Dus we willen de afgeleide benaderen met functiewaarden in de discretisatie rooster

$$f^{(l)}(x) \approx \frac{1}{h^l} \sum \gamma_k f(x+hk).$$

Noem de fout die we hier bij maken e

$$e(h) = \frac{1}{h^l} \sum \gamma_k f(x+hk) - f^{(l)}(x).$$

Wat we willen weten is welke orde dat deze fout kan bereiken in andere woorden hoe hoog kunnen we q kiezen zodat $e(h) = O(h^q)$ dit is equivalent aan zeggen dat de eerste termen van de taylor reeks gelijk zijn aan 0. Maar de taylorreeks hier van uitrekenen is lastig het vorige is equivalent aan zeggen dat $e(h)h^l = O(h^q)h^l = O(h^{q+l}) = \alpha(h)$ waar daarvan de eerste termen van de taylorreeks 0 moeten zijn. In andere woorden $\alpha(h)^j(0) = 0$. Met wat rekenwerk is voor $j < l$

$$\alpha^{(j)}(h) = \sum \gamma_k k^j f^{(j)}(x+hk) - \frac{l!}{(l-j)!} f^{(l)}(x) h^{l-j} \tag{1}$$

$$\alpha^{(j)}(0) = \sum \gamma_k k^j f^{(j)}(x) = 0 \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$0 = \sum \gamma_k k^j \tag{3}$$

Als l even is en γ_k symmetrisch (en een oneven aantal) zoals in de les dan is aan deze voorwaarde voldaan voor j oneven.

Voor $j = l$ gebeurd er iets speciaal:

$$\alpha^{(l)}(h) = \sum \gamma_k k^l f^{(l)}(x+hk) - l! f^l(x) \tag{4}$$

$$\alpha^{(l)}(0) = \sum \gamma_k k^l f^{(l)}(x) - l! f^l(x) = 0 \Leftrightarrow \tag{5}$$

$$l! = \sum \gamma_k k^l \tag{6}$$

Voor $q + l > j > l$:

$$\alpha^{(j)}(h) = \sum \gamma_k k^j f^{(j)}(x+hk) \tag{7}$$

$$\alpha^{(j)}(0) = \sum \gamma_k k^j f^{(j)}(x) = 0 \Leftrightarrow \tag{8}$$

$$0 = \sum \gamma_k k^j \tag{9}$$

Zelfde opmerking als hiervoor over oneven j.
Er zijn dus $l + q$ ($=$ voor elke j in $0 < j < l + q$) vergelijkingen deze vormen een goed gedragend lineair stelsel vergelijkingen. Dus ge hebt $l + q$ onbekenden $= \gamma_k' s$ nodig om hier een oplossing voor te vinden. In het geval van $l = 2$ en symmetrische coefficienten hebt ge r punten voor en na het centrum in totaal dus test