Universiteit Antwerpen

Kaleidoscopisch projectwerk

Differentievergelijkingen

Auteur: *Isidoor Pinillo Esquivel*

Begeleider: *Werner Peeters*

Academiejaar 2021-2022

Samenvatting

In deze paper introduceren we lineaire differentievergelijkingen en lineaire operatoren. Verder geven we vormen van de algemene oplossing van lineaire differentievergelijkingen door companion operatoren (companion matrix) en operatorfactorisatie te gebruiken.

1 Basisbegrippen en notatie

In deze sectie worden enkele basisbegrippen en algemene notaties ingevoerd. Ter verduidelijking worden er ook een aantal bijhorende voorbeelden gegeven.

Notatie 1.0.1
Vanaf nu zal altijd

- K een willekeurige verzameling zijn.
- M een monoïde zijn.
- $Z(M)$ het centrum van M zijn.
- G een groep zijn.
- A een commutatieve/abelse groep zijn.
- F een lichaam zijn.
- $\text{Fun}(K, K) := \{f : K \to K | f \text{ is een functie van K naar K}\}$.
- $\text{End}(G) := \{f \in \text{Fun}(G, G) | \forall x, y \in G : f(x + y) = f(x) + f(y)\}$.
- $\text{Aut}(G) := \{f \in \text{End}(G) | f \text{ inverteerbaar}\}$.

1.1 Rijen en differentievergelijkingen

Rijen en differentievergelijkingen zullen overal opduiken in deze paper en zijn een eenvoudig beginpunt.

Definitie 1.1.1 (rij)
Een rij is een afbeelding uit $\mathbb{Z}$.

Opmerking 1.1.2
We hadden rijen ook kunnen definiëren als enkel een afbeelding uit $\mathbb{N}$. Meeste resultaten in deze paper zullen ook een versie met deze alternatieve definitie hebben.

Notatie 1.1.3 (rij)
Noteer alle rijen naar K als $(K)_{\mathbb{Z}}$ en een rij als $(f_i) \in (K)_{\mathbb{Z}}$ waar bijna overal $i \in \mathbb{Z}$ impliciet zal zijn.

Voorbeeld 1.1.4 (rij van Fibonacci)
Een bekende rij van getallen is die van Fibonacci (f_i). Deze rij wordt gedefinieerd aan de hand van zijn eerste twee elementen, f_0 en f_1, respectievelijk gelijk aan 0 en 1, waarna elk volgend element gelijk is aan de som van de twee voorgaande, en elk vorig element gelijk is aan het verschil. Of formeel:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

...	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	...
...	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	...

De Fibonacci rij uit vorig voorbeeld wordt geconstrueerd door een relatie in de rij. Een type van relaties in getalrijen zijn differentievergelijkingen.

Definitie 1.1.5 (differentievergelijking)
Een differentievergelijking ϕ van orde $k \in \mathbb{N}$ is een rij van relaties binnen een andere rij (f_i) van volgende vorm:

$$\phi_n((f_j)_{j=n}^{n+k}) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ met } \phi_i : K^{k+1} \to K.$$

Opmerking 1.1.6
Aangezien voorgaande definitie geen expliciete differentie bevat, wat later aan bod zal komen (zie (1.2.2)), wordt hiernaar ook wel verwezen als recursierelatie.

Voorbeeld 1.1.7 (Fibonacci)
De rij van Fibonacci (f_i) voldoet aan

$$\phi_n((f_j)_{j=n}^{n+k}) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ met } \phi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (f_n, f_{n+1}, f_{n+2}) \to f_{n+2} - f_{n+1} - f_n$$

Wat equivalent is met

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definitie 1.1.8 (oplossing van een differentievergelijking)
$(f_i) \in (K)_{\mathbb{Z}}$ is een oplossing van een differentievergelijking ϕ als en slechts als (f_i) aan ϕ voldoet.

1.2 Operatoren

Operatoren zullen de notatie significant verbeteren en de grond leggen voor elegantere bewijzen. De naam "differentievergelijkingen" komt van differentie operator.

Notatie 1.2.1
Om notatie te vereenvoudigen zal vanaf nu

- de index i impliceert een rij.
- ronde haakjes duiden aan dat een operator op een rij inwerkt, anders is er sprake van compositie.
- constante rijen zullen duidelijk zijn uit hun context, meestal door een ontbrekende index i.
- bewerkingen tussen rijen gebeuren elementwijs (ook compositie).
- functies werken elementwijs op rijen.
- matrixoperatorenvermenigvuldiging werken via normale matrixvermenigvuldiging.

Definitie 1.2.2 $(E, \Delta, |_k)$
E is de shift operator, Δ is de differentieoperator en $|_k$ is de "evaluatie in k" operator.

$$\begin{aligned} E &: (K)_{\mathbb{Z}} \to (K)_{\mathbb{Z}} : (f_i) \to (f_{i+1}) \\ \Delta &: (G)_{\mathbb{Z}} \to (G)_{\mathbb{Z}} : (f_i) \to (f_{i+1} - f_i) \\ |_k &: (K)_{\mathbb{Z}} \to (K)_{\mathbb{Z}} : (f_i) \to (f_k) \end{aligned}$$

Lemma 1.2.3
$E, |_k$ bewaren de elementwijze optelling in $(G)_\mathbb{Z}$.

Bewijs. Verificatie. $\square$

Definitie 1.2.4 (bijna ring)
Een bijna ring is een ring dat aan minder axioma's voldoet. R is een bijna ring als en slechts als

- R een groep is voor de optelling.
- de multiplicatie op R associatief is.
- de multiplicatie links en rechts distributief is in R.

Stelling 1.2.5
Alle operatoren die de elementwijze optelling in $(G)_\mathbb{Z}$ bewaren, vormen een bijna ring met compositie als vermenigvuldiging en de uitgebreide optelling naar operatoren.

Bewijs. Verificatie. $\square$

Gevolg 1.2.6
$\forall A, B, C \in End((G)_\mathbb{Z}) : A(B + C) = AB + AC$.

Opmerking 1.2.7
Rechtse distributie is een gevolg van hoe de uitgebreide optelling naar operatoren gedefinieerd is.

Opmerking 1.2.8
Δ bewaart alleen de de elementwijze optelling in $(G)_\mathbb{Z}$ als deze commutatief is. In principe is dit geen probleem want $\Delta = E - 1$.

Lemma 1.2.9
$\forall n \in \mathbb{Z} : |_n E = |_{n+1}$ en $\Delta = E - 1$.

Bewijs. Verificatie. Uitgeschreven: $\forall f_i \in (G)_\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}(|_n E)(f_i) &= (|_n)(f_{i+1}) \\ &= f_{n+1} \\ &= (|_{n+1})(f_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Delta)(f_i) &= f_{i+1} - f_i \\ &= (E - 1)(f_i)\end{aligned}$$

$\square$

Gevolg 1.2.10
$\forall n \in \mathbb{Z} : |_n \Delta = |_{n+1} - |_n$.

Bewijs. Verificatie. Uitgeschreven: $|_n \Delta = |_n (E - 1) = |_n E - |_n = |_{n+1} - |_n$. $\square$

Stelling 1.2.11
$\forall g_i \in (\mathrm{Fun}(K,K))_{\mathbb{Z}} : Eg_i = g_{i+1}E.$

Bewijs. $\forall f_i \in (K)_{\mathbb{Z}} : E(g_i(f_i)) = g_{i+1}(f_{i+1}) = g_{i+1}(E(f_i)).$ □

Gevolg 1.2.12
Dit betekent ook dat constante functie rijen commuteren met E.

Notatie 1.2.13
In het geval dat $g_i : M \to M : m \to a_i * m$ dan schrijven we gewoon

$$Ea_i = a_{i+1}E$$

dan is de compositie van a_i de elementwijze vermenigvuldiging met a_i.

Definitie 1.2.14 (Δ^{-1})
Δ^{-1} is de inverse differentieoperator en wordt gedefinieerd door de volgende eigenschap

$$\Delta^{-1}\Delta = 1 - |_0.$$

Stelling 1.2.15 (goed gedefinieerdheid van Δ^{-1})
Δ^{-1} is goed gedefinieerd en

$$\Delta^{-1} :(G)_{\mathbb{Z}} \to (G)_{\mathbb{Z}} : (f_n) \to \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f_j & = f_{n-1} + f_{n-2} + ... + f_1 + f_0 \qquad \text{als } n > 0 \\ 0 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{als } n = 0 \; . \\ \displaystyle -\sum_{j=n}^{-1} f_j & = -f_n - f_{n+1} - ... - f_{-2} - f_{-1} \quad \text{als } n < 0 \end{cases}$$

Bewijs. Verificatie en uniciteit volgt uit (2.0.5). Uitgeschreven is dit $\forall f_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} (1 - |_0)(f_i) &= (\Delta^{-1}\Delta)(f_i) \Leftrightarrow \\ f_i - f_0 &= (\Delta^{-1})(f_{i+1} - f_i) \Leftrightarrow \\ \forall n \in \mathbb{Z} : (|_n)(f_i - f_0) &= (|_n)(\Delta^{-1})(f_{i+1} - f_i) \end{aligned}$$

In overeenstemming met de uiteenvallende definitie van van Δ^{-1} als functie van n, krijgen we hier elementgewijs:
Voor $\forall n > 0$:

$$\begin{aligned} f_n - f_0 &= \sum_{j=0}^{n-1} (f_{j+1} - f_j) \\ &= f_n - f_{n-1} + f_{n-1} - f_{n-2} + ... + f_2 - f_1 + f_1 - f_0 \\ &= f_n - f_0. \end{aligned}$$

Voor $n = 0$:

$$f_0 - f_0 = 0.$$

Voor $\forall n < 0$:

$$\begin{aligned} f_n - f_0 &= -\sum_{j=n}^{-1} (f_{j+1} - f_j) \\ &= -(f_0 - f_{-1} + f_{-1} - f_{-2} + ... + f_{n+1} - f_n) \\ &= -(f_0 - f_n) \\ &= f_n - f_0. \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 1.2.16
$\Delta\Delta^{-1} = 1$.

Bewijs. Verificatie. Uitgeschreven :

$$\begin{aligned} 1 = \Delta\Delta^{-1} \Leftrightarrow \\ \forall n \in \mathbb{Z} : |_n = |_n \Delta\Delta^{-1} \Leftrightarrow \\ \forall n \in \mathbb{Z} : |_n = (|_{n+1} - |_n)\Delta^{-1} \Leftrightarrow \\ \forall n \in \mathbb{Z} : |_n = |_{n+1}\Delta^{-1} - |_n\Delta^{-1} \end{aligned}$$

$\forall f_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$:
Voor $\forall n > 0$:

$$\begin{aligned} f_n &= (|_{n+1}\Delta^{-1} - |_n\Delta^{-1})(f_i) \\ &= f_n + f_{n-1} + ... + f_1 + f_0 - f_0 - f_1 - ... - f_{n-1} \\ &= f_n. \end{aligned}$$

Voor $n = 0$:

$$\begin{aligned} f_0 &= (|_1\Delta^{-1} - |_0\Delta^{-1})(f_i) \\ &= f_0 - 0 \\ &= f_0. \end{aligned}$$

Voor $n = -1$:

$$\begin{aligned} f_{-1} &= (|_0\Delta^{-1} - |_{-1}\Delta^{-1})(f_i) \\ &= 0 - (-f_{-1}) \\ &= f_{-1}. \end{aligned}$$

Voor $\forall n < -1$:

$$\begin{aligned} f_n &= (|_{n+1}\Delta^{-1} - |_n\Delta^{-1})(f_i) \\ &= -f_{n+1} - f_{n+2} - ... - f_{-2} - f_{-1} + f_{-1} + f_{-2} + ... + f_{n+2} + f_{n+1} + f_n \\ &= f_n. \end{aligned}$$

$\square$

Voorbeeld 1.2.17 (operatoren en Fibonacci)
Met voorgaande operatoren kunnen we nu, met identieke beginvoorwaarden, de genererende differentievergelijking voor de rij van Fibonacci herschrijven in termen van E:

$$(E^2 - E - 1)(f_i) = 0.$$

Dit kan ook met Δ:

$$\begin{aligned}((\Delta + 1)^2 - (\Delta + 1) + 1)(f_i) &= 0\\ (\Delta^2 + \Delta + 1)(f_i) &= 0.\end{aligned}$$

In volgende tafel staan een paar voorbeelden van operatoren werkende op de rij van Fibonacci:

i	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
f_i	...	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	...
$E(f_i)$	...	1	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$\Delta(f_i)$	...	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	...
$(f_i)\vert_1$	...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$\Delta^{-1}(f_i)$	...	0	-1	0	0	1	2	4	7	12	...

Voorbeeld 1.2.18 (haakjes en operatoren)
Volgend op (1.2.1) letten we op volgende mogelijke misvattingen:

$$\begin{gathered}Ea_i \neq E(a_i) \Leftrightarrow\\ E(a_i f_i) = a_{i+1} f_{i+1} \neq a_{i+1} f_i = E(a_i) f_i.\\ \Delta a_i \neq \Delta(a_i) \Leftrightarrow\\ \Delta(a_i f_i) = a_{i+1} f_{i+1} - a_i f_i \neq a_{i+1} f_i - a_i f_i = \Delta(a_i) f_i.\end{gathered}$$

Voorbeeld 1.2.19 (constante uit context)
Analoog aan voorgaande voorbeeld, en gelet op de notatie van een constante rij, mag $E(f_i) = f_{i+1}$ niet te verwarren zijn met:

$$\begin{aligned}E(f_0) &= f_0\\ &\neq f_1.\end{aligned}$$

Aangezien de shift operator inwerkt op $(K)_{(\mathbb{Z})}$ en niet op $\mathbb{Z}$, kan f_0 enkel wijzen op een constante rij $(f_0)_{i \in \mathbb{Z}}$.
Voorbeeld 1.2.20 (matrixoperatoren)
We starten met een eenvoudig voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} (f_i) = \begin{bmatrix} E(f_i) \\ 1(f_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{bmatrix}.$$

Vervolgens hetzelfde voorbeeld maar dan met een matrixrij:

$$\begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} g_i & h_i \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} E\left(\begin{bmatrix} g_i & h_i \end{bmatrix} \right) \\ 1\left(\begin{bmatrix} g_i & h_i \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{i+1} & h_{i+1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} g_i & h_i \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Verder hetzelfde voorbeeld zonder haakjes:

$$\begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_i & h_i \end{bmatrix} = Eg_i + h_i = g_{i+1}E + h_i.$$

Verder hetzelfde voorbeeld waar de volgorde van de vermenigvuldiging gewisseld is:

$$\begin{bmatrix} g_i & h_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} = g_i E + h_i.$$

2 Lineaire differentievergelijkingen

Een algemene discussie van differentievergelijkingen valt buiten de opzet van dit werk, waardoor we ons hier beperken tot het lineaire geval. In deze sectie zullen we matrixoperatoren en operatorfactorisatie gebruiken om oplossingen van differentievergelijkingen te bestuderen en demonstreren we een aantal resultaten met voorbeelden. Hiervoor definiëren we nog een aantal begrippen.

Definitie 2.0.1 (lineaire differentieoperator)
We noemen $\alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ met $\mathrm{Deg}(\alpha_i) = k$ een lineaire differentieoperator van orde/graad k.

Notatie 2.0.2 (polynomen in E)
We schrijven polynomen in E met Griekse letters.

Definitie 2.0.3 ((in)homogeen lineaire differentievergelijkingen, homogene/ particuliere oplossingen, forceerterm)
Een differentievergelijking van $f_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$ noemt men lineair van orde $k \in \mathbb{N}$ als en slechts als deze herschreven kan worden in volgende vorm:

$$\begin{aligned} (\alpha_i)(f_i) &= g_i \Leftrightarrow \\ (a_i^0 E^k + a_i^1 E^{k-1} + a_i^2 E^{k-2} + ... + a_i^k E^0)(f_i) &= g_i \end{aligned}$$

met

- $\alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ de corresponderende lineaire operator.
- $a_i^j \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}, \forall j$ de coëfficiënten.
- $g_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$ de forceerterm.

Lineaire differentievergelijkingen worden homogeen genoemd als $g_i = 0$ en anders inhomogeen. Oplossingen voor deze types differentievergelijkingen worden respectievelijk homogeen en particulier genoemd.

Voorbeeld 2.0.4 (Fibonacci)
-De rij van Fibonacci is een lineaire differentie vergelijking van de tweede graad, en voldoet aan $(E^2 - E - 1)(f_i) = 0$.

Stelling 2.0.5 (uniciteitvoorwaarde)
Gegeven een lineaire differentievergelijking van orde k met a_i^j als coëfficiënten van f_i waar dat $\forall i < l+1, i > l+k : a_i^0, a_i^k \in \mathrm{Aut}(A)$ en gegeven k opeenvolgende waarden van f_i $(f_j)_{j=l+1}^{l+k}$ dan is f_i uniek bepaald.

Bewijs. 2 simpele inductie bewijzen voor $(f_j)_{j<l+1}$, en $(f_j)_{j>l+k}$. □

Opmerking 2.0.6
Deze stelling kunnen we opsplitsen in 2 gevallen. Dit wil zeggen als we alleen geïnteresseerd waren in $(f_j)_{j>l+k}$, dat enkel $\forall i > l+k : a_i^k \in \mathrm{Aut}(A)$ nodig is voor uniciteit.

Definitie 2.0.7 (uniciteitvoorwaarde)
$\alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ van graad k voldoet aan de uniciteitvoorwaarde als en slechts als $a_i^0, a_i^k \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}$. Een differentievergelijking voldoet aan de uniciteitvoorwaarde als de corresponderende lineaire operator dat doet.

Lemma 2.0.8
$\alpha_i, \beta_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ voldoen aan de uniciteitvoorwaarde als en slechts als $\alpha_i\beta_i$ aan de uniciteitvoorwaarde voldoet.

Bewijs. Verificatie. □

Definitie 2.0.9 (annihilator)
$\beta_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ is een annihilator van $g_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$ als en slechts als $(\beta_i)(g_i) = 0$.

Stelling 2.0.10
Als $f_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$ voldoet aan een differentievergelijking met een lineaire operator α_i die aan de uniciteitvoorwaarde voldoet en een forceerterm die een annihilator β_i heeft die ook aan de uniciteitvoorwaarde voldoet dan is f_i uniek bepaald door $(\beta_i\alpha_i)(f_i) = 0$ en $\mathrm{Deg}(\beta_i\alpha_i)$ opeenvolgende waardes van f_i.

Bewijs. Uit (2.0.8) volgt dat $\beta_i\alpha_i$ voldoet aan de uniciteitsvoorwaarde, zodat f_i uniek bepaalt is door $\mathrm{Deg}(\beta_i\alpha_i)$ opeenvolgende waarden van f_i (2.0.5). □

Voorbeeld 2.0.11
Neem bijvoorbeeld

$$(E-1)(f_i) = 2^i, f_0 = 0.$$

Een annihilator van 2^i is $E-2$, om uniciteit te behouden neem extra beginvoorwaarde $f_1 = 1$ wat te berekenen is uit vorige relatie. Dus het vorig probleem is equivalent met

$$(E-2)(E-1)(f_i) = (E^2 - 3E + 2)(f_i) = 2^{i+1} - 2^{i+1} = 0, f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Definitie 2.0.12 ($\prod$)
$\prod$ is de product operator gedefinieerd op volgende manier:

$$\prod : (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}} \to (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}} : f_i \to s_i$$

waardat s_i de unieke oplossing is van

$$\begin{aligned}(E - f_i)(s_i) = 0 \Leftrightarrow \\ s_{i+1} = f_i s_i\end{aligned}$$

met $s_0 = 1$.

Opmerking 2.0.13
Merk op dat bovenstaande vergelijking ook een lineaire differentievergelijking is. $\mathrm{Aut}(G)$ is een groep met de uitgebreide optelling uit G en de vermenigvuldiging met f_i kan dan bekeken worden als een element van $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$.

Opmerking 2.0.14
Als we hierboven in plaats van de producten de optelling hadden gezet, kwamen we terug uit op de definite van Δ^{-1}.

Stelling 2.0.15 (Goed gedefinieerdheid van $\prod$)
$\prod$ is goed gedefinieerd en

$$\prod :(\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}} \to (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}} : f_i \to \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} f_j & =f_{n-1}f_{n-2}...f_1f_0 & \text{als } n > 0 \\ 1 & & \text{als } n = 0\ . \\ (\prod_{j=n}^{-1} f_j)^{-1} & =(f_{-1}f_{-2}...f_{n+1}f_n)^{-1} & \text{als } n < 0 \end{cases}$$

Bewijs. Verificatie. Uniciteit volgt uit 2.0.5, analoog aan goed gedefinieerdheid van Δ^{-1}. □

Voorbeeld 2.0.16
$\prod f = f^i$.

Stelling 2.0.17 (variatie op integrerende factor)
$\forall a_i, b_i \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}, \exists h_i, s_i \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}} : a_iE + b_i = s_i\Delta h_i$.

Bewijs.

$$\begin{aligned} a_iE + b_i &= s_i\Delta h_i \\ &= s_i(E-1)h_i \\ &= s_iEh_i - s_ih_i \\ &= s_ih_{i+1}E - s_ih_i \end{aligned}$$

Door nu LL en RL te vergelijken of van elkaar af te trekken is het eenvoudig te zien dat het volgende een voldoende voorwaarde is:

$$\begin{cases} a_i = s_ih_{i+1} \\ b_i = -s_ih_i \end{cases} \Leftrightarrow h_i^{-1} = (-1)^i \prod \left(b_ia_i^{-1}\right)h_0^{-1} \text{ en } s_i = -b_ih_i^{-1}.$$

Door $h_0 = 1$ kiezen hebben we een h_i, s_i geconstrueerd die aan de voorwaarde voldoen. □

Gevolg 2.0.18
Als f_i een 1ste orde lineaire differentie vergelijking is, die voldoet aan de uniciteitsvoorwaarde:

$$(a_i^0E + a_i^1)(f_i) = g_i$$

met beginwaarde f_0, dan kan f_i formeel geschreven worden als:

$$f_i = h_i^{-1}\left(\Delta^{-1}\left(s_i^{-1}g_i\right) + f_0\right)$$

met h_i en s_i uit vorige stelling.

Bewijs.

$$\begin{aligned}
(a_i^0 E + a_i^1)(f_i) = g_i &\Leftrightarrow \\
(s_i \Delta h_i)(f_i) = g_i &\Leftrightarrow \\
s_i \Delta(h_i f_i) = g_i &\Leftrightarrow \\
\Delta(h_i f_i) = s_i^{-1} g_i &\Leftrightarrow \\
\Delta^{-1}\Delta(h_i f_i) = \Delta^{-1}\big(s_i^{-1} g_i\big) &\Leftrightarrow \\
(1 - |_0)(h_i f_i) = \Delta^{-1}\big(s_i^{-1} g_i\big) &\Leftrightarrow \\
h_i f_i = \Delta^{-1}\big(s_i^{-1} g_i\big) + h_0 f_0 &\Leftrightarrow \\
f_i = h_i^{-1}\left(\Delta^{-1}\big(s_i^{-1} g_i\big) + f_0\right)&
\end{aligned}$$

□

Opmerking 2.0.19
1ste orde lineaire operatoren die aan de uniciteitvoorwaarde voldoen hebben dus een soort van inverse.

Opmerking 2.0.20
In het geval dat we ons zouden beperken tot positieve indices, dan hebben we enkel de uniciteitsvoorwaarde nodig in één richting, en vereenvoudigen de definities van $\Delta^{-1}, \prod$.

Voorbeeld 2.0.21
In het geval van

$$(E - (i+1))(f_i) = (i+1)!$$

die enkel voldoet aan de uniciteitsvoorwaarde in 1 richting, dan krijgen we voor h_i en s_i:

$$h_i = \frac{1}{i!} \text{ en } s_i = (i+1)!$$

Wanneer we dit invullen in (2.0.18), dan krijgen we

$$f_i = i! \left(\sum \left(\frac{(i+1)!}{(i+1)!} \right) + f_0 \right) = i!i + i!f_0$$

hetgeen enkel geldt voor positieve indices.

Opmerking 2.0.22
Tot dusver, hebben we nog geen gebruik gemaakt van het feit dat de coëfficiënten van een differentievergelijking de optelling moeten behouden.

Definitie 2.0.23 ($\mathrm{Opl}(\alpha_i, g_i)$)
Defineer voor $\alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E], g_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$:

$$\mathrm{Opl}(\alpha_i, g_i) := \{f_i \in (G)_{\mathbb{Z}} | (\alpha_i)(f_i) = g_i\}.$$

Lemma 2.0.24
$\forall \alpha_i \in (Z(\mathrm{End}(G)))_{\mathbb{Z}}[E], \forall g \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}} : \alpha_i g = g \alpha_i.$

Bewijs. g commuteert met E (1.2.12) en g commuteert met de coëfficiënten van α_i omdat die in het centrum zitten. □

Stelling 2.0.25 (structuur $\mathrm{Opl}(\alpha_i, 0)$)
Als $\alpha_i \in (Z(\mathrm{End}(A)))_{\mathbb{Z}}[E]$ dan is $\mathrm{Opl}(\alpha_i, 0)$ een links R-module met $R \simeq \mathrm{End}(A)$ de ring van constante rij endomorfismen op A.

Bewijs. $\forall x, y \in \mathrm{Opl}(\alpha_i, 0), \forall g \in R$:

$$(\alpha_i)(x + y) = (\alpha_i)(x) + (\alpha_i)(y) = 0 \Rightarrow x + y \in \mathrm{Opl}(\alpha_i, 0)$$
$$(\alpha_i)(gx) = (\alpha_i g)(x) = (g\alpha_i)(x) = g(0) = 0 \Rightarrow gx \in \mathrm{Opl}(\alpha_i, 0)$$

In de laatste lijn wordt (2.0.24) gebruikt. □

Gevolg 2.0.26
Als $\mathrm{End}(A)$ een lichaam is dan geldt $\forall \alpha_i \in (\mathrm{End}(A))_{\mathbb{Z}}[E] : \mathrm{Opl}(\alpha_i, 0)$ is een vectorruimte.

Stelling 2.0.27 (structuur $\mathrm{Opl}(\alpha_i, g_i)$)
$\forall \alpha_i \in (\mathrm{End}(A))_{\mathbb{Z}}[E], \forall g_i \in (A)_{\mathbb{Z}}, \forall f_P \in \mathrm{Opl}(\alpha_i, g_i)$:

$$\mathrm{Opl}(\alpha_i, g_i) = f_P + \mathrm{Opl}(\alpha_i, 0)$$

Bewijs. Verificatie, analoog aan het resultaat in differentiaalvergelijkingen. □

2.1 Matrixoperatoren

Het plan is om lineaire differentievergelijkingen te transformeren door gebruik te maken van matrixoperatoren-identiteiten naar 1ste orde lineaire differentievergelijkingen in een grotere groep waar we een oplossing (2.0.18) voor hebben. Dit levert een vorm voor de oplossing.

Stelling 2.1.1
$\forall a_i^0, a_i^1, a_i^2 \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}, \exists b_i^0, b_i^1 \in (\mathrm{End}(G^2))_{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{bmatrix} a_i^0 E^2 + a_i^1 E + a_i^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(b_i^0 E + b_i^1\right) \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_i^0 E^2 + a_i^1 E + a_i^2 \\ 0 \end{bmatrix} &= \left(b_i^0 E + b_i^1\right) \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= b_i^0 E \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} + b_i^1 \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= b_i^0 \begin{bmatrix} E^2 \\ E \end{bmatrix} + b_i^1 \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{i11}^0 & b_{i12}^0 \\ b_{i21}^0 & b_{i22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^2 \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{i11}^1 & b_{i12}^1 \\ b_{i21}^1 & b_{i22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{i11}^0 E^2 + (b_{i12}^0 + b_{i11}^1)E + b_{i12}^1 \\ b_{i21}^0 E^2 + (b_{i22}^0 + b_{i21}^1)E + b_{i22}^1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Door nu LL en RL te vergelijken of van elkaar af te trekken is het eenvoudig te zien dat het volgende een voldoende voorwaarde is:

$$\begin{cases} a_i^0 = b_{i11}^0 \\ a_i^1 = b_{i12}^0 + b_{i11}^1 \\ a_i^2 = b_{i12}^1 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} 0 = b_{i21}^0 \\ 0 = b_{i22}^0 + b_{i21}^1 \\ 0 = b_{i22}^1 \end{cases}.$$

Wat volgende oplossingen heeft:

$$b_i^0 = \begin{bmatrix} a_i^0 & a_i^1 - b_{i11}^1 \\ 0 & -b_{i21}^1 \end{bmatrix} \text{ en } b_i^1 = \begin{bmatrix} b_{i11}^1 & a_i^2 \\ b_{i21}^1 & 0 \end{bmatrix} \text{ met } b_{i11}^1, b_{i21}^1 \in (\mathrm{End}(A))_{\mathbb{Z}}.$$

□

Vermoeden 2.1.2
$\forall \alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E] : \mathrm{Deg}(\alpha_i) = k, \exists \beta_i \in (\mathrm{End}(G^2))_{\mathbb{Z}}[E] : \mathrm{Deg}(\beta_i) = k-1 :$

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = (\beta_i) \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bewijs. Analoog aan het vorige bewijs. □

Definitie 2.1.3 (companion operator)
De companion operator van $\alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ van graad k en coëfficiënten $a_i^j \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}$ is:

$$C(\alpha_i) = \begin{bmatrix} a_i^0 & a_i^1 & a_i^2 & \cdots & a_i^{k-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_i^k \\ & & & \vdots \\ & I_k & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Opmerking 2.1.4
In de literatuur heeft dit te maken met de companion matrix van een lineaire differentievergelijking. Deze definitie is om aan (2.1.6) te voldoen.

Voorbeeld 2.1.5

$$C(E^2 - E - (-1)^i) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stelling 2.1.6 (relatie companion operator)
$\forall \alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ van graad k:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (C(\alpha_i)) \begin{bmatrix} E^{k-1} \\ E^{k-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bewijs. Verificatie. □

Lemma 2.1.7
Een lineaire operator voldoet aan de uniciteitvoorwaarde als en slechts als de companion operator aan de uniciteitvoorwaarde voldoet.

Bewijs. Bereken de determinanten van de coëfficiënten. □

Stelling 2.1.8
Een differentievergelijking van $k$de orde van $f_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$ kan herschreven worden als een 1ste orde differentievergelijking voor $\begin{bmatrix} E^{k-1} & E^{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^T (f_i) = F_i \in (G^k)_{\mathbb{Z}}$.

Bewijs.

$$\begin{aligned}
(\alpha_i)(f_i) = g_i \Leftrightarrow \\
\begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T (f_i) = \begin{bmatrix} g_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T = G_i \Leftrightarrow \\
(C(\alpha_i)) \begin{bmatrix} E^{k-1} & E^{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^T (f_i) = G_i \Leftrightarrow \\
(C(\alpha_i))\,(F_i) = G_i
\end{aligned}$$

Van lijn 2 naar 3 wordt (2.1.6) gebruikt. □

Gevolg 2.1.9
Een vorm voor van de oplossing van een lineaire differentievergelijking die aan de uniciteitvoorwaarde voldoet.

Bewijs. Gevolg van (2.1.8),(2.1.7) en (2.0.18). □

Voorbeeld 2.1.10
We berekenen hier f_2 met de oplossingsmethode omschreven in (2.1.9) waar dat:

$$(E^2 - E - (-1)^i)(f_i) = 1, f_0 = f_1 = 0.$$

Dit zetten we om met (2.1.8) naar:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) (F_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = G, F_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De coëfficiënten van deze differentievergelijking zijn inverteerbaar vanwege (2.1.7) daarom kunnen we (2.0.18) toepassen. Dit geeft het volgende :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_2 & f_1 \end{bmatrix}^T = F_1 &= H_1^{-1} \left(\sum_{j=0}^{0} \left(S_j^{-1} G \right) \right) \\
&= H_1^{-1} S_0^{-1} G
\end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}
H_i &= \prod_{j=0}^{i-1} \left(- \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{j+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ (-1)^j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^j & (-1)^{j+1} \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

zodat voor even indices:

$$\begin{aligned}
H_{2i} &= \prod_{j=0}^{2i-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^j & (-1)^{j+1} \end{bmatrix} \right) \\
&= \prod_{k=0}^{i-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^i
\end{aligned}$$

en hier uit kunnen de waarden van de oneven indexen gehaald worden

$$H_{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^i$$

En S_i^{-1} halen we uit H_i:

$$\begin{aligned}
S_{2i}^{-1} &= - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
S_{2i+1}^{-1} &= - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Als we hiermee H_1^{-1} en S_0^{-1} uitreken en invullen krijgen we

$$F_1 = - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wat wil zeggen dat $f_2 = 1$ wat overeenkomt door gewoon de recursierelatie met $i = 0$ te gebruiken.

Opmerking 2.1.11
Met (2.0.10) zouden we nog een andere vorm kunnen maken waar Δ^{-1} wegvalt door de forceerterm weg te annihileren.

2.2 Operatorfactorisatie

Het plan is om hogere orde lineaire operatoren te proberen te factoriseren in 1ste orde lineaire operatoren. We doen dit eerst voor 2de orde lineaire operatoren. We tonen aan dat factoriseren equivalent is met het oplossen van een non-lineaire differentievergelijking. Als deze geen oplossing heeft, lossen we dit op door de groep groter te maken.

Stelling 2.2.1 (vorm oplossing gefactoriseerde lineaire operator)
Voor een differentievergelijking die een lineaire operator heeft die aan de uniciteit voorwaarde doet en die te schrijven is als een product van 1ste orde lineaire operatoren kunnen we een vorm van de oplossing maken.

Bewijs. We gaan dit bewijzen via inductie.
Basis geval: deze stelling voor 1ste orde differentievergelijkingen, zie (2.0.18).
Inductie hypothese: deze stelling voor $k - 1$de orde differentievergelijkingen.

Inductie stap: deze stelling voor $k$de orde differentievergelijkingen:
$\forall a_i, b_i \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}, \alpha_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}[E]$ van orde $k-1$:

$$(a_i E + b_i)(\alpha_i)(f_i) = g_i.$$

Substitueer $h_i = (\alpha_i)(f_i)$ waarvoor we dankzij de inductie hypothese een vorm van de oplossing kunnen maken. Dit geeft:

$$(a_i E + b_i)(h_i) = g_i.$$

Hiervoor hebben we ook een vorm van de oplossing. □

Stelling 2.2.2
$\forall a_i^0, a_i^2 \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}, \forall a_i^1 \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}, \exists u_i^j, v_i^j \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}, \exists c_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}$:

$$a_i^0 E^2 + a_i^1 E + a_i^2 = v_i \left(E^2 + c_i - 1\right) u_i.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} a_i^0 E^2 + a_i^1 E + a_i^2 &= v_i \left(E^2 + c_i - 1\right) u_i \\ &= v_i u_{i+1} E^2 + v_i b_i u_{i+1} E - v_i u_i. \end{aligned}$$

Door nu LL en RL te vergelijken of van elkaar af te trekken is het eenvoudig te zien dat het volgende een voldoende voorwaarde is:

$$\begin{cases} a_i^0 = v_i u_{i+1} \\ a_i^1 = v_i c_i u_{i+1} \\ a_i^2 = -v_i u_i \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u_i^{-1} = (-1)^i \prod (a_i^0)^{-1} a_i^2 \\ v_i = -a_i^2 u_i^{-1} \\ c_i = v_i^{-1} a_i^1 u_{i+1}^{-1} \end{cases}.$$

□

Opmerking 2.2.3
Dit kan ook gedaan worden voor hogere ordes. Dit zorgt ervoor dat we enkel $E^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_i^j E^j + 1$ hoeven te factoriseren.
Stelling 2.2.4 (equivalente voorwaarde 2de orde factorisatie)
$\forall c_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}, \forall H \geq G, \forall n_i \in (\mathrm{Aut}(H))_{\mathbb{Z}}$:

$$E^2 + c_i E - 1 = (E - n_i^{-1})(E + n_i) \Leftrightarrow n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} E^2 + c_i E - 1 &= (E - n_i^{-1})(E + n_i) \\ &= E^2 + E n_i - n_i^{-1} E - 1 \\ &= E^2 + (n_{i+1} - n_i^{-1}) E - 1 \Leftrightarrow \\ c_i E &= (n_{i+1} - n_i^{-1}) E \Leftrightarrow \\ c_i &= n_{i+1} - n_i^{-1} \Leftrightarrow \\ n_{i+1} &= c_i + n_i^{-1}. \end{aligned}$$

□

Opmerking 2.2.5
Merk op dat we geen uniciteit of existentie van deze factorisatie hebben. We hebben enkel een equivalente voorwaarde.

Definitie 2.2.6 (Ricatti differentievergelijking)
Differentievergelijkingen voor n_i van volgende vorm noemen we van het gereduceerd Ricatti type:

$$n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}.$$

Opmerking 2.2.7
Er kan echter ook een connectie in de omgekeerde zin gemaakt worden, namelijk van de Ricatti differentievergelijking naar een 2de orde lineaire operator.

Stelling 2.2.8 (connectie Ricatti)
$\forall c_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}, \forall x_i \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}:$

$$(E^2 + c_i E - 1)(x_i) = 0 \Leftrightarrow n_i := -x_{i+1}x_i^{-1} \text{ en } n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}.$$

Bewijs. Dit was te vermoeden want $(\Leftarrow)$:

$$\begin{aligned}(E^2 + c_i E - 1)(x_i) &= 0 \\ (E - n_i^{-1})(E + n_i)(x_i) &= 0 \Leftarrow \\ (E + n_i)(x_i) &= 0 \Leftrightarrow \\ n_i &= -x_{i+1}x_i^{-1}.\end{aligned}$$

$(\Leftrightarrow)$ is verificatie:

$$\begin{aligned}0 &= (E^2 + c_i E - 1)(x_i) \Leftrightarrow \\ -x_{i+2} &= c_i x_{i+1} - x_i \Leftrightarrow \\ -x_{i+2}x_{i+1}^{-1} &= c_i - x_i x_{i+1}^{-1}\end{aligned}$$

vervang $n_i = -x_i x_{i+1}^{-1}$ en dat toont het gevraagde. □

Opmerking 2.2.9
De Ricatti differentievergelijking heeft een connectie met continuerende breuken. In [KO21] worden continuerende breuken-identiteiten bewezen via het factoriseren van 2de orde lineaire operator.

Stelling 2.2.10
In een lichaam kunnen we voor alle 2de orde operatoren een factorisatie vinden in een groter lichaam. $\forall c_i \in (F)_{\mathbb{Z}}, \exists n_i \in (F(X) \setminus F)_{\mathbb{Z}}:$

$$E^2 + c_i E - 1 = (E - n_i^{-1})(E + n_i) \Leftrightarrow n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}.$$

Bewijs. Construeer n_i door de voorwaarden $n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}$ en $n_0 \in (F(X) \setminus F)_{\mathbb{Z}}$. n_i is goed gedefinieerd (n_i^{-1} en $(n_i - c_{i-1})^{-1}$ bestaat) want $n_i \in (F(X) \setminus F)_{\mathbb{Z}}$ en dat tonen we aan met inductie.
Basis geval:

$$n_0 \in F(X) \setminus F.$$

Inductie hypothese:

$$\forall |j| < k : n_j \in F(X) \setminus F.$$

Inductie stap:
Stel dat $n_k \in F$ dan:

$$F \ni n_k - c_{k-1} = n_{k-1}^{-1} \in F(X) \setminus F$$

Wat een contradictie is.

$$n_{-k} = (n_{-k+1} - c_k)^{-1} \in F(X) \setminus F \Leftrightarrow n_{-k+1} - c_k \in F(X) \setminus F.$$

Stel dat $n_{-k+1} - c_k \in F \Leftrightarrow n_{-k+1} \in F$ wat een contradictie is.

□

Voorbeeld 2.2.11
Neem bijvoorbeeld $E^2 + E + 1$ welke niet splitst in $\mathbb{F}_2$, maar wel bijvoorbeeld in $\mathbb{F}_2(X)$ en $\frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^2+X+1)}$.In volgende tafel staan voorbeelden van oplossingen van de Ricatti vergelijking. De corresponderende homogene oplossingen in deze lichaam extensies zijn $\prod n_i$. In

	...	n_{-2}	n_{-1}	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	...
$\frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^2+X+1)}$	...	X	X	X	X	X	X	X	X	...
$\mathbb{F}_2(X)$	...	$\frac{1+X}{X}$	$\frac{1}{1+X}$	X	$\frac{1+X}{X}$	$\frac{1}{1+X}$	X	$\frac{1+X}{X}$	$\frac{1}{1+X}$	...

principe hadden we ook eerst inverteerbare homogene oplossingen kunnen zoeken in deze lichaam extensies.

Vermoeden 2.2.12 (equivalente factorisatie voorwaarden)
$\forall c_i^j, d_i^j, n_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}$:

$$E^k + \sum_{j=1}^{k-1} c_i^j E^j + 1 = (\sum_{j=0}^{k-1} d_i^j E^j)(E + n_i) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} c_i^j = d_i^j n_{i+j} + d_i^{j-1} \text{ met } d_i^{k-1} = 1, d_i^0 = n_i^{-1} \\ n_{i+k-1} = c_i^{k-1} - n_{i+k-2}^{-1}(c_i^{k-2} - n_{i+k-3}^{-1}(... - n_{i+1}^{-1}(c_i^1 - n_i^{-1}))) \end{cases}$$

Bewijs. Geen bewijs. □

Opmerking 2.2.13
Merk op als we $k = 2$ kiezen in vorige vergelijkingen dat we dan terug de Ricatti differentievergelijkingen krijgen.

$$k = 2 : c_i^1 - n_i^{-1} = n_{i+1}, k = 3 : c_i^2 - n_{i+1}^{-1}(c_i^1 - n_i^{-1}) = n_{i+2}$$

Vermoeden 2.2.14
Er bestaat zoals in het geval $k = 2$ ook een connectie terug naar de lineaire operator.

Bewijs. Geen bewijs. Via dezelfde substitutie om dezelfde reden. □

Vermoeden 2.2.15
Zoals in het geval $k = 2$ kunnen we altijd een oplossing $n_i \in F(X_0, X_1, ..., X_{k-1}) \setminus F$ vinden.

Bewijs. Geen bewijs. □

	...	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	...
$\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^3+X^2+X+1)}$	...	X	X	X	X	X	X	...
$\mathbb{Q}(X,Y)$	...	X	Y	$\frac{XY-X+1}{XY}$	$\frac{1}{XY-X+1}$	X	Y	...

Voorbeeld 2.2.16
Neem bijvoorbeeld $E^3 + E^2 + E + 1$ welke niet splitst in $\mathbb{Q}$, maar wel bijvoorbeeld in $\mathbb{Q}(X,Y)$ en $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^3+X^2+X+1)}$.

Opmerking 2.2.17
In het algemeen zijn oplossingen van de equivalente factorisatie voorwaarden niet zo "goed gedragend".

Voorbeeld 2.2.18
Neem nu $E^2 + 42E - 1$. Daar is een oplossing voor de Ricatti vergelijking in $\mathbb{Q}(X)$:

	...	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	...
$\mathbb{Q}(X)$	...	X	$42 + \frac{1}{X}$	$\frac{1765X+42}{42X+1}$	$\frac{74172X+1765}{1765X+42}$	$\frac{3116989X+74172}{74172X+1765}$	...

Referenties

[KO21] Shirali Kadyrov en Alibek Orynbassar. *On the solutions of second order difference equations with variable coefficients*. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2103.03554. URL: https://arxiv.org/abs/2103.03554.