions Derouaux”.

5.3 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Il s'agit d'équations du type

$$a_pD^pf(x) + a_{p-1}D^{p-1}f(x) + \ldots + a_1Df(x) + a_0f(x) = g(x)$$

où p est un naturel strictement positif, g est une fonction donnée, continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, où les a_j $(j = 0, \ldots, p)$ sont des constantes complexes avec $a_p \neq 0$ et où f est l'inconnue (fonction p fois continûment dérivable sur I).

C'est la généralisation naturelle des équations d'ordre 1 et 2 que nous avons traitées dans la section précédente. Ici encore, on caractérise complètement l'ensemble des solutions.

Ici aussi, les solutions s'écrivent

$$f = f_0 + f_H$$

où f_0 est une solution particulière de l'équation et où f_H est la solution la plus générale de l'équation homogène (f_H dépend ici de p constantes).

On démontre encore que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est formé des combinaisons linéaires de fonctions exponentielle-polynôme et qu'il existe toujours une solution à l'équation.

5.4 Quelques autres équations et exemples

Pour les équations qui ne sont pas linéaires à coefficients constants, les démonstrations de théorèmes d'existence et d'unicité de solutions sortent du cadre de ce cours. Signalons simplement et formellement que, localement, une équation d'ordre 1 admet des solutions qui dépendent d'un paramètre, une équation d'ordre 2 admet des solutions qui dépendent de deux paramètres, ...

Dans ce qui suit, pour alléger la présentation, nous omettons d'écrire les domaines de définition des différentes fonctions.

5.4.1 Equations à second membre séparé

1) Il s'agit d'équations différentielles qui s'écrivent

$$\boxed{D_xf = F(x)\ G(f(x))}$$

où les fonctions sont à valeurs réelles.

Méthode de résolution.

- Si $G(y_0) = 0$ alors $f(x) = y_0$ (sur l'intervalle où est défini F) est une solution.
- Si f est une solution sur I telle que $G(f(x)) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors $\frac{D_x f(x)}{G(f(x))} = F(x)$ pour $x \in I$; comme

$$\frac{D_x f(x)}{G(f(x))} \;=\; D_x \left(\left(\int \frac{1}{G(u)}\, du \right)_{u=f(x)} \right)$$

on obtient

$$\left(\int \frac{1}{G(u)}\, du \right)_{u=f(x)} \;=\; \int F(x)dx \;+\; C,\; x \in I$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Si $G_0(u) := \int \frac{1}{G(u)}\, du$ et F_0 est une primitive de F sur I, cette relation s'écrit

$$G_0(f(x)) = F_0(x),\; x \in I.$$

Si G_0 est bijectif, alors

$$f(x) = G_0^{-1}(F_0(x)),\; x \in I.$$

Réciproquement, si G_0 est une primitive de $1/G$, est bijectif, et si F_0 est une primitive de F, alors

$$f(x) = G_0^{-1}(F_0(x)),\; x \in I$$

convient.

En conclusion, on doit donc trouver f en fonction de x à partir de l'égalité

$$\boxed{\int \frac{1}{G(f)}\, df \;=\; \int F(x)dx \;+\; C,\; x \in I}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

2) Exemples

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle

$$v(x) D_x v(x) = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}.$$

Cette équation est en fait la relation que vérifie la vitesse v d'un engin spatial.

Plus précisément, v est la vitesse de l'engin évaluée comme fonction de la distance de cet engin par rapport à la surface de la Terre (distance notée x), R est le rayon de la Terre et g est la gravité à la surface de la Terre ; si on ne considère que les forces gravitationnelles (et pas le frottement de l'air), la vitesse de l'engin vérifie l'équation ci-dessus.

i) Pour résoudre cette équation, on doit exprimer v en fonction de x à partir de

$$\int v dv \;=\; -\int \frac{gR^2}{(R+x)^2}\, dx + \; C.$$

On a

$$(v(x))^2 \;=\; \frac{2gR^2}{x+R} + C$$

où C est une constante réelle arbitraire. On obtient alors v en fonction de x en prenant la racine carrée du second membre ou son opposé.

ii) Considérons maintenant le cas où la vitesse de l'engin est initialement de $12 kms$ par seconde ($43.200 kms/h$), "initialement" signifiant "à la surface de la Terre". Dans ce cas on obtient

$$12^2 = 2gR + C$$

donc $C = 144 - 2gR$ et finalement, si on considère la vitesse positive,

$$v(x) = \sqrt{\frac{2gR^2}{x+R} + 144 - 2gR} = \sqrt{144 - \frac{2gRx}{R+x}}.$$

On constate donc que

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = \sqrt{144 - 2gR}$$

ce qui donne, en tenant compte des valeurs de g et de R ($g \simeq 9,8\ 10^{-3} kms/s^2,\ R \simeq 6,37\ 10^3 kms$),

$$\lim_{x\to+\infty} v(x) \simeq 4.4\ (kms/s).$$

Exemple 2. Reprenons l'équation introduite au début du chapitre, à propos du gel. L'inconnue $z(t)$ vérifie l'équation

$$D_t z = -\frac{K}{L}\ \frac{\theta}{z}.$$

Supposons que θ soit une fonction de t (la température extérieure à l'eau évolue). Il s'agit d'une équation à second membre séparé. Pour la résoudre, on doit trouver z en fonction de t à partir de

$$\int z\ dz \ = \ -\frac{K}{L}\int \theta(t)\ dt \ + \ C.$$

On a

$$z^2 = -2\frac{K}{L}\int \theta(t)\ dt \ + \ 2C$$

et on extrait z à partir de là, une fois θ et C connus (la fonction θ est donnée par le problème, c'est-à-dire θ est l'expression de la variation de la température extérieure ; C est donné par la condition initiale).

5.4.2 Equations homogènes

1) Il s'agit d'équations différentielles qui s'écrivent

$$\boxed{D_x f = F(\tfrac{f(x)}{x})}$$

Méthode de résolution.
- Si $F(y) = y$ (donc $F(f/x) = f/x$) alors on est dans le cas d'une équation à second membre séparé.
- En toute généralité, on introduit la fonction auxiliaire $h(x) = f(x)/x$. L'équation devient alors

$$D_x h(x) = \frac{F(h) - h}{x}$$

qui est une équation à second membre séparé.

2) Par exemple, résolvons l'équation

$$Df(x) = \frac{x + f(x)}{x}.$$

C'est une équation homogène car elle s'écrit $Df(x) = F(f/x)$ avec $F(y) = 1 + y$.

Posons $h(x) = f(x)/x$ et résolvons l'équation

$$D_x h(x) = \frac{F(h) - h}{x} = \frac{1}{x}.$$

On a directement

$$h(x) = \ln(|x|) + C$$

donc $f(x) = x(\ln(|x|)\ +\ C)$.

5.4.3 Equations linéaires du premier ordre

1) Il s'agit d'équations différentielles qui s'écrivent

$$\boxed{D_x f + b(x) f(x) = g(x)}$$

où b et g sont des fonctions données et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Ce cas est la généralisation des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 rencontré auparavant et se traite de manière analogue ; en particulier, la solution générale est la somme entre une solution particulière et la solution générale de l'équation homogène.

Méthode de résolution.
On démontre directement (cf le cas des équations à coefficients constants) que la solution générale de l'équation ci-dessus est

$$f(x) = e^{-B(x)} \left(\int g(x) e^{B(x)}\, dx \; + \; C \right)$$

où $B(x)$ est une primitive de $b(x)$ sur I et où C est une constante arbitraire.

2) Par exemple, résolvons l'équation

$$xDf(x) + f(x) = x^3.$$

Sur $]0,+\infty[$ (ou sur $]-\infty,0[$), cette équation s'écrit

$$Df(x) + \frac{1}{x} f(x) = x^2$$

donc la solution générale est

$$f(x) = e^{-\ln(|x|)} \left(\int x^2 e^{\ln(|x|)}\, dx \; + \; C \right).$$

En effectuant les calculs on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|x|} \left(\int x^2 |x|\, dx \; + \; C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\int x^3\, dx \; + \; C' \right) \\ &= \frac{x^3}{4} + \frac{C'}{x} \end{aligned}$$

où C est une constante arbitraire.

5.4.4 Equations d'Euler d'ordre 2

Il s'agit d'équations différentielles qui s'écrivent

$$\boxed{x^2 D_x^2 f + bxD_x f + cf(x) = g(x)}$$

où b, c sont des constantes, g est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I =]r,R[$ de $\mathbb{R}$, avec $R > r > 0$.

Méthode de résolution. En fait, cette méthode consiste à se ramener à une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2
Si f est solution de cette équation alors, pour tout $y \in I'$ avec $I' =]a', b'[\,,\ a' = \lim_{y\to r} \ln y$, $b' = \lim_{y \to R} \ln y$, on a

$$e^{2y}(D^2 f)_{x=e^y} + be^y (Df)_{x=e^y} + cf(e^y) = g(e^y).$$

Définissons $F(y) = f(e^y),\ y \in I'$. On a alors

$$D_y F(y) = e^y (D_x f)_{x=e^y}, \qquad D^2 F(y) = e^{2y}(D_x^2 f)_{x=e^y} + e^y (D_x f)_{x=e^y}$$

donc F est solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 suivante

$$D^2F(y) + (b-1)DF(y) + cF(y) = G(y)$$

où $G(y) = g(e^y)$.
Réciproquement, si F est solution de l'équation précédente sur I' alors $f(x) = F(\ln x)$ est solution de l'équation sur I.

5.4.5 Quelques autres exemples

Exemple 1 Un câble (inflexible) est attaché en deux points A, B et est soumis à la seule force de gravité. On montre que la courbe qu'il forme est le graphique de f où f est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$D^2f(x) = c\sqrt{1 + (Df(x))^2}$$

où c est une constante strictement positive qui dépend de la masse du câble et de la tension en A, B. Représenter la courbe formée par le câble.

Résolution complète de ce problème.
Si $f(x), x \in I$ est une solution du problème, alors $F(x) = Df(x), x \in I$ est solution de l'équation du premier ordre

$$DF(x) = c\sqrt{1 + F(x)^2}.$$

On a donc

$$c = \frac{DF(x)}{\sqrt{1 + F(x)^2}},\ x \in I.$$

La primitivation du second membre par substitution $x' = F(x)$ conduit à déterminer

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + 1}}.$$

Après quelques calculs, on obtient qu'il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que

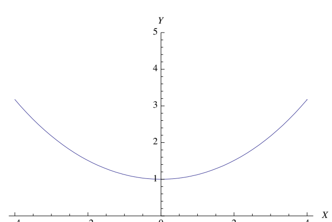
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(cx + c_1)\ -\ \exp(-cx - c_1)\right),\ x \in I$$

Dès lors il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = c_2 + \frac{1}{2c}\left(\exp(cx + c_1)\ +\ \exp(-cx - c_1)\right),\ x \in I.$$

Réciproquement, pour tous $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = c_2 + \frac{1}{2c}\left(\exp(cx + c_1)\ +\ \exp(-cx - c_1)\right),\ x \in \mathbb{R}$ est solution du problème.

Ces fonctions sont appelées "chaînettes" ;



Exemple 2 Dans certaines conditions, par application de la loi de Kirchhoff en électricité, on a

$$LD_tI + RI = V(t)$$

où R est la résistance, L l'inductance , V le voltage d'un circuit électrique fermé et I l'intensité du courant électrique à travers le circuit. Cette équation est une équation linéaire du premier ordre. Si on considère que L et R sont des constantes, on obtient une équation différentielle à coefficients constants qu'il est aisé de résoudre.

Exemple 3 Evolution d'une population-présence de "facteurs limitants".

Dans la nature, l'accroissement d'une population est modulée par la disponibilité des ressources alimentaires, par la prédation, par les facteurs du milieu. Tous ces éléments peuvent avoir un effet défavorable sur la croissance de la population et faire varier les taux de natalité et de mortalité. C'est ce que l'on appelle "facteurs limitants".

Un modèle largement utilisé en écologie se présente comme suit (modèle de Verhulst, 1838).

Comme présenté ci-dessus, on se place dans le cas où une présence de divers facteurs (facteurs "limitants"), traduisant la résistance du milieu, va modifier le taux d'accroissement de la population, par exemple en diminuant la natalité et en augmentant la mortalité.

Notons $N(t)$ la population au temps t, N_0 la population initiale, K son effectif maximum dans le milieu (K est encore appelé "capacité biotique du milieu") et r une constante strictement positive relative à l'espèce considérée (r est appelé "taux d'accroissement intrinsèque" [9]). Le modèle propose que le "taux de croissance" R de la population dans le cadre étudié prenne en compte la capacité biotique maximale qui est fonction des facteurs limitants du milieu. D'après ce modèle, le taux de croissance réel "R" est donné par

$$R = r\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

On constate que ce modèle rend compte du fait que lorsque N est petit, R est proche de r et que quand N est proche de K, R est proche de 0. La vitesse $D_tN(t)$ d'accroissement de la population est alors donnée par

$$\boxed{D_tN(t) = R(t)\ N(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\ N(t).}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, non linéaire, dont la "séparation" de l'inconnue N et de la variable t autorise une résolution rigoureuse (voir dans une des sections qui précède : "Equation à second membre séparé").

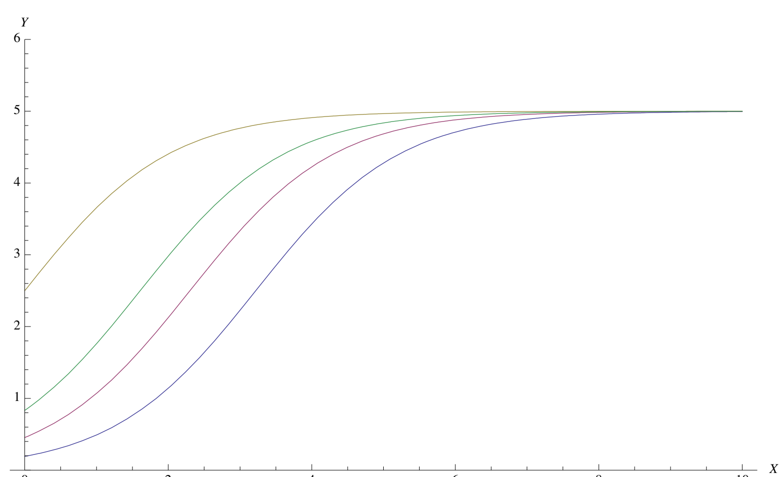
Après quelques développements, on trouve ainsi que la solution de cette équation, tenant compte de la condition initiale (la population vaut N_0 au départ, c'est-à-dire ici pour $t = 0$), est donnée par

$$N(t) = \frac{K}{1 + c_0 e^{-rt}}, \quad t \geq 0$$

avec

$$c_0 = \frac{K - N_0}{N_0}.$$

Voici plusieurs représentations de N, la diversité étant liée aux différentes valeurs considérées pour c_0.



9. il s'agit du coefficient multiplicateur de la population à chaque génération s'il n'y a aucune contrainte du milieu sur l'évolution de la densité de population

Cette équation et ses solutions sont largement exploitées dans des cours d'écologie (notamment).

Dans le cadre du cours de math, nous étudierons ces fonctions N selon plusieurs aspects mathématiques, qui ont leur "traduction" spécifique pour la biologie ; les limites, croissance, concavité, extrema, etc, seront discutés, notamment en fonction de la valeur de c_0 (donc des données du mileu).

Résolution.

Comme cette équation est à second membre séparé, les solutions N peuvent être obtenues en procédant comme suit. On a

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{DN(s)}{N(s)\ \left(1-\frac{N(s)}{K}\right)}ds &= \int_0^t \left(\frac{DN(s)}{N(s)} + \frac{1/K}{1-\frac{N(s)}{K}}DN(s)\right)\ ds\\ &= \ln N(t) - \ln\left(1-\frac{N(t)}{K}\right) - C_0 = \ln\left(\frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}\right) - C_0\end{aligned}$$

avec

$$C_0 = \ln\left(\frac{N_0}{1-\frac{N_0}{K}}\right).$$

Il s'ensuit que N est donné par la relation

$$\ln\left(\frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}}\right) = C_0 + \int_0^t r\ ds = C_0 + rt$$

ou encore par

$$\frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{K}} = \frac{N_0}{1-\frac{N_0}{K}}e^{rt}, \quad t \geq 0$$

On en déduit l'expression explicite de N suivante, avec $c_0 = \frac{K-N_0}{N_0}$

$$N(t) = \frac{K}{1+c_0e^{-rt}},\ t \geq 0$$

Discussion.

La dérivée de N est la "vitesse d'accroissement de l'effectif". On a

$$\begin{aligned}DN(t) &= r\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)\ N(t) = r\left(N(t) - \frac{N^2(t)}{K}\right)\\ D^2N(t) &= r\left(1-\frac{2N(t)}{K}\right)\ DN(t) = r^2N\left(1-\frac{2N(t)}{K}\right)\ \left(1-\frac{N(t)}{K}\right)\end{aligned}$$

et comme $0 < N(t) < K$ quel que soit t, cette expression ne peut s'annuler que lorsque $2N(t) = K$ c'est-à-dire lorsque

$$t = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right).$$

Cette valeur est positive si et seulement si $K \geq 2N_0$. Notons-la t_0. Comme $1 - \frac{2N(t)}{K} < 0$ lorsque $t < t_0$ et $1 - \frac{2N(t)}{K} > 0$ lorsque $t > t_0$, on a bien un temps t_0 auquel la vitesse d'accroissement de l'effectif est maximale, pour autant que $K \geq 2N_0$. Lorsque $K < 2N_0$, D^2N est toujours strictement négatif pour des temps positifs, donc la vitesse d'accroissement DN est strictement décroissante.