

FIG. 10.1: Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'un point M

Calculons maintenant la quantité OP^2 : soit $A = (x, 0, 0)$ la projection orthogonale de P sur l'axe des x . Le triangle OAP est rectangle en A . Donc, d'après Pythagore, $OP^2 = OA^2 + AP^2 = x^2 + y^2$.

En remplaçant OP^2 par sa valeur, on voit que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, soit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calculer θ et φ revient à calculer leur sinus et leur cosinus.

Soit $Q = (0, 0, z)$ la projection du point M sur l'axe des z . Le triangle QOM étant rectangle en Q , le sinus de l'angle φ s'exprime à partir des longueurs des cotés du triangle :

$$\sin \varphi = \frac{MQ}{OM} = \frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}.$$

De même pour le cosinus avec le côté OQ et l'hypoténuse OM :

$$\cos \varphi = \frac{z}{r}.$$

De manière similaire, le triangle OAP étant rectangle en A , on peut calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ par :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{OA}{OP} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta &= \frac{AP}{OP} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

10.1.4 Calcul des coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées sphériques

Supposons que l'on connaisse les coordonnées sphériques (r, θ, φ) du point M . Calculons ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Le triangle QOM étant rectangle en Q , on a

$$z = OM \cos \varphi = r \cos \varphi$$

et la distance $r' = MQ$ est égale à $OM \sin \varphi = r \sin \varphi$.

Le triangle OAP étant rectangle en A , on a

$$x = OP \cos \theta = r' \cos \theta = r \sin \varphi \cos \theta$$

et

$$y = OP \sin \theta = r' \sin \theta = r \sin \varphi \sin \theta.$$

10.2 Polyèdres

10.2.1 Définition d'un polyèdre

Un polyèdre \mathcal{P} dans l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 est la donnée de :

1. Une suite de points P_0, P_1, \dots, P_{n-1} de \mathbb{R}^3 appelés *sommets* du polyèdre ;
2. Un ensemble de *faces*, chaque face étant une suite de numéros de sommets dans $\{0, \dots, n-1\}$.

10.2.2 Exemple

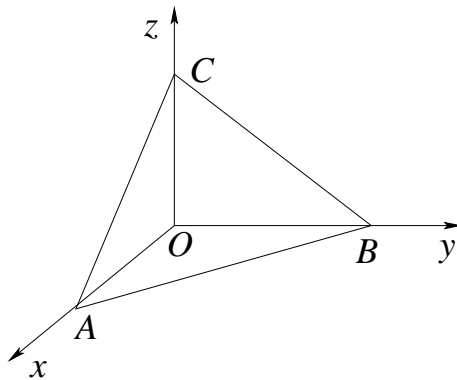


FIG. 10.2: Exemple de polyèdre : un tétraèdre.

Par exemple, considérons le tétraèdre construit sur les quatre points $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ et $C = (0,0,1)$ (voir figure 10.2). Le polyèdre correspondant est la donnée de :

1. Les sommets $P_0 = O$, $P_1 = A$, $P_2 = B$, et $P_3 = C$;
2. Les quatre faces qui sont :
 - La face numéro 0 représentant le triangle OAB : $(0, 1, 2)$;
 - La face numéro 1 représentant le triangle OAC : $(0, 1, 3)$;
 - La face numéro 2 représentant le triangle OBC : $(0, 2, 3)$;
 - La face numéro 3 représentant le triangle ABC : $(1, 2, 3)$.

10.3 Quadriques

La classe de surfaces composées des quadriques contient notamment les cylindres, cônes, ellipsoïdes, paraboloides, hyperboloïdes, etc... Une quadrique a une équation implicite de degré 2 de la forme $F(x, y, z) = 0$, où F a une forme standard :

$$F(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Dx + Ey^2 + 2Fyz + 2Gy + Hz^2 + 2Iz + J$$

Notons que dans le cas de surfaces de révolution (cylindres, cônes de révolution,...), cette équation est en général simplifiée car de nombreux coefficients sont nuls.

Pour utiliser les modèles d'illumination sur la surface (voir le chapitre 16), nous aurons besoin de calculer le *vecteur normal* (ou la normale) à la surface en un point. Un vecteur normal est un vecteur perpendiculaire à la surface (c'est à dire perpendiculaire au plan tangent). La normale à la quadrique en un point de la surface est donnée par les dérivées partielles de la fonction F définissant son équation implicite :

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

La normale \vec{N} au point $M = (x, y, z)$ a pour coordonnées :

$$x_N = 2(Ax + By + Cz + D)$$

$$y_N = 2(Bx + Ey + Fz + G)$$

$$z_N = 2(Cx + Fy + Hz + I)$$

On peut supprimer la multiplication par 2 car ce vecteur n'est de toutes manière pas normé.

10.4 Cylindres de révolution

10.4.1 Définition d'un cylindre de révolution

En mathématiques, un cylindre de révolution est une surface infinie, qui peut être définie par la donnée d'un axe et d'un rayon :

Soit D une droite dans l'espace et $r \in \mathbb{R}_+^*$ un nombre réel strictement positif. Le cylindre de révolution d'axe D et de rayon r est constitué de l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 qui sont situés à distance r de la droite D .

En ce qui nous concerne, nous nous contenterons dans un premier temps d'étudier les cylindres de révolution dont l'axe coïncide avec le troisième axe de coordonnée Oz . Nous obtiendrons les autres cylindres de révolution par des transformations géométriques (rotations), et même des cylindres dont la base est une ellipse (et non plus un cercle) par des changements d'échelle suivant les différents axes.

Un cylindre de révolution dont l'axe coïncide avec le troisième axe de coordonnée Oz admet une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

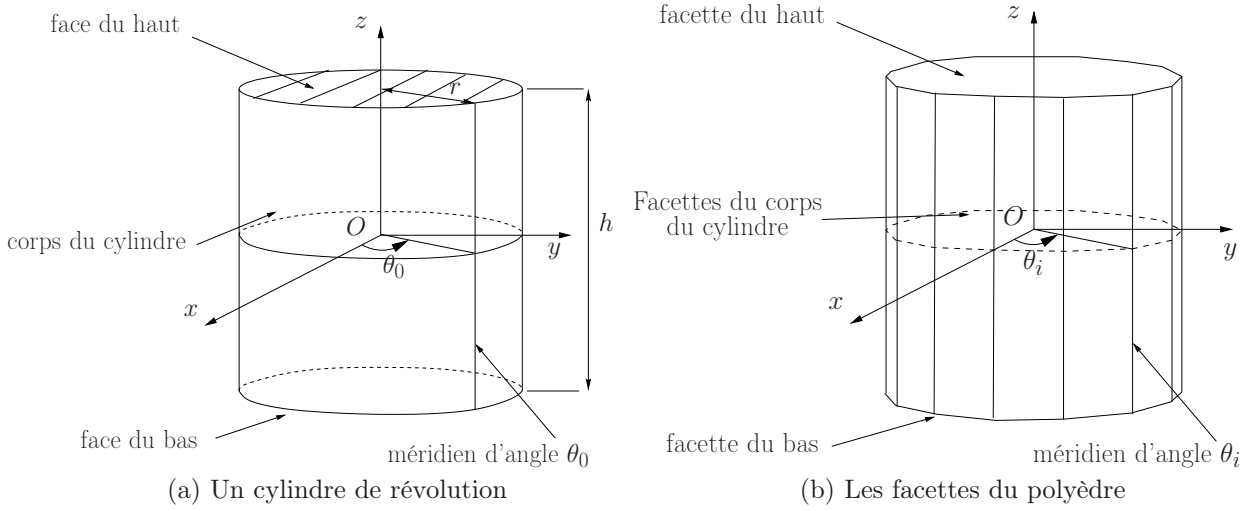


FIG. 10.3: Définition et facettisation d'un cylindre de révolution

où r est un nombre qui représente la distance des points du cylindre à l'axe des z .

Enfin, les cylindres que nous considérerons, étant destinés à être intégrés dans des scènes 3D en vue d'une visualisation, seront limités en hauteur. Un autre paramètre de la définition du cylindre sera donc sa hauteur $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Voici donc la définition du cylindre de révolution que nous utiliserons :

Étant donnés deux nombres r et h strictement positifs, le *corps du cylindre* de rayon r et de hauteur h est constitué de l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 qui sont à distance r de l'axe des z , et qui ont une altitude z comprise entre $-\frac{h}{2}$ et $+\frac{h}{2}$ (voir figure 10.3a).

La distance du point M à l'axe des z étant égale à la distance de M à la projection orthogonale $Q = (0, 0, z)$ de M sur l'axe des z , cette distance vaut $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Le corps du cylindre est donc caractérisé par le système d'équations et d'inégalités suivant :

1. $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ et
2. $-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}$.

La surface ainsi définie n'est pas fermée en haut et en bas. Nous ajouterons donc deux faces, qui sont des disques, aux altitudes $z = -\frac{h}{2}$ et $z = +\frac{h}{2}$. Plus précisément, nous ajouterons au corps du cylindre défini plus haut les deux ensemble des points $M = (x, y, z)$ définis par :

- Face du bas : $z = -\frac{h}{2}$ et $x^2 + y^2 \leq r^2$;
- Face du haut : $z = +\frac{h}{2}$ et $x^2 + y^2 \leq r^2$.

Le *cylindre de révolution* complet sera donc la réunion du corps du cylindre, de la face du haut et de la face du bas définis ci-dessus.

10.4.2 Méridiens sur un cylindre de révolution

Les *méridiens* sur un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h sont les segments de droite, contenus dans le corps du cylindre, de longueur h , parallèles à l'axe des z (voir figure 10.3a).

Un tel méridien peut être vu comme l'ensemble des points M du corps du cylindre, de coordonnées sphériques (r_m, θ_m, ϕ_m) , tels que l'angle θ_m soit fixé à une certaine valeur. Plus précisément, étant donné $\theta_0 \in [0, 2\pi[$, le méridien d'angle θ_0 est constitué de l'ensemble des points M du corps du cylindre dont l'angle θ_m des coordonnées sphériques est égal à θ_0 .

10.4.3 Facettisation d'un cylindre de révolution

En vue d'utiliser différents algorithmes applicables à des polyèdres, tels que l'algorithme d'affichage du z -buffer décrit au chapitre 15, nous expliquons ici comment approximer un cylindre de révolution par un polyèdre (voir figure 10.3b).

L'idée est la suivante : étant donné un nombre de méridiens m , nous allons considérer des méridiens \mathcal{M}_i d'angle θ_i , pour $i = 0, \dots, m$, régulièrement disposés sur le corps du cylindre. Nous construirons ensuite une facette rectangulaire entre les méridiens \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_{i+1} , pour $i = 0, \dots, m - 1$. Nous construirons ensuite deux facettes pour la face du haut et pour la face du bas du cylindre.

10.4.3.a Sommets du polyèdre

Nous allons construire $4m + 2$ sommets. Considérons les angles

$$\theta_i = 2\pi \frac{i}{m}$$

pour $i = 0, \dots, m$. Lorsque i varie de 0 à m , l'angle θ_i varie régulièrement entre 0 et 2π . Soit \mathcal{M}_i le méridien d'angle θ_i .

Nous construisons tout d'abord la liste des sommets du polyèdre.

Pour $i = 0, \dots, m$, on définit le sommet P_i comme le point du méridien \mathcal{M}_i qui est à la hauteur $-\frac{h}{2}$. Les coordonnées cartésiennes de ce sommet P_i sont données par $x_i = r \cos \theta_i$, $y_i = r \sin \theta_i$ et $z_i = -\frac{h}{2}$.

Pour $i = m + 1, \dots, 2m + 1$, on définit le sommet P_i comme le point du méridien $\mathcal{M}_{i-(m+1)}$ qui est à la hauteur $+\frac{h}{2}$. Les coordonnées cartésiennes de ce sommet P_i sont données par $x_i = r \cos \theta_{i-(m+1)}$, $y_i = r \sin \theta_{i-(m+1)}$ et $z_i = +\frac{h}{2}$.

En vue d'une visualisation par interpolation utilisant les modèles de Gouraud ou Phong (voir la partie 17.2.2), les sommets de la face du haut et de la face du bas du cylindre ne doivent pas être confondus avec les sommets du corps du cylindre. Pour cette raison, bien que ces sommets aient la même position dans l'espace, nous leur donnerons des numéros différents.

Voici les sommets destinée à représenter les faces du bas : pour $i = 2m + 2, \dots, 3m + 1$, le sommet P_i est égal au sommet $P_{i-(2m+2)}$. En d'autres termes, tous les sommets sont dupliqués.

Voici les sommets destinés à représenter la face du haut : pour $i = 3m + 2, \dots, 4m + 1$, le sommet P_i est égal au sommet $P_{i-(2m+1)}$.

10.4.3.b Facettes du polyèdre

Nous allons tout d'abord construire les m facettes qui sont comprises entre deux méridiens successifs \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_{i+1} , puis la facette du bas et la facette du haut.

1. Pour $i = 0, \dots, m - 1$, la facette numéro i est composée de deux sommets successifs de la face du bas, puis des deux sommets correspondant de la face du haut. Plus précisément la facette numéro i est composée des quatre numéros de sommets suivants : $(i, i + 1, m + i + 2, m + i + 1)$.
2. La facette du bas est composée des m numéros de sommets suivants : $(3m + 1, 3m, \dots, 2m + 2)$.
3. La facette du haut est composée des m numéros de sommets suivants : $(3m + 2, 3m + 3, \dots, 4m + 1)$.

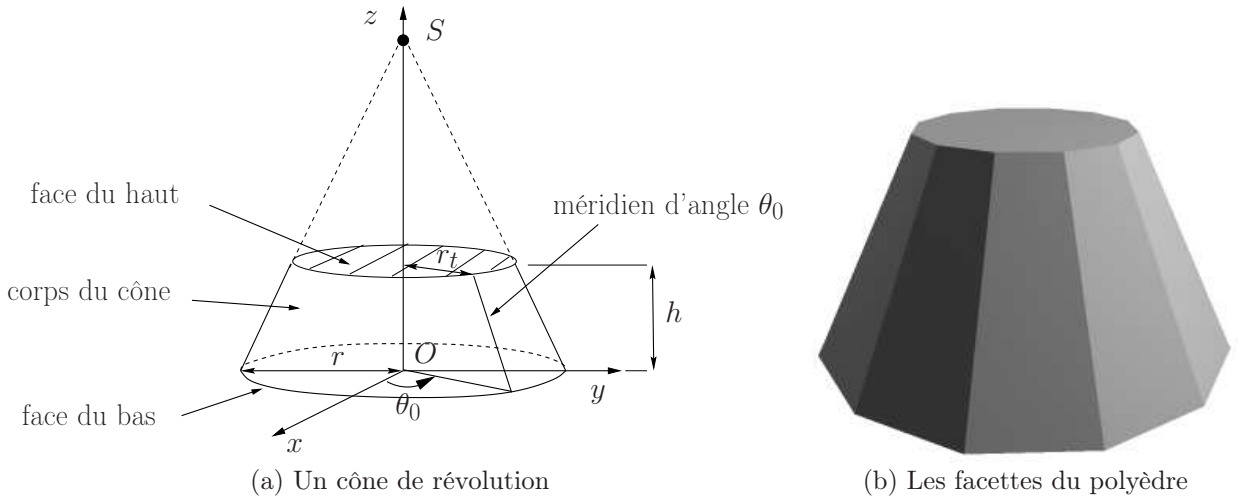


FIG. 10.4: Définition et facettisation d'un cône de révolution

Notons l'ordre des sommets de la facette du bas, qui est inversé par rapport à la facette du haut. On procède ainsi pour que les facettes du cylindre aient une orientation cohérente.

10.5 Cônes de révolution

10.5.1 Définition d'un cône de révolution

Un cône est une surface engendrée par des droites qui passent toutes par le même point S , appelé *sommet du cône* et s'appuient sur une courbe. Dans le cas d'un cône de révolution, cette courbe est un cercle \mathcal{C} qui sera appelé *base* du cône de révolution.

Comme dans le cas du cylindre, nous nous limiterons dans un premier temps à des cônes de révolution dont l'axe de révolution est l'axe des z , le sommet S du cône se situant sur l'axe des z , et la base \mathcal{C} du cône étant un cercle contenu dans le plan d'équation $z = 0$ et centré sur le point $O = (0, 0, 0)$ (voir figure 10.4a). Les autres cônes s'en déduiront par des transformations géométriques simples.

Soit donc $S = (0, 0, z_s)$ et \mathcal{C} le cercle situé dans le plan $z = 0$, de centre O , et de rayon r . Le cône de sommet S et de base \mathcal{C} a pour équation :

$$(z - z_s)^2 = \frac{z_s^2}{r^2}(x^2 + y^2).$$

La surface du cône, définie par cette équation, est en fait un double cône, infini des deux cotés, et nous tronquerons donc cette surface en bas par la hauteur $z = 0$, et en haut par une hauteur $z = h$, où h est un nombre strictement positif appelé *hauteur de troncature*.

Cependant, il est plus simple pour un utilisateur de définir le cône à partir du rayon de base r , de la hauteur de troncature h , et du rayon au sommet r_t , appelé *rayon de troncature* (figure 10.4a). L'équation du cône en fonction de ces paramètres est alors :

$$h^2 (x^2 + y^2) = (rh + (r_t - r)z)^2$$

Le corps du cône est alors défini par le système d'équations et d'inégalités suivant :

$$1. \quad h^2 (x^2 + y^2) = (rh + (r_t - r)z)^2$$

2. $0 \leq z \leq h$.

Au corps du cône, nous ajoutons deux faces, la face du bas qui est le disque contenu dans le plan $z = 0$, centré en O , et de rayon r , et la face du haut qui est un disque contenu dans le plan $z = h$, centré en $(0, 0, h)$, et de rayon r_t . Ces deux faces sont définies par le système d'équations et d'inégalités suivantes :

- Face du bas : $z = 0$ et $x^2 + y^2 \leq r^2$;
- Face du haut : $z = h$ et $x^2 + y^2 \leq r_t^2$.

10.5.2 Méridiens sur un cône de révolution

Un *méridien* sur un cône de révolution est un ensemble de points M du corps du cône, de coordonnées sphériques (r_m, θ_m, ϕ_m) , tels que l'angle θ_m soit fixé à une certaine valeur. Plus précisément, étant donné $\theta_0 \in [0, 2\pi[$, le méridien d'angle θ_0 est constitué de l'ensemble des points M du corps du cône dont l'angle θ_m des coordonnées sphériques est égal à θ_0 (voir figure 10.4a).

10.5.3 Facettisation d'un cône de révolution

Étant donné un nombre de méridiens m , nous allons considérer des méridiens \mathcal{M}_i d'angle $\theta_i = 2\pi \frac{i}{m}$, pour $i = 0, \dots, m$, régulièrement disposés sur le corps du cône. Nous construirons ensuite une facette trapézoïdale entre les méridiens \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_{i+1} , pour $i = 0, \dots, m-1$. Nous construirons ensuite deux facettes pour la face du haut et pour la face du bas du cône (voir figure 10.4b). Nous aurons au total, comme dans le cas du cylindre, $4m + 2$ sommets.

Nous construisons tout d'abord la liste des sommets du polyèdre. Pour $i = 0, \dots, m$, on définit le sommet P_i comme le point du méridien \mathcal{M}_i qui est à la hauteur 0. Les coordonnées cartésiennes de ce sommet P_i sont données par $x_i = r \cos \theta_i$, $y_i = r \sin \theta_i$ et $z_i = 0$.

Pour $i = m+1, \dots, 2m+1$, on définit le sommet P_i comme le point du méridien $\mathcal{M}_{i-(m+1)}$ qui est à la hauteur h . Les coordonnées cartésiennes de ce sommet P_i sont données par $x_i = r_t \cos \theta_{i-(m+1)}$, $y_i = r_t \sin \theta_{i-(m+1)}$ et $z_i = h$.

Comme dans le cas du cylindre, les sommets de la face du haut et de la face du bas du cône ne doivent pas être confondus avec les sommets du corps du cône. Pour cette raison, bien que ces sommets aient la même position dans l'espace, nous leur donnerons des numéros différents.

Voici les sommets destinée à représenter les faces du bas : pour $i = 2m+2, \dots, 3m+1$, le sommet P_i est égal au sommet $P_{i-(2m+2)}$. En d'autres termes, tous les sommets sont dupliqués.

Voici les sommets destinés à représenter la face du haut : pour $i = 3m+2, \dots, 4m+1$, le sommet P_i est égal au sommet $P_{i-(2m+1)}$.

Les facettes dans le cas du cône sont définies exactement de la même manière que dans le cas du cylindre (voir la partie 10.4.3).

10.6 Sphères

10.6.1 Définition de la sphère

Considérons la sphère S_r de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon r . Rappelons qu'il s'agit de l'ensemble des points $M = (x_m, y_m, z_m)$ de l'espace, de coordonnées sphériques $(r_m, \theta_m, \varphi_m)$ tels

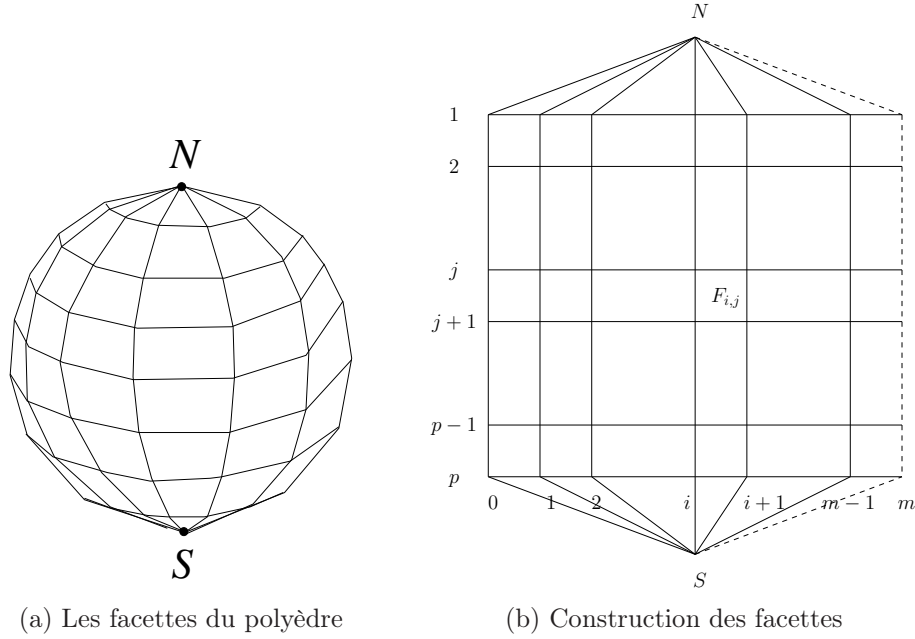


FIG. 10.6: Définition et facettisation d'une sphère

Au total, cela fera $nbsomm = (m + 1)p + 2$ sommets. Pour numérotter les sommets de 0 à $nbsomm - 1$, pour $i = 0, \dots, m$ et $j = 1, \dots, p$, on posera $P_{ip+j-1} = M_{i,j}$. On posera aussi $P_{(m+1)p} = S$ et $P_{(m+1)p+1} = N$. Ainsi, tous les sommets P_k sont bien définis pour $k = 0, \dots, nbsomm - 1$.

10.6.3.b Construction des facettes à 4 sommets

Le nombre total de facettes du polyèdre sera $m.(p + 1)$.

Nous l'avons dit, les facettes qui ne sont pas incidentes à N ou S auront 4 sommets.

Pour $i = 0, \dots, m - 1$ et $j = 1, \dots, p - 1$, on veut construire une face $F_{i,j}$ (voir figure 10.6b) avec les sommets $M_{i,j}$, $M_{i+1,j}$, $M_{i+1,j+1}$ et $M_{i,j+1}$.

Cependant, une face est une suite de numéros de sommets, et non pas une suite de points. En tenant compte que le sommet P_{ip+j-1} est égal à $M_{i,j}$, on obtient les numéros de sommets suivants pour la face $F_{i,j}$:

- $ip + j - 1$;
- $(i + 1)p + j - 1$;
- $(i + 1)p + j$;
- $ip + j$.

Les faces devant être stockées dans un tableau à 1 dimension, nous devons numérotter les faces $F_{i,j}$ de 0 à $m(p - 1) - 1$. L'ordre de la numérotation des faces importe peu.

10.6.3.c Construction des faces à 3 sommets

Nous allons maintenant construire les faces numérotées entre $m(p - 1)$ et $m(p + 1) - 1$, qui sont les faces triangulaires incidentes aux pôles S et N .

Traitons tout d'abord les **faces incidentes au pôle nord** : Pour $i = 0, \dots, m - 1$, il y a une face triangulaire ayant pour sommets N , $M_{i+1,1}$ et $M_{i,1}$. En tenant compte de la numérotation

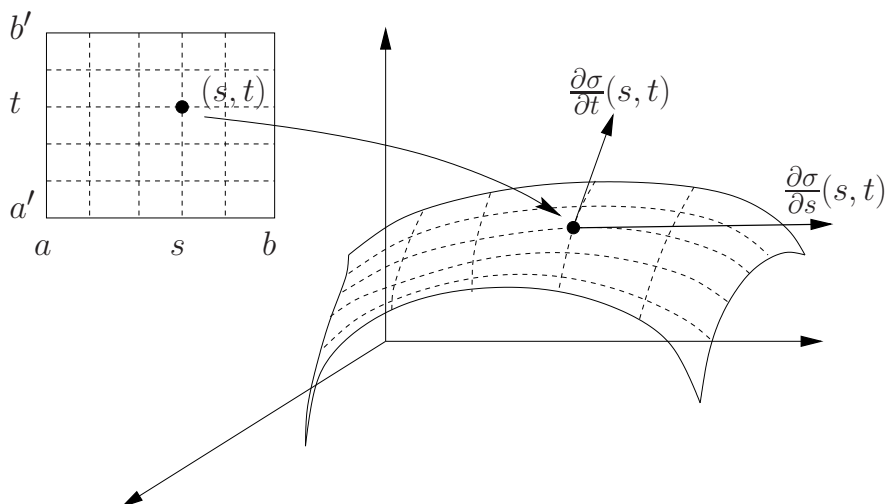


FIG. 11.2: Exemple de surface paramétrée

partielle de σ par rapport à s au point (s_0, t_0) . De même, on dit que σ est *dérivable par rapport à t au point (s_0, t_0)* si la fonction g_{s_0} de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 définie par $g_{s_0}(t) = \sigma(s_0, t)$, pour s_0 fixé, est dérivable au point t_0 . On note alors $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s_0, t_0) = g'_{s_0}(t_0)$. Le vecteur $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s_0, t_0)$ s'appelle la *dérivée partielle* de σ par rapport à t au point (s_0, t_0) .

Une surface $\sigma : [a, b] \times [a', b'] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite *continuellement différentiable* (ou de classe C^1), si la surface σ est dérivable par rapport à s et à t en tout point $(s, t) \in [a, b] \times [a', b']$, et les fonctions $(s, t) \longmapsto \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t)$ et $(s, t) \longmapsto \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)$ sont des applications continues de $[a, b] \times [a', b']$ dans \mathbb{R}^3 .

11.2.3 Surfaces régulières, plan tangent, vecteur normal

Une surface $\sigma : [a, b] \times [a', b'] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite *régulière* si elle est de classe C^1 et en tout point $(s, t) \in [a, b] \times [a', b']$ les vecteurs $\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t)$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)$ sont linéairement indépendant. Cela signifie que le sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t)$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)$ est un sous-espace de dimension 2, c'est à dire un plan.

En un point $\sigma(s, t)$ d'une surface régulière σ , on appelle *plan tangent* à σ l'unique plan qui contient les deux droites passant par le point $\sigma(s, t)$ et dirigées respectivement par les vecteurs $\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t)$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)$.

Un *vecteur normal* à la surface σ est un vecteur orthogonal au plan tangent. On peut calculer un vecteur normal en calculant le produit vectoriel des deux vecteurs $\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t)$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)$, qui leur est toujours orthogonal (voir la parie 11.1).

11.2.4 Facettisation des surfaces paramétrées

Soit $\sigma : [a, b] \times [a', b'] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. On cherche à facettiser σ , autrement dit à l'approximer par un polyèdre.

11.2.4.a Construction des sommets

Soient $m \geq 1$ et $p \geq 1$ deux entiers. Nous allons découper l'intervalle $[a, b]$ en m intervalles, et l'intervalle $[a', b']$ en p intervalles.

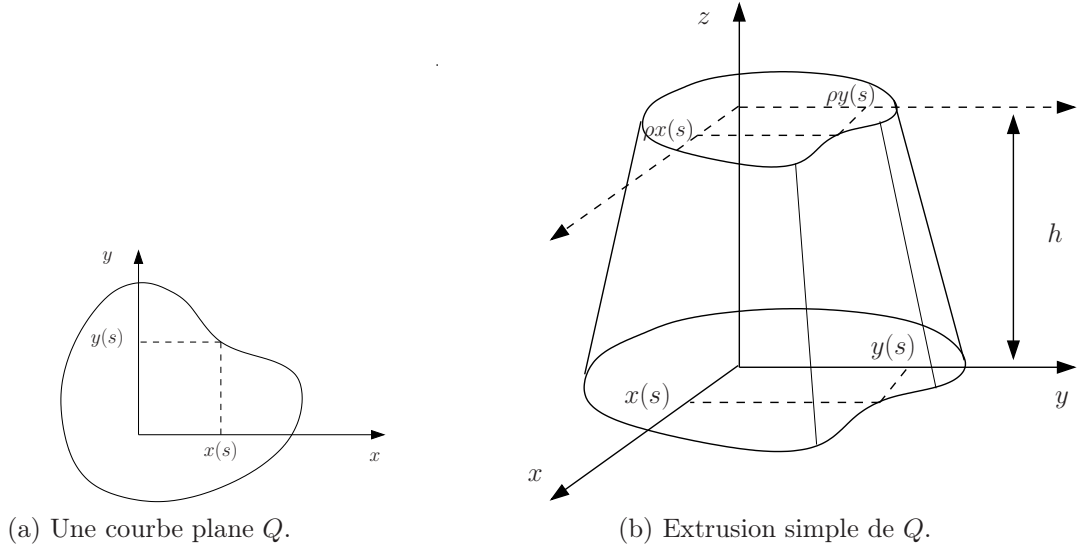


FIG. 11.3: Surface conique construite par extrusion simple.

Pour $i = 0, \dots, m$, soit $s_i = a + \frac{i}{m}(b - a)$. Pour $j = 0, \dots, p$, soit $t_j = a' + \frac{j}{p}(b' - a')$. Les nombres s_i sont régulièrement répartis sur l'intervalle $[a, b]$, et les nombres t_j le sont sur l'intervalle $[a', b']$.

Pour $i = 0, \dots, m$ et $j = 0, \dots, p$, considérons le point $M_{i,j} = \sigma(s_i, t_j)$. Nous obtenons $nbsomm = (m + 1)(p + 1)$ points qui seront les sommets du polyèdre. Pour numéroter ces sommets de 0 à $nbsomm - 1$, on pose $P_{i(p+1)+j} = M_{i,j}$.

11.2.4.b Construction des facettes

Nous allons construire $2mp$ facettes triangulaires. L'avantage des triangles est d'assurer que toutes les facettes sont planes. Pour $i = 0, \dots, m - 1$ et $j = 0, \dots, p - 1$, nous définissons une facette $F_{i,j}$ ayant pour sommets les points $M_{i,j}$, $M_{i+1,j}$ et $M_{i+1,j+1}$, et une facette $F'_{i,j}$ ayant pour sommets les points $M_{i,j}$, $M_{i+1,j+1}$ et $M_{i,j+1}$. Compte tenu de la numérotation $P_{i(p+1)+j} = M_{i,j}$, la facette $F_{i,j}$ est plus précisément constituée des numéros de sommets suivants :

- $i(p + 1) + j$;
- $(i + 1)(p + 1) + j$;
- $(i + 1)(p + 1) + j + 1$;

La facette $F'_{i,j}$, quand à elle, est composée des numéros :

- $i(p + 1) + j$;
- $(i + 1)(p + 1) + j + 1$;
- $i(p + 1) + j + 1$.

11.3 Extrusion simple

Soit $h > 0$ et ρ deux nombres réel et $Q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est courbe plane paramétrée. Notons $x(s)$ et $y(s)$ les coordonnées de $Q(s)$. Nous souhaitons définir une surface conique s'appuyant sur la courbe Q (voir la figure 11.3).

L'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma : [a, b] \times [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) & \longmapsto (x(s)(1+t(\rho-1)), y(s)(1+t(\rho-1)), ht) \end{array} \right.$$

est une surface paramétrée. C'est la surface conique, de hauteur h , de rapport ρ s'appuyant sur la courbe Q .

11.3.1 Facettisation des surfaces coniques

Soit $\sigma : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface conique s'appuyant sur une courbe $Q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $Q(s) = (x(s), y(s))$ pour $s \in [a, b]$. Cette surface peut être facettisée comme indiqué dans la partie 11.2.4. Cependant, on peut souhaiter construire une face du haut et du bas pour fermer la surface.

Soient m un nombre de méridiens et p un nombre de parallèles. En plus des $(m+1)(p+1)$ sommets obtenus en facettisant la surface σ , on ajoute $2m$ sommets, ce qui fait au total $nbsomm = (m+1)(p+1) + 2m$ sommets.

Pour $i = 0, \dots, m-1$, le sommet $P_{(m+1)(p+1)+i}$, qui est un sommet de la face du bas, est égal à $\sigma\left(\left(a + (b-a)\frac{i}{m}\right), 0\right)$. Le sommet $P_{(m+1)(p+1)+m+i}$, qui est un sommet de la face du haut, est égal à $\sigma\left(\left(a + (b-a)\frac{i}{m}\right), 1\right)$.

Les facettes sont les mêmes que celles de la surface σ (voir la partie 11.2.4), en ajoutant les deux facettes :

- $((m+1)(p+1) + m - 1, (m+1)(p+1) + m - 2, \dots, (m+1)(p+1))$ (face du bas) ;
- $((m+1)(p+1) + m, (m+1)(p+1) + m + 1, \dots, (m+1)(p+1) + 2m - 1)$ (face du haut).

Cela fait au total $2mp + 2$ facettes.

11.4 Surfaces de révolution

11.4.1 Surface de révolution obtenue par rotations d'une courbe

Une surface de révolution est une surface qui est invariante par rotation autour d'un certain axe. Par rotation d'une courbe plane autour d'un axe fixe, on engendre une surface de révolution (voir figure 11.4). Dans le cas d'une courbe ouverte dont les extrémités se trouvent sur l'axe de rotation considéré, on obtient une surface "sphérique", c'est à dire qui a la topologie d'une sphère. Dans le cas d'une courbe plane fermée, on obtient une surface "torique", c'est à dire que cette surface a la topologie d'un tore (voir figure 11.5).

Nous définissons cette surface lorsque l'axe de révolution est l'axe des z . Les autres cas s'en déduisent par rotation et translation. Soit $Q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. Notons $Q(t) = (x(t), y(t))$ les coordonnées du point $Q(t)$ pour $t \in [a, b]$. L'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma : [0, 1] \times [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) & \longmapsto (x(t) \cos(2\pi s), x(t) \sin(2\pi s), y(t)) \end{array} \right.$$

est une surface paramétrée. C'est la surface de révolution obtenue par rotation de la courbe Q autour de l'axe des z .

Attention : Il ne faut pas confondre les coordonnées de l'espace \mathbb{R}^2 dans lequel se trouve la courbe Q , pour lequel l'axe de rotation coïncide avec l'axe des y , avec les coordonnées de l'espace \mathbb{R}^3 dans lequel se trouve la surface σ , pour lequel l'axe de rotation est l'axe des z .

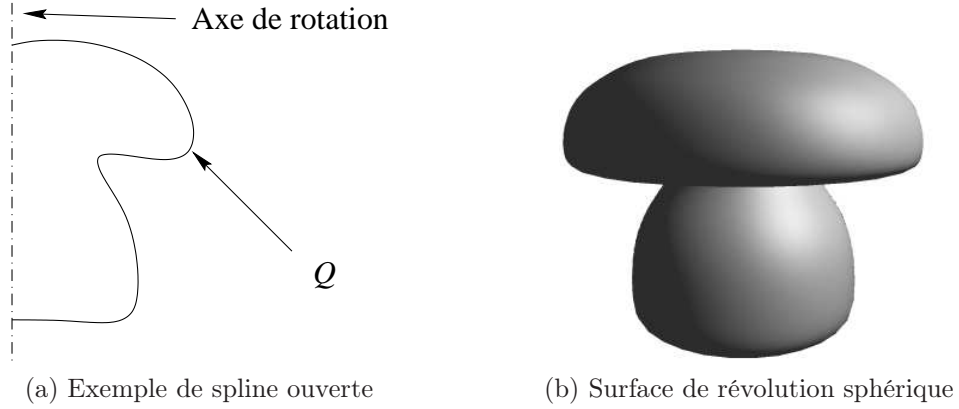


FIG. 11.4: Exemple de courbes spline et la surface de révolution sphérique correspondante

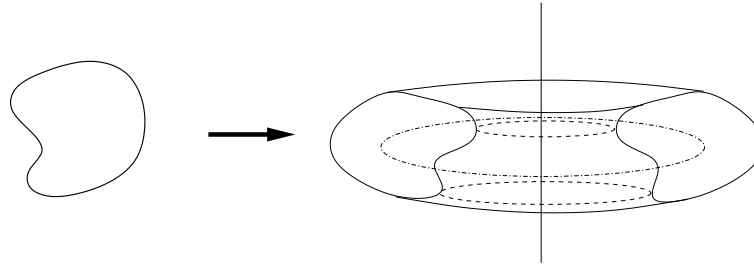


FIG. 11.5: Exemple de surface de révolution torique obtenue à partir d'une courbe fermée plane

11.4.2 Facettisation d'une surface de révolution

Dans le cas d'une surface torique, il suffit de facettiser la surface de révolution σ comme dans la partie 11.2.4. Nous expliquons ici comment facettiser une surface de révolution sphérique.

Soit σ la surface paramétrée obtenue comme ci-dessus par rotation d'une courbe plane Q autour de l'axe des z . Supposons que $x(a) = x(b) = 0$, c'est à dire que les extrémités de la courbe se trouvent sur l'axe de rotation. Pour obtenir une surface sans autointersections, on supposera que $x(t) > 0$ pour $t \in]a, b[$ et que la courbe Q elle même n'a pas d'autointersections. On obtiendra alors une surface sphérique. Cependant, la construction qui suit marchera même dans le cas de surfaces avec autointersections.

On constatera que la construction qui suit présente de nombreux points communs avec la facettisation des sphères présentée dans la partie 10.6.3.

Soit $m \geq 3$ et $p \geq 2$ deux nombres entiers. Nous allons découper la surface de révolution σ suivant m méridiens et p parallèles.

Soit $N = \sigma(0, a)$, appelé *pôle nord* et $S = \sigma(0, b)$ appelé *pôle sud*. Tous les méridiens convergeant au pôle nord et au pôle sud, les facettes incidentes à N et à S seront triangulaires. Toutes les autres facettes auront 4 sommets.

Pour $i = 0, \dots, m$, soit $s_i = \frac{i}{m}$. Pour $j = 1, \dots, p$, soit $t_j = a + (b - a)\frac{j}{(p+1)}$.

Pour $i = 0, \dots, m$ et $j = 1, \dots, p$, nous aurons un sommet $M_{i,j} = \sigma(s_i, t_j)$ du polyèdre. Enfin, nous rajouterons les deux sommets N et S , les deux pôles de la sphère.

Au total, cela fera $nbsomm = (m + 1)p + 2$ sommets. Pour numérotter les sommets de 0 à $nbsomm - 1$, pour $i = 0, \dots, m$ et $j = 1, \dots, p$, on posera $P_{ip+j-1} = M_{i,j}$. On posera aussi $P_{(m+1)p} = S$ et $P_{(m+1)p+1} = N$. Ainsi, tous les sommets P_k sont bien définis pour $k = 0, \dots, nbsomm - 1$.

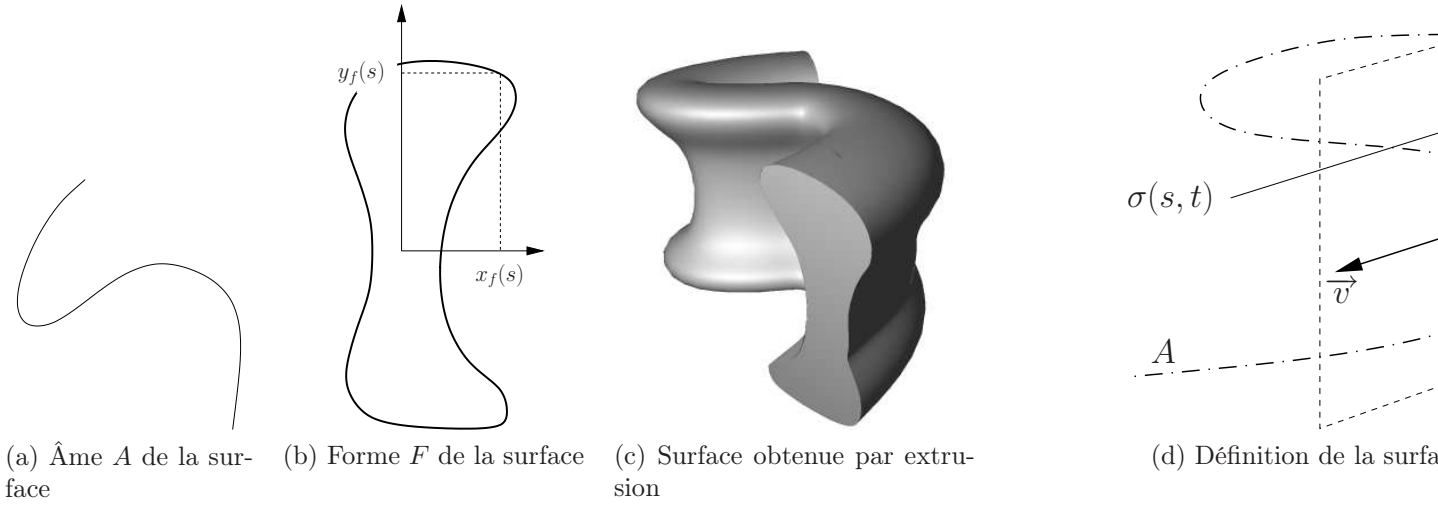


FIG. 11.6: Exemple de surface obtenue par extrusion

Après avoir défini ainsi les sommets dans leur numérotation, les facettes, qui sont des suites de numéros de sommets, sont exactement les mêmes que dans le cas d'une sphère traité dans la partie 10.6.3.

11.5 Extrusion généralisée

L'extrusion généralisée est un procédé qui permet de construire une surface à partir de deux courbes planes, l'une appelée *âme* de la surface, et notée A , l'autre appelée *forme* de la surface, et notée F .

Intuitivement, la surface en question est engendrée en plaçant la courbe forme centrée en chaque point de la courbe âme, dans un plan perpendiculaire à la courbe âme (voir figure 11.6).

11.5.1 Construction de la surface

Plus précisément, soit

$$\begin{cases} A : [a', b'] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto A(t) = (x_a(t), y_a(t), 0) \end{cases}$$

une courbe plane ouverte appelée *âme* (voir un exemple sur la figure 11.6a). La courbe A est une courbe du plan, mais par commodité, nous l'avons définie comme une courbe dans l'espace contenue dans le plan d'équation $z = 0$.

Soit aussi

$$\begin{cases} F : [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto F(s) = (x_f(s), y_f(s)) \end{cases}$$

une courbe plane fermée appelée *forme* (voir un exemple sur la figure 11.6b). On supposera la courbe A régulière. Dans le cas où l'âme est une courbe fermée, on obtient une surface torique. Dans le cas d'un courbe âme ouverte, on obtient une surface cylindrique.

Nous définissons une surface paramétrée $(s, t) \longmapsto \sigma(s, t)$ comme suit :