(4) Nombres Complexes

Pim-Simon Hauguel

13-10-2020 (Trop tard)

Contents

1 Excuses

Bon déjà, première chose : Je suis désolé de vous avoir laché durant ces trop longs 30 jours qui nous sépare de mon dernier paper. La prochaine fois, il faut me taper sur les doigts ! Bref, je vais essayer de reprendre le rythme que je m'étais imposé au début et arreter de faire du hors programme. Commencons !

2 Qu'est-ce qu'un nombre premier ?

Définition 1 (Définition et écriture) *L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, on dit que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. L'unité dite imaginaire, est noté i et est définie comme : $i = \sqrt{-1}$, donc que $i^2 = -1$. La forme $z = a + ib$ est appelée notation cartésienne de z (z est complexe). Avec a la partie réelle ($Re(z)$), et b la partie imaginaire ($Im(z)$). ($a, b \in \mathbb{R}^2$)*

2.1 Ce que l'on en déduit

Avec ces informations, certaines informations peuvent être remarquées :

- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2 (z = a + ib)$
  Pour le dire d'une manière plus accesible, un nombre complexe z a une unique écriture cartésienne.
- $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs. Des exemples d'imaginaires purs ?
  - $0 + 7i = 7i$
  - $0 + i = i$
  - $i^3 = i^2 * i = -1 * i = -i)$
- Il existe aussi des réels purs, le principe est le même, simplement c'est la partie imaginaire qui est nulle.

2.1.1 Le conjugué

Formules 1 (Formule stricte) *Le conjugué d'un nombre complexe z est défini ainsi :*

$$conjugue(z) = \overline{z} = Re(z) - Im(z)$$

Pour résumé, le conjugué d'un nombre complexe est simplement ce même nombre, mais en opposant sa partie imaginaire.
On peut donc en déduire cela : $\overline{\overline{z}} = z$

2.1.2 Minis Exos 1

En connaissant ces informations, veuillez généraliser ces formules (trouver le ?):

- $\forall z \in \mathbb{C}(z * \overline{z} =?)$
- $\forall z \in \mathbb{C}(z + \overline{z} =? \in?)$
- $\forall z \in \mathbb{C}(z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} =?$

(bon ils étaient triviaux, mais bon...)

3 Représentation des nombres complexes

On peut exprimer les nombres complexes comme des points dans un plan.
Posons $z = a + ib$, a va représenter l'abscisse, b l'ordonnée. (Il est très facile de se visualiser cela dans le plan réel, cependant, nous sommes bien ici dans le plan complexe)
Par exemple, le nombre $8 + 7i$ sera de coordonnées $(8, 7)$

$-4 + 0.5i$ en $(-4, 0.5)$

Posons M, un point du plan complexe de centre O, de coordonnées (a, b), quel sera sa longueur ? Il est évident que l'on répondra formule de pythagore, avec du coup $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. Et bien je suis d'accord ! Mais avec les nombres complexes, on appelera cette longueur le module de $a + ib$.

Formules 2 *Module* $\forall z \in \mathbb{C}(|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2})$ *with* $z = a + ib$

3.1 Les Vecteurs

Les grandeurs dites scalaires, sont caractérisées par un seul nombre, a contrario des grandeurs dites vectorielles qui sont caractérisées par n nombres dans une dimension n (2 dans le plan, 3 dans l'espace...)

Définition 2 (Vecteur) *Un vecteur est caractérisé par :*

- *Une longueur*
- *Un sens*
- *Une direction*

Le vecteur de longueur 0 est unique et noté $\overrightarrow{0}$

Formules 3 (Addition) *Dans le plan, deux vecteurs* $\overrightarrow{u}(x, y)$, $\overrightarrow{v}(x', y')$ *ont pour somme :*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x + x', y + y')$$

Le principe pour la soustraction reste le même.

Formules 4 (Multiplication) *Dans le plan,* $\overrightarrow{u}(x, y)$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*, alors* $\alpha\overrightarrow{u} = (\alpha x, \alpha y)$

Définition 3 (Coolinearité) *Deux vecteurs sont colineraires si ils ont la même direction, c'est à dire qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$

Définition 4 (Produit Scalaire) *Comme son nom le dit si bien, le produit scalaire renvoie un scalaire (grosso merdo un nombre) et pas un vecteur.*
Dans le plan $\overrightarrow{u}(x, y)$, $\overrightarrow{v}(x', y')$*, alors*

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$ *; où '.' dénote du produit scalaire*
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\Theta$ *; où* Θ *dénote de l'angle formé par les 2 vecteurs.*

3.2 Forme trigonométrique

TODO

4 Solution minis-exos

4.1 Minis Exos 1

- $\forall z \in \mathbb{C}(z * \overline{z} = a^2 + b^2)$
- $\forall z \in \mathbb{C}(z + \overline{z} = 2a \in \mathbb{C})$
- $\forall z \in \mathbb{C}(z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z)$