Statistique descriptive

Année académique 2020–2021

Carole.Baum@uliege.be

Chapitre 1 : Notions de base

Exercice 1. Trouver des variables (au moins 3) susceptibles de caractériser les concepts suivants :

(a) la santé économique d'une PME.

(b) la performance d'un ouvrier.

(c) la gestion du travail d'un étudiant.

Préciser pour chacune des variables trouvées son type (qualitatif ou quantitatif) ainsi que ses modalités.

Solution :

(a) Le chiffre d'affaires (quanti. continue), le nombre d'employés (quanti. discrète), le bénéfice net (quanti. continue), le taux de marchandises exportées (quanti. continue), ...

(b) Le nombre d'heures supplémentaires (quanti. discrète), le nombre de jours de congé maladie (quanti. discrète), le salaire (quanti. continue),...

(c) Le nombre de pauses (quanti. discrète), le nombre de jours de bloque (quanti. discrète), le temps de travail par jour (quanti. continue), le lieu de travail (quali. nominale),...

Exercice 2. Le tableau 1 donne quelques informations numériques sur la population belge au 1er janvier 2017. Les nombres d'hommes, de femmes et de personnes de 65 ans et plus sont indiqués pour les trois régions (Wallonie, Flandre et Bruxelles).

Table 1 – Quelques données démographiques *(Source : Statistics Belgium,* `bestat.statbel.fgov.be`*)*

Régions	Hommes	Femmes	65 ans et plus
Wallonie	1764335	1850138	651573
Flandre	3221295	3294716	1287035
Bruxelles	582375	609229	156489

(a) Quelle est la région enregistrant le plus haut taux de féminité ?

(b) Laquelle des trois régions a le plus haut taux de personnes âgées de 65 ans et plus par 1.000 habitants ?

Solution :

(a) Calculons le taux de féminité pour les trois régions.

Pour la Wallonie : $\dfrac{1850138}{1850138 + 1764335} = 0.5119$. Le taux de féminité en Wallonie est donc de 51,2%.

Pour la Flandre : $\dfrac{3294716}{3294716 + 3221295} = 0.5056$. Le taux de féminité en Flandre est donc de 50,6%.

Pour Bruxelles : $\dfrac{609229}{609229 + 582375} = 0.5113$. Le taux de féminité à Bruxelles est donc de 51,1%.

Le taux de féminité est donc plus élevé en Wallonie.

(b) Calculons le taux de personnes âgées de 65 ans et plus par 1.000 habitants pour les trois régions.

Pour la Wallonie : $\dfrac{651573}{1850138 + 1764335} \cdot 1000 = 180.27$ ‰habitants.

Pour la Flandre : $\dfrac{1287035}{3294716 + 3221295} \cdot 1000 = 197.52$ ‰habitants.

Pour Bruxelles : $\dfrac{156489}{609229 + 582375} \cdot 1000 = 131.33$ ‰habitants.

La région ayant le plus haut taux de personnes âgées de 65 ans et plus par 1.000 habitants est la Flandre.

Exercice 3. Le tableau 2 donne les nombres d'habitants des trois régions (Wallonie, Flandre et Bruxelles) au premier janvier 2007.

TABLE 2 – Quelques données démographiques *(Source : Statistics Belgium,* `bestat.statbel.fgov.be`*)*

Régions	Nombres d'habitants
Wallonie	3435879
Flandre	6117440
Bruxelles	1031215

(a) Déterminer les pourcentages de variation des nombres d'habitants des trois régions entre le premier janvier 2007 et le premier janvier 2017 (données du Tableau 1).

(b) Chaque région dispose de son gouvernement. En 2007, les gouvernements wallon et flamand étaient chacun constitués de 9 ministres, tandis que le gouvernement de la Région Bruxelles-Capitale n'en comportait que 5. Puisque la taille de la population varie d'une région à l'autre, il est difficile de comparer les nombres de ministres. Calculer dès lors un "taux de ministres" dans chaque région afin d'établir une base commune de comparaison.

Solution :

(a) Le pourcentage de variation est donné par la formule

$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \cdot 100$$

Pour la Wallonie : $\dfrac{(1764335 + 1850138) - 3435879}{3435879} \cdot 100 = 5.20\%$

Pour la Flandre : $\dfrac{(3221295 + 3294716) - 6117440}{6117440} \cdot 100 = 6.52\%$

Pour Bruxelles : $\dfrac{(582375 + 609229) - 1031215}{1031215} \cdot 100 = 15.55\%$

(b) Le taux de ministres pour chaque région est donné par :

Pour la Wallonie : $\dfrac{9}{3435879} = 2.62 \cdot 10^{-6}$

Pour la Flandre : $\dfrac{9}{6117440} = 1.47 \cdot 10^{-6}$

Pour Bruxelles : $\dfrac{5}{1031215} = 4.85 \cdot 10^{-6}$

C'est donc la région de Bruxelles qui a le plus grand taux de ministres.

Exercice 4. (a) Soit une population P de n individus divisée en deux sous-populations P_1 et P_2 d'effectifs n_1 et n_2 avec $n_1 + n_2 = n$. Si le pourcentage d'individus de P_1 vérifiant une caractéristique donnée est $p_1\%$ tandis que le pourcentage d'individus de P_2 possédant la même caractéristique est $p_2\%$, quel est le pourcentage d'individus de la population totale P ayant la même caractéristique ?

(b) Le tableau 3 contient une partie des résultats d'un sondage sur la monarchie réalisé par le quotidien Le Soir en septembre 2017. Sachant que le sondage est basé sur les réponses de 1000 Belges, déterminer approximativement le nombre de Flamands, de Wallons et de Bruxellois interrogés pour ce sondage.

TABLE 3 – La monarchie en Belgique doit être ramenée à un rôle purement protocolaire, sans la moindre forme de pouvoir ?

	Flamands	Wallons	Bruxellois	Royaume
D'accord	$61,3\%$	$34,5\%$	39%	50,6%
Pas d'accord	$29,8\%$	$54,5\%$	$54,9\%$	40,2%
Sans avis	$8,9\%$	11%	$6,1\%$	9,2%

(c) Cette répartition vous semble-t-elle judicieuse ?

Solution :

(a) Nombre d'individus de P_1 respectant la caractéristique : $\dfrac{n_1 p_1}{100}$.

Nombre d'individus de P_2 respectant la caractéristique : $\dfrac{n_2 p_2}{100}$.

Nombre total d'individus respectant la caractéristique : $\dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{100}$.

Proportion d'individus respectant la caractéristique : $\dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n \cdot 100}$.

Pourcentage d'individus respectant la caractéristique : $\dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n}\% = p\%$.

(b) Reprenons les notations du point précédent et notons n_1 le nombre de Flamands, n_2 le nombre de Wallons et n_3 le nombre de Bruxellois. On sait que pour la caractéristique "D'accord", on a

$$p_1 = 61.3 \qquad p_2 = 34.5 \qquad p_3 = 39 \quad \text{et} \quad p = 50.6$$

De plus, pour la caractéristique "Pas d'accord",

$$p_1' = 29.8 \qquad p_2' = 54.5 \qquad p_3' = 54.9 \quad \text{et} \quad p' = 40.2$$

Nous savons aussi que $n_1 + n_2 + n_3 = 1000$.

Finalement, si nous adaptons la formule obtenue au point précédent au cas de 3 sous-populations, nous obtenons $n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 = n \cdot p$.

Il est maintenant possible de créer un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccc} n_1 + n_2 + n_3 & = & 1000 \\ n_1 \cdot 61.3 + n_2 \cdot 34.5 + n_3 \cdot 39 & = & 1000 \cdot 50.6 \\ n_1 \cdot 29.8 + n_2 \cdot 54.5 + n_3 \cdot 54.9 & = & 1000 \cdot 40.2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} n_1 & = & 580.86 \\ n_2 & = & 300.73 \\ n_3 & = & 118.41 \end{array}\right.$$

Il y a donc 581 Flamands, 301 Wallons et 118 Bruxellois interrogés pour le sondage.

(c) Oui, car il y a environ 30 % de Wallons, 60 % de Flamands et 10 % de Bruxellois en Belgique et c'est environ la même répartition parmi les personnes interrogées.

Table 4 – Habitudes tabagiques de 1690 personnes

	Hommes	Femmes	Total
Fumeur	46%	61%	52%
Non fumeur	54%	39%	48%

Exercice 5. Lors d'un sondage, 1690 personnes ont été interrogées sur leurs habitudes tabagiques. On a obtenu les résultats du tableau 4. Quelle est le nombre de femmes interrogées lors de ce sondage ?

Solution :

En notant n_H le nombre d'hommes et n_F le nombre de femmes, nous savons, par l'exercice 4 que

$$\frac{46n_H + 61n_F}{1690} = 52 \tag{1}$$

Nous savons aussi que $n_H + n_F = 1690$, ainsi $n_H = 1690 - n_F$. En remplaçant la valeur de n_H dans l'équation (1), nous avons

$$\begin{aligned} 46(1960 - n_F) + 61n_F &= 52 \cdot 1690 \\ \Leftrightarrow n_F &= \frac{52 \cdot 1690 - 46 \cdot 1690}{61 - 46} = 676 \text{ femmes.} \end{aligned}$$

Il y a donc aussi $n_H = 1690 - 676 = 1014$ hommes.

Exercice 6. Le tableau 5 donne le nombre d'employés de sexe féminin et masculin d'une firme pour les années 2010 et 2015 :

Table 5 – Nombre d'employés de sexe féminin et masculin d'une firme pour les années 2010 et 2015

	Année	
Sexe	2010	2015
M	45	59
F	55	x

(a) Calculer le pourcentage de variation entre 2010 et 2015 du nombre d'employés masculins.

(b) Sachant que le nombre de femmes employées par cette firme a diminué de 15% entre 2010 et 2015, déterminer le nombre total d'employés de la firme en 2015.

Solution :

(a) Le pourcentage de variation entre 2010 et 2015 du nombre d'employés masculins est donné par

$$\frac{59 - 45}{45} \cdot 100\% = 31\%$$

(b) Grâce à la formule du pourcentage de variation, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{x - 55}{55} &= -15\% \\ \Leftrightarrow x - 55 &= \frac{-15 \cdot 55}{100} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-15 \cdot 55}{100} + 55 = 47 \end{aligned}$$

Il y avait 47 femmes et 106 $(55 + 47)$ employés en 2015.

Exercice 7. Dans une école, 40% des élèves ont une mauvaise vue ; 70% des élèves ayant une mauvaise vue portent des lunettes ; les 30% restant portent des lentilles de contact. Dans cette école, on compte 21 paires de lunettes. Quelle affirmation est vraie ?

(a) 45 élèves ont une mauvaise vue ;

(b) 30 élèves ont une bonne vue ;

(c) on compte 70 élèves dans l'école ;

(d) aucune des affirmations précédente n'est vraie.

Solution :

Notons N le nombre d'élèves dans l'école. Il y a donc $0.4N$ élèves ayant une mauvaise vue et $0.7 \cdot 0.4N$ élèves qui portent des lunettes.

Ainsi, $N = \dfrac{21}{0.7 \cdot 0.4} = 75$ élèves. Ce qui élimine la proposition (c).

Il y a aussi $0.4 \cdot 75 = 30$ élèves qui ont une mauvaise vue. Cela élimine donc la proposition (a).

Finalement, le nombre d'élèves ayant une bonne vue est $75 - 30 = 45$ et la proposition (b) n'est pas correcte non plus.

Il faut donc répondre la réponse (d), aucune des affirmations précédentes n'est vraie.

Exercice 8. Un bien d'une valeur de 1795 euros a subi une baisse de 12% puis une hausse de 56%. Quel est son nouveau prix ? Si par contre, ce bien a subi une baisse de 72% puis une baisse de 59%. Quel est son nouveau prix ?

Solution :

Dans le premier cas, le prix de base du bien vaut $x_0 = 1795$€. Après une baisse de 12%, il vaudra ensuite $x_1 = (1 - 0.12) \cdot x_0 = 0.88 \cdot x_0$€. Après la hausse de 56%, le bien vaudra finalement $x_2 = (1 + 0.56) \cdot x_1 = 1.56 \cdot 0.88 \cdot x_0 = 2464.2$€.

Dans le deuxième cas, le prix final du bien sera de $x_2' = 0.28 \cdot 0.41 \cdot 1795 = 206.1$€.

Exercice 9. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Si le prix d'un article augmente de 5%, le prix de trois articles augmente de 15% ;

(b) Un pourcentage est toujours inférieur à 100 ;

(c) Avant les soldes, une robe coûtait 110 euros. Pendant les soldes, elle coûte 100 euros. La réduction est donc de 10% ;

(d) Si une grandeur est multipliée par 3 alors elle augmente de 300% ;

(e) En France en 1954, les agriculteurs représentaient $34,8\%$ de la population active, 20 ans après, ils représentent $17,9\%$ de la population active. Le nombre d'agriculteurs a donc été divisé par 2.

(f) Un bien qui subit une baisse de 62% puis une hausse de 62% ne change pas de prix.

Solution :

(a) **FAUX :** Le prix de 3 articles augmentera aussi de 5%.

(b) **FAUX :** Il est possible d'avoir un pourcentage de 200% par exemple.

(c) **FAUX :** $\dfrac{100 - 110}{110} \cdot 100\% = -9.09\%$.

(d) **FAUX :** La grandeur doit augmenter de 200% pour être multipliée par 3 car $3x_0 = x_0 + 200\% x_0$.

(e) **FAUX :** $\dfrac{17.9 - 34.8}{34.8} \cdot 100\% = -48.56\%$. Ce nombre n'a pas exactement été divisé par 2.

(f) **FAUX :** On a $x_1 = 1.62 \cdot 0.38 \cdot x_0 = 0.62 x_0$. Le bien connait donc une baisse de 38%.