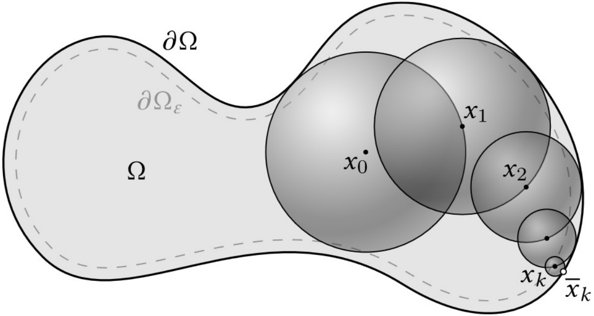
RMC voor lineaire ODEs

Isidoor Pinillo Esquivel

Mijn motivatie

Veralgemenen van WoS algoritme van (Sawhney e.a. 2022) naar tijd



Overzicht

- randomized information/sample-based complexity theory of summation
- main Poisson algoritme voor lineaire beginwaardeproblemen
- recursive first passage resampling as a U-estimator?

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0,1]$ (symmetrisch in x_i)

[0] Heinrich en Novak 2001.

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0, 1]$ (symmetrisch in x_i)

Vertrouwensinterval kans $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k}$
(worst case scenarios van de missende informatie liggen $\frac{1}{k}$ uit elkaar)

[0] Heinrich en Novak 2001.

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0,1]$ (symmetrisch in x_i)

Vertrouwensinterval kans $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k}$
(worst case scenarios van de missende informatie liggen $\frac{1}{k}$ uit elkaar)

Benader door te samplen met vervanging $\bar{x} \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{I_i}$
(zonder vervanging is sneller maar niet onafhankelijk)

[0] Heinrich en Novak 2001.

Random sample efficientie van optelling

Probleem: benader $\bar{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ met $n < k$ van de x_i's $\in [0,1]$
(symmetrisch in x_i)

Vertrouwensinterval kans $= 1 \sim \frac{k-n}{k} = 1 - \frac{n}{k}$
(worst case scenarios van de missende informatie liggen $\frac{1}{k}$ uit elkaar)

Benader door te samplen met vervanging $\bar{x} \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{I_i}$
(zonder vervanging is sneller maar niet onafhankelijk)

Variantie $=$ RMSE $\sim O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
en ook vertrouwensintervallen kans < 1
(CLT of Chebychev's ongelijkheid)

[0]Heinrich en Novak 2001.

Monte Carlo Integratie

Integratie $\approx$ sommatie, integreerbare $f : \mathbb{R} \to [0,1]$:

$$\int_0^1 f(s)ds = E[f(U)] \tag{1}$$

$$\cong \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(U_j) \tag{2}$$

$$\text{met } U_j \sim \text{Uniform}(0,1) \tag{3}$$

Lineaire ODEs

Probleem: benader $y(t)$ waar $y'(t) = A(t)y(t)$ gegeven $y(0)$ en $A(t)$ begrensd

[1] Jentzen en Neuenkirch 2009.
[2] Daun 2011.

Lineaire ODEs

Probleem: benader $y(t)$ waar $y'(t) = A(t)y(t)$ gegeven $y(0)$ en $A(t)$ begrensd

Biased algoritme met n samples[1],[2]
(enkel random)

[1] Jentzen en Neuenkirch 2009.
[2] Daun 2011.

Lineaire ODEs

Probleem: benader $y(t)$ waar $y'(t) = A(t)y(t)$ gegeven $y(0)$ en $A(t)$ begrensd

Biased algoritme met n samples[1,2]
(enkel random)

$\nexists$ unbiased algoritme met n samples van $A(t)$
(niet bewezen $\implies$ te sterk parallel algoritme)

[1] Jentzen en Neuenkirch 2009.
[2] Daun 2011.

Lineaire ODEs

Probleem: benader $y(t)$ waar $y'(t) = A(t)y(t)$ gegeven $y(0)$ en $A(t)$ begrensd

Biased algoritme met n samples[1],[2]
(enkel random)

$\nexists$ unbiased algoritme met n samples van $A(t)$
(niet bewezen $\implies$ te sterk parallel algoritme)

$\exists$ unbiased algoritme met gemiddeld n samples van $A(t)$
(gemakkelijk paralleliseerbaar)

[1] Jentzen en Neuenkirch 2009.
[2] Daun 2011.

Willekeurig hoeveelheid samples

Hoeveelheid samples: vast vs willekeurig
(Russische roulette in recursieve Monte Carlo)

Willekeurig hoeveelheid samples

Hoeveelheid samples: vast vs willekeurig
(Russische roulette in recursieve Monte Carlo)
Russische roulette $\approx$
unbiased techniek om soms te vervangen met een benadering

$$X \cong \begin{cases} \frac{1}{p}(X - (1-p)Y_1) & \text{met kans } p \\ Y_2 & \text{anders} \end{cases} . \tag{4}$$

Willekeurig hoeveelheid samples

Hoeveelheid samples: vast vs willekeurig
(Russische roulette in recursieve Monte Carlo)
Russische roulette $\approx$
unbiased techniek om soms te vervangen met een benadering

$$X \cong \begin{cases} \frac{1}{p}(X - (1-p)Y_1) & \text{met kans } p \\ Y_2 & \text{anders} \end{cases} . \tag{4}$$

Voor de optelling roulette de x_i's:

$$x_i \cong \begin{cases} \frac{1}{p}(x_i - \frac{1-p}{2}) & \text{met kans } p \\ \frac{1}{2} & \text{anders} \end{cases} . \tag{5}$$

Willekeurig hoeveelheid samples

Hoeveelheid samples: vast vs willekeurig
(Russische roulette in recursieve Monte Carlo)
Russische roulette $\approx$
unbiased techniek om soms te vervangen met een benadering

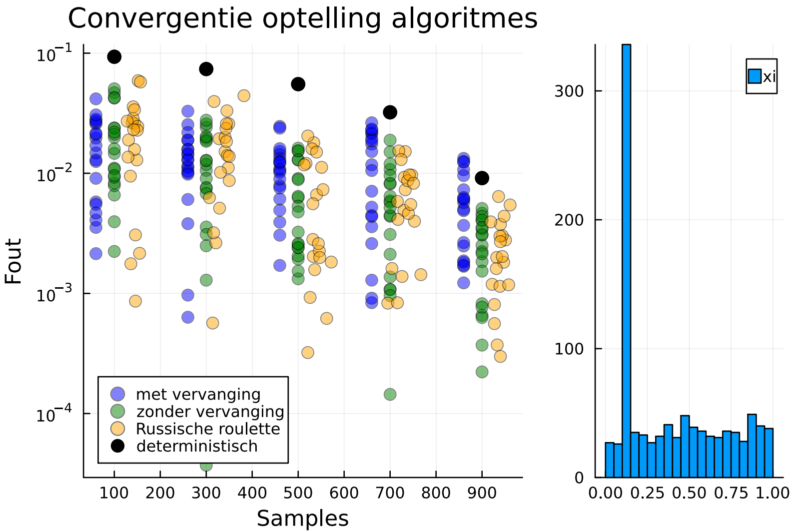
$$X \cong \begin{cases} \frac{1}{p}(X - (1-p)Y_1) & \text{met kans } p \\ Y_2 & \text{anders} \end{cases} . \tag{4}$$

Voor de optelling roulette de x_i's:

$$x_i \cong \begin{cases} \frac{1}{p}(x_i - \frac{1-p}{2}) & \text{met kans } p \\ \frac{1}{2} & \text{anders} \end{cases} . \tag{5}$$

Gebruikt x_i met kans p, of Bionmial(k, p) samples in totaal en kp gemiddeld

Willekeurig hoeveelheid samples (plot)



Main Poisson algoritme

$$y' = Ay + f \Leftrightarrow \tag{6}$$

$$\tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Main Poisson algoritme

$$y' = Ay + f \Leftrightarrow \tag{6}$$

$$y' + \sigma y = (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow \tag{7}$$

$$\tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Main Poisson algoritme

$$
\begin{aligned}
y' &= Ay + f \Leftrightarrow && (6)\\
y' + \sigma y &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (7)\\
e^{-\sigma t}(e^{\sigma t} y)' &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (8)\\
& && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}
$$

Main Poisson algoritme

$$
\begin{aligned}
y' &= Ay + f \Leftrightarrow && (6)\\
y' + \sigma y &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (7)\\
e^{-\sigma t}(e^{\sigma t} y)' &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (8)\\
y(t) &= e^{-\sigma t} y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma} \left((A(s) + \sigma I) y(s) + f(s) \right) ds, && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}
$$

Main Poisson algoritme

$$
\begin{aligned}
y' &= Ay + f \Leftrightarrow && (6)\\
y' + \sigma y &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (7)\\
e^{-\sigma t}(e^{\sigma t} y)' &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (8)\\
y(t) &= e^{-\sigma t} y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma} \left((A(s) + \sigma I)y(s) + f(s)\right) ds, && (9)
\end{aligned}
$$

doe volgende substitutie $e^{(s-t)\sigma} = \tau$, equivalent aan exponentieel te samplen

$$(10)$$

Main Poisson algoritme

$$
\begin{aligned}
y' &= Ay + f \Leftrightarrow && (6)\\
y' + \sigma y &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (7)\\
e^{-\sigma t}(e^{\sigma t} y)' &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (8)\\
y(t) &= e^{-\sigma t} y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma} \left((A(s) + \sigma I) y(s) + f(s) \right) ds, && (9)
\end{aligned}
$$

doe volgende substitutie $e^{(s-t)\sigma} = \tau$, equivalent aan exponentieel te samplen

$$
y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left(\frac{A(s)}{\sigma} + I \right) y(s) + \frac{f(s)}{\sigma} d\tau. \qquad (10)
$$

Main Poisson algoritme

$$\begin{aligned} y' &= Ay + f \Leftrightarrow && (6)\\ y' + \sigma y &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (7)\\ e^{-\sigma t}(e^{\sigma t}y)' &= (A + \sigma I)y + f \Leftrightarrow && (8)\\ y(t) &= e^{-\sigma t}y(0) + \int_0^t e^{(s-t)\sigma}\left((A(s) + \sigma I)y(s) + f(s)\right) ds, && (9) \end{aligned}$$

doe volgende substitutie $e^{(s-t)\sigma} = \tau$, equivalent aan exponentieel te samplen

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left(\frac{A(s)}{\sigma} + I\right) y(s) + \frac{f(s)}{\sigma} d\tau. \qquad (10)$$

sample τ uniform, equivalent aan een Poisson proces te samplen.

Main Poisson algoritme (recursief samplen)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^{1} \left(\frac{A(s)}{\sigma} + I \right) y(s) + \frac{f(s)}{\sigma} d\tau. \tag{11}$$

sample τ uniform, equivalent aan een Poisson proces te samplen.

Main Poisson algoritme (recursief samplen)

$$y(t) = \int_0^{e^{-\sigma t}} y(0) d\tau + \int_{e^{-\sigma t}}^1 \left(\frac{A(s)}{\sigma} + I \right) y(s) + \frac{f(s)}{\sigma} d\tau. \tag{11}$$

sample τ uniform, equivalent aan een Poisson proces te samplen.
Sample $y(t)$ recursief

$$Y(t) = \begin{cases} y(0) & \text{als } e^{-\sigma t} \leq \tau \\ \left(\frac{A(S)}{\sigma} + I \right) Y(S) + \frac{f(S)}{\sigma} & \text{anders} \end{cases}, \tag{12}$$

met $S = t + \frac{\ln(\tau)}{\sigma}$, let op $y \neq Y$

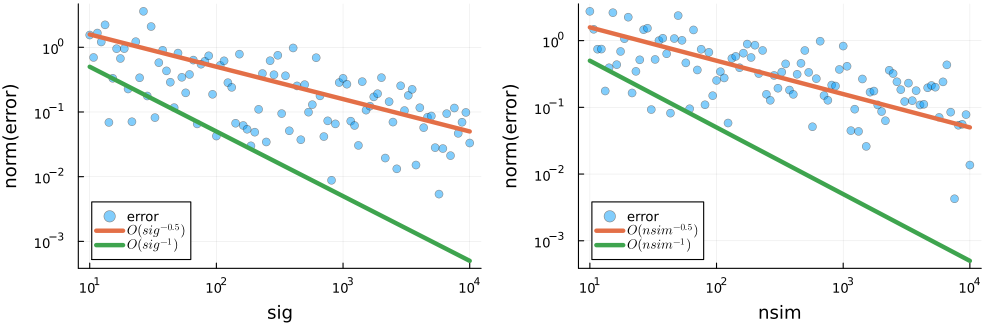
Main Poisson algoritme (implementatie)

Verschillende implementaties, voorwaarts door Poisson proces andersom te samplen.

```
function Y(t, sig, A::Function, f::Function, y0)
    (s = -log(rand()) / sig; sol = y0)
    while s < t
        sol += (A(s) * sol .+ f(s)) ./ sig
        s -= log(rand()) / sig
    end
    sol
end
```

Main Poisson algoritme (convergentie)

Niet bewezen: robust tegen unbiased vervanging van $A, f, y(0)$.



Figuur: Realizaties van de norm van de fout, met $nsim = 1$ en σ variabel of $nsim$ variabel en $\sigma = 1$. Hoeveelheid samples van A, f per simulatie $=$ Poisson(σ).

Limitaties

- Stabiliteit $\rightarrow$ Kettunen e.a. 2021 (efficiënte unbiased $e^{\int A(s)ds}y(0)$)
- Biased voor non-lineaire ODEs

Toekomstig Werk

- Random ODEs
- Specifieke ODEs