RMC voor lineaire ODEs

Isidoor Pinillo Esquivel

Introductie

$$y_t = A(t)y(t). \tag{1}$$

Euler:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{y}(t_k + \Delta t) - \tilde{y}(t_k)}{\Delta t} = & \qquad A(t_k)\tilde{y}(t_k) & (2) \\
\tilde{y}(t_{k+1}) = & \quad (I + \Delta t A(t_k))\tilde{y}(t_k) & (3) \\
Y(T_{k+1}) = & (I + \Delta t A(T_{k+1}))Y(T_k) & (4)
\end{aligned}$$

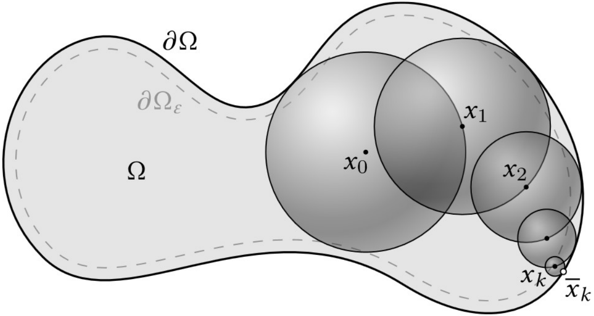
$T_{k+1} = T_k + \text{Exp}(\Delta t)$, exponentiële verdeelde stappen.

$$y(T_k) = E[Y(T_k)]. \tag{5}$$

Overzicht

Motivatie

Veralgemenen van WoS algoritme van (Sawhney e.a. 2022) naar tijd



Monte Carlo

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0, 1]$ (symmetrisch in x_i)

[0] Heinrich en Novak 2001.

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0,1]$ (symmetrisch in x_i)

Vertrouwensinterval kans $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k}$
(worst case scenarios van de missende informatie liggen $\frac{1}{k}$ uit elkaar)

[0] Heinrich en Novak 2001.

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0,1]$ (symmetrisch in x_i)

Vertrouwensinterval kans $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k}$
(worst case scenarios van de missende informatie liggen $\frac{1}{k}$ uit elkaar)

Benader door te samplen of door termen willekeurig weg laten

$$\bar{x} \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{I_i} \cong \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} B_i x_i. \tag{6}$$

$(E[B_i] = 1, P[B_i = 0] = p)$

[0]Heinrich en Novak 2001.

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0,1]$ (symmetrisch in x_i)

Vertrouwensinterval kans $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k}$
(worst case scenarios van de missende informatie liggen $\frac{1}{k}$ uit elkaar)

Benader door te samplen of door termen willekeurig weg laten

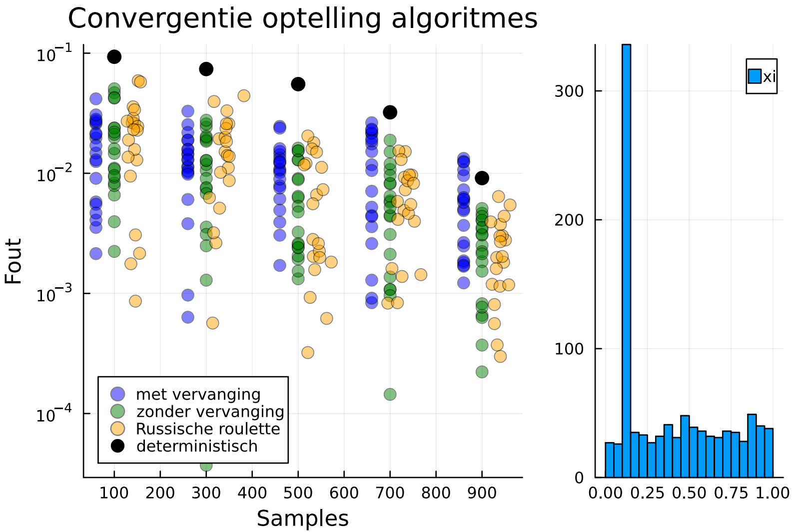
$$\bar{x} \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{I_i} \cong \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} B_i x_i. \tag{6}$$

$(E[B_i] = 1, P[B_i = 0] = p)$

Variantie $=$ RMSE $\sim O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ en ook vertrouwensintervallen kans < 1
(CLT of Chebychev's ongelijkheid)

[0] Heinrich en Novak 2001.

Optelling algoritmes (plot)



Monte Carlo Integratie

Integratie $\approx$ sommatie, integreerbare $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$:

$$\int_0^1 f(s)ds = E[f(U)] \tag{7}$$

$$\cong \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(U_j) \tag{8}$$

$$\text{met } U_j \sim \text{Uniform}(0, 1) \tag{9}$$

Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y \Leftrightarrow \tag{10}$$

(13)

(14)

Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y \Leftrightarrow \tag{10}$$

$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \tag{11}$$

(13)

(14)

Main Poisson algoritme

$$
\begin{aligned}
y_t &= A(t)y \Leftrightarrow && (10)\\
y_t + \sigma y &= (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow && (11)\\
e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t &= (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow && (12)\\
& && (13)\\
& && (14)
\end{aligned}
$$

Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y \Leftrightarrow \tag{10}$$

$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \tag{11}$$

$$e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \tag{12}$$

$$y(t) = e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma}\left((\sigma I + A(s))\, y(s)\right) ds, \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Main Poisson algoritme

$$y_t = A(t)y \Leftrightarrow \tag{10}$$
$$y_t + \sigma y = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \tag{11}$$
$$e^{-\sigma t}(e^{\sigma t} y)_t = (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow \tag{12}$$
$$y(t) = e^{-\sigma t} y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma} \left((\sigma I + A(s))\, y(s) \right) ds, \tag{13}$$

doe volgende substitutie $e^{(s-t)\sigma} = \tau$, equivalent aan exponentieel te samplen

$$\tag{14}$$

Main Poisson algoritme

$$
\begin{aligned}
y_t &= A(t)y \Leftrightarrow && (10)\\
y_t + \sigma y &= (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow && (11)\\
e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t &= (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow && (12)\\
y(t) &= e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma}\left((\sigma I + A(s))\, y(s)\right) ds, && (13)
\end{aligned}
$$

doe volgende substitutie $e^{(s-t)\sigma} = \tau$, equivalent aan exponentieel te samplen

$$
y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left(I + \frac{A(s)}{\sigma}\right) y(s) d\tau. \tag{14}
$$

Main Poisson algoritme

$$
\begin{aligned}
y_t &= A(t)y \Leftrightarrow & (10)\\
y_t + \sigma y &= (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow & (11)\\
e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)_t &= (\sigma I + A(t))y \Leftrightarrow & (12)\\
y(t) &= e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma}\left((\sigma I + A(s))\, y(s)\right) ds, & (13)
\end{aligned}
$$

doe volgende substitutie $e^{(s-t)\sigma} = \tau$, equivalent aan exponentieel te samplen

$$
y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0)d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left(I + \frac{A(s)}{\sigma}\right) y(s)d\tau. \qquad (14)
$$

sample τ uniform, equivalent aan een Poisson proces te samplen.

Main Poisson algoritme (recursief samplen)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0)d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^{1} \left(I + \frac{A(s)}{\sigma} \right) y(s)d\tau. \tag{15}$$

sample τ uniform, equivalent aan een Poisson proces te samplen.

Main Poisson algoritme (recursief samplen)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left(I + \frac{A(s)}{\sigma} \right) y(s) d\tau. \tag{15}$$

sample τ uniform, equivalent aan een Poisson proces te samplen.
Doe dit recursief verder:

$$Y(t) = \begin{cases} y(0) & \text{als } e^{-\sigma t} \leq \tau \\ \left(I + \frac{A(S)}{\sigma} \right) Y(S) & \text{anders} \end{cases}, \tag{16}$$

met $S = t + \frac{\ln(\tau)}{\sigma}$.

Main Poisson algoritme (recursief samplen)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^{1} \left(I + \frac{A(s)}{\sigma} \right) y(s) d\tau. \tag{15}$$

sample τ uniform, equivalent aan een Poisson proces te samplen.
Doe dit recursief verder:

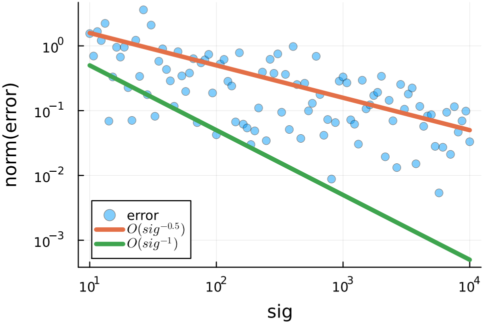
$$Y(t) = \begin{cases} y(0) & \text{als } e^{-\sigma t} \leq \tau \\ \left(I + \frac{A(S)}{\sigma} \right) Y(S) & \text{anders} \end{cases}, \tag{16}$$

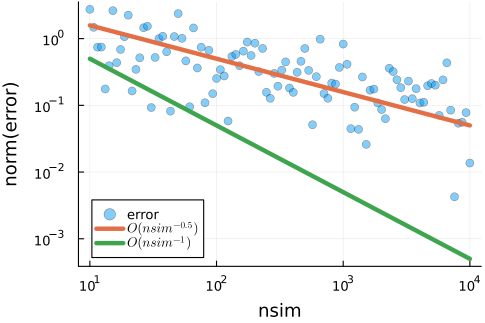
met $S = t + \frac{\ln(\tau)}{\sigma}$.

$$y(t) = E\left[\prod_{k=1}^{N_t} \left(I + \frac{A(T_k)}{\sigma} \right) \right] y(0). \tag{17}$$

Main Poisson algoritme (convergentie)

Niet bewezen: robust tegen unbiased vervanging van $A, f, y(0)$.





Figuur: Realizaties van de norm van de fout, met $nsim = 1$ en σ variabel of $nsim$ variabel en $\sigma = 1$. Hoeveelheid samples van A, f per simulatie $=$ Poisson(σ).

Limitaties

- Stabiliteit $\rightarrow$ Kettunen e.a. 2021 (efficiënte unbiased $e^{\int A(s)ds}y(0)$)
- Biased voor non-lineaire ODEs

Toekomstig Werk

- Random ODEs
- Specifieke ODEs