opdracht 2 wavelet

Isidoor Pinillo Esquivel

December 21, 2023

1 Eigenschap 7.2

1.1 Te Bewijzen

Admissibility condition:
$2\pi \int_{R^*} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da =: C_\psi < \infty.$
$\forall \psi \in L^2, ||\psi|| = 1$ en $t\psi \in L^1$: Admissibility condition $\Leftrightarrow$
$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0$ resp. $\widehat{\psi}(0) = 0$
.

1.2 Bewijs

Door dat $t\psi \in L^1$ is $\widehat{\psi}$ continu afleidbaar (Lemma 2.17).
De middelwaarden stelling geeft: $\forall |z| \leq 1, \exists |c(z)| \leq 1$:

$$\begin{gathered}
\widehat{\psi}(z) = \widehat{\psi}(0) + \widehat{\psi}'(c)z \Rightarrow \\
|\widehat{\psi}(z)| \geq |\widehat{\psi}(0)| - |\widehat{\psi}'(c(z))||z| \\
|\widehat{\psi}(z)| \leq |\widehat{\psi}(0)| + |\widehat{\psi}'(c(z))||z|
\end{gathered}$$

Opmerking omdat $\widehat{\psi}'$ continu is op een compact interval is het ook eindig en is $|\widehat{\psi}'(c(z))|$ ook eindig.

1.2.1 Bewijs ($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned}
\infty > 2\pi \int_{R^*} & \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
> 2\pi \int_{-1}^{1} & \frac{|\widehat{\psi}(0)|^2 - 2|a||\widehat{\psi}'(c(a))||\widehat{\psi}(0)| + |a|^2|\widehat{\psi}'(c(a))|^2}{|a|} da.
\end{aligned}$$

De 2 laatste termen zijn eindig dus irrelevant voor de ongelijkheid:

$$\infty > \int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}(0)|^2}{|a|} da \Leftrightarrow$$
$$\widehat{\psi}(0) = 0.$$

1.2.2 Bewijs ($\Leftarrow$)

Krijg dit niet juist gerenderd in github, ik gebruik hier de andere ongelijkheid en de veronderstelling.

Stel dat $\widehat{\psi}(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
&2\pi \int_{R^*} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
&\leq 2\pi \int_{R^* \setminus [-1,1]} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da + 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
&\leq 2\pi \int_{R^* \setminus [-1,1]} |\widehat{\psi}(a)|^2 da + 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
&\leq 2\pi \int_{R^*} |\widehat{\psi}(a)|^2 da + 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
&\leq 2\pi \int_{R^*} |\psi(a)|^2 da + 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
&\leq \text{eindig} + 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}(a)|^2}{|a|} da \\
&\leq \text{eindig} + 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{|\widehat{\psi}'(c(a))|^2 |a|^2}{|a|} da \\
&\leq \text{eindig} + 2\pi \int_{-1}^{1} |\widehat{\psi}'(c(a))|^2 |a| da \\
&\leq \text{eindig} + \text{eindig} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

2 Voorbeeld 9.2

(b) en (c) volgen bijna direct uit de definitie, bij (c) is ONB triviaal.

De inclusies volgt uit de schalingsvergelijking (Stelling 9.4), $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Volledigheid en separatie kunnen bewezen worden zoals in (Stelling 9.8) ze volgen er ook uit:

$|\phi(t)| \leq \frac{2}{1+t^2}$, $|\int \phi(t) dt| = 1$.

3 Voorbeeld 9.15

$$\begin{aligned}
&\int_0^{0.5} e^{itz} dt - \int_{0.5}^1 e^{itz} dt \\
&= \frac{1}{iz}\left(2e^{\frac{iz}{2}} - 1 - e^{iz}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{iz}{2}}}{iz}\left(2 - e^{\frac{-iz}{2}} - e^{\frac{iz}{2}}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{iz}{2}}}{iz}\left(2 - 2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\right) \\
&= \frac{4e^{\frac{iz}{2}}}{iz}\sin^2\left(\frac{z}{4}\right).
\end{aligned}$$