Programmeeropgave
Eindige Differentiemethoden en Financiële Wiskunde

Academiejaar 2022–2023

In deze programmeeropgave zullen we de eerlijke prijs van een Europese down-and-out call optie benaderen door de numerieke oplossing van een partiële differentiaalvergelijking. Een *down-and-out call optie* is een call optie met als extra voorwaarde dat het zijn waarde verliest zodra de prijs van het onderliggende aandeel onder een vooraf gegeven *barrier* L komt. Zo'n optie kan interessanter zijn voor mogelijke kopers dan de call optie op zich (waarom?).

Beschouw de Black–Scholes partiële differentiaalvergelijking (PDV)

$$u_t(s,t) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss}(s,t) + rsu_s(s,t) - ru(s,t) \qquad (s > L,\ 0 < t \leq T).$$

Hierbij staat $u(s,t)$ voor de eerlijke prijs van een down-and-out call optie als de onderliggende aandeelprijs gelijk is aan s op t tijdseenheden tot het aflooptijdstip van de optie. De r, σ en T zijn gegeven positieve constanten: r is de rente, σ de volatiliteit en T de looptijd.

Zij K de uitoefenprijs van de optie (met $K > L$). Om de numerieke oplossing van de Black–Scholes PDV mogelijk te maken, kiezen we eerst een begrensd plaatsdomein:

$$L \leq s \leq S$$

met $S \gg K$ gegeven. We hebben de beginvoorwaarde

$$u(s,0) = \max(s-K, 0)$$

en de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(L,t) &= 0, \\ u(S,t) &= S - e^{-rt}K. \end{aligned}$$

Voor de waarden van de parameters nemen we in deze opgave

$$r = 0.01,\ \sigma = 0.25,\ T = 2,\ L = 80,\ K = 100,\ S = 300.$$

Zij $L = s_0 < s_1 < \ldots < s_m < s_{m+1} = S$ equidistante plaatsroosterpunten met bijbehorende maaswijdte h.

1. Semidiscretisatie van de Black–Scholes PDV met tweede-orde centrale eindige differentieschema's voor zowel convectie als diffusie leidt tot een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen $U'(t) = AU(t) + g(t)$. Geef de formules voor de betreffende matrix A en vectorwaardige functie g.

2. Maak m.b.v. Matlab voor verschillende waardes van m, waaronder $m = 25, 50, 100$, een grafiek van $||e^{tA}||_2$ versus t. Wat suggereert het verkregen resultaat voor de stabiliteit van de semidiscretisatie ?

3. Bereken m.b.v. Matlab voor dezelfde waardes m als in onderdeel 2 de logarithmische norm $\mu_2[A]$. Bespreek het resultaat.

4. Voor de numerieke oplossing van de semidiscrete Black–Scholes PDV maken we gebruik van de impliciete trapeziumregel. Geef de formule die de nieuwe benadering U_n uitdrukt in termen van U_{n-1}, A, g en τ waarbij τ de tijdstap is.

5. Schrijf een Matlab programma `DOcall_numer.m` dat met de hierboven gegeven plaats- en tijdsdiscretisatiemethoden de Black–Scholes PDV voor een down-and-out call optie numeriek oplost. Definieer hierbij de matrix A in Matlab via het commando `spdiags`. Voor de efficiënte uitvoering van de impliciete trapeziumregel is het aan te bevelen om van een LU-decompositie gebruik te maken, zie hiertoe algemene numerieke wiskundeboeken en het Matlab commando `lu`. Pas verder de *cell averaging* techniek toe bij de definitie van de beginvector U_0.

Het is bekend [1] dat de eerlijke prijs van een Europese down-and-out call optie voor $t = T$ gegeven wordt door de formule

$$u(s,T) = sN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) - sN(y)\left(\frac{L}{s}\right)^{2\lambda} + Ke^{-rT}N(y - \sigma\sqrt{T}\,)\left(\frac{L}{s}\right)^{2\lambda-2}$$

waarbij

$$d_1 = \frac{\ln(s/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad \lambda = \frac{r + \sigma^2/2}{\sigma^2}, \quad y = \frac{\ln(L^2/(sK))}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

Hierbij is $N(\cdot)$ de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling.

6. Schrijf een Matlab programma `DOcall_exact.m` dat de exacte eerlijke prijs van de down-and-out call optie berekent voor de boven gegeven parameterwaarden. Bereken met dit programma de prijzen van de optie op de plaatsroosterpunten voor $m = 50$.

7. We onderzoeken vervolgens de geschaalde 2-norm van de globale plaatsfout als $m = 50$. Vergelijk hiertoe je eigen numerieke oplossing `DOcall_numer.m` (met voldoende kleine tijdstap τ) met de exacte oplossing `DOcall_exact.m`. In de praktijk is men vaak alleen geïnteresseerd in aandeelprijzen in de buurt van de uitoefenprijs, bijv. $0.7K < s < 1.3K$. Stel dus dat

   $$s_{k_0-1} \leq \max\{0.7K, L\} < s_{k_0} < \ldots < s_{k_1} < 1.3K \leq s_{k_1+1},$$

   en bestudeer dan de grootheid

   $$e(m) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=k_0}^{k_1} |u(s_i,T) - U_i(T)|^2}\ .$$

8. We proberen nu de orde van convergentie van de semidiscretisatie numeriek te bepalen. Maak hiertoe een `loglog`-plot van $e(m)$ versus $1/m$ voor $m = 10, 11, 12, \ldots, 100$ en merk op dat als
$$e(m) \approx Cm^{-p}$$
met constanten $C, p > 0$ dan geldt dat
$$\log(e(m)) \approx \log(C) - p\log(m).$$
Bepaal op grond van de numerieke resultaten zo goed mogelijk de orde van convergentie (hint: zoek een nuttig commando in Matlab).

Schrijf een verslag waarin je de antwoorden op de bovenstaande vragen verwerkt. Voeg ook de gemaakte plaatjes en, indien nodig, een deel van de output toe. Richtlijnen bij het schrijven van een wiskunde verslag vind je achteraan deze opgave. Tezamen met het verslag dien je ook de Matlab codes die je geschreven hebt in. Zorg ervoor dat uit je verslag duidelijk blijkt bij welke opgave welke code hoort.

Inleveren: je verslag en de bijbehorende Matlab codes stuur je uiterlijk donderdag 22 december 2022 in één zip-file per email toe aan Pieter Lamotte (`pieter.lamotte@uantwerpen.be`).

Referenties

[1] J.C. Hull: Options, Futures, and Other Derivatives, 10th ed. Pearson (2017).

Richtlijnen bij het schrijven van een wiskunde verslag

1. Geef op het voorblad in ieder geval: de titel van het verslag, het opleidingsonderdeel, je naam, en de datum.
2. Deel het verslag op een logische en overzichtelijke wijze in. Gebruik hoofdstukken en paragrafen. Geef in het bijzonder een inleiding in de probleemstelling, de belangrijkste conclusies en een referentielijst. Neem computerprogramma's op in een appendix.
3. Wees *duidelijk, beknopt en volledig.* Laat minder relevante zaken weg.
4. Zorg dat de tekst goedlopend en samenhangend is. Vermijd lange zinnen.
5. Gebruik de officiële Nederlandse spelling.
6. Kies een prettig leesbaar lettertype en grootte. Nummer de pagina's.
7. Nummer definities, stellingen, lemma's en gevolgen. Nummer alle wiskundige formules waar je in de tekst naar verwijst.
8. Nummer figuren. Voorzie ze van een duidelijk onderschrift. Zorg dat de figuren en alle symbolen hierin *voldoende groot en goed leesbaar* zijn. Figuren bespreek je in de tekst.
9. Kies een natuurlijke, beknopte wiskundige notatie. Duid verschillende grootheden aan met verschillende symbolen. Alle symbolen in je verslag dienen te zijn uitgelegd.
10. Vermijd computertaal in wiskundige formuleringen of de gewone tekst, tenzij dit het onderwerp van een bespreking vormt.
11. Als een resultaat uit de wetenschappelijke literatuur wordt gebruikt, verwijs je naar de betreffende referentie. Voeg aan het einde van je verslag de lijst van referenties naar de literatuur toe die je hebt gebruikt. Vermijd zoveel mogelijk verwijzingen naar websites.
12. Het is niet toegestaan om tekst (vrijwel) letterlijk uit de projectbeschrijving, de bestaande literatuur of van het internet over te nemen. *Gebruik steeds je eigen woorden.*
13. Alles wat je opschrijft dien je zelf te begrijpen.
14. Lees het verslag regelmatig nauwgezet en kritisch door. Vraag je in het bijzonder bij iedere zin af of deze *correct* is en *begrijpelijk voor de lezer*. Dit kost tijd!
15. Lever je verslag voor de opgegeven datum in.