Université Cadi Ayyad
Dépt. de Mathématiques
F.S.T. de Marrakech

Année : 2014-15

TD n^o : 4 d'Algèbre

Filière MIP, Semestre 1

Exercice 1 : On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC? ? Si oui, les calculer.

Exercice 2 : Trouver les matrices carrées d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

telles que :

1. $A^2 = A$;
2. $A^2 = I_2$;
3. $AB = BA$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Calculer les inverses des matrices suivantes :

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

2. $$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

3. On pose

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice E vérifie la relation $E^3 - 2E^2 - 5E - 24I_3 = 0$. En déduire l'inverse de E.

Exercice 5 : On appelle matrice nilpotente toute matrice carrée A vérifiant : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$.

1. On pose

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances de N_1 ; N_1 est-elle inversible ?

2. On pose

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances de N_2 ; N_2 est-elle inversible ?

3. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous nuls.

4. Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente. Montrer que $I_n + N$ est une matrice inversible et donner son inverse. Indication : on s'inspire de la formule :

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \ \dots \ + x^{n-1}).$$

Exercice 6 : Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss (a est un paramètre réel).

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ 4x & + & y & = & 7 \end{array} \right. \quad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & -4 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ 4x & + & y & = & 7 \\ 2x & + & 5y & = & a \end{array} \right. \quad (S_4) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & 8z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 10z & = & 1 \end{array} \right.$$

$$(S_5) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & - & 3y & - & 8z & = & 19 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & -2 \end{array} \right. \quad (S_6) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & - & 3y & - & 8z & = & 19 \\ 3x & + & y & - & z & = & -2 \end{array} \right.$$

$$(S_7) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & (1-a)z & = & a+2 \\ (1+a)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & ay & + & 3z & = & a+2 \end{array} \right.$$

Série N° 4

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On a : $A \in M_{5,2}$ et $B \in M_{3,5}$ et $C \in M_{2,4}$.

* Le produit AB n'existe pas, donc ABC n'existe pas.
* Le produit CBA n'existe pas.

+ $$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 2 & 10 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3,2}$$

$$BAC = \begin{pmatrix} 6 & 19 \\ 2 & 10 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 12 & 51 & -1 \\ 22 & 4 & 28 & -4 \\ 13 & -2 & 22 & -10 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

On a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) $A^2 = A$.

on a : $A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ ac + cd = c \\ ab + bd = b \\ bc + d^2 = d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - a + bc = 0 \\ c(a + d - 1) = 0 \\ b(a + d - 1) = 0 \\ d^2 - d + bc = 0 \end{cases}$$

* si $a + d - 1 \neq 0$.

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a^2 - a = 0 \\ d^2 - d = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ d = 0 \text{ ou } d = 1 \end{cases}$$

donc les matrices qui vérifient $A^2 = A$ dans ce cas sont :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

* si $a + d - 1 \neq 0$:

$a + d = 1 \Rightarrow a = 1 - d$

$(1 - d)^2 + d - 1 + bc = 0$

$1 - 2d + d^2 + d - 1 + bc = 0$

$d^2 - d + bc = 0$

Le système devient : $\begin{cases} a + d = 1 \\ d^2 - d + bc = 0 \end{cases}$

$d^2 - d + bc = 0$

$\Delta = 1 - 4bc$.

* si $bc > \frac{1}{4}$. $\Delta < 0 \Rightarrow$ aucune solution on a : $A^2 = A$.
* si $bc \leq \frac{1}{4}$ $\Delta \geq 0$ $d = \frac{1 + \sqrt{1 - 4bc}}{2}$ ou $d = \frac{1 - \sqrt{1 - 4bc}}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $d = \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2}$ et $bc \leq \frac{1}{4}$

ou $A = \begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $d = \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2}$ et $bc \leq \frac{1}{4}$.

2) $A^2 = I_2$

on a : $A^2 = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ac + cd = 0 \\ ab + bd = 0 \\ d^2 + bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ d^2 + bc = 1 \end{cases}$

* si $a + d \neq 0$:

On a : $\begin{cases} c = b = 0 \\ a^2 = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ d = 1 \text{ ou } d = -1 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

* si $a + d = 0$: $\Rightarrow d = -a$

donc le système $\Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ d^2 + bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ d^2 = 1 - bc \end{cases}$

* si $bc > 1$ alors $S = \emptyset$

* si $bc \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -d \\ d = \sqrt{1-bc} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -d \\ d = -\sqrt{1-bc} \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$.

3) - $AB = BA$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$:

on a $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b & a + b \\ 2c - d & c + d \end{pmatrix}$

et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -a + c & d - b \end{pmatrix}$

donc $AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 2a + c \\ 2c - d = c - a \\ a + b = 2b + d \\ c + d = d - b \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} d-c & -c \\ c & d \end{pmatrix} \underset{}{\overset{c,d \in \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} c = -b \\ c - d + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = d - c \end{cases}$

Exercice 3 :

On a : $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M(\mathbb{R})$.

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

- On montre par récurrence que. $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Pour $n = 2$ le résultat est vrai.

Si : $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$?

$A^n . A = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a^n & a^n + n a a^{n-1} \\ 0 & a a^n \end{pmatrix}$

$A^n . A = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1) a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

1) On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ soit $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

Si : A' est l'inverse de A donc $AA' = A'A = I_2$

$AA' = \begin{pmatrix} 2a' - 3c' & 2b' - 3d' \\ 4a' + 5c' & 4b' + 5d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2a' - 3c' = 1 \\ 2b' - 3d' = 0 \\ 4a' + 5c' = 0 \\ 4b' + 5d' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a' = \frac{5}{22} \\ b' = \frac{3}{22} \\ c' = -\frac{2}{11} \\ d' = \frac{1}{11} \end{cases}$$

donc $A' = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$A'A = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = I_2$

donc $\boxed{A^{-1} = A'}$

2) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de manière générale. d'ordre 2

si $ad - bc = 0 \Rightarrow$ A n'est pas inversible.

si $ad - bc \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3) on a $E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

on veut vérifier $E^3 - 2E^2 - 5E - 24I_3 = 0$

$E^2 = \begin{pmatrix} 8 & 15 & 2 \\ 8 & 11 & -6 \\ 2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$ $E^3 = \begin{pmatrix} 50 & 55 & -11 \\ 26 & 51 & -7 \\ 14 & 20 & 9 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 50 & 55 & -11 \\ 26 & 51 & -7 \\ 14 & 20 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 30 & 4 \\ 16 & 22 & -12 \\ 4 & 20 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 25 & -15 \\ 10 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$= 24\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la relation est vérifier

* $E^3 - 2E^2 - 5E - 24I_3 = 0$

$E(E^2 - 2E - 5I_3) = 24I_3$

donc $E^{-1} = \frac{1}{24}(E^2 - 2E - 5I_3)$

exercice 5 :

1) on a. $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$N_1^2 = N_1N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

donc $N_1^n = 0 \ . \forall n \geq 2$.

* Si N_1 est inversible alors $\exists N_1^{-1}$ t.q : $N_1N_1^{-1} = N^{-1}N_1 = I_2$

donc $(N_1N_1^{-1})^2 = I_2 \cdot I_2 = I_2$

$N_1^2(N^{-1})^2 = I_2 \Rightarrow I_2 = 0$ absurde

Donc N_1 n'est pas inversible.

2)- Soit $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

donc $N_2^n = 0$, $\forall n \geq 3$. $\Rightarrow$ N_2 est nilpotente.

3)- soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ triangulaire superieure.

Montrons. A nilpotente $\Leftrightarrow$ Les coefficients diagonaux sont tous nuls.

$\Rightarrow$) A nilpotente donc $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $A^n = 0$.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & * & * \\ 0 & a_{22}^2 & * \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{pmatrix}$

Montrons que $A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & * & * \\ * & a_{22}^k & * \\ * & * & a_{33}^k \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Par recurrence : pour $k = 2$ le resultat est vrai

- supposons que $A^k = \begin{pmatrix} (a_{11})^k & * & * \\ 0 & (a_{22})^k & * \\ 0 & 0 & (a_{33})^k \end{pmatrix}$

$A^{k+1} = \begin{pmatrix} (a_{11})^{k+1} & * & * \\ 0 & (a_{22})^{k+1} & * \\ 0 & 0 & (a_{33})^{k+1} \end{pmatrix}$

$A^n = 0 \Rightarrow (a_{11})^n = (a_{22})^n = (a_{33})^n = 0$

donc $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$.

$\Leftarrow$) Voir question 2).

4)- $1 - x^k = (1-x)(1 + x + \dots + x^{k-1})$

$I_n - N^k = (I_n - N)(I_n + N + \dots + N^{k-1})$

$1 - (-x)^k = (1+x)(1 + (-x) + \dots + (-x)^{k-1})$

$$I_n - (-N)^k = (I_n + N)(I_n + (-N) + \dots + (-N)^{k-1})$$
$$I_n = (I_n + N)(I_n + (-N) + \dots + (-N)^{k-1})$$

Exercice 6 :

$$\begin{cases} x + y + (1-a)z = a+2 \\ (1+a)x - y + 2z = 0 \\ 2x - ay + 3z = a+2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (1-a) & (a+2) \\ (1+a) & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -a & 3 & (a+2) \end{array}\right)$$

1^er étape :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (1-a) & (a+2) \\ 0 & (-2-a) & (1+a^2) & -(a^2+3a+2) \\ 0 & (-a-2) & (1+2a) & (-a-2) \end{array}\right) \begin{array}{l} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = L_2 - (a+1)L_1 \\ L'_3 = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (1-a) & 1 & (a+2) \\ 0 & (1+a^2) & (2-a) & -(a^2+3a+2) \\ 0 & (1+2a) & (-2-a) & -(a+2) \end{array}\right) & \begin{array}{l} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array} \\ x \quad z \quad y & \end{array}$$

Etape 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (1-a) & 1 & (a+2) \\ 0 & (1+a^2) & (-2-a) & -(a^2+3a+2) \\ 0 & 0 & B & A \end{array}\right) \begin{array}{l} L''_1 = L'_1 \\ L''_2 = L'_2 \\ L''_3 = L'_3 - \frac{1+2a}{a^2+1} L'_2 \end{array}$$

avec $A = (2+a)\left[(a+1)\frac{(1+2a)}{1+a^2} - 1\right] = \frac{(a+2)a(a+3)}{a^2+1}$

et $B = (2+a)\left[\frac{1+2a}{1+a^2} - 1\right] = \frac{a(2+a)(2-a)}{1+a^2}$

$$(S_7) \Leftrightarrow \begin{cases} x + (1-a)z + y = a+2 \\ (1+a^2)z - (2+a)y = -(a+1)(a+2) \\ By = A \end{cases}$$

* si $a = 0$ ou $a = -2$ alors $A = B = 0$.

$$(S_7) \Leftrightarrow \begin{cases} x + (1-a)z = a+2-y \\ (1+a^2)z = (a+2)[y-(a+1)] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = (a+2) - y - \dfrac{(1-a)(a+2)(y-(a+1))}{1+a^2} \\ z = \dfrac{(a+2)(y-(a+1))}{a^2+1} \end{cases}$$

* si $a = 2$, $A = 8 \rightarrow$ le (S_2) est impossible.

* si $a \neq 0$ et $a \neq -2$ et $a \neq 2$,

alors $B \neq 0$. $y = \dfrac{A}{B} = \dfrac{a+3}{2-a}$.

$$\begin{cases} x = (a+2) - \left(\dfrac{a+3}{2-a}\right) - \left(\dfrac{1-a}{1+a^2}\right)\left((a+2)(a+1) + (2+a)\dfrac{3+a}{2-a}\right) \\ z = \dfrac{1}{1+a^2}\left(-(a+2)(a+1) + (2+a)\left(\dfrac{a+3}{2-a}\right)\right) \\ y = \dfrac{a+3}{2-a} \end{cases}$$

$O_{IR[x]} \in H_F$

FSTG SHARE

COURS

&

TD'S

&

CC'S