Differentievergelijkingen

Isidoor Pinillo Esquivel

juni 2022

Rijen

Definition (Rij)

Een afbeelding uit $\mathbb{Z}$.

Notatie (Rij)

$(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (a_i) = a_i$.

Fibonacci 1

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

...	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	...
...	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	...

Operatoren

Definition (E, Δ)

$$E : (G)_{\mathbb{Z}} \to (G)_{\mathbb{Z}} : (f_i) \to (f_{i+1})$$
$$\Delta : (G)_{\mathbb{Z}} \to (G)_{\mathbb{Z}} : (f_i) \to (f_{i+1} - f_i).$$

Fibonacci 2

$$f_{i+2} - f_{i+1} - f_i = 0 \Leftrightarrow$$
$$(E^2 - E - 1)(f_i) = 0$$

Fibonacci 2

$$f_{i+2} - f_{i+1} - f_i = 0 \Leftrightarrow$$
$$(E^2 - E - 1)(f_i) = 0$$

Lineaire differentievergelijkingen:

$$(a_i^0 E^k + ... + a_i^k E^0)(f_i) = g_i$$

Notatie

Notatie

- $(G, +)$ een groep
- F een lichaam
- $\mathrm{End}(G)$
- $\mathrm{Aut}(G)$

End(G), End(F)

Theorem

End(G) is een bijna ring voor de uitgebreide optelling en compositie.

End(G), End(F)

Theorem

End(G) is een bijna ring voor de uitgebreide optelling en compositie.

Theorem

$\forall A, B, C \in End(G) : A(B + C) = AB + AC.$

End(G), End(F)

Theorem

End(G) is een bijna ring voor de uitgebreide optelling en compositie.

Theorem

$\forall A, B, C \in End(G) : A(B + C) = AB + AC.$

$$M_f : F \to F : x \to fx, M_f \in End(F).$$

Differentievergelijkingen

ΔVG = DifferentieVerGelijking

Differentievergelijkingen

ΔVG = DifferentieVerGelijking

Definition (ΔVG)

$$\Delta\text{VG} \Leftrightarrow (E^2 + c_i E - 1)(f_i) = g_i$$

met $g_i \in (G)_{\mathbb{Z}}$ de forceerterm en $c_i \in (\mathrm{End}(G))_{\mathbb{Z}}$.

Uniciteit 1

Theorem (uniciteitsvoorwaarde)

Als ΔVG *en gegeven* f_l, f_{l+1} *dan is* f_i *uniek bepaald.*

Uniciteit 1

Theorem (uniciteitsvoorwaarde)

Als ΔVG en gegeven f_l, f_{l+1} dan is f_i uniek bepaald.

Bewijs.

Inductie en ΔVG

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_{i+2} = g_i - c_i f_{i+1} + f_i \\ f_i = f_{i+2} + c_i f_{i+1} - g_i \end{cases}.$$

Uniciteit 2

Algemeen geval ...

Uniciteit 2

Algemeen geval ...

1ste orde geval:

$$(a_i E + b_i) \text{ met } a_i, b_i \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}$$

Uniciteit 2

Algemeen geval ...
1ste orde geval:

$$(a_i E + b_i) \text{ met } a_i, b_i \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}$$

$(a_i E + b_i) \leftarrow$ 1ste orde lineaire operator

Uniciteit 2

Algemeen geval ...
1ste orde geval:

$$(a_i E + b_i) \text{ met } a_i, b_i \in (\mathrm{Aut}(G))_{\mathbb{Z}}$$

$(a_i E + b_i) \leftarrow$ 1ste orde lineaire operator

Theorem (Variatie op integrerende factor)

$$\exists s_i, h_i \in (Aut(G))_{\mathbb{Z}} : a_i E + b_i = s_i \Delta h_i.$$

Integrerende factor

Bewijs:

$$a_i E + b_i = s_i \Delta h_i$$

Integrerende factor

Bewijs:

$$\begin{aligned} a_i E + b_i &= s_i \Delta h_i \\ &= s_i (E - 1) h_i \end{aligned}$$

Integrerende factor

Bewijs:

$$\begin{aligned} a_i E + b_i &= s_i \Delta h_i \\ &= s_i (E - 1) h_i \\ &= s_i E h_i - s_i h_i \end{aligned}$$

Integrerende factor

Bewijs:

$$\begin{aligned} a_i E + b_i &= s_i \Delta h_i \\ &= s_i (E - 1) h_i \\ &= s_i E h_i - s_i h_i \\ &= s_i h_{i+1} E - s_i h_i \end{aligned}$$

Integrerende factor

Bewijs:

$$a_i E + b_i = s_i h_{i+1} E - s_i h_i$$

Integrerende factor

Bewijs:

$$a_i E + b_i = s_i h_{i+1} E - s_i h_i$$

$$\Leftarrow \begin{cases} a_i = s_i h_{i+1} \\ b_i = -s_i h_i \end{cases}$$

Integrerende factor

Bewijs:

$$a_i E + b_i = s_i h_{i+1} E - s_i h_i$$

$$\Leftarrow \begin{cases} a_i = s_i h_{i+1} \\ b_i = -s_i h_i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_i^{-1} = (-1)^i \prod \left(b_i a_i^{-1} \right) h_0^{-1} \\ s_i = -b_i h_i^{-1} \end{cases}$$

Technieken voor ΔVG

- Companion matrix (geen tijd voor)
- Operatorfactorisatie

Technieken voor ΔVG

- Companion matrix (geen tijd voor)
- Operatorfactorisatie

Operatorfactorisatie:

$$E^2 + c_i E - 1 = (E - n_i^{-1})(E + n_i)$$

Operatorfactorisatie 1

Theorem (Equivalente voorwaarde)

$$E^2 + c_i E - 1 = (E - n_i^{-1})(E + n_i) \Leftrightarrow n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}.$$

Operatorfactorisatie 1

Theorem (Equivalente voorwaarde)

$$E^2 + c_i E - 1 = (E - n_i^{-1})(E + n_i) \Leftrightarrow$$
$$n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}.$$

Definition (Ricatti ΔVG)

$$n_{i+1} = c_i + n_i^{-1}.$$

Operatorfactorisatie 2

L/F een lichaamextensie en $y \in F$

Operatorfactorisatie 2

L/F een lichaamextensie en $y \in F$

Definition (Ricatti transformatie)

$$R_y : L - F \to L - F : x \to y + x^{-1}$$
$$R_y^{-1} : L - F \to L - F : x \to (x - y)^{-1}.$$

Operatorfactorisatie 2

L/F een lichaamextensie en $y \in F$

Definition (Ricatti transformatie)

$$R_y : L - F \to L - F : x \to y + x^{-1}$$
$$R_y^{-1} : L - F \to L - F : x \to (x - y)^{-1}.$$

Vermoeden (Ricatti groep)

$R_{L/F} = \langle R_y | y \in F \rangle$ is een groepactie?

Operatorfactorisatie 3

Definition ($R_{(y_i)}$)

$$R_{(y_i)} = \prod R_{y_i} = R_{y_{i-1}} R_{y_{i-2}} \ldots R_{y_0}.$$

Operatorfactorisatie 3

Definition ($R_{(y_i)}$)

$$R_{(y_i)} = \prod R_{y_i} = R_{y_{i-1}} R_{y_{i-2}} \dots R_{y_0}.$$

$$R_{(y_i)}(x) = y_{i-1} + \cfrac{1}{y_{i-2} + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{y_0 + \frac{1}{x}}}}$$

Operatorfactorisatie 4

Oplossingen Ricatti $\approx R_{(c_i)}(n_0)$

Operatorfactorisatie 4

Oplossingen Ricatti $\approx R_{(c_i)}(n_0)$

Theorem (Factorisatie stelling)

$\forall c_i \in (F)_{\mathbb{Z}}, \forall n_0 \in L - F$:
$E^2 + c_i E - 1 = (E - (R_{(c_i)}(n_0))^{-1})(E + R_{(c_i)}(n_0))$.

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 1

ΔVG in $\mathbb{F}_2$ met operatorfactorisatie

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 1

ΔVG in $\mathbb{F}_2$ met operatorfactorisatie

$$\begin{aligned} (E^2+1)(f_i) = g_i &\Leftrightarrow \\ (E+1)^2(f_i) = g_i &\Leftrightarrow \\ \Delta^2(f_i) = g_i &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 1

ΔVG in $\mathbb{F}_2$ met operatorfactorisatie

$$
\begin{aligned}
(E^2+1)(f_i) = g_i &\Leftrightarrow \\
(E+1)^2(f_i) = g_i &\Leftrightarrow \\
\Delta^2(f_i) = g_i &\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$f_i = \sum\left(\sum(g_i) + f_1 - f_0\right) + f_0$$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 2

$E^2 + E + 1$ factoriseert niet in $\mathbb{F}_2[E] \simeq \mathbb{F}_2[X]$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 2

$E^2 + E + 1$ factoriseert niet in
$\mathbb{F}_2[E] \simeq \mathbb{F}_2[X]$
wel in $\mathbb{F}_4[E] \simeq \mathbb{F}_2(\alpha)[E]$ met
$\alpha^2 = \alpha^{-1} = \alpha + 1$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 2

$E^2 + E + 1$ factoriseert niet in
$\mathbb{F}_2[E] \simeq \mathbb{F}_2[X]$
wel in $\mathbb{F}_4[E] \simeq \mathbb{F}_2(\alpha)[E]$ met
$\alpha^2 = \alpha^{-1} = \alpha + 1$

$$E^2 + E + 1 = (E + \alpha^{-1})(E + \alpha)$$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 3

Factorisatie stelling $\rightarrow$
$E^2 + c_i E + 1$ factoriseert in $(\mathbb{F}_2(\alpha))_{\mathbb{Z}}[E]$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 3

Factorisatie stelling $\rightarrow$

$E^2 + c_i E + 1$ factoriseert in $(\mathbb{F}_2(\alpha))_{\mathbb{Z}}[E]$

$\mathbb{F}_2(\alpha) - \mathbb{F}_2 = \{\alpha, \alpha^2\}$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 3

Factorisatie stelling $\rightarrow$
$E^2 + c_i E + 1$ factoriseert in $(\mathbb{F}_2(\alpha))_{\mathbb{Z}}[E]$
$\mathbb{F}_2(\alpha) - \mathbb{F}_2 = \{\alpha, \alpha^2\}$

$$\begin{aligned} E^2 + c_i E + 1 \\ &= (E - (R_{(c_i)}(\alpha))^{-1})(E + R_{(c_i)}(\alpha)) \\ &= (E - (R_{(c_i)}(\alpha^2))^{-1})(E + R_{(c_i)}(\alpha^2)) \end{aligned}$$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 4

$$R_{(c_i)}(\alpha) = R_{c_{i-1}} R_{c_{i-2}} \ldots R_{c_0}(\alpha) = ???$$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 4

$R_{(c_i)}(\alpha) = R_{c_{i-1}} R_{c_{i-2}} ... R_{c_0}(\alpha) =$???
R_y inverteerbaar : $\{\alpha, \alpha^2\} \to \{\alpha, \alpha^2\}$

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 4

$R_{(c_i)}(\alpha) = R_{c_{i-1}} R_{c_{i-2}} \ldots R_{c_0}(\alpha) =$???
R_y inverteerbaar : $\{\alpha, \alpha^2\} \to \{\alpha, \alpha^2\}$
$\Rightarrow R_{\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2}$ abels.

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 4

$R_{(c_i)}(\alpha) = R_{c_{i-1}} R_{c_{i-2}} \ldots R_{c_0}(\alpha) =$???
R_y inverteerbaar : $\{\alpha, \alpha^2\} \rightarrow \{\alpha, \alpha^2\}$
$\Rightarrow R_{\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2}$ abels.
Vervolg ...

ΔVG in $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ 4

$R_{(c_i)}(\alpha) = R_{c_{i-1}} R_{c_{i-2}} \ldots R_{c_0}(\alpha) =???$
R_y inverteerbaar : $\{\alpha, \alpha^2\} \to \{\alpha, \alpha^2\}$
$\Rightarrow R_{\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2}$ abels.
Vervolg ...
Algemeen: $R_{(c_i)}(n_0), \sum, \prod$

ΔVG met constante coef

$E^2 + cE - 1$ reduciebel (triviaal)

ΔVG met constante coef

$E^2 + cE - 1$ reduciebel (triviaal)
$E^2 + cE - 1$ irreduciebel

ΔVG met constante coef

$E^2 + cE - 1$ reduciebel (triviaal)
$E^2 + cE - 1$ irreduciebel $\rightarrow$
$L = \frac{F[X]}{(X^2 - cX - 1)}$

ΔVG met constante coef

$E^2 + cE - 1$ reduciebel (triviaal)

$E^2 + cE - 1$ irreduciebel $\to$

$L = \frac{F[X]}{(X^2 - cX - 1)} \Rightarrow$

$R_c(X) = X \Rightarrow R_{(c)}(X) = X$

ΔVG met constante coef

$E^2 + cE - 1$ reduciebel (triviaal)
$E^2 + cE - 1$ irreduciebel $\rightarrow$
$L = \frac{F[X]}{(X^2 - cX - 1)} \Rightarrow$
$R_c(X) = X \Rightarrow R_{(c)}(X) = X$
opl met $\sum, \prod$ ... g_i

ΔVG met constante coef

$E^2 + cE - 1$ reduciebel (triviaal)
$E^2 + cE - 1$ irreduciebel $\rightarrow$
$L = \frac{F[X]}{(X^2 - cX - 1)} \Rightarrow$
$R_c(X) = X \Rightarrow R_{(c)}(X) = X$
opl met $\sum, \prod \dots \; g_i$