Chapitre 1

Série d'exercices n°1 - Théorie chapitre I

1.1 Rappels mathématiques

— Si une variable aléatoire X définie sur un espace de valeurs discrètes $\{x_1, ..., x_N\}$ suit une distribution de probabilité dite "uniforme", alors on peut calculer la probabilité que cette variable prenne n'importe laquelle de ces valeurs comme $P(X = x_i) = \frac{1}{N}$ où i est l'indice désignant la valeur considérée (quelconque), et N est le nombre total de valeurs accessibles.

— Si deux variables aléatoires X et Y suivent des distributions de probabilité dites "indépendantes", on peut immédiatement en déduire que la probabilité d'obtenir un résultat combinant une valeur de la première variable aléatoire et une valeur de la seconde, i.e. $P(X = x_i \,\&\, Y = y_i)$, aussi notée $\mathbb{P}(A \cap B)$, est telle que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire que la probabilité de l'évènement combinant les deux résultats est égale au produit des probabilités des évènements individuels.

Par exemple, si l'on considère une pièce de monnaie parfaitement équilibée, on a pour un unique lancé $P(pile) = P(face) = \frac{1}{2}$, puisque cette pièce idéale suit une distribution de probabilité uniforme et qu'il existe deux résultats possibles. En considérant maintenant deux lancés successifs, on a que puisque deux lancers sont indépendants, $P(2 * faces) = P(face) \cdot P(face) = \frac{1}{4}$.

Par définition de la fonction logarithme, on a les propriétés mathématiques utiles suivantes :

— Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des termes du produit : $log_a A.B = log_a A + log_a B$.

— Le logarithme d'une quantité A élevée à une puissance n est égale au produit de cette puissance n et du logarithme de la quantité A : $log_a A^n = n \cdot log_a A$

— Le calcul d'un logarithme dans une base a est identique au quotient du même logarithme dans une base b et du logarithme en base b de la base a : $log_a A = \frac{log_b A}{log_b a}$. Dès lors, si vous ne disposez pas de la touche log_2 sur votre calculatrice, vous pouvez calculer n'importe quel $log_2 A$ comme par exemple $\frac{lnA}{ln2}$ ou $\frac{log_{10}A}{log_{10}2}$.

1.2 Mode d'emploi

- **Identifier les variables :**
  Où se trouve l'information ? Quels sont les signaux qui la transmettent, ou les supports physiques qui la contiennent ? Est-ce qu'on a un signal fait de plusieurs symboles, plusieurs signaux, des signaux de structures différentes qu'on assemblera finalement comme un seul bloc de données ? (Dans le cadre de ce cours, on ira jamais plus loin que ces cas idéaux, sauf éventuellement si l'on précise explicitement la valeur des probabilités discrètes pour chaque réalisation distincte)

- **Lister les hypothèses :**
  Est-ce qu'on peut supposer que les variables aléatoires identifiées suivent des distributions de probabilités uniformes ? Est-ce que les tirages successifs d'une ou plusieurs variables sont indépendants ?

- **Identifier les valeurs accessibles :**
  Quelles sont les valeurs accessibles pour l'information ? Est-ce qu'on est dans un simple cas binaire 0/1, ou est-ce qu'on doit définir N niveaux d'une grandeur électrique (e.g. tension) caractérisée par une plage (e.g. [0-2V]) et un niveau de bruit (e.g. 0.03 mV) ?

- **Quantifier l'information :**
  Une fois qu'on a complété les étapes précédentes, on peut appliquer les formules des logarithmes et des opérations de base (addition, multiplication) pour quantifier les quantités d'informations qu'on nous demande.

- **Critiquer le résultat :**
  Est-ce que le résultat a du sens, selon le contexte ? Est-ce qu'on est arrivé à un ordre de grandeur qui semble réaliste ? e.g. un DVD qui contient 2^{10*5} bits (Peta) ou 2^{10*1} bits (kilo), ça n'a pas l'air très logique. Peut-on faire des opérations de base pour vérifier la cohérence de ce résultat ? Reprendre l'exercice d'une seconde manière ?

1.3 Correctifs des exercices

1.3.1 Exercice supplémentaire 7

Énoncé : Quelle quantité d'information un disque dur vendu comme possédant une capacité de 1 TB permet-il de mémoriser ?

Solution :

En informatique, on utilise les unités de "bits" et de "bytes" pour indiquer des quantités d'information. Un bit correspond à une cellule élémentaire d'un encodage binaire pouvant prendre pour valeur 0 ou 1 ; un byte correspond à un ensemble de 8 bits. Le byte est une unité très utilisée en pratique pour la simple raison que la quasi totalité des architectures informatiques contemporaines sont implémentées avec pour support des canaux de communication, des noyaux de calculs, etc, qui manipulent des blocs de 8 bits à la fois. Dès lors, on a immédiatement que 1 byte = 8 bits. On note un bit par la minuscule "b", et un byte par la majuscule "B", tel que 1B = 8b.

Si les préfixes scientifiques du système international d'unités sont définis comme correspondant à des puissances de 10 tel que par exemple $M = 10^6, k = 10^3, m = 10^{-3}, \mu = 10^{-6}$, on préfère en informatique interpréter ces préfixes, quand ils sont associés à des quantités d'informations, comme des puissances de 2. Ceci est dû à la réalité physique : puisqu'on travaille avec des bits dans une base numérique 2 plutôt qu'avec des chiffres décimaux dans une base numérique 10, on va bien manipuler des grandeurs qui sont des puissances de 2 plutot que des puissances de 10. On va donc interpéter $1Mb$ comme un "mégabit", et cette quantité sera égale à $2^{10*2} = 2^{20} = 1.048.576$ bits. Comparativement, un "mégahertz" (par exemple) est noté $1MHz$ et sera égal à $10^{3*2} = 10^6 = 1.000.000$ hertz. On remarque que la différence entre les deux conventions consiste à choisir une puissance de base 2^{10} ou 10^3 ; ceci fait, les deux conventions sont en tous points similaires en ceci que le préfixe k indique d'élever cette base à la puissance 1, le suffixe M à la puissance 2 comme calculé précédement, etc.

Dès lors, formellement, une quantité en informatique désignée comme 1 TB doit correspondre à $2^{10*4} \approx 1,09 \cdot 10^{12}$ Bytes. Malheureusement, les vendeurs de matériel informatique peuvent jouer de la différence de convention présentée ci-dessus à leur avantage en misant sur l'ambiguité des informations qu'ils fournissent à l'achat. En effet, ils peuvent indiquer qu'un disque dur peut contenir 1 TB en suivant la convention des préfixes scientifiques en base 10, tel qu'il pourra donc contenir 10^{12} B. Cependant, à l'utilisation dans un vrai système informatique qui manipule bien des $TB = 2^{10*4}$ B, l'utilisateur découvrira que son disque n'est affiché comme capable de contenir que $\frac{10^{3*4}}{2^{10*4}} \approx 0.91$ TB.

Puisque l'énoncé de cet exercice mentionne spécifiquement que le disque dur est "vendu comme possédant" une capacité donnée, on peut supposer que le vendeur aura employé cette méthode commerciale, et que le disque vendu comme possédant 1 TB ne pourra en réalité en contenir que 0.91 TB comme développé ci-dessus.

1.3.2 Exercice supplémentaire 1

Énoncé : Le clavier d'un téléphone emploie des signaux discrets pour transmettre les chiffres de 0 à 9.

1. Quelle quantité d'information est-elle véhiculée par un signal représentant un chiffre, si chacun d'entre eux possède la même probabilité d'être transmis ?
2. Les chiffres qui composent un numéro de téléphone sont transmis successivement. Si l'on sait qu'un numéro de téléphone ne peut jamais commencer par le chiffre 0 et qu'il comporte exactement 4 chiffres, quelle est la quantité totale d'information fournie par un numéro ?
3. Si un numéro de téléphone était au contraire transmis par un seul signal, représentant les numéros complets par des valeurs équiprobables, quelle serait la quantité d'information fournie par un numéro ?

Solution :

(1) On commence par identifier les variables et les hypothèses de travail. On considère un signal constitué d'un unique chiffre d'un clavier de téléphone ; on a donc un signal X qui peut prendre n'importe quelle valeur parmi $\{0, ..., 9\}$. L'espace des valeurs accessibles à ce signal comporte 10 éléments.

On nous indique que chaque chiffre a la même probabilité d'être transmis. Ceci correspond à une distribution de probabilité uniforme, et on a donc que pour n'importe quelle valeur $x_i = \{0, ..., 9\}$, $P(X = x_i) = \frac{1}{N}$ où i est l'indice désignant la valeur considérée (quelconque), et N est le nombre total de valeurs accessibles. Dans notre cas, on a 10 valeur accessibles, et donc $P(X = x_i) = \frac{1}{10}$ pour chacun des chiffres du clavier.

Par définition de la mesure de quantité d'information choisie au cours, on calcule la quantité d'information Q comme $Q = log_2(\frac{1}{P(X=x_i)})$. On a donc $Q = log_2(\frac{1}{1/10}) = log_2(10) \approx 3,32$ bits $= 0,415$ Bytes.

Cette quantité indique entre autres le nombre de bits nécessaires pour encoder le signal en fonction de toutes les valeurs qu'il peut prendre. On peut illustrer directement le problème comme suit, en construisant un tableau des combinaisons distinctes de valeurs qu'on peut assembler avec 4 bits :

Valeurs possible d'un encodage à 4 bits	Chiffre du clavier associé
0000	encode le chiffre 0
0001	encode le chiffre 1
0010	encode le chiffre 2
0011	encode le chiffre 3
0100	encode le chiffre 4
0101	encode le chiffre 5
0110	encode le chiffre 6
0111	encode le chiffre 7
1000	encode le chiffre 8
1001	encode le chiffre 9
1010	(pas nécessaire)
1011	(pas nécessaire)
1100	(pas nécessaire)
1101	(pas nécessaire)
1110	(pas nécessaire)
1111	(pas nécessaire)

On voit dans ce tableau que pour encoder les 10 chiffres du clavier téléphonique, on a besoin d'au moins 4 bits. Avec 3 bits seulement, on n'aurait assez de combinaisons différentes que pour encoder 8 chiffres différents.

(2) On considère maintenant une succession de 4 signaux définis comme à la première question, sauf pour un d'entre eux auxquel on interdit l'accès à la valeur $x_i = 0$. Pour cet unique signal modifié, on doit donc recalculer $P(X = x_i) = \frac{1}{9}$ en suivant le même raisonnement que ci-dessus, mais pour un ensemble de 9 valeurs accessibles. Pour les trois autres, on conserve $P(X = x_i) = \frac{1}{10}$.

Pour calculer la quantité d'information véhiculée par l'association de ces 4 signaux, on doit déterminer s'ils sont indépendants, c'est-à-dire si le fait qu'un des signaux prenne une valeur donnée influe en quoi que ce soit les chances que les autres signaux prennent leurs propres valeurs. Puisqu'on a aucune information explicite dans l'énoncé, on peut par défaut raisonnablement faire l'hypothèse de l'indépendance de chacun des signaux vis-à-vis de tous les autres. Selon cette hypothèse, la probabilité que les 4 signaux prennent chacun en une réalisation groupée une valeur spécifique dans leurs espaces de valeurs accessibles respectifs est égale au produit des probabilités individuelles calculées pour des tirages individuels.

Autrement dit, si on appelle Y l'évènement correspondant à 4 tirages successifs des chiffres composants un numéro de téléphone notés X_k où k = $\{1, ..., 4\}$ et respectant les règles pré-citées, on a :

$$P(Y = y_i) = P(X_1 = x_{1i}) \cdot P(X_2 = x_{2i}) \cdot P(X_3 = x_{3i}) \cdot P(X_4 = x_{4i})$$

où X_1 désigne le premier chiffre qui ne peut pas être 0, et X_2, X_3 et X_4 désignent les autres chiffres.

Si l'on calcule la quantité d'information totale associée à ce numéro de téléphone, on a :

$$Q_Y = log_2(\frac{1}{P(Y=y_i)}) = log_2(\frac{1}{P(X_1=x_{1i}) \cdot P(X_2=x_{2i}) \cdot P(X_3=x_{3i}) \cdot P(X_4=x_{4i})})$$

où on remarque immédiatement par propriété des logarithmes que :

$$Q_Y = log_2(\frac{1}{P(Y=y_i)}) = log_2(\frac{1}{P(X_1=x_{1i})}) + log_2(\frac{1}{P(X_2=x_{2i})}) + log_2(\frac{1}{P(X_3=x_{3i})}) + log_2(\frac{1}{P(X_4=x_{4i})})$$

et donc :

$$Q_Y = Q_{X_1} + Q_{X_2} + Q_{X_3} + Q_{X_4}$$

C'est-à-dire que la quantité d'information associée à un numéro complet de 4 chiffres est égale à la somme des quantités d'informations associées à chaque chiffre individuel.

En injectant les probabilités calculées plus haut telles que $P(X_1 = x_{1i}) = \frac{1}{9}$ et $P(X_2 = x_{2i}) = P(X_3 = x_{3i}) = P(X_4 = x_{4i}) = \frac{1}{10}$, on a :

$$P(Y = y_i) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

et donc :

$$Q_Y = log_2(9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = log_2(9) + 3 \cdot log_2(10) \approx 13,14 \text{ bits} = 1,64 \text{ Bytes}$$

(3) Si on considère un numéro de téléphone comme un unique signal fait de N valeurs équiprobables, on a une distribution uniforme telle que $P(Y = y_i) = \frac{1}{N}$. Pour déterminer la valeur N, on doit considérer la manière dont le signal est construit : on a 4 chiffres, dont le premier peut prendre 9 valeurs et les trois autres 10 valeurs. Dès lors, un numéro de téléphone peut prendre n'importe quelle valeur parmi $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ possibilités.

On a donc $P(Y = y_i) = \frac{1}{9000}$ et $Q_Y = log_2(\frac{1}{1/9000}) = log_2(9000) \approx 13,14$ bits $= 1,64$ Bytes.

On constate que l'approche conceptuelle prise dans cette partie de l'exercice nous mène strictement au même résultat que l'approche précédente ; ceci est dû aux propriétés découlant des hypothèses de distributions uniformes et indépendantes prises pour les tirages impliqués dans les signaux associés aux chiffres individuels et ceux associés à un numéro de téléphone complet.

1.3.3 Exercice supplémentaire 3

Énoncé : Une ligne de télécommunications est composée de huit canaux parallèles, dans lesquels on peut émettre des signaux discrets d'amplitude comprise entre 0 V et 2 V, à la fréquence de 10^7 signaux par canal par seconde. Des mesures ont été effectuées afin de connaître l'amplitude des parasites affectant chaque canal, c'est-à-dire la différence d'amplitude maximale entre les signaux émis et reçus sur ce canal. Ces mesures ont retourné les valeurs suivantes (en millivolts) :

$$[3{,}01,\ 5{,}56,\ 4{,}81,\ 4{,}75,\ 5{,}16,\ 3{,}84,\ 3{,}91,\ 3{,}82]$$

Quelle est la capacité de transmission maximale, en bits par seconde, de cette ligne ?

Solution :

Pour résoudre ce problème, on doit d'abord bien identifier les signaux à considérer et définir entièrement les valeurs qui leurs sont accessibles. L'énoncé nous indique qu'on a 8 canaux de communication ; ces canaux portent l'information à quantifier dans ce problème. On associe ensuite à chacun de ces canaux une mesure individuelle de l'amplitude maximale des parasites qui l'affectent. Ces parasites constituent le bruit qui affecte la ligne de communication entre l'émetteur et le récepteur ; si par exemple on suppose qu'un émetteur envoie une tension de 0 V à un récepteur, et que la ligne est affectée de parasites d'une amplitude maximale de 0,5 V, alors le récepteur pourrait reçevoir une valeur entre 0 et 0,5 V, selon à quel point le parasite affecte ce message individuel entre son amplitude minimale (nulle) et son amplitude maximale (0,5 V). Attention, on considère en général un parasite comme du bruit aléatoire qui vient ajouter une quantité positive (ici, jusque + 0,5 V) ou négative (jusque - 0,5 V) au signal d'origine.

L'amplitude maximale des parasites affectant un canal de communication conditionne directement la quantité d'information qui peut être transportée par ce canal. En effet, si l'on reprend l'exemple évoqué ci-dessus, le niveau de bruit défini la plage de confiance que le récepteur peut avoir vis-à-vis de la valeur envoyée par l'émetteur : si on sait que le canal est affecté par un bruit d'une amplitude pouvant atteindre jusque 0,5 V, alors le récepteur doit s'attendre à ce qu'un 0 V envoyé par l'émetteur arrive comme une valeur sur l'intervalle [0 - 0,5 ; 0 + 0,5] V ⇒ [0 ; 0,5] V. (Dans la plupart des applications classiques, on ne considère a priori pas les tensions négatives, donc on s'arrêtera par défaut à 0V plutôt que de considérer des valeur jusque -0,5V)

De la même manière, si l'émetteur souhaite émettre une valeur de 0,25V, elle arrivera a priori au récepteur comme une valeur sur l'intervalle [0,25 - 0,5 ; 0,25 + 0,5] V ⇒ [0 ; 0,75] V . Ceci pose un problème immédiat : sur la plage [0 ; 0,5], on a aucun moyen de savoir si l'émetteur a originellement émis sur ce canal une tension de 0 V ou de 0,25 V, qui auraient pu respectivement être affectées par un bruit d'une amplitude maximale de 0,5 V tel que 0 V + 0,5 V = 0,5V, ou d'un bruit d'une amplitude réduite de moitié de 0,25 V tel que 0,25 V + 0,25 V = 0,5 V.

Pour éliminer cette ambiguité, on est donc obligé de distancer les valeurs qu'on autorise l'émetteur à produire. En considérant toujours notre canal bruité à 0,5 V, on doit au moins distancer les valeurs produites à l'émetteur de 1 V. En effet, dans ce cas, on peut émettre par exemple

0 V qui sera reçu comme [0 ; 0,5 V], puis 1 V qui sera reçu comme [1 - 0,5 ; 1+ 0,5] V ⇒ [0,5 ; 1,5] V. Il n'existe plus de plage commune où l'on peut douter de ce qui a été émis à l'origine, et on peut donc communiquer sans ambiguité. (On peut discuter du cas limite de la valeur de 0,5 V comme seuil partagé par les deux plages, mais sur un espace de valeurs continu la probabilité d'obtenir exactement cette valeur est nulle et donc ce cas n'a pas réellement d'intérêt).

En toute généralité, on obtient en suivant ce raisonnement la règle générale suivante : il faut distancer deux valeurs successives sur un canal de communication d'au moins deux fois l'amplitude maximale du bruit affectant ce canal. Si on note x_i et x_{i+1} deux valeurs successives accessibles au signal sur le canal pour n'importe quel i désignant une valeur du signal, et δV l'amplitude maximale du bruit affectant le canal, on peut exprimer cette règle comme suit :

Il faut que $|x_{i+1} - x_i| > 2 \cdot \delta V$ pour permettre une communication sans ambiguité

Le cas où l'on sépare chaque valeur d'exactement cette quantité permettant tout juste d'éliminer l'ambiguité correspond à l'occupation maximale du canal. En pratique, on préferera souvent prendre une certaine marge de sécurité et définir une bande de valeurs "interdites" en plus de cette distance minimale.

Puisqu'on a déterminé l'écart entre chaque valeurs successives du signal sur le canal de communication, on peut aussi calculer le nombre de valeurs discrètes de ce signal en fonction de la plage de valeurs continue accessible au signal. Par exemple, si le signal peut prendre des valeurs sur la plage [0 ; 1] V et qu'on distance les valeurs autorisées de $2 \cdot \delta V = 2 \cdot 0,5V = 1V$, on retrouve le cas classique d'un canal binaire où la valeur basse est encodée par 0 V et la valeur haute est encodée par 1 V. On pourrait penser intuitivement que la quantité de valeurs discrètes accessibles peut s'exprimer comme :

$N = \frac{max(plage) - min(plage)}{2 \cdot \delta V}$

Mais il faut prendre en compte le cas spécifique des valeurs extrêmes égales aux bornes de la plage de valeurs accessibles, dans notre exemple 0 V et 1 V : puisqu'on ne considère a priori aucune quantité inférieure et supérieure à cette plage comme acceptable, on place ces valeurs directement sur les bornes de la plage sans s'inquiéter de la part de bruit qui pourrait se soutraire à la borne inférieure ou s'additionner à la borne supérieure. Ce faisant, on "gagne" en essence une valeur discrète accessible en plus sur le canal de communication, tel qu'on peut finalement calculer le nombre de valeurs accessibles comme :

$N = \frac{max(plage) - min(plage)}{2 \cdot \delta V} + 1$

On vérifie immédiatement que cette règle fonctionne pour un premier canal A sur une plage [0 ; 1V] avec 0,5V de bruit et un second canal B sur une plage [0 ; 2V] avec 0,25V de bruit ; on construit pas-à-pas les valeurs accessibles comme suit :

Signal A : sur la plage [0 ; 1] V avec 0,5 V de bruit, on peut prendre les valeurs $x_1 = 0$ V et $x_2 = x_1 + 2 \cdot 0,5 = 0 + 0,5 = 1$ V. On a un nombre de valeurs accessibles sur ce canal égal à $\frac{1-0}{2 \cdot 0,5} + 1 = 2$.

Signal B : sur la plage [0 ; 2] V avec 0,25 V de bruit, on peut prendre la valeur $x_1 = 0$ V puis on construit de proche en proche :
- $x_2 = x_1 + 2 \cdot 0,25 = 0 + 0,5 = 0,5$ V,
- $x_3 = x_2 + 2 \cdot 0,25 = 0,5 + 0,5 = 1$ V,
- $x_4 = x_3 + 2 \cdot 0,25 = 1 + 0,5 = 1,5$ V,
- $x_5 = x_4 + 2 \cdot 0,25 = 1,5 + 0,5 = 2$ V,

et on peut bien calculer le nombre total de valeurs accessibles comme $\frac{2-0}{2 \cdot 0,25} + 1 = 5$.

Si l'on considère les signaux définis dans l'énoncé, on peut construire un tableau récapitulatif où l'on exprime la plage de valeurs accessibles, le bruit affectant chacun des canaux et le nombre de valeurs discrètes accessibles à chacun de ces signaux individuels, comme suit :

Niveau de bruit δV [V]	Plage de valeurs accessibles [V]	Nombre de valeurs autorisées N [-]
$3,01 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	333
$5,56 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	180
$4,81 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	208
$4,75 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	211
$5,16 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	194
$3,84 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	261
$3,91 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	256
$3,82 \cdot 10^{-3}$	[0 ; 2]	262

où on a bien calculé le nombre de valeurs discrètes autorisées comme $N = \frac{max(plage)-min(plage)}{2 \cdot \delta V} + 1$ qui se simplifie ici en $N = \frac{2}{2 \cdot \delta V} + 1 = \frac{1}{\delta V} + 1$, qu'on arrondit vers le bas puisqu'on ne peut utiliser que des valeur discrètes entières.

Pour considérer la capacité de transmission totale de la ligne de communication faite des huits canaux individuels, on doit qualifier la relation de chaque canal vis-à-vis des autres. L'énoncé ne précisant rien à ce sujet, on doit par défaut faire l'hypothèse que l'information sur chaque canal est entièrement indépendante de l'information sur tous les autres canaux. De plus, pour calculer la quantité d'information véhiculée par un canal individuel, on doit disposer d'informations vis-à-vis des probabilités que le canal présente une valeur discrète donnée dans l'intervalle de valeurs qu'on vient de définir par calcul. Á défaut de consignes à ce sujet, on doit donc faire l'hypothèse que les valeurs prises par chaque canal individuel suivent une distribution de probabilité uniforme, c'est-à-dire qu'elles sont entièrement équiprobables.

Avec ces hypothèses, on peut calculer la quantité d'information véhiculée par chaque canal individuel comme $Q_k = log_2(\frac{1}{P(X_k = x_{ki})}) = log_2(\frac{1}{1/N_k}) = log_2(N_k)$, où k désigne un canal donné, et i indique une valeur accessible à ce canal parmi ses valeurs discrètes autorisées.

Pour calculer la quantité d'information totale de la ligne de communication comportant les 8 canaux, on peut considérer qu'on calcule la quantité d'unformation d'un nouveau signal fait des 8 canaux séparés, ou qu'on additionne les quantités d'informations des canaux individuels, ce qui aboutira strictement à la même réponse par défintion de notre mesure de quantité d'information et des propriétés des logarithmes, comme observé dans l'exercice précédent.

Si on considère un nouveau signal assemblant les 8 canaux tel qu'une valeur donnée de ce nouveau signal a une probabilité d'apparaître égal au produit des probabilités des valeurs de chaque signal individuel le composant, comme selon l'hypothèse d'indépendance, on a :

$$Q_{tot} = log_2(N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 \cdot N_5 \cdot N_6 \cdot N_7 \cdot N_8) = log_2(333 \cdot 180 \cdot 208 \cdot 211 \cdot 194 \cdot 261 \cdot 256 \cdot 262) \approx 62,95 \text{ bits} = 7,87 \text{ Bytes}$$

Si on considère la quantité d'information totale comme la somme des quantités d'informations des canaux individuels, on a :

$$Q_{tot} = log_2(N_1) + log_2(N_2) + log_2(N_3) + log_2(N_4) + log_2(N_5) + log_2(N_6) + log_2(N_7) + log_2(N_8) \approx 62,95 \text{ bits} = 7,87 \text{ Bytes}$$

Cette quantité d'information correspond à l'information portée par un ensemble de 8 valeurs sur la ligne de communication. Si on nous dit que la ligne de communication travaille à une fréquence de 10^7 signaux par canal par seconde, on a donc un débit de transmission de :

$62,95... \cdot 10^7$ = 629.540.122 bits/seconde = 78.692.515 Bytes/seconde

Pour ré-exprimer cette quantité en préfixes informatiques, on effectue successivement :

629.540.122 bits/seconde = $629.540.122/2^{10} \approx$ 614.785 kbits/seconde

614.785 kbits/seconde = $614.785/2^{10} \approx$ 600 Mbits/seconde

Ce débit correspond à une bonne connection internet de type fibre optique ; ce résultat est donc tout à fait réaliste.