

# RMC voor lineaire ODEs

Isidoor Pinillo Esquivel

$$y_t = A(t)y(t). \quad (1)$$

Euler:

(6)

$$y_t = A(t)y(t). \quad (1)$$

Euler:

$$\frac{\tilde{y}(t_k + \Delta t) - \tilde{y}(t_k)}{\Delta t} = A(t_k)\tilde{y}(t_k) \quad (2)$$

(6)

$$y_t = A(t)y(t). \quad (1)$$

Euler:

$$\frac{\tilde{y}(t_k + \Delta t) - \tilde{y}(t_k)}{\Delta t} = A(t_k)\tilde{y}(t_k) \quad (2)$$

$$\tilde{y}(t_{k+1}) = (I + \Delta t A(t_k))\tilde{y}(t_k) \quad (3)$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad (4)$$

$$(6)$$

$$y_t = A(t)y(t). \quad (1)$$

Euler:

$$\frac{\tilde{y}(t_k + \Delta t) - \tilde{y}(t_k)}{\Delta t} = A(t_k)\tilde{y}(t_k) \quad (2)$$

$$\tilde{y}(t_{k+1}) = (I + \Delta t A(t_k))\tilde{y}(t_k) \quad (3)$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad (4)$$

$$Y(T_{k+1}) = (I + \Delta t A(T_{k+1}))Y(T_k) \quad (5)$$

$$T_{k+1} = T_k + \text{Exp}(\Delta t) \quad (6)$$

$$y_t = A(t)y(t). \quad (1)$$

Euler:

$$\frac{\tilde{y}(t_k + \Delta t) - \tilde{y}(t_k)}{\Delta t} = A(t_k)\tilde{y}(t_k) \quad (2)$$

$$\tilde{y}(t_{k+1}) = (I + \Delta t A(t_k))\tilde{y}(t_k) \quad (3)$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad (4)$$

$$Y(T_{k+1}) = (I + \Delta t A(T_{k+1}))Y(T_k) \quad (5)$$

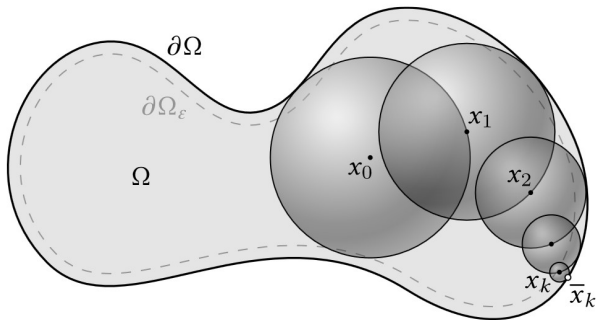
$$T_{k+1} = T_k + \text{Exp}(\Delta t) \quad (6)$$

$$y(T_k) = E[Y(T_k)]. \quad (7)$$

# Overzicht

- 1 Introductie
- 2 Motivatie
- 3 Monte Carlo
- 4 Main Poisson algoritme
- 5 Richting Walk on Spheres
- 6 Conclusie

Veralgemeenen van WoS algoritme van (Sawhney e.a. 2022) naar tijd





# Monte Carlo

- 1 Introductie
- 2 Motivatie
- 3 Monte Carlo**
- 4 Main Poisson algoritme
- 5 Richting Walk on Spheres
- 6 Conclusie

# Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader  $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$  met  $n \ll k$  van  $x_i$ 's  $\in [0, 1]$

# Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader  $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$  met  $n \ll k$  van  $x_i$ 's  $\in [0, 1]$

Vertrouwensinterval kans  $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k} \approx 1$

# Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader  $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$  met  $n \ll k$  van  $x_i$ 's  $\in [0, 1]$

Vertrouwensinterval kans  $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k} \approx 1$

Samplen of termen willekeurig weg laten (Russische roulette)

$$\bar{x} \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{I_i} \cong \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k B_i x_i. \quad (8)$$

$$(E[B_i] = 1, P[B_i = 0] = 1 - \frac{n}{k})$$

# Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader  $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$  met  $n \ll k$  van  $x_i$ 's  $\in [0, 1]$

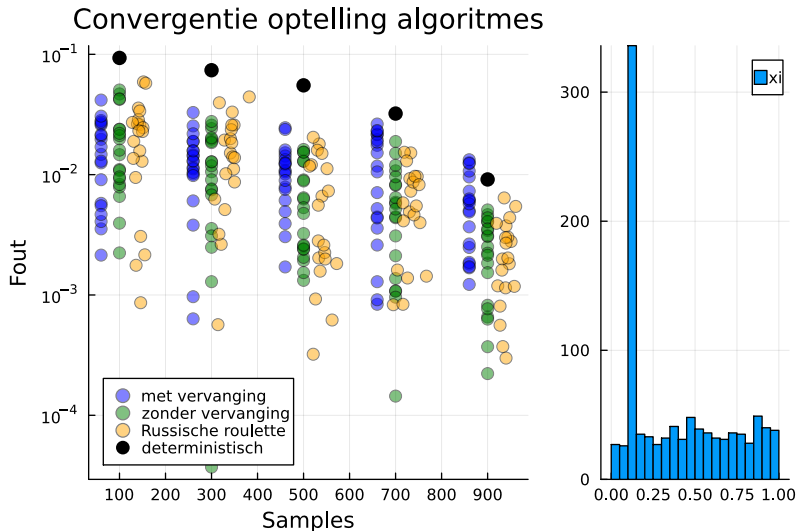
Vertrouwensinterval kans  $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k} \approx 1$

Samplen of termen willekeurig weg laten (Russische roulette)

$$\bar{x} \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{I_i} \cong \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k B_i x_i. \quad (8)$$

$$(E[B_i] = 1, P[B_i = 0] = 1 - \frac{n}{k})$$

Variantie = RMSE  $\sim O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  en ook vertrouwensintervallen kans  $< 1$   
(Chebychev's ongelijkheid)



# Monte Carlo integratie

Integratie  $\approx$  sommatie, integreerbare  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ :

$$\int_0^1 f(s) ds = E[f(U)] \quad (9)$$

$$\cong \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(U_j) \quad (10)$$

$$\text{met } U_j \sim \text{Uniform}(0, 1) \quad (11)$$

- 1 Introductie
- 2 Motivatie
- 3 Monte Carlo
- 4 Main Poisson algoritme**
- 5 Richting Walk on Spheres
- 6 Conclusie



# Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y, \quad A(t) \text{ meetbaar en } \sup_t \|A(t)\| < \infty \Leftrightarrow \quad (12)$$

(15)

(16)

# Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y, \quad A(t) \text{ meetbaar en } \sup_t \|A(t)\| < \infty \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$(15)$$

$$(16)$$

# Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y, \quad A(t) \text{ meetbaar en } \sup_t \|A(t)\| < \infty \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (14)$$

$$(15)$$

$$(16)$$

# Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y, \quad A(t) \text{ meetbaar en } \sup_t \|A(t)\| < \infty \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (14)$$

$$y(t) = e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma} ((\sigma I + A(s)) y(s)) ds, \quad (15)$$

(16)

# Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y, \quad A(t) \text{ meetbaar en } \sup_t \|A(t)\| < \infty \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (14)$$

$$y(t) = e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma} ((\sigma I + A(s)) y(s)) ds, \quad (15)$$

doe volgende substitutie  $e^{(s-t)\sigma} = \tau$ , equivalent aan exponentieel te samplen

(16)

# Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y, \quad A(t) \text{ meetbaar en } \sup_t \|A(t)\| < \infty \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (13)$$

$$e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \quad (14)$$

$$y(t) = e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma} ((\sigma I + A(s))y(s)) ds, \quad (15)$$

doe volgende substitutie  $e^{(s-t)\sigma} = \tau$ , equivalent aan exponentieel te samplen

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0)d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left( I + \frac{A(s)}{\sigma} \right) y(s)d\tau. \quad (16)$$

# Main Poisson algoritme (recursie)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left( I + \frac{A(s)}{\sigma} \right) y(s) d\tau. \quad (17)$$

Monte Carlo integreer,

# Main Poisson algoritme (recursie)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left( I + \frac{A(s)}{\sigma} \right) y(s) d\tau. \quad (17)$$

Monte Carlo integreer,  
doe dit recursief verder:

$$Y(t) = \begin{cases} y(0) & \text{als } e^{-\sigma t} \leq \tau \\ \left( I + \frac{A(S)}{\sigma} \right) Y(S) & \text{anders} \end{cases}, \quad (18)$$

met  $S = t + \frac{\ln(\tau)}{\sigma}$ .



# Main Poisson algoritme (recursie)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left( I + \frac{A(s)}{\sigma} \right) y(s) d\tau. \quad (17)$$

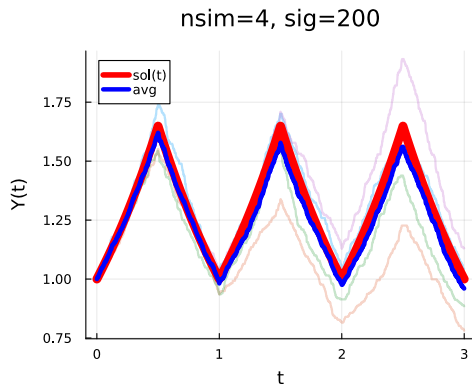
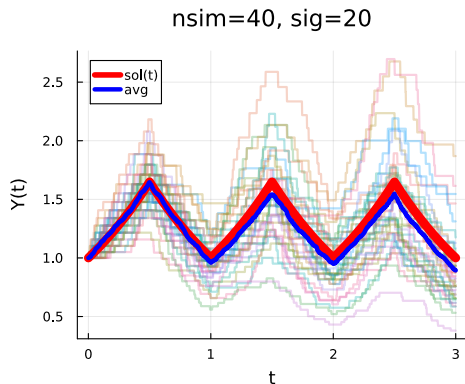
Monte Carlo integreer,  
doe dit recursief verder:

$$Y(t) = \begin{cases} y(0) & \text{als } e^{-\sigma t} \leq \tau \\ \left( I + \frac{A(S)}{\sigma} \right) Y(S) & \text{anders} \end{cases}, \quad (18)$$

met  $S = t + \frac{\ln(\tau)}{\sigma}$ .

$$y(t) = E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0). \quad (19)$$

# Main Poisson algoritme (convergentie)



**Figuur:** Realisaties  $Y(t)$  met  $A(t) = \text{sgn}(0.5 - t + \lfloor t \rfloor)$  voor verschillende  $nsim$  en  $sig$ .

# Main Poisson algoritme (opmerkingen)

$$y(t) \cong Y(t) = \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) y(0). \quad (20)$$

- TB:  $E[||Y(t)||], Var[||Y(t)||] < \infty$ , wet totale verwachting/variantie
- Parallele complexiteit
- Inspiratie uit Acebrón en Ribeiro 2016

- 1 Introductie
- 2 Motivatie
- 3 Monte Carlo
- 4 Main Poisson algoritme
- 5 Richting Walk on Spheres**
- 6 Conclusie

# Richting Walk on Spheres

- Plaats discretisatie?
- Walk on components,  $P$  transitie matrix,  $P y(0)$  met Monte Carlo
- Recursieve formulatie  $v^T y(t) = v^T E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0)$
- Recursive first passage sampling
- Tijdsafhankelijke Russische roulette voor stijve problemen
- Path stitching vs WoS voor tijd/plaats onafhankelijke problemen

# Richting Walk on Spheres

- Plaats discretisatie?
- Walk on components,  $P$  transitie matrix,  $P y(0)$  met Monte Carlo
- Recursieve formulatie  $v^T y(t) = v^T E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0)$
- Recursive first passage sampling
- Tijdsafhankelijke Russische roulette voor stijve problemen
- Path stitching vs WoS voor tijd/plaats onafhankelijke problemen

# Richting Walk on Spheres

- Plaats discretisatie?
- Walk on components,  $P$  transitie matrix,  $P y(0)$  met Monte Carlo
- Recursieve formulatie  $v^T y(t) = v^T E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0)$
- Recursive first passage sampling
- Tijdsafhankelijke Russische roulette voor stijve problemen
- Path stitching vs WoS voor tijd/plaats onafhankelijke problemen

# Richting Walk on Spheres

- Plaats discretisatie?
- Walk on components,  $P$  transitie matrix,  $Py(0)$  met Monte Carlo
- Recursieve formulatie  $v^T y(t) = v^T E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0)$
- Recursive first passage sampling
- Tijdsafhankelijke Russische roulette voor stijve problemen
- Path stitching vs WoS voor tijd/plaats onafhankelijke problemen



# Richting Walk on Spheres

- Plaats discretisatie?
- Walk on components,  $P$  transitie matrix,  $P y(0)$  met Monte Carlo
- Recursieve formulatie  $v^T y(t) = v^T E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0)$
- Recursive first passage sampling
- Tijdsafhankelijke Russische roulette voor stijve problemen
- Path stitching vs WoS voor tijd/plaats onafhankelijke problemen

# Richting Walk on Spheres






- Plaats discretisatie?
- Walk on components,  $P$  transitie matrix,  $P y(0)$  met Monte Carlo
- Recursieve formulatie  $v^T y(t) = v^T E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0)$
- Recursive first passage sampling
- Tijdsafhankelijke Russische roulette voor stijve problemen
- Path stitching vs WoS voor tijd/plaats onafhankelijke problemen

- 1 Introductie
- 2 Motivatie
- 3 Monte Carlo
- 4 Main Poisson algoritme
- 5 Richting Walk on Spheres
- 6 Conclusie**

- Tevreden met main Poisson algoritme
- Significante stappen in veralgemenen van WoS
- Uitgangspunten voor verder onderzoek

- Tevreden met main Poisson algoritme
- Significante stappen in veralgemenen van WoS
- Uitgangspunten voor verder onderzoek

- Tevreden met main Poisson algoritme
- Significante stappen in veralgemenen van WoS
- Uitgangspunten voor verder onderzoek

-  Acebrón, Juan A. en Marco A. Ribeiro 2016 “A Monte Carlo method for solving the one-dimensional telegraph equations with boundary conditions”.
-  Daun, Thomas 2011 “On the randomized solution of initial value problems”.
-  Ermakov, S. M. en M. G. Smilovitskiy 2021 “The Monte Carlo Method for Solving Large Systems of Linear Ordinary Differential Equations”.
-  Heinrich, S. en E. Novak 2001 *Optimal Summation and Integration by Deterministic, Randomized, and Quantum Algorithms*.
-  Sawhney, Rohan e.a. 2022 “Grid-free Monte Carlo for PDEs with spatially varying coefficients”.

# Overzicht integratie

Beschouw  $f : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$   $k$ -keer Lipschitz-differentieerbaar:

$$\int_{[0,1]^d} f(x) dx. \quad (21)$$

CVMC = Control Variate MC, +0.5 orde over DET algoritmes

FFT = Clenshaw-Curtis/Gauss Quadrature.

	$k = -1$	$0 \leq k \leq 2$	$3 \leq k \leq 5$	$k > 5$
$d = 1$	MC	CVMC	?	FFT
$2 \leq d \leq 5$	MC	CVMC	CVMC	?
$d > 5$	MC	MC	MC	MC

**Tabel:** Overzicht integratie algoritmes.



$$y(t) = E \left[ \prod_{k=0}^{N_t} \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0) \quad (22)$$

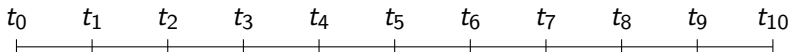
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n t^n}{n!} E \left[ \prod_{k=0}^n \left( I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0) \quad (23)$$

Te vergelijken met Magnus expansie.

Voor Monte Carlo transitie matrix hebben we een reductie naar uniformizatie.

# Recurisie in Recursie Monte Carlo

Next flight uit Sawhney e.a. 2022, unbiased methode, 1.5 orde convergentie, moeilijke theorie en te veel functie evaluaties. Gestopt door paper Daun 2011.



$$y_n = \begin{cases} Y_{n-1}(t_n, y_{n-1}) & \text{als } n \neq 0 \\ y(t_0) & \text{als } n = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$Y_n(t, y_n) = y_n + \Delta t B(t) A(S) Y_n(S, y_n) \quad (25)$$