Correction de l'examen de Mathématiques pour l'informatique 1 du 21 juin 2019

Consignes générales

— Répondre aux parties "théorie" et "exercices" sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom.

— Répondre uniquement sur les feuilles fournies.

— Calculatrices (ou équivalents) non autorisées.

— Justifier vos réponses.

1. Théorie

(1) Qu'est-ce qu'une assertion logique ?

(2) Sur quelle équivalence logique se base la technique de démonstration par l'absurde ?

(3) Décrire les éléments du produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_k$, où k est un entier plus grand ou égal à 1.

(4) Qu'est-ce qu'une injection ?

(5) Donner la table de multiplication de $\mathbb{Z}_7$.

(6) Décrire l'algorithme d'Euclide (recherche du PGCD) et démontrer que celui-ci est correct et se termine toujours.

(7) Le produit matriciel est-il commutatif ? Justifier.

Solution. Voir syllabus.

2. Exercices

(1) Dans cet exercice, nous identifierons les valeurs de vérité VRAI et FAUX des variables propositionnelles et des propositions aux chiffres binaires 1 et 0, respectivement.

Construire quatre propositions a, b, c, d à partir des variables propositionnelles x, y, z, t de sorte que

— si le nombre représenté en base 2 par $xyzt$ a un inverse dans $\mathbb{Z}_{16}$, alors $abcd$ est la représentation en base 2 de cet inverse

— si le nombre représenté en base 2 par $xyzt$ n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_{16}$, alors $abcd$ vaut 0000.

Les propositions a, b, c, d devront être sous forme normale disjonctive et simplifiées au maximum.

Solution. Un élément de $\mathbb{Z}_{16}$ est inversible si et seulement s'il est premier avec 16, c'est-à-dire si et seulement s'il est impair, puisque $16 = 2^4$. Il vient immédiatement $1^{-1} = 1$, $15^{-1} = (-1)^{-1} = -1 = 15$. De même, on trouve (via l'algorithme d'Euclide par exemple) que $3^{-1} = 11$, $5^{-1} = 13$, $7^{-1} = 7$ et $9^{-1} = 9$. On peut donc construire la table de vérité de a, b, c, d :

x	y	z	t	nb. représenté par $xyzt$	inverse	a	b	c	d
0	0	0	0	0	/	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	2	/	0	0	0	0
0	0	1	1	3	11	1	0	1	1
0	1	0	0	4	/	0	0	0	0
0	1	0	1	5	13	1	1	0	1
0	1	1	0	6	/	0	0	0	0
0	1	1	1	7	7	0	1	1	1
1	0	0	0	8	/	0	0	0	0
1	0	0	1	9	9	1	0	0	1
1	0	1	0	10	/	0	0	0	0
1	0	1	1	11	3	0	0	1	1
1	1	0	0	12	/	0	0	0	0
1	1	0	1	13	5	0	1	0	1
1	1	1	0	14	/	0	0	0	0
1	1	1	1	15	15	1	1	1	1

En simplifiant au moyen des tables de Karnaugh, on arrive aux propositions suivantes :

$a \equiv (\neg x \wedge \neg y \wedge z \wedge t) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z \wedge t)$
$b \equiv y \wedge t$
$c \equiv z \wedge t$
$d \equiv t$

(2) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}_{42}$.

(a) $16x + 15 = 0$.
(b) $15x + 18 = 0$.
(c) $5x + 17 = 0$.

Solution.

(a) Cette équation équivaut à

$$16 \cdot_{42} x = 27$$

ce qui est équivalent à

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 16x = 42q + 27$$

ou encore

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 16x - 42q = 27.$$

Le membre de gauche de cette dernier égalité étant pair quelque soit q, et le membre de droite impair, il n'existe pas de tel q, et l'équation n'admet pas de solution.

(b) Cette équation équivaut à

$$15 \cdot_{42} x = 24,$$

ce qui est équivalent à

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 15x = 42q + 24,$$

ou encore à

$$\exists q \in \mathbb{Z},\ 5x = 14q + 8,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{MOD}(5x, 14) = 8,$$

ce que l'on peut encore réécrire

$$\mathrm{MOD}(5\,\mathrm{MOD}(x, 14), 14) = 8.$$

En posant $y = \mathrm{MOD}(x, 14)$, on s'intéresse donc aux solutions de l'équation $5y = 8$ dans $\mathbb{Z}_{14}$. Or, 5 est inversible dans $\mathbb{Z}_{14}$ et son inverse est 3. Ainsi, l'équation $5 \cdot_{14} y = 8$ est équivalente à $y = 3 \cdot_{14} 8$, ou encore à $y = 10$. L'équation de départ se réécrit alors

$$\mathrm{MOD}(x, 14) = 10$$

c'est-à-dire

$$x = 10 \text{ ou } x = 24 \text{ ou } x = 38.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{10, 24, 38\}$.

(c) L'élément 5 est inversible dans $\mathbb{Z}_{42}$; son inverse est 17. Dès lors, l'équation est équivalente à

$$5 \cdot_{42} x = 25$$

c'est-à-dire

$$17 \cdot_{42} 5 \cdot_{42} x = 17 \cdot_{42} 25,$$

ou encore

$$x = 5.$$

L'unique solution de l'équation est donc $x = 5$.

(3) (a) Calculer le déterminant des matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ 2 & 4 & -i \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice C donnée ci-dessous est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -i \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -i & 3 \end{pmatrix}$$

Solution.

(a) (i) En appliquant la règle de Sarrus, on trouve immédiatement

$$\det(A) = 36 - 4 + 2 + 8 + 6i - 6i = 42.$$

(ii) En effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, puis en appliquant deux fois la première loi des mineurs et en terminant par la règle de Sarrus, on trouve
$$\det(B) = 120.$$

(b) On a $\det(C) = 6i - 8 \neq 0$; la matrice C est donc inversible. Son inverse est
$$C^{-1} = \frac{1}{6i-8}\begin{pmatrix} -9+4i & -13 & 16-3i \\ 5 & 9+2i & -12-i \\ 6-i & 8+3i & -13 \end{pmatrix}.$$

(4) Prouver que
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
pour tout $n \geq 1$.

Solution. Procédons par récurrence sur n. Tout d'abord, si $n = 1$, le membre de gauche est égal à $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1$ tandis que le membre de droite vaut $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$. La formule est donc satisfaite pour $n = 1$. A présent, considérons un certain $n \geq 1$ et supposons la formule vraie pour ce n. Notre but est de montrer qu'elle est vraie également pour $n+1$; en d'autres termes, on suppose que
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
et l'on souhaite démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$
On a successivement
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\
&= (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$
d'où la conclusion.

(5) Discuter la compatibilité et le rang du système suivant en fonction du paramètre réel α. Dans les cas où il *n'est pas* de Cramer, le résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y+2z & = & \alpha \\ -2x+y+(\alpha-2)z & = & 1 \\ \alpha x+y+2z & = & 2\alpha-1 \end{array}\right.$$

Solution – méthode 1. Nous allons ici appliquer la méthode de Gauss.

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2+2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-\alpha L_1$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y+2z & = & \alpha \\ (1+2\alpha)y+(\alpha+2)z & = & 1+2\alpha \\ (1-\alpha^2)y+(2-2\alpha)z & = & 2\alpha-1-\alpha^2 \end{array}\right.$$

Tous les coefficients des inconnues des deux dernières lignes dépendant de α, aucun d'entre eux n'est à coup sûr différent de 0 ; nous allons donc devoir discuter.

Nous pouvons par exemple traiter à part le cas $\alpha=-1/2$. Il est aisé de vérifier en remplaçant α par $-1/2$ que le système est dans ce cas de Cramer : il admet donc une unique solution et est de rang 3.

Nous supposerons donc dorénavant que $\alpha \neq -1/2$. Alors $1+2\alpha \neq 0$, et on peut effectuer $L_3 \leftarrow (1+2\alpha)L_3-(1-\alpha^2)L_2$. On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\alpha y+2z & = & \alpha \\ (1+2\alpha)y+(\alpha+2)z & = & 1+2\alpha \\ (\alpha^3-2\alpha^2+\alpha)z & = & 4\alpha^2-2\alpha-2 \end{array}\right.$$

On a

$$\alpha^3-2\alpha^2+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ou } \alpha=1.$$

Si $\alpha=0$ le système devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+2z & = & 1 \\ 0 & = & -2 \end{array}\right.$$

Il est donc de rang 2 et incompatible.

Si $\alpha=1$, il devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 1 \\ 3y+3z & = & 3 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Il est alors de rang 2 et compatible. L'ensemble des solutions est

$$\left\{\begin{pmatrix} -z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Enfin, si $\alpha \notin \{0,1\}$ (ceci inclut le cas $\alpha=-1/2$ au vu de ce qui précède), le système est de Cramer. Il est donc compatible et de rang 3.

Solution – méthode 2. Calculons le déterminant de la matrice des coefficients :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ -2 & 1 & \alpha-2 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-1)^2.$$

On en conclut que, si $\alpha \notin \{0, 1\}$, le système est de rang 3. Il est donc de Cramer et admet une solution unique.

Il reste à traiter les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Il suffit pour cela de remplacer α par sa valeur ; voir la méthode 1 pour les conclusions.