

M2PRO AE2I

COMMANDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Première version de ce cours complètement inspiré des Œuvres Précédentes de Gérard Scorletti et Guy Binet.

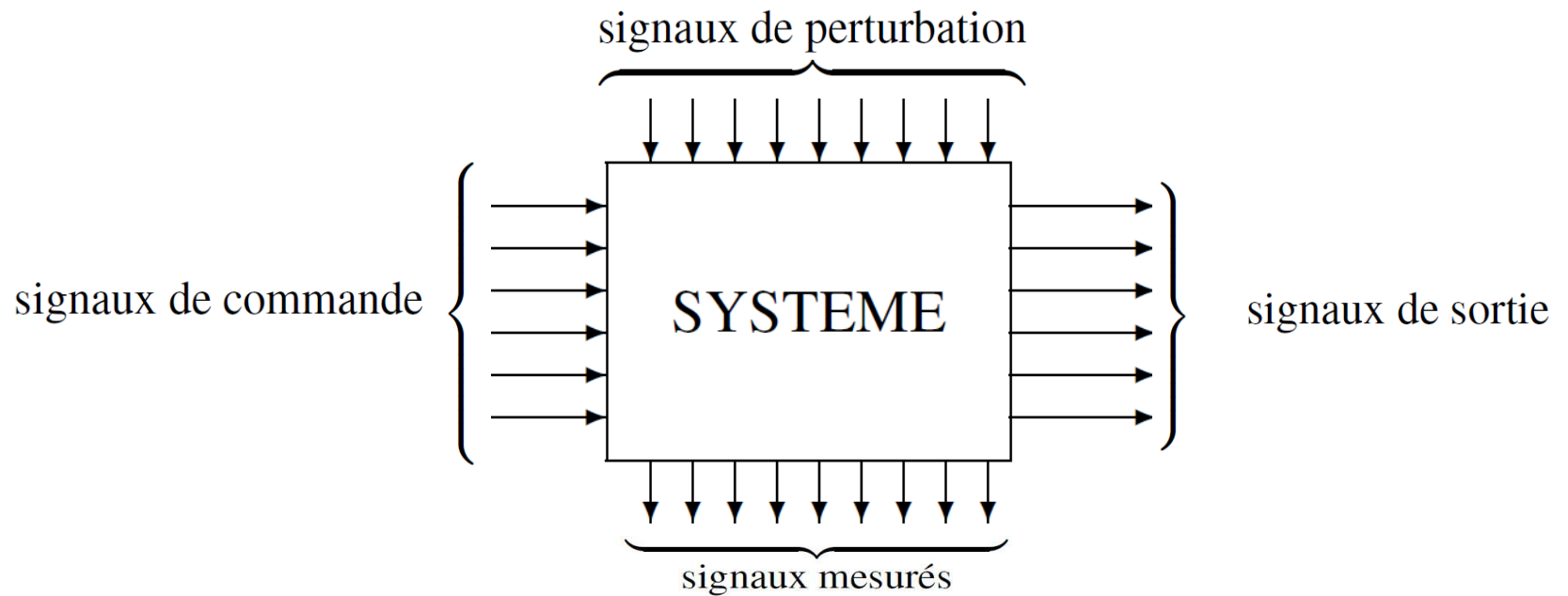
CM/TD : 27h
TP : 9h

- I. Problématique**
- II. Modélisation**
- III. Les Outils**
- IV. Les Performances**
- V. Synthèse des P.I.D. continus**

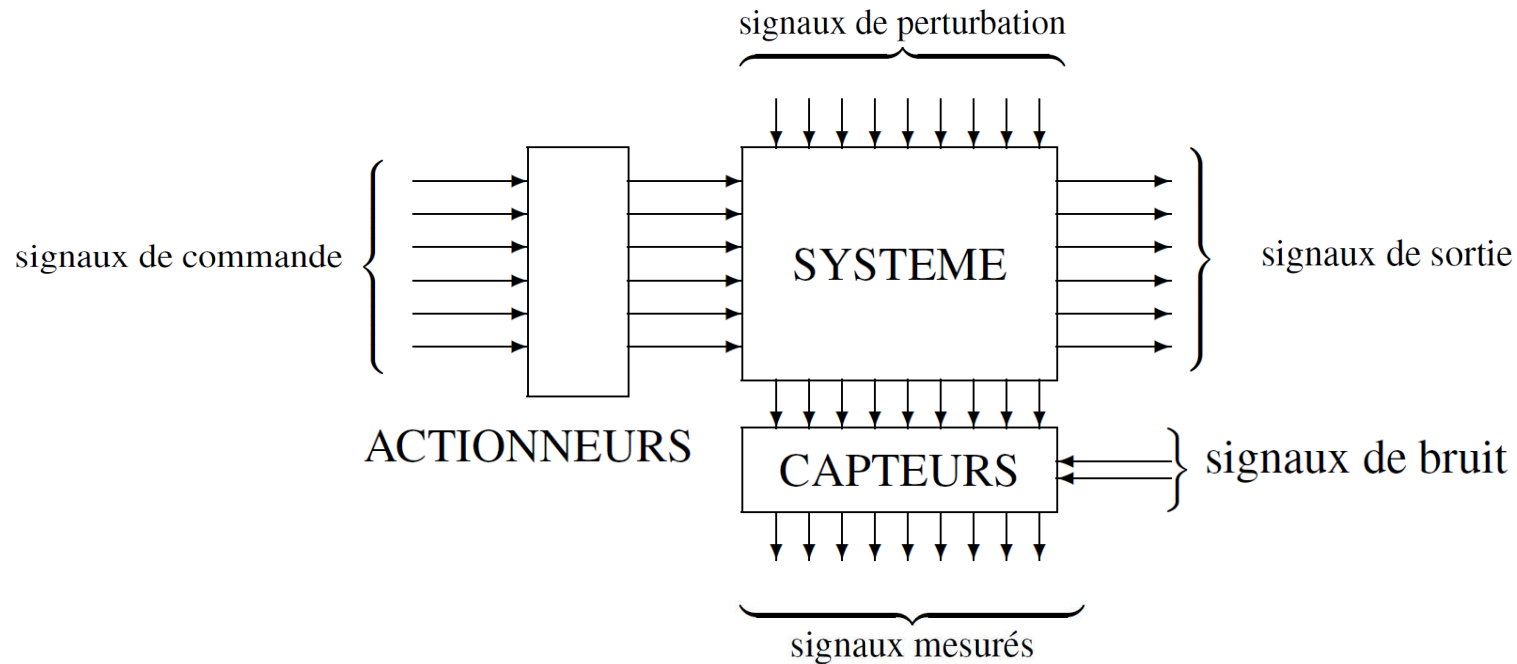
Problématique

- ❑ Vocabulaire
- ❑ Démarche

■ Le système à commander



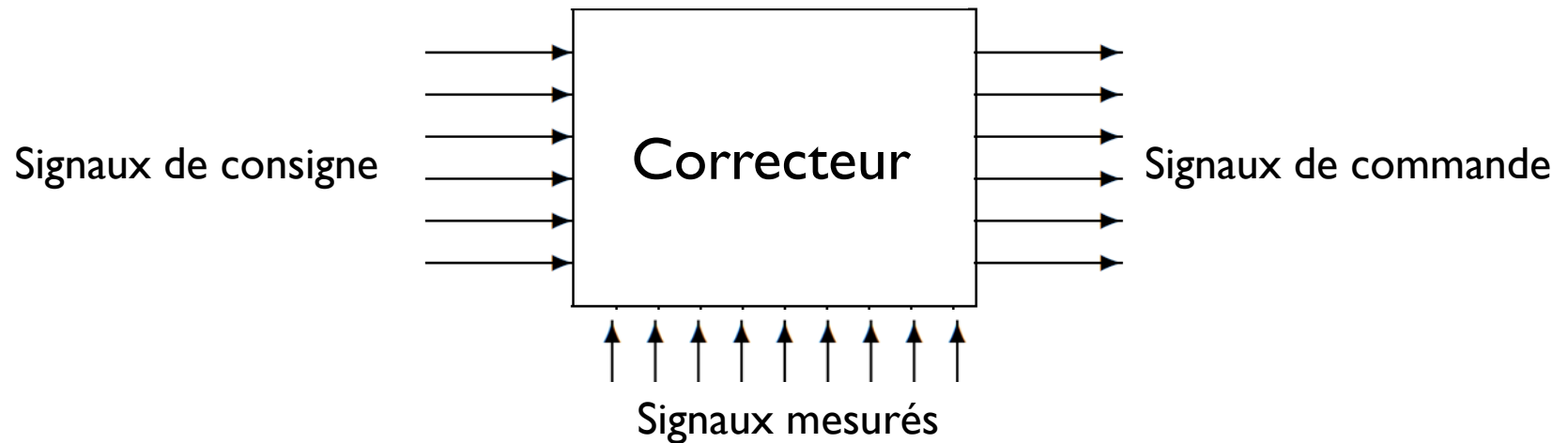
□ Le système à commander



□ L'objectif de l'asservissement

Les signaux de sortie doivent être proche des signaux désirés (référence ou consigne) malgré la présence de signaux de perturbations non contrôlable et souvent non mesurable. Cet objectif de performance doit être obtenu en calculant des signaux de commande acceptable par les actionneurs.

□ Le système de commande



□ Le correcteur

Le correcteur doit, à partir des signaux mesurés qui sont entachés par des bruits de mesure et les signaux de consigne, générer des signaux de commande réalistes permettant de répondre aux performances demandées. L'algorithme qui permet d'obtenir ces signaux de commande est appelée la loi de commande

□ La démarche

○ La connaissance du système à commander

- Relations entre les différents signaux. Lois physiques régissant le comportement du système,
- Connaissance des limitations physiques du système à commander (actionneur, capteur,...).
- Origines et effets des perturbations.



Modélisation Mathématique :

Modèle de connaissance à partir des équations physiques,
Modèle paramétrique par identification,

Modèle boîte noire : Flou, Neuronal

□ La démarche

○ Ecriture du cahier des charges

- Dynamique souhaitée (dépassement, temps de réponse,...),
- Erreur tolérable (précision statique souhaitée,...),
- Signaux de commande admissible (amplitude, gradient,...),
- Garantie de bon fonctionnement lors de l'implémentation sur le système à commander (stabilité, performances).

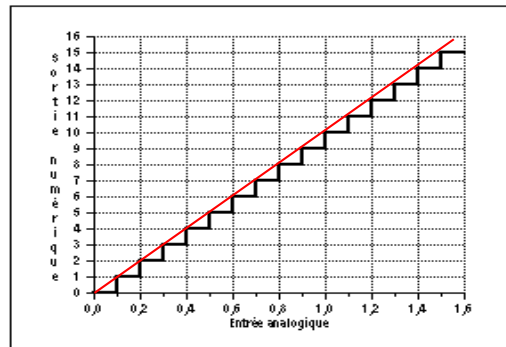
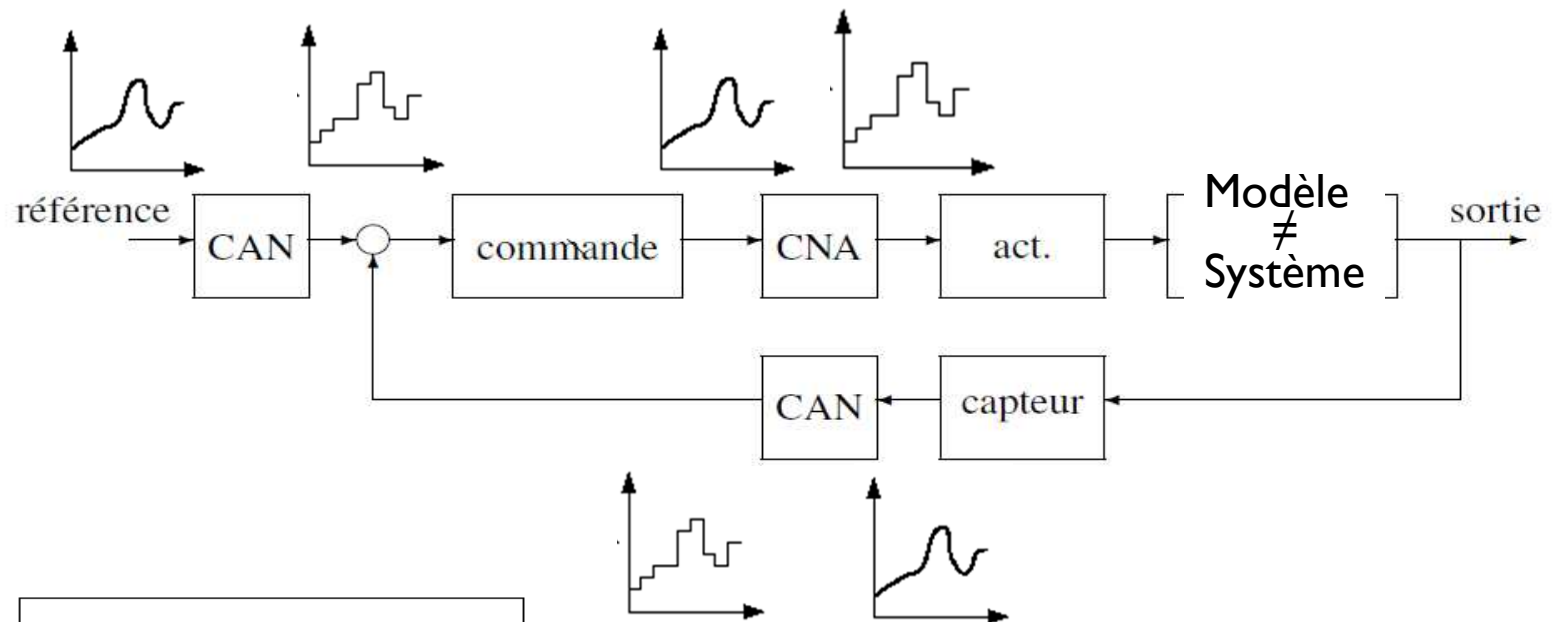


Pourquoi ?

La démarche

○ Ecriture du cahier des charges

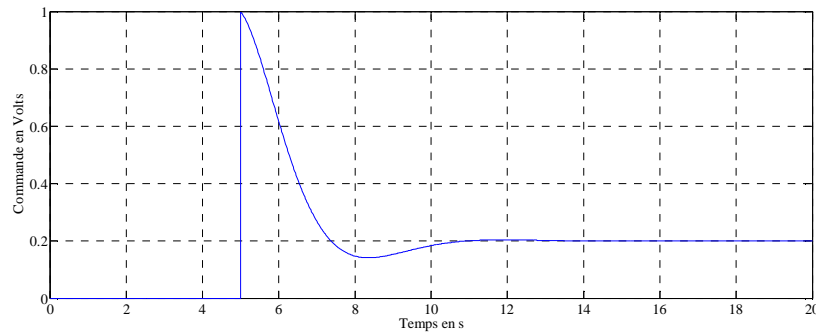
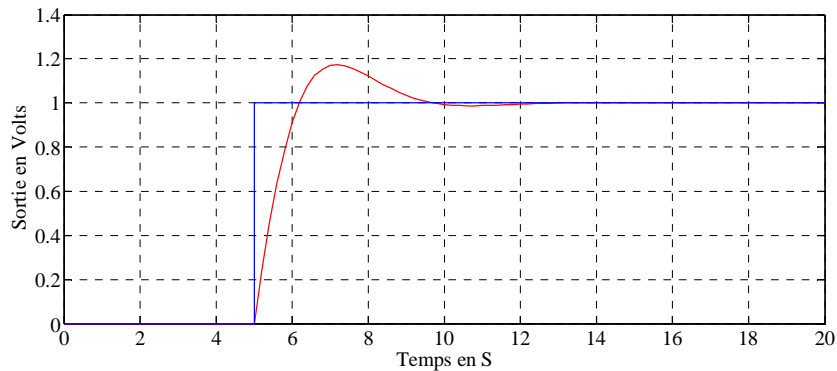
- Garantie de bon fonctionnement lors de l'implémentation sur le système à commander (stabilité, performances).



Erreur de quantification entraîne une détérioration de la précision des résultats

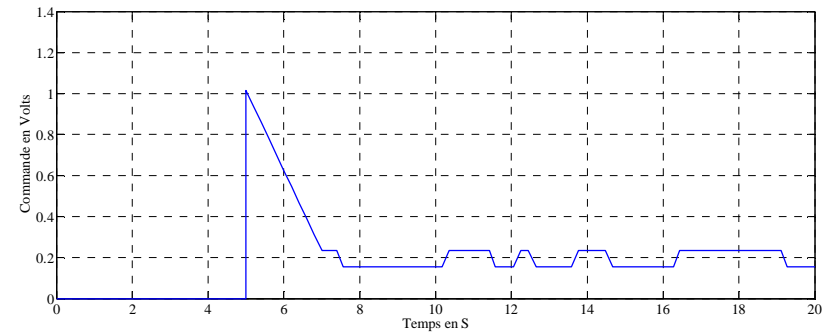
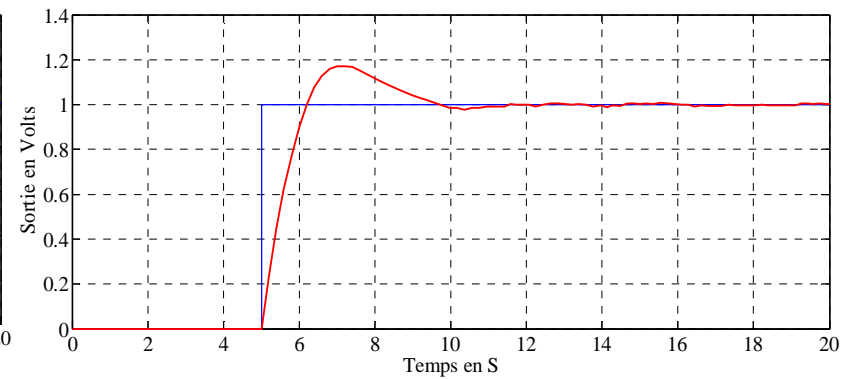
La démarche

Implémentation continue



Tube de Précision : 0

Implémentation avec CNA 8bits



Tube de Précision : 0,012

Pour plus de détails, voir cours de T.N.S.

□ La démarche

- Synthèse d'un correcteur discret pour un modèle discret (approche « tout discret »).
- Synthèse d'un correcteur continu pour un modèle continu (approche « tout continu »).

Le Vrai Problème :

Synthèse d'un correcteur discret pour un
système continu

Pas de méthodologie fiable

□ La démarche

○ Synthèse de la loi de commande

- Algorithme,
- Choix des paramètres à partir du modèle de commande du procédé,
- Vérification des performances sur le modèle de simulation
- Validation sur le système à commander.



Procédure itérative

Modélisation

- ❑ Modèle paramétrique
- ❑ Modèle de connaissance
- ❑ Le modèle de commande et le modèle de simulation
- ❑ Modèle du premier ordre
- ❑ Modèle du second ordre

□ Le modèle paramétrique

- Approche discrète (très peu de méthodes pour l'obtention de modèle continu).
- Ne nécessite pas l'écriture des équations physiques.
- Difficultés à obtenir le modèle pour des systèmes instables (identification en boucle fermée très délicate).

Voir Cours consacré

□ Le modèle de connaissance

- Difficultés pour l'écriture des équations physiques (systèmes ou lois physiques complexes)
- Nécessité de linéariser les équations autour d'un point de fonctionnement

■ Calcul d'un modèle de simulation et de commande

○ Modèle de simulation :

- Le plus complet possible.
- Parfois non linéaire.

○ Modèle de commande :

- Modèle de simulation adapté à l'algorithme de synthèse de la loi de commande (modèle linéaire paramétrique).
- Elimination des dynamiques hors bande passantes.

Avec un algorithme de commande avancée, l'ordre du correcteur dépend de l'ordre du modèle du système à commander (ref Bezout). Afin d'éviter un nombre important de pôles à placer, il faut réduire l'ordre du modèle de commande

□ Un exemple

○ Le moteur à courant continu

Le système considéré est un moteur à aimants permanents, Le circuit d'induit est assimilable à une résistance en série avec une self inductance. La tension appliquée à l'induit est notée $u(t)$ et $C_r(t)$ est le couple résistant agissant sur l'arbre du moteur. Le courant dans l'induit est $i(t)$ Le rotor possède un moment d'inertie J et un coefficient de frottements visqueux f . Vitesse et position de l'arbre du moteur sont notées $\Omega(t)$ et $\theta(t)$

Symbole	QUANTITY	Value	Unity
L	Inductance	5	mH
R	Resistor	5,8	Ω
J	Moment of inertia	$15 \cdot 10^{-7}$	SI
f	Fluid friction	$0,5 \cdot 10^{-6}$	SI
$K_c = K_e$	Gain	$24 \cdot 10^{-3}$	SI

Les équations régissant le mouvement du moteur sont :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_e \Omega(t) = u(t)$$

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - C_f(t) = K_c i(t) - f \Omega(t) - C_r(t)$$

En considérant que le couple résistant est nul, établir la fonction de transfert reliant la tension d'induit à la position de l'arbre

Un exemple

Passage par Laplace avec C.I. nulles :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_e \Omega(t) = u(t) \quad \xleftrightarrow{\text{TL}} \quad LpI(p) + RI(p) + K_e \Omega(p) = U(p) \quad (I)$$

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = K_c i(t) - f \Omega(t) \quad \xleftrightarrow{\text{TL}} \quad Jp\Omega(p) = K_c I(p) - f \Omega(p) \quad (II)$$

(I)

(II)

$$(Lp + R)I(p) = U(p) - K_e \Omega(p)$$

$$(Jp + f)\Omega(p) = K_c I(p)$$

$$I(p) = \frac{1}{(Lp + R)}U(p) - \frac{K_e}{(Lp + R)}\Omega(p)$$

$$\Omega(p) = \frac{K_c}{(Jp + f)}I(p)$$

Constante de temps électrique :

Constante de temps mécanique :

$$\tau_e = \frac{L}{R} = 0.86 \cdot 10^{-3} s$$

$$\tau_m = \frac{J}{f} = 1.5 s$$

$$\Omega(p) = \frac{K_c}{(Jp + f)(Lp + R)}U(p) - \frac{K_c K_e}{(Jp + f)(Lp + R)}\Omega(p)$$

$$((Jp + f)(Lp + R) + K_c K_e)\Omega(p) = K_c U(p)$$

Un exemple

Ce qui nous donne : $\Omega(p) = \frac{K_c}{(Jp + f)(Lp + R) + K_c K_e} U(p)$

A.N. : $\Omega(p) = \frac{0.024}{7.5 \cdot 10^{-9} p^2 + 8.705 \cdot 10^{-6} p + 5.818 \cdot 10^{-4}} U(p)$

$$p_1 = -1.0895 \cdot 10^3$$

$$p_2 = -0.0712 \cdot 10^3$$

$$\tau_1 = 0.917 \cdot 10^{-3} s \quad \text{est négligeable devant} \quad \tau_2 = 14.044 \cdot 10^{-3} s$$

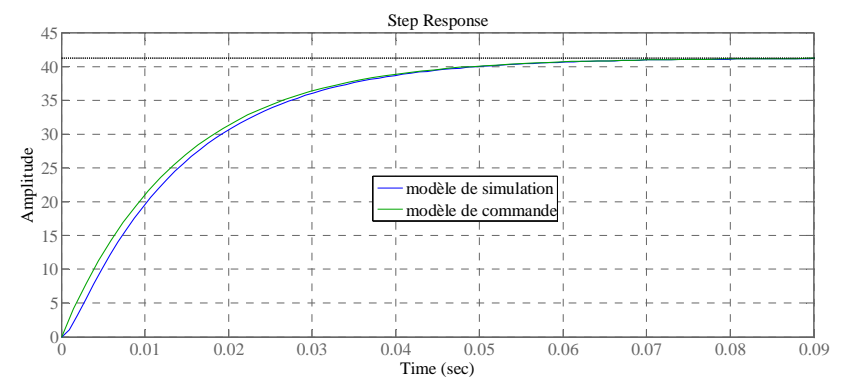
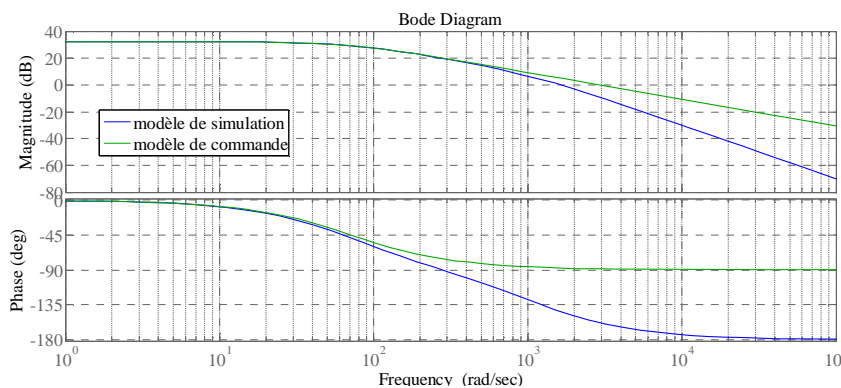
Le modèle complet du second ordre sera notre modèle de simulation

Le modèle de commande sera un premier ordre :

$$\Omega(p) = \frac{0.024 / 5.818 \cdot 10^{-4}}{\tau_1 p + 1} U(p)$$

Conservation des
propriétés basses
pulsations

Comparaison des réponses :

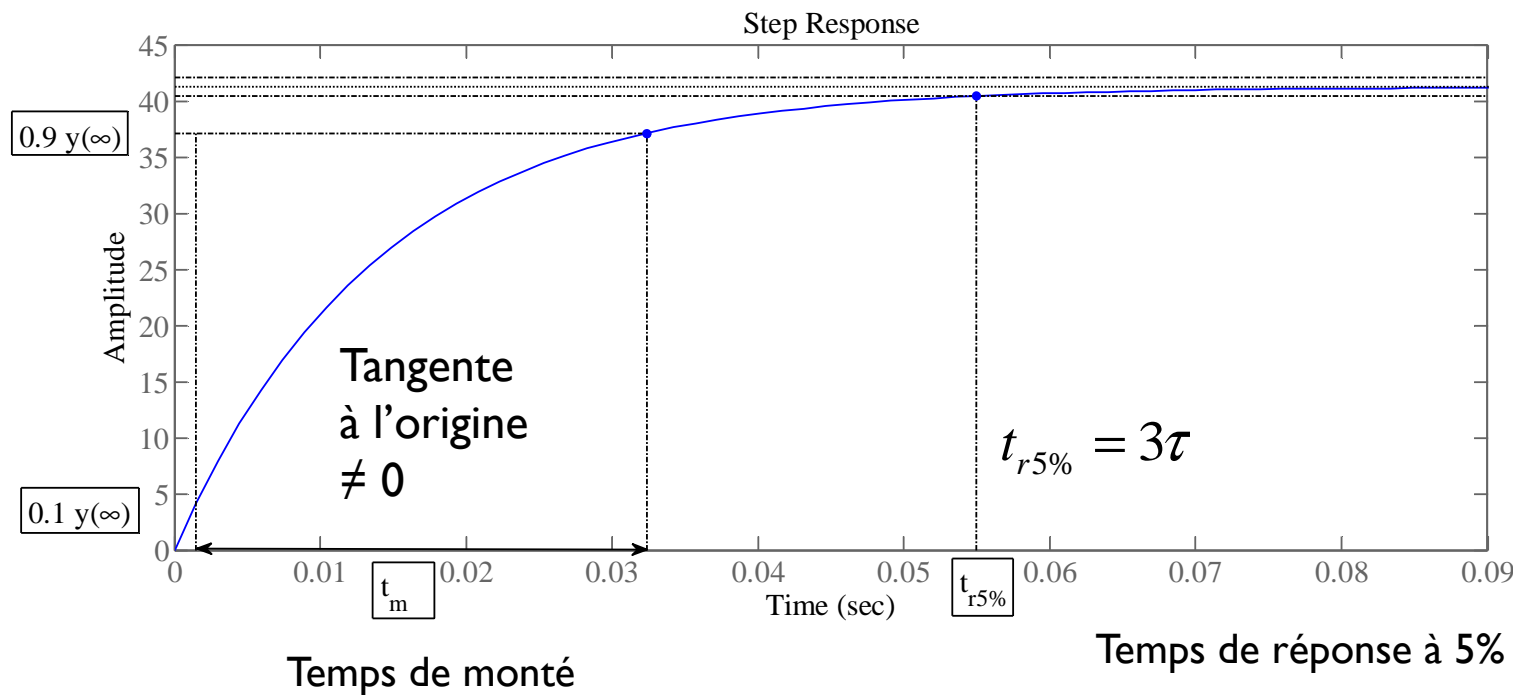


□ Modèle du premier ordre

○ Modèle : $G(p) = \frac{k}{\tau p + 1}$

➤ k : Gain statique τ : Constante de temps

○ Réponse indicielle



$$\tau = 0.63 y(\infty)$$

□ Modèle du second ordre

○ Modèle :

$$G(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

➤ k : Gain statique ω_0 : Pulsation propre ζ : Facteur d'amortissement

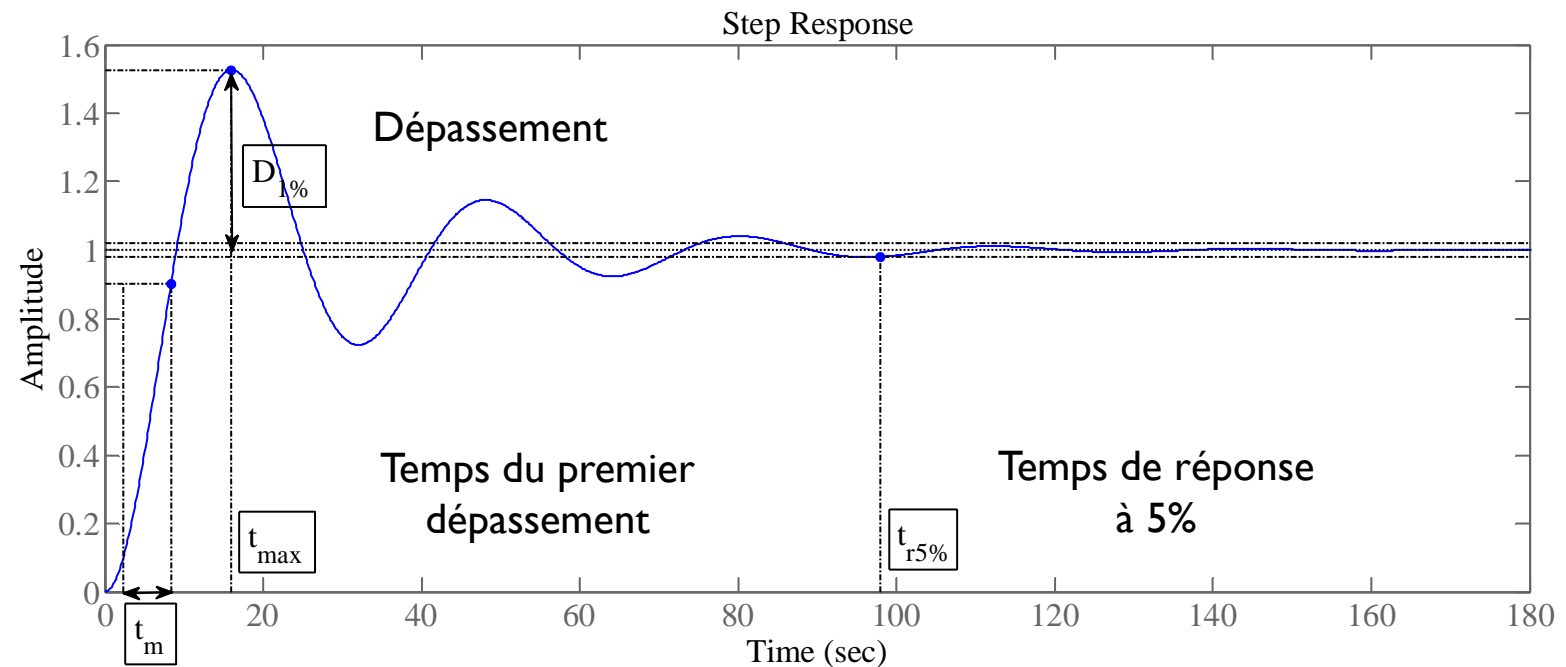
En fonction de ζ deux types de réponse :

ζ	Nature de pôles	Nature des modes	Dépassement
>1	réels	Exponentiels amortis	Non
$=1$	Réels double	Exponentiels amortis	Non
<1	Complexes conjugués	Sinusoïdales amortis	Oui

Les deux premières lignes donnant le même type de réponse : réponse de deux premiers ordres en série. Seul le troisième cas est intéressant par les possibilités qu'il offre (régime pseudo périodique).

□ Modèle du second ordre

○ Réponse indicielle (pseudo amorti)



Temps de montée

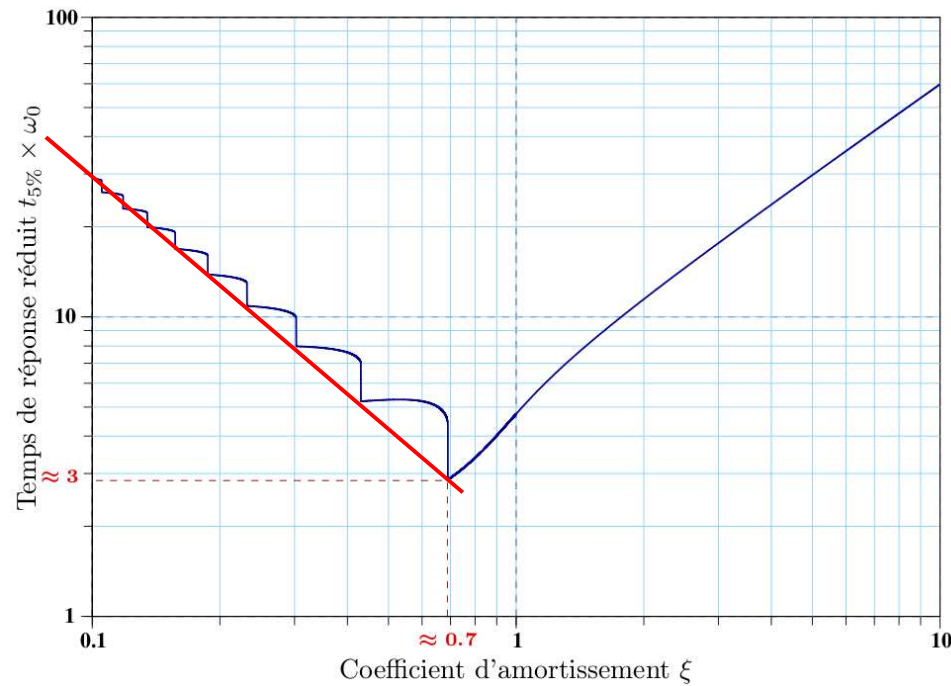
□ Modèle du second ordre

- Pôles : $p_i = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$
- Réponse Impulsionnelle : $E_0k \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t) \right)$
- Réponse indicielle : $E_0k \left(1 - \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi) \right)$
 $\varphi = \text{Arc sin}(\sqrt{1-\zeta^2})$
- Dépassement maximal : $D_1 = E_0k e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}t}$
- Temps du premier dépassement : $t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$
- Amortissement en fonction du 1^{er} dépassement : $\zeta = \frac{\left| \ln \frac{D_1}{E_0k} \right|}{\sqrt{k^2\pi^2 + \left(\ln \frac{D_1}{E_0k} \right)^2}}$
- Pulsation propre : $\omega_0 = \frac{\pi}{t_{\max}\sqrt{1-\zeta^2}}$
- Pôles : $p_{1,2} = \frac{-\left| \ln \frac{D_1}{E_0k} \right| \pm j\pi}{t_{\max}}$

□ Modèle du second ordre

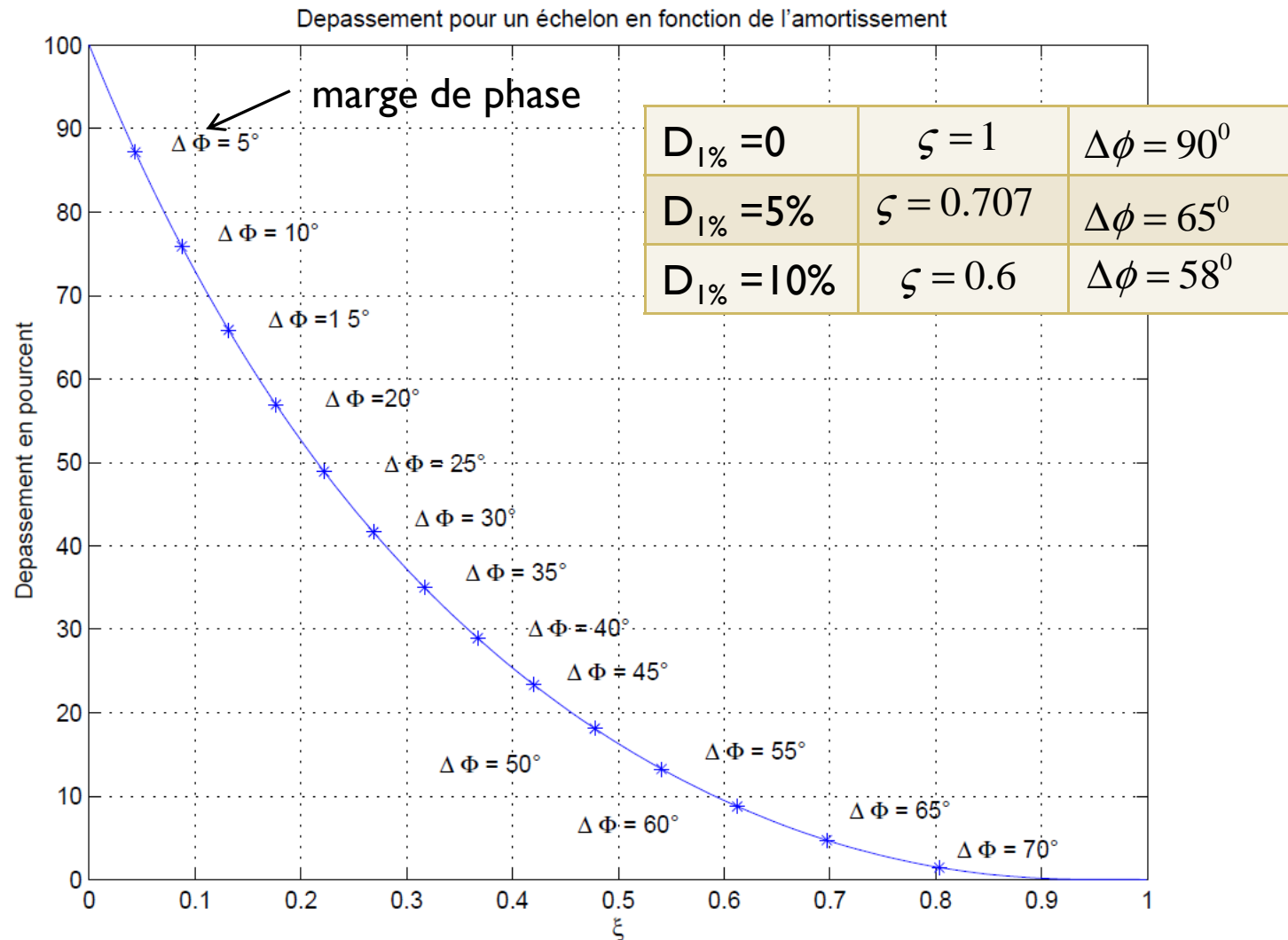
- Temps de réponse à 5% / Amortissement : la courbe réelle donné ci-dessous est souvent approximée (très grossièrement) par la formule :

$$t_{r5\%} \approx \frac{3}{\zeta \omega_0}$$



Modèle du second ordre

- Dépassement/ Amortissement : Courbe très pratique reliant le dépassement au facteur d'amortissement en boucle ouverte avec un paramétrage avec la marge de phase de l'asservissement.



Les Outils

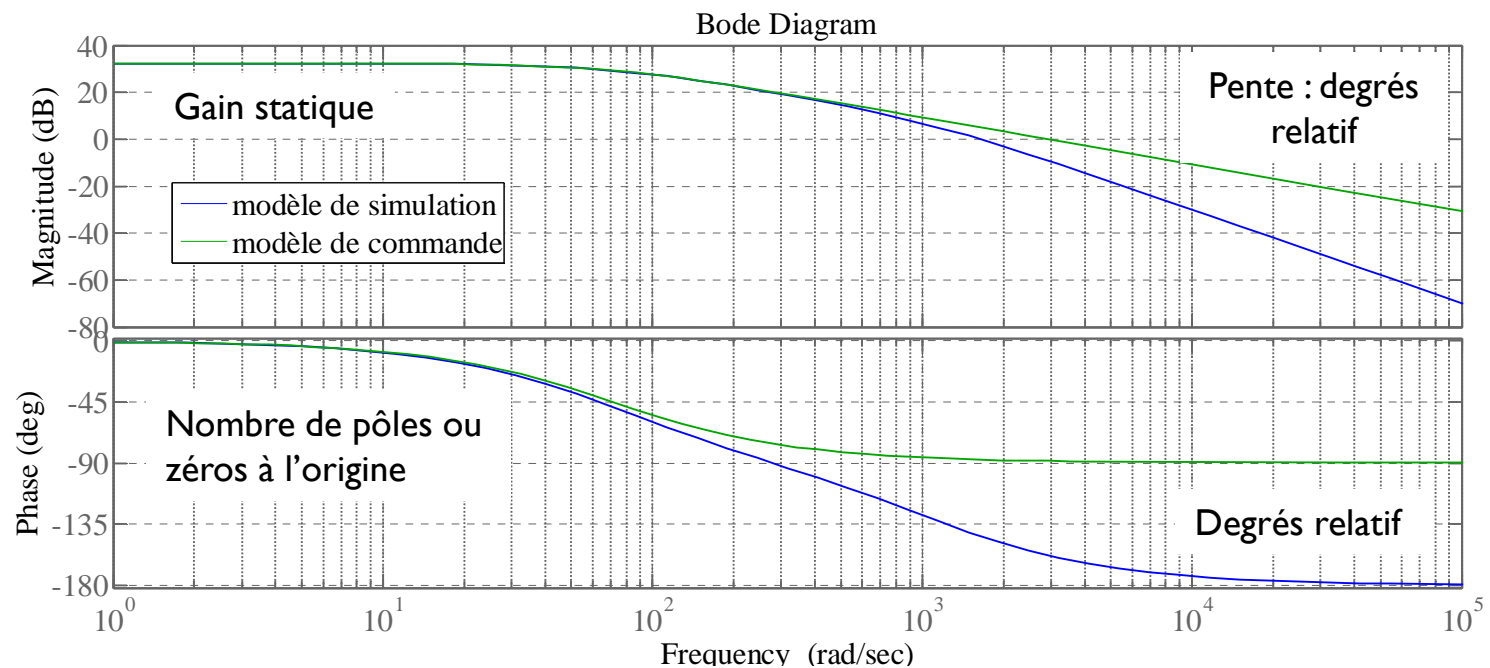
- ❑ Les outils d'analyse
- ❑ Les outils de synthèse

Les outils d'analyse

Représentations fréquentielles

➤ Diagramme de Bode :

Le plus complet car il représente en fonction de la pulsation le module et l'argument de la fonction de transfert étudiée. Il est difficile de relier le comportement de la BO avec la BF avec ce diagramme.

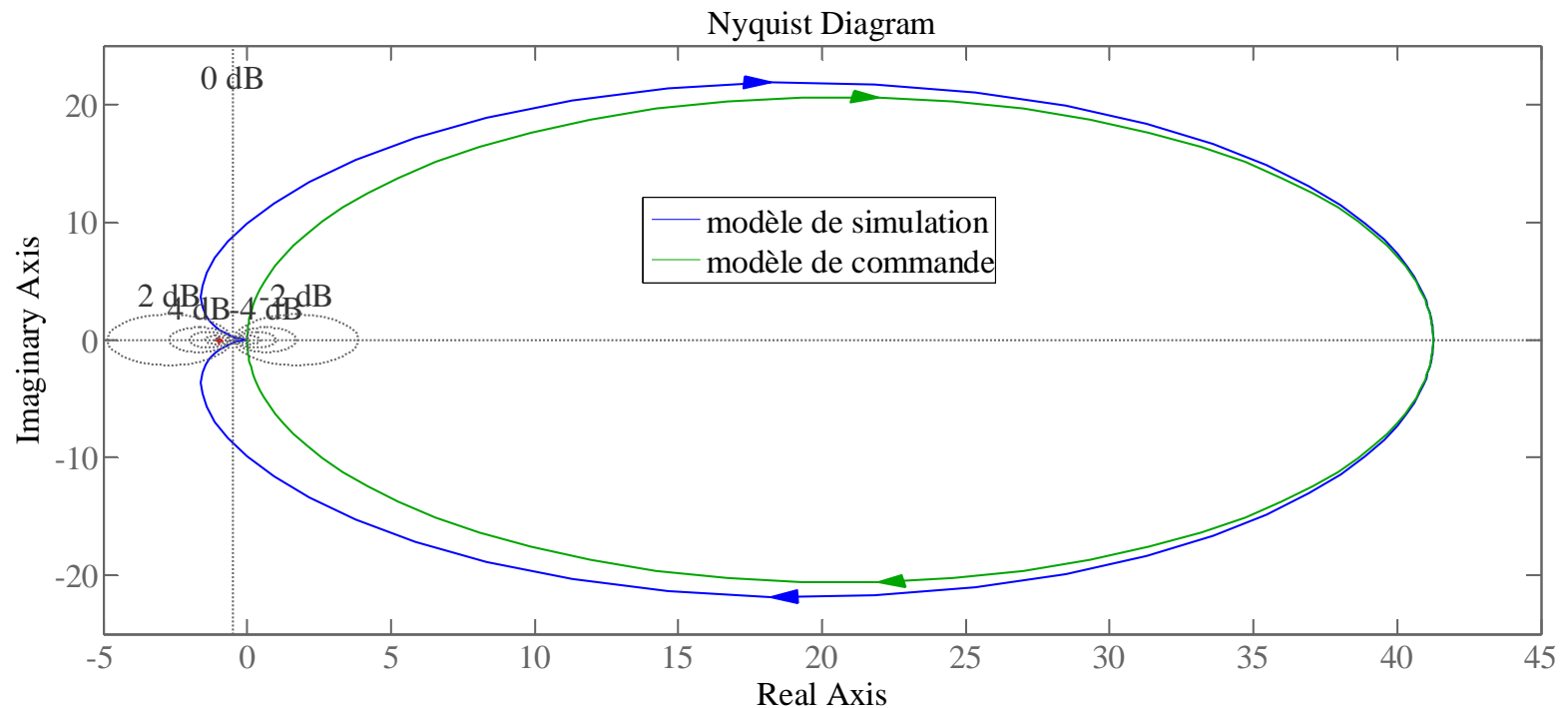


□ Les outils d'analyse

○ Représentations fréquentielles

➤ Diagramme de Nyquist :

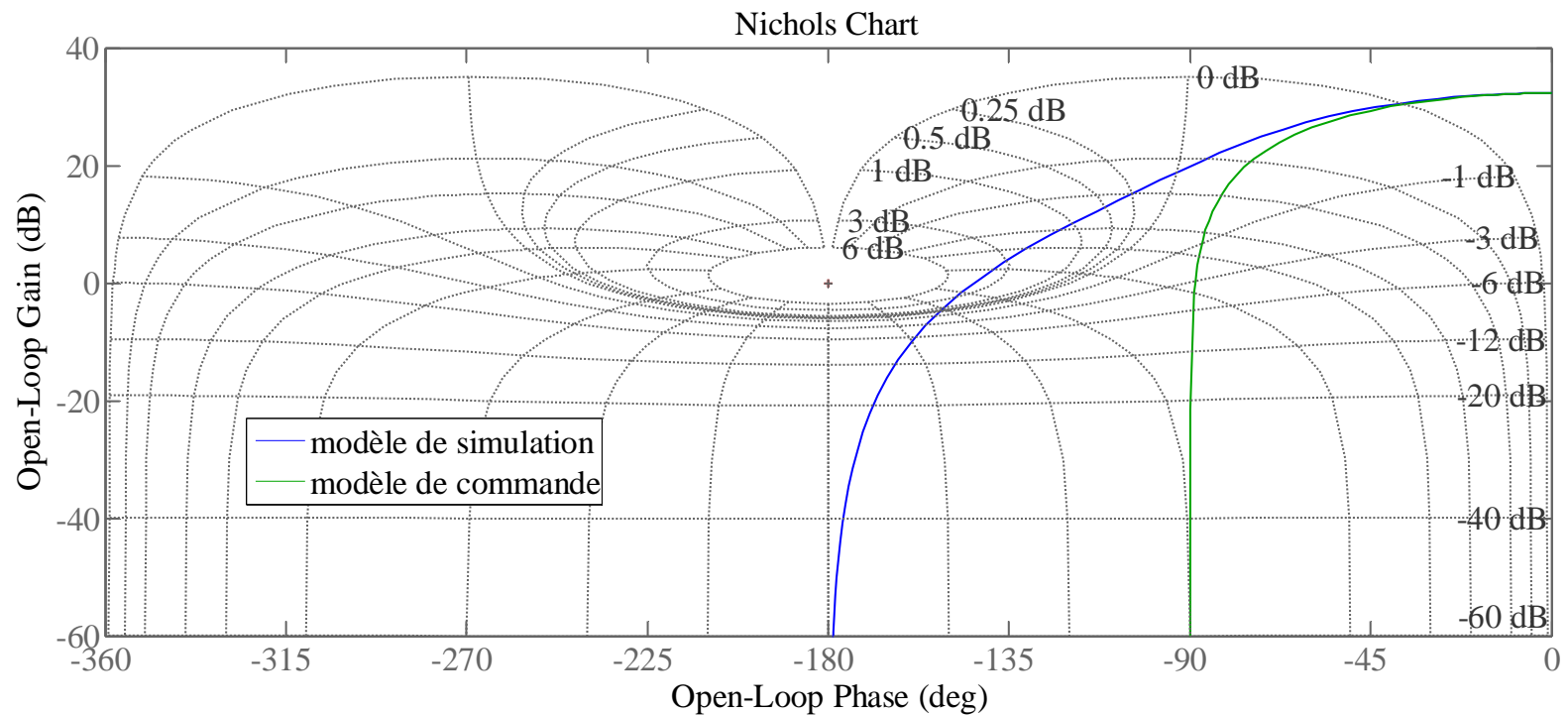
C'est une courbe paramétrée en pulsation qui représente dans le plan complexe le lieu d'une fonction de transfert. En abscisse, la partie réelle de la fonction de transfert et sa partie imaginaire en ordonnées. Ce diagramme est le seul qui permet de déterminer la stabilité de la boucle fermée dans tous les cas de figure.



Les outils d'analyse

Représentations fréquentielles

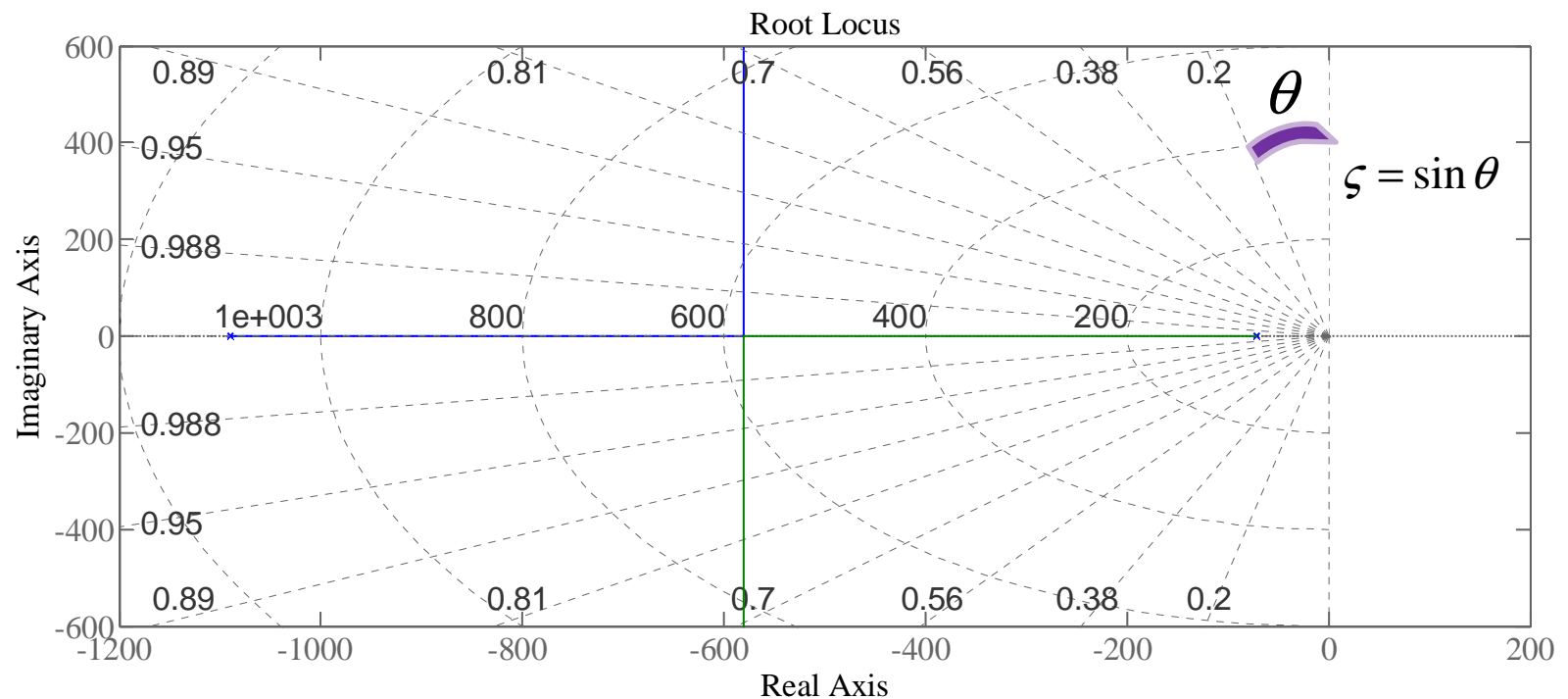
- Diagramme de Nichols : C'est une courbe paramétrée en pulsation donnant le lieu d'une fonction de transfert. En abscisse, la phase en degrés et en ordonnées le module en dB.



Les outils d'analyse

Représentations Pôles et Zéros

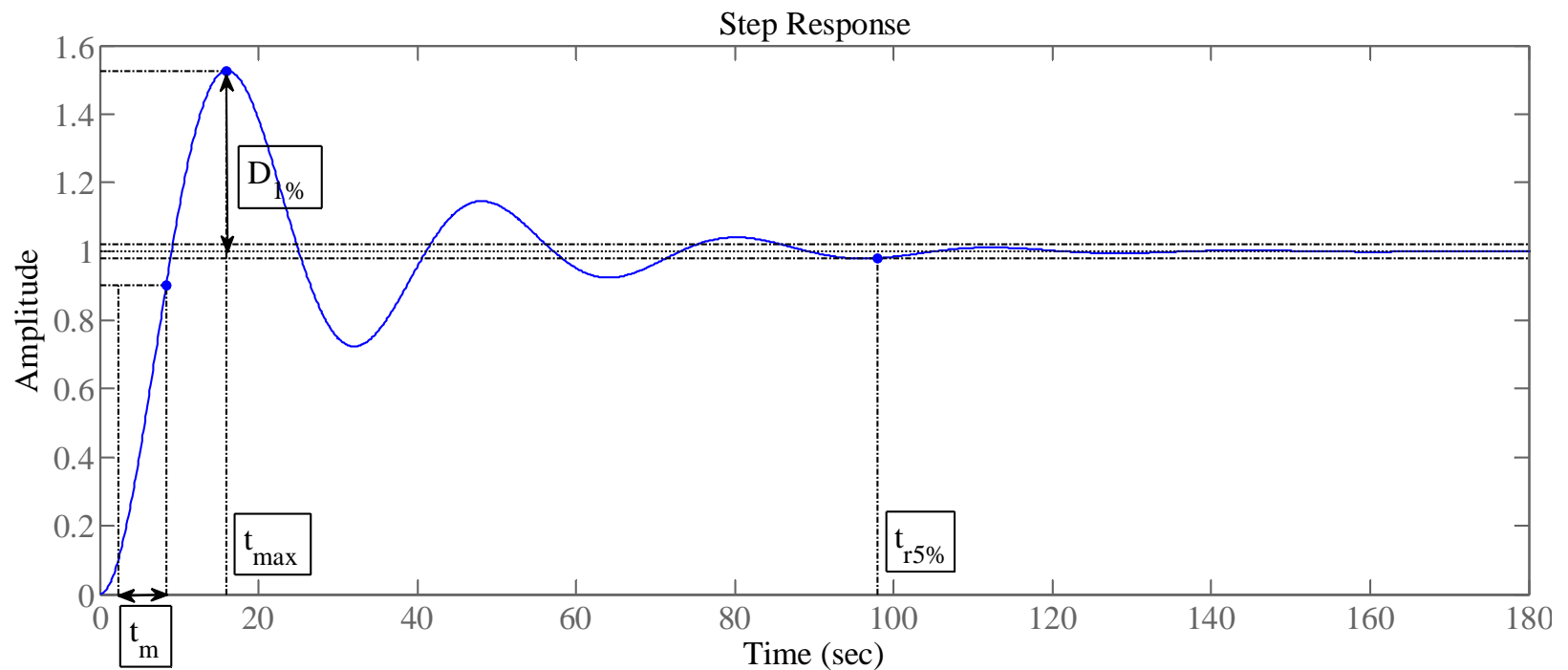
- Cartographie des pôles et zéros. Cette outil n'est pas utilisable en présence de retard pur. Un outil dérivé de cette représentation est le lieu d'Evans ou lieu des racines. Cet outil est très pratique pour connaître l'évolution de la dynamique d'un système à commander en fonction du gain proportionnel du correcteur.



Les outils d'analyse

Réponses Temporelles :

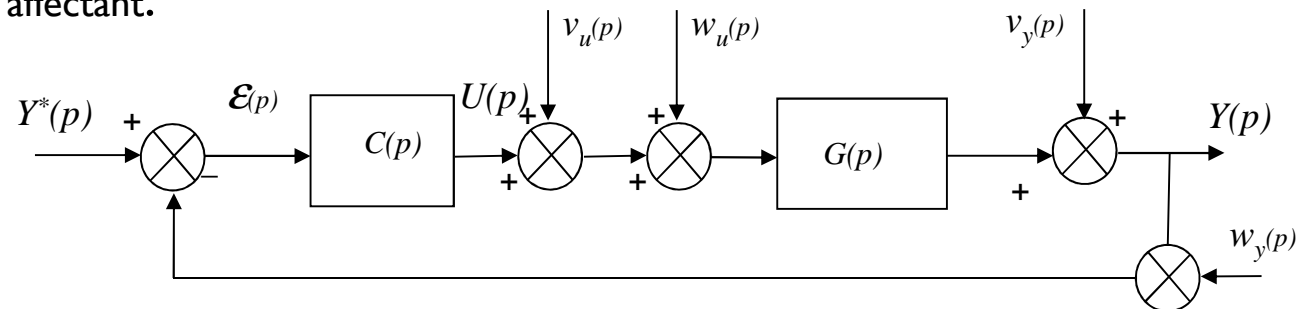
- La plus usitée est la réponse indicielle. Elle est souvent utilisée pour spécifier les performances temporelles d'un asservissement. Dans ce cas, on envisage généralement un modèle de comportement du second ordre.



Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités :

- Pour les systèmes S.I.S.O. (Single Input, Single Output), nous pouvons représenter l'asservissement avec un retour unitaire et les différents signaux de perturbations l'affectant.



- $v_u(p)$: perturbation d'entrée (basses pulsations), $w_u(p)$: bruit sur la commande (CNA), $v_y(p)$: perturbation de sortie (basses pulsations), $w_y(p)$: bruit de capteur (hautes pulsations)

- En notant la fonction de transfert représentant la boucle ouverte comme

$$L(p) = C(p)G(p)$$

- Ecrire les fonctions de transfert entre la sortie, l'écart et la commande et les entrées consigne, perturbations d'entrée (ou de commande), de sortie et bruit de mesure.

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités :

Entrées Sorties	$Y^*(p)$	$v_y(p)$	$v_u(p)$	$w_y(p)$
$Y(p)$	$\frac{L(p)}{1+L(p)}$	$S(p)$	$G(p)S(p)$	$-T(p)$
$\varepsilon(p)$	$\frac{1}{1+L(p)}$	$S(p)$	$-G(p)S(p)$	$T(p)$
$U(p)$	$C(p)S(p)$	$-C(p)S(p)$	$-T(p)$	$-C(p)S(p)$

Fonction de sensibilité

$$S(p) = \frac{1}{1+L(p)}$$

$$C(p)S(p)$$

Fonction de sensibilité
complémentaire

$$T(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$$

$$G(p)S(p)$$

L'étude de ces 4 fonctions de transfert permet de caractériser fréquentiellement tous les relations entrée/sortie de l'asservissement

□ Les outils d'analyse

○ Les fonctions de sensibilités :

- Avec un retour unitaire, les entrées « perturbation de sortie » et « consigne » donnent les mêmes fonctions de transfert sur l'écart et la sortie donc il n'est pas obligatoire de la traiter séparément.
- Ces 4 fonctions de transfert sont souvent appelées fonctions de sensibilité de l'asservissement. Elles sont écrites sous la forme précédente ou sous une forme qui permet de faire le lien entre l'entrée et la sortie concernée :

$$T_{y^* \rightarrow u}(p) = C(p)S(p)$$

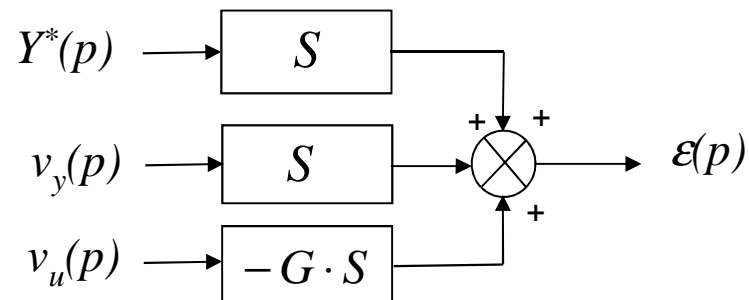
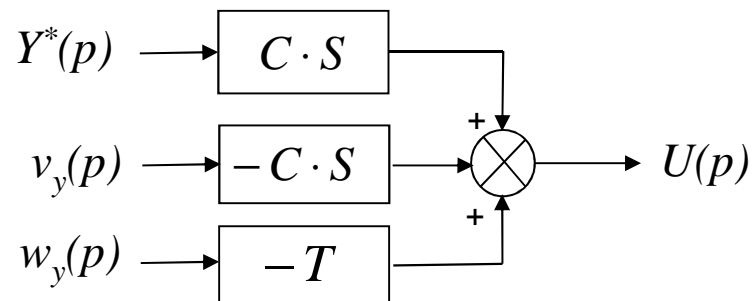
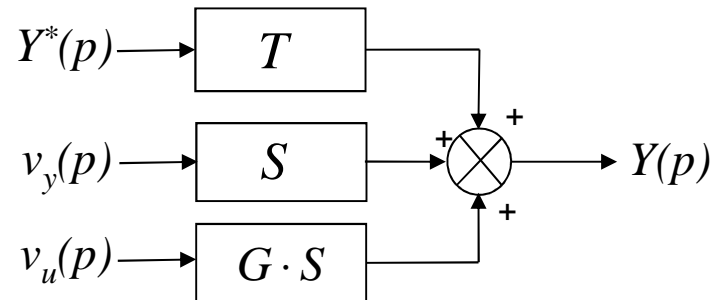
$$T_{w_y \rightarrow u}(p) = -C(p) \cdot S(p)$$

$$T_{v_u \rightarrow y}(p) = -G(p) \cdot S(p)$$

$$T_{y^* \rightarrow y}(p) = T(p)$$

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités :



□ Les outils d'analyse

○ Les fonctions de sensibilités : Propriétés

➤ Effet matelas d'eau de $S(p)$

D'après le théorème de BODE (1945) valable pour les systèmes stables :

$$\int_0^{+\infty} \text{Ln}|S(j\omega)|d\omega = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \int_0^{+\infty} |S(j\omega)|_{dB} d\omega = 0$$

Ce théorème est valable pour des systèmes de degrés relatif égal à -1 (1972 Kwaakernak & Sivan), Ce théorème impose donc que le module de $S(j\omega)$ en dB possède une partie en dessous et au dessus de l'axe 0 dB. Toute action de correction dans une bande de fréquence aura une conséquence inverse dans une autre bande fréquentielle (effet du matelas d'eau). Pour les systèmes instables, une extension a été établie par Freudenberg et Loze :

$$\int_0^{+\infty} \text{Ln}|S(j\omega)|d\omega = \pi \sum_{i=0}^k \text{Re}(p_i)$$

p_i : Pôles instables de la boucle ouverte

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : BF/BO

- Liens entre la Boucle ouverte et les fonctions de sensibilité en en boucle fermée.

La boucle ouverte dépend linéairement de $C(p)$ alors que la boucle fermée à une dépendance non linéaire vis-à-vis de $C(p)$. Il est quand même possible de traduire les contraintes imposées par le cahier des charges sur les fonctions de sensibilité.

	Boucle Ouverte	Boucle Fermée
En basses pulsations	$C(j\omega)G(j\omega) \gg 1$	$\Rightarrow S(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \ll 1$
En hautes pulsations	$C(j\omega)G(j\omega) \ll 1$	$\Rightarrow S(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \approx 1$

Rq : Hautes et basses pulsations sont définies par rapport à la pulsation de coupure

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : BF/BO

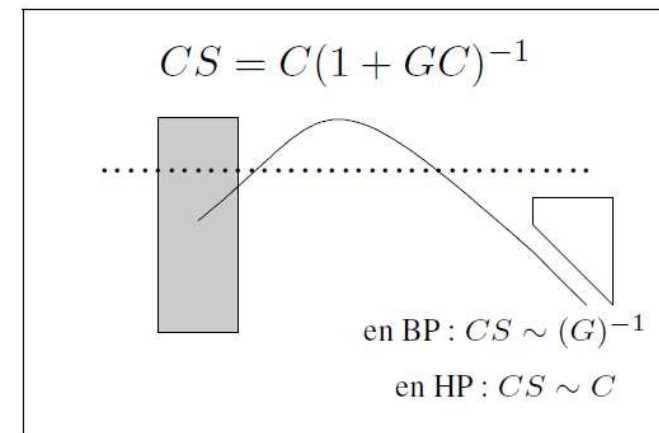
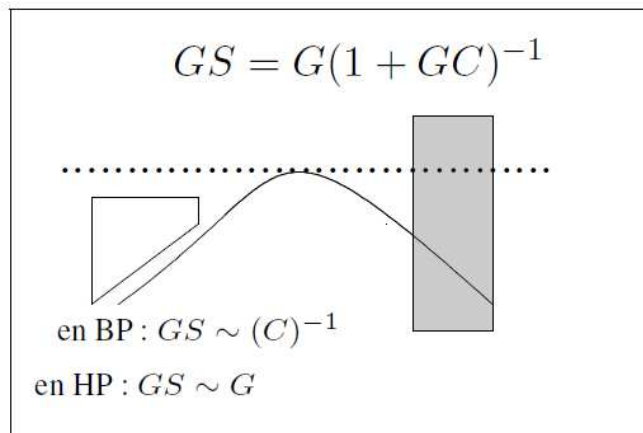
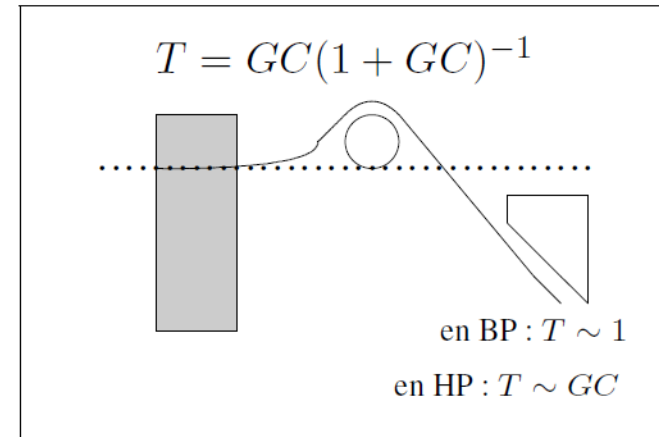
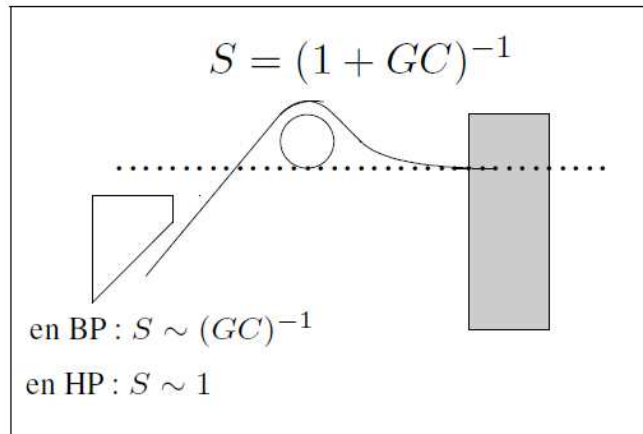
- Liens entre la Boucle ouverte et les fonctions de sensibilité en en boucle fermée.

Fonction	Basses Pulsations	Hautes Pulsations
$ C(j\omega)G(j\omega) $	$\gg 1$	$\ll 1$
$ S(j\omega) $	$< 1 \approx \frac{1}{ 1 + C(j\omega)G(j\omega) }$	≈ 1
$ T(j\omega) $	≈ 1	$\approx C(j\omega)G(j\omega) $
$ G(j\omega)S(j\omega) $	$\approx \frac{1}{ C(j\omega) }$	$\approx G(j\omega) $
$ C(j\omega)S(j\omega) $	$\approx \frac{1}{ G(j\omega) }$	$\approx C(j\omega) $

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : BF/BO

- Liens entre la Boucle ouverte et les fonctions de sensibilité en en boucle fermée (Laure Rossignol ©).



Indépendant du correcteur



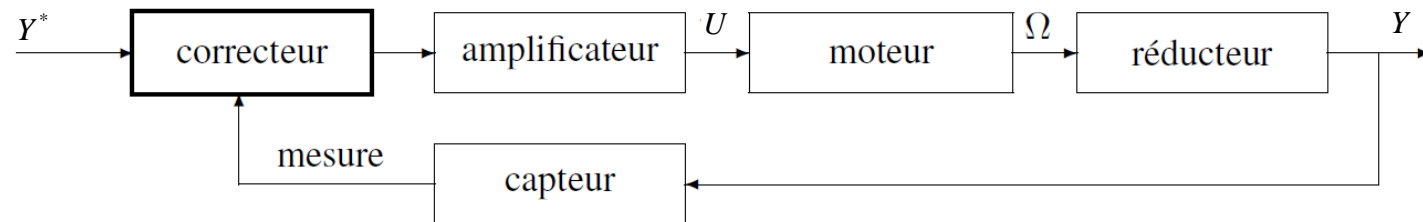
Fonction du correcteur

Dépassement $> 0dB$ non contraignable

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : Exemple I

Soit l'asservissement en position d'une poulie. Le système est constitué d'un amplificateur alimentant un moteur à courant continu qui via un réducteur entraine la poulie.



Le système à commander est donné par

$$G(p) = \frac{235}{p(0.0149p + 1)}$$

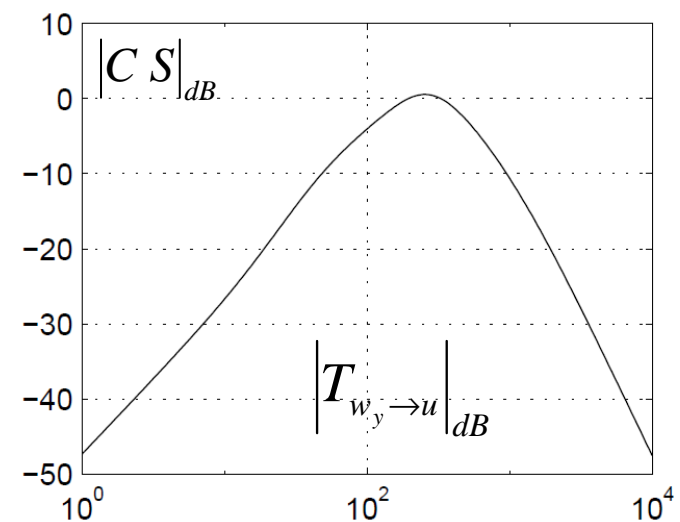
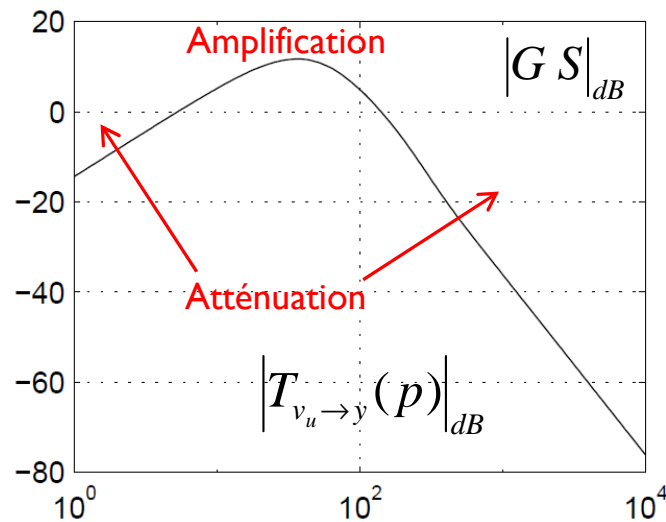
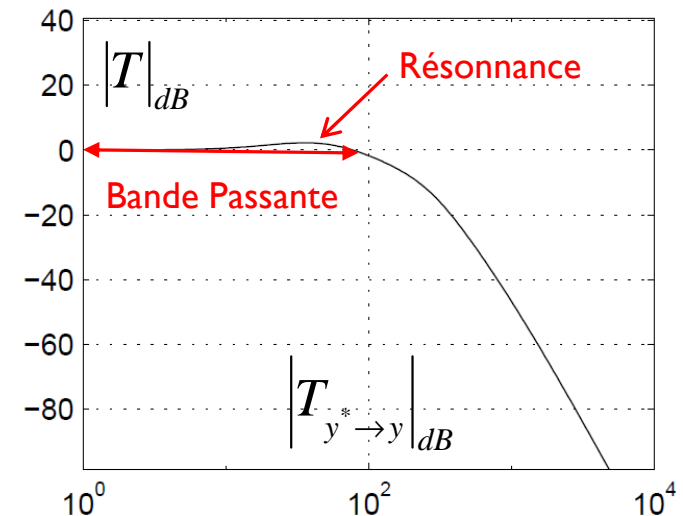
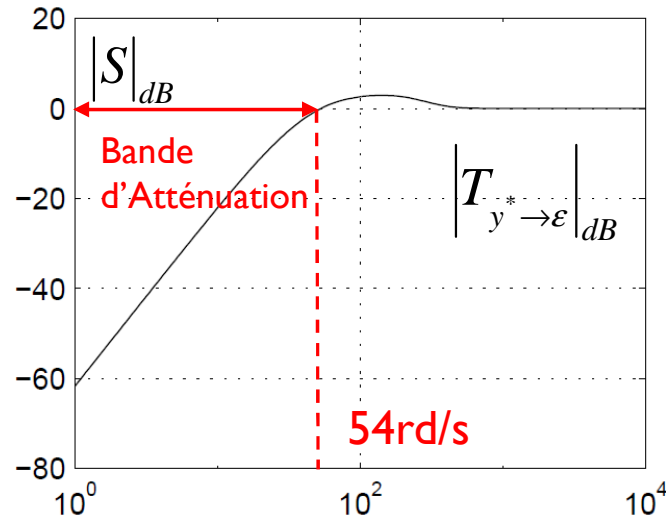
Le correcteur synthétisé est donné par

$$C(p) = \frac{4.2 \cdot 10^6 (p + 20)(p + 69.76)}{p(p^3 + 454p^2 + 1.1 \cdot 10^5 p + 1015)}$$

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : Exemple I

Fonction de sensibilité de l'asservissement :



Pulsation en rd/s

□ Les outils d'analyse

○ Les fonctions de sensibilités : Exemple I

Commentaires :

$$\left| S \right|_{dB} \quad \left| T_{y^* \rightarrow \varepsilon} \right|_{dB}$$

En basses pulsations, S présente une pente de +40 dB/décade donc 2 zéros à l'origine. Cela autorise le suivi de consigne échelon et rampe sans erreur et le rejet de perturbation de sortie constante ou rampe. La bande d'atténuation nous renseigne sur le temps de réjection de la perturbation.

$$\left| GS \right|_{dB} \quad \left| T_{v_u \rightarrow y}(p) \right|_{dB}$$

En basses pulsations, GS présente une pente de +20 dB/décade donc un zéro à l'origine. Cela autorise le rejet perturbation d'entrée constante. Par contre autour de la pulsation de coupure, une amplification d'un facteur supérieur à 3 apparaît, cela va se retrouver sur le rejet de la perturbation d'entrée.

$$\left| CS \right|_{dB} \quad \left| T_{w_y \rightarrow u} \right|_{dB}$$

C'est une fonction de transfert passe-bas, ce qui assure une commande insensible aux bruits de mesure. La résonance donne une idée de la dynamique de la commande.

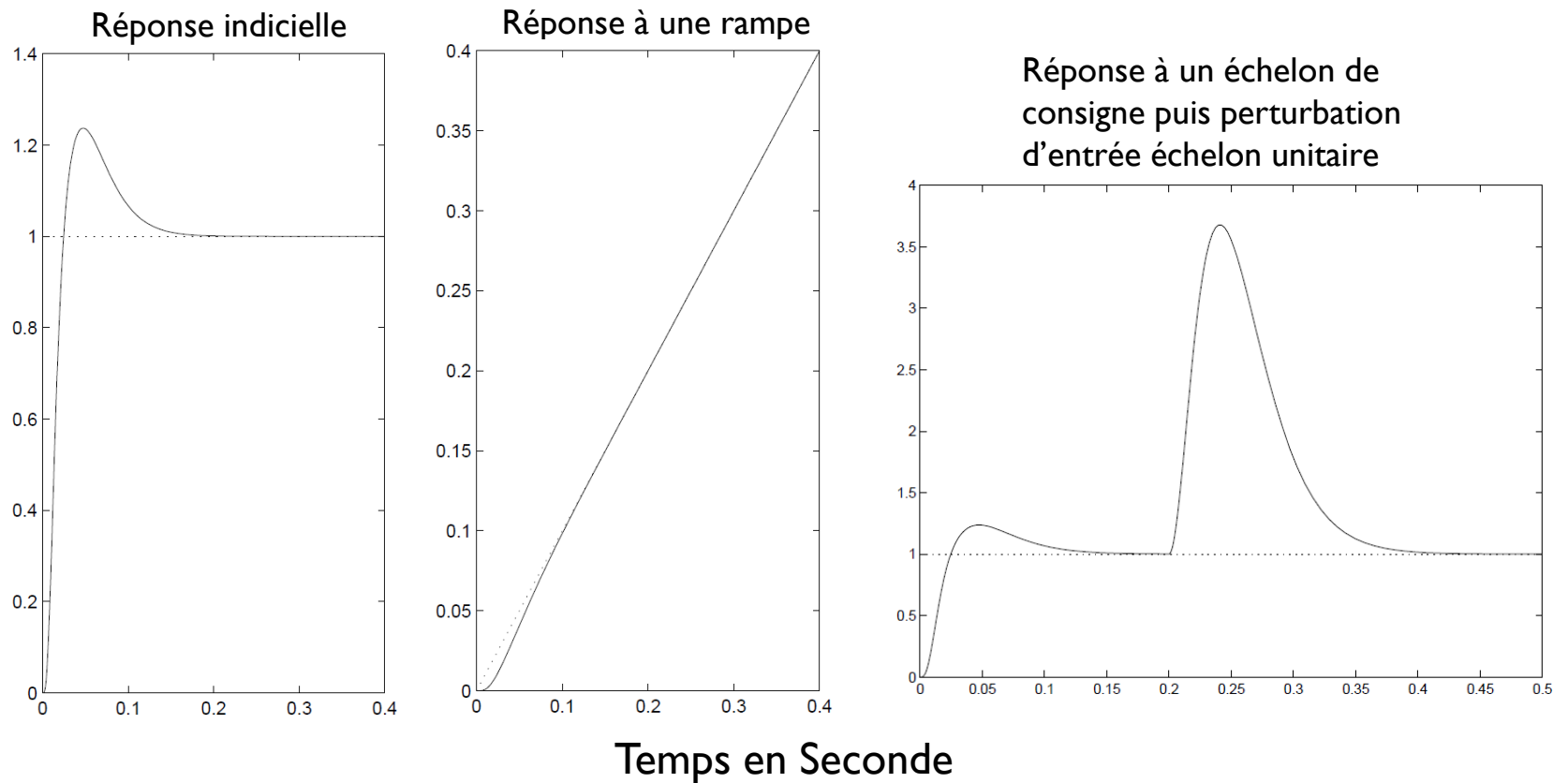
$$\left| T \right|_{dB} \quad \left| T_{y^* \rightarrow y} \right|_{dB}$$

C'est une fonction de transfert passe-bas, ce qui assure une sortie insensible aux bruits de mesure. La résonance donne une idée du dépassement pour une réponse indicielle (retour unitaire).

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : Exemple I

Performances temporelles de la sortie :

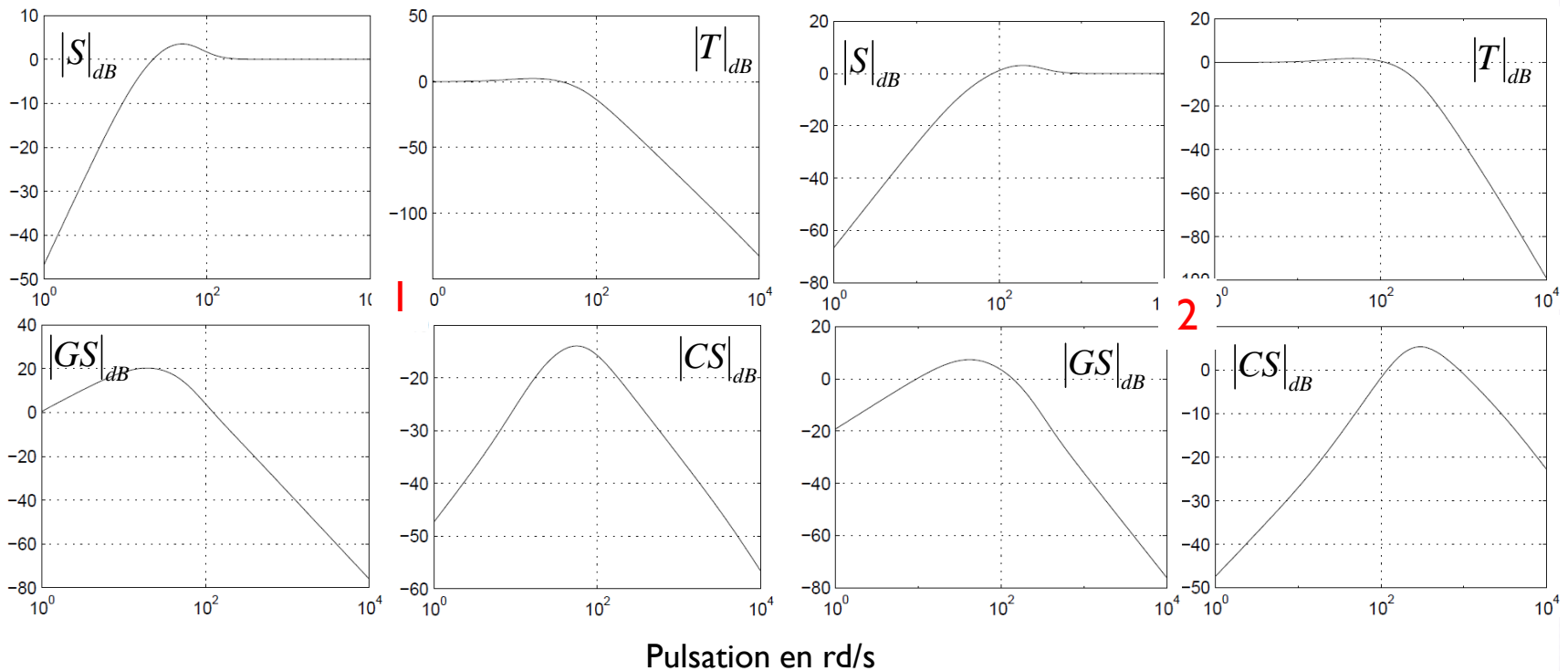


Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : Exemple 2

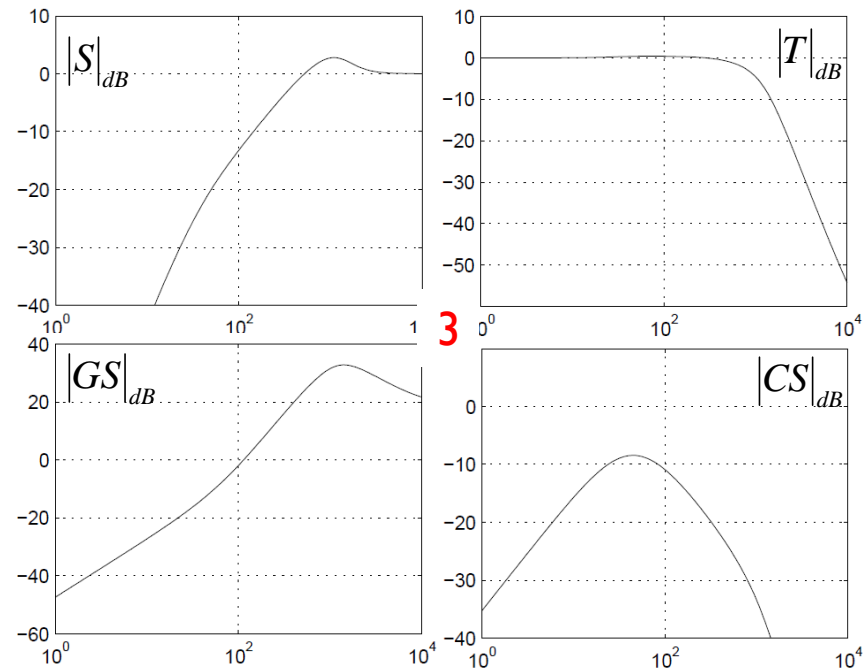
Voici les tracés des fonctions de sensibilités de 3 synthèses différentes (1, 2, 3) sur l'asservissement en position d'un moteur à courant continu. Viennent ensuite les tracés des performances temporelles de ces asservissements (A, B, C). Pouvez vous, en justifiant avec 3 arguments, relier les tracés fréquentiels aux tracés temporelles.

La justification devra comprendre un argument sur S , sur CS et GS .



Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : Exemple 2

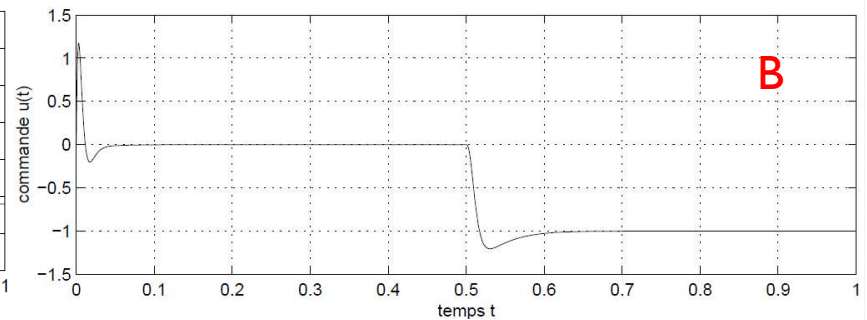
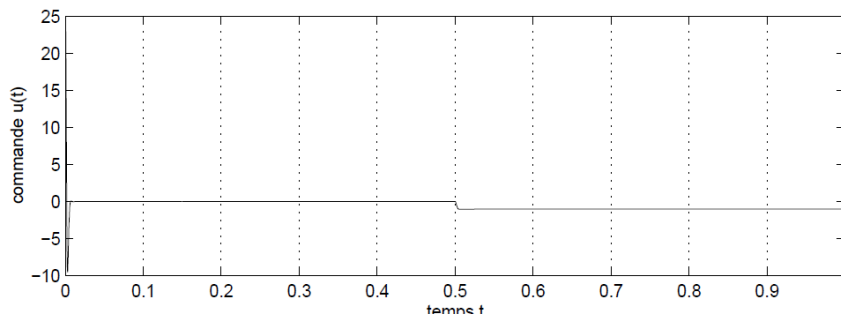
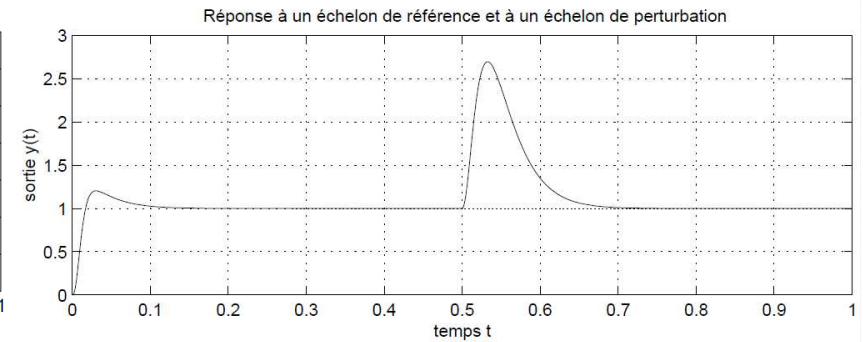
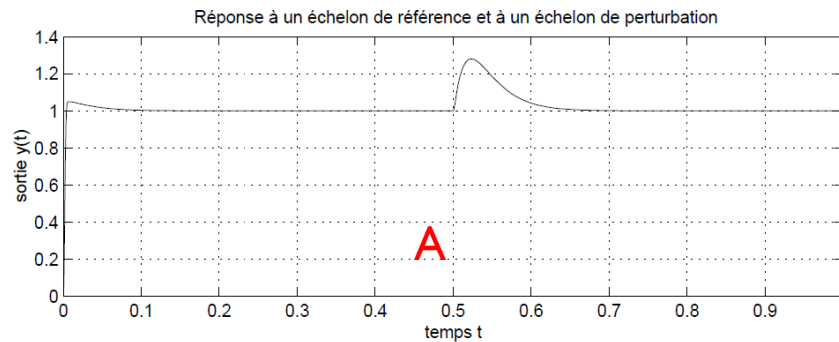


Pulsation en rd/s

Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : Exemple 2

Performances temporelles



Temps en Seconde

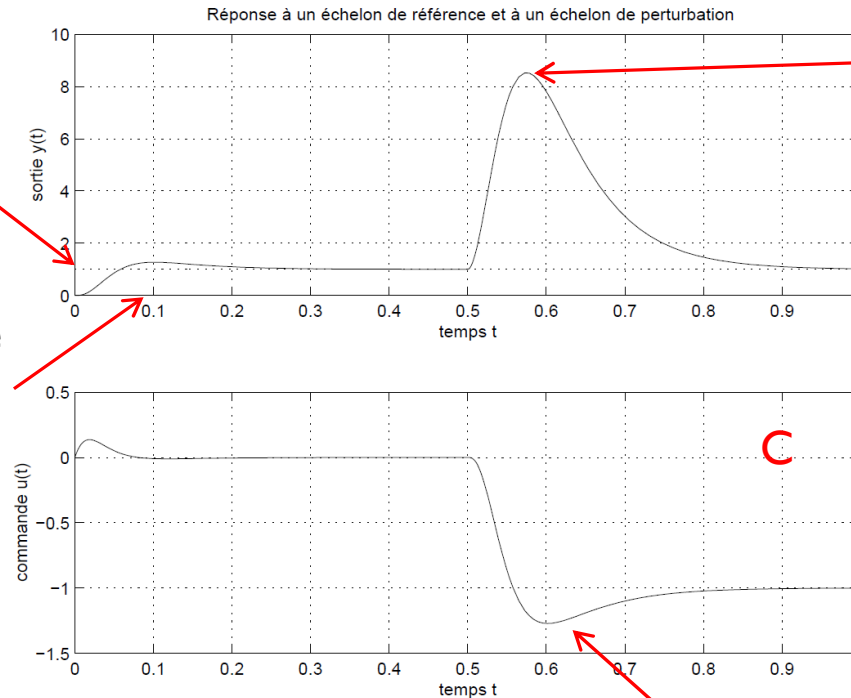
Les outils d'analyse

Les fonctions de sensibilités : Exemple 2

Performances temporelles

Erreur de position
 $|S|_{dB}$

Lié à la bande
passante
 $|T|_{dB}$



Lié avec la
résonance
de $|GS|_{dB}$

Temps en Seconde

Lié avec la
résonance
de $|CS|_{dB}$

□ Les outils d'analyse

○ La stabilité :

La stabilité peut s'étudier avec toutes les représentations. La limite de stabilité est observée pour la pulsation vérifiant ces deux relations :

$$|L(j\omega_{\text{lim}})| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg}(L(j\omega_{\text{lim}})) = \pi$$

Ces deux relations montrent le rôle du point -1 dans le plan complexe.

➤ Le critère de Nyquist :

Il s'agit de la seule méthode permettant de déterminer la stabilité d'un système bouclé à partir de la fonction de transfert de la boucle ouverte. Le critère s'exprime de la manière suivante :

Nbre d'encerclement du point -1 dans le sens direct

=

$$N = P_{BO} - P_{BF}$$

Nbre de pôles instables de la boucle ouverte

– Nbre de pôles instables de la boucle fermée

□ Les outils d'analyse

○ La stabilité :

La stabilité peut s'étudier avec toutes les représentations. La limite de stabilité est observée pour la pulsation vérifiant ces deux relations :

$$|L(j\omega_{\text{lim}})| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg}(L(j\omega_{\text{lim}})) = \pi$$

Ces deux relations montrent le rôle du point -1 dans le plan complexe.

➤ Le critère de Nyquist :

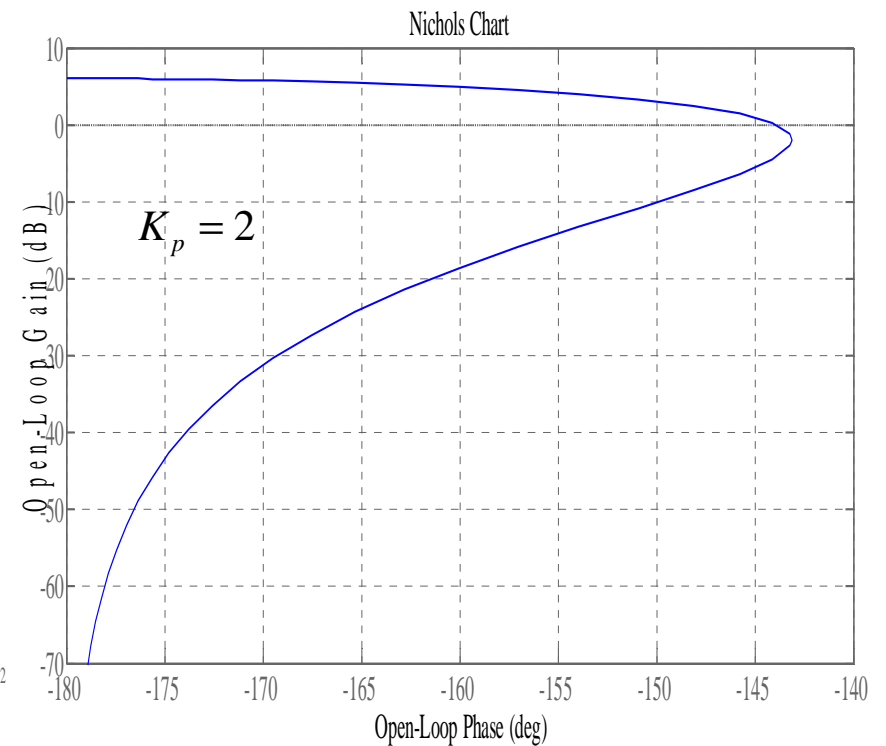
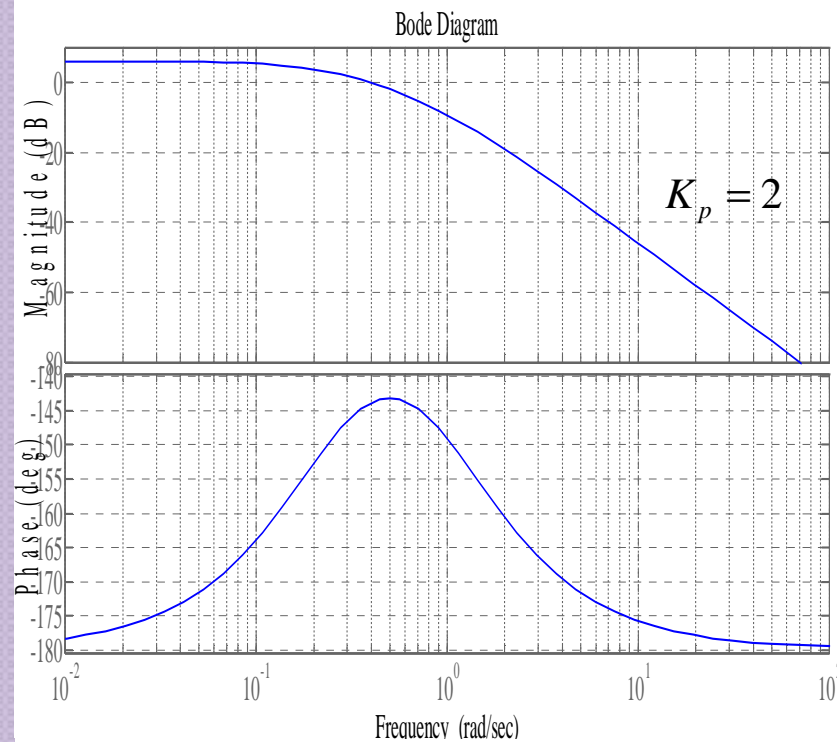
EXPLICATION:

Les outils d'analyse

La stabilité :

Le critère de Nyquist : Exemple I

$$L_1(p) = \frac{K_p}{(4p-1)(p+1)}$$



Les outils d'analyse

La stabilité :

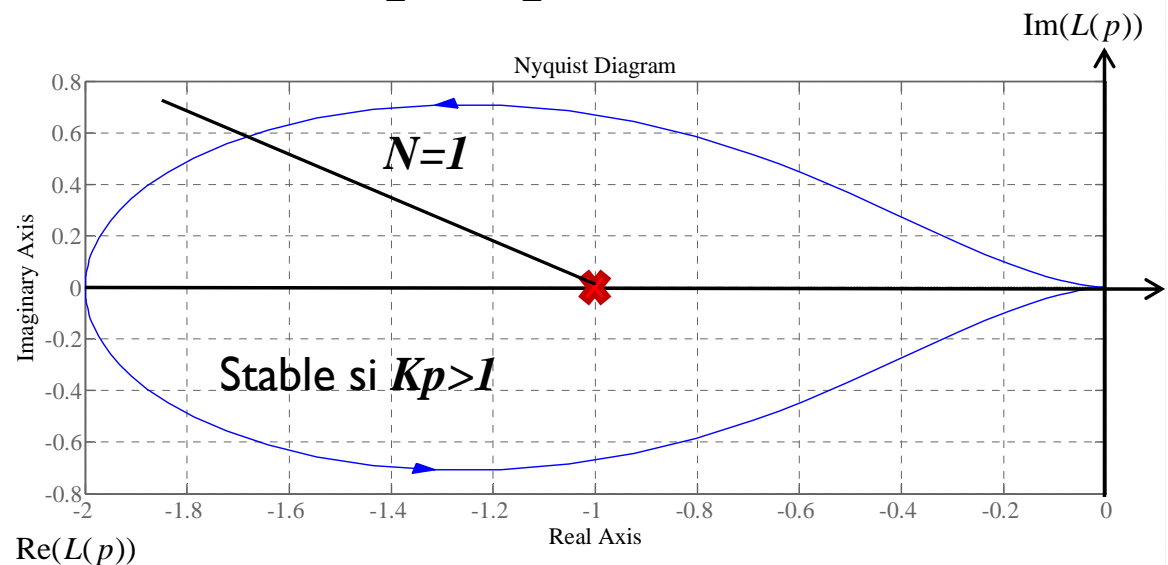
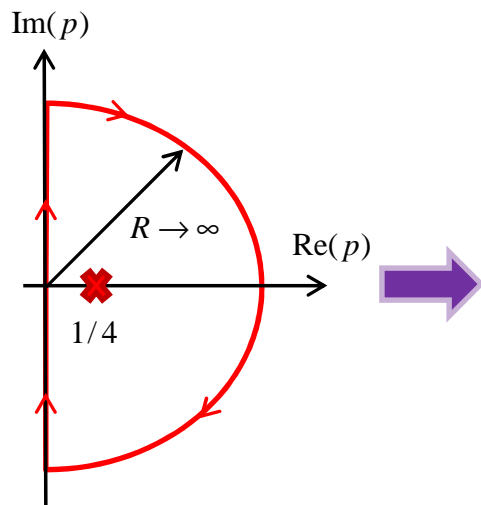
Le critère de Nyquist : Exemple I

$$L_1(p) = \frac{K_p}{(4p-1)(p+1)}$$

$$p = j\omega \rightarrow \begin{aligned} |L_1(j\omega)| &= K_p \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}} \\ \text{Arg}(L_1(j\omega)) &= -\pi + \text{Arctg}\left(\frac{4\omega}{1}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} p = j0^+ \quad |L_1(j0^+)| = K_p \quad \text{Arg}(L_1(j0^+)) = -\pi \\ p \rightarrow j\infty \quad |L_1(j\infty)| = 0 \quad \text{Arg}(L_1(j\infty)) = -\pi \end{array}$$

$$p = Re^{j\theta} \text{ avec } \theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad L_1(p) = \frac{K_p}{R^2} e^{-2j\theta} \rightarrow 0$$

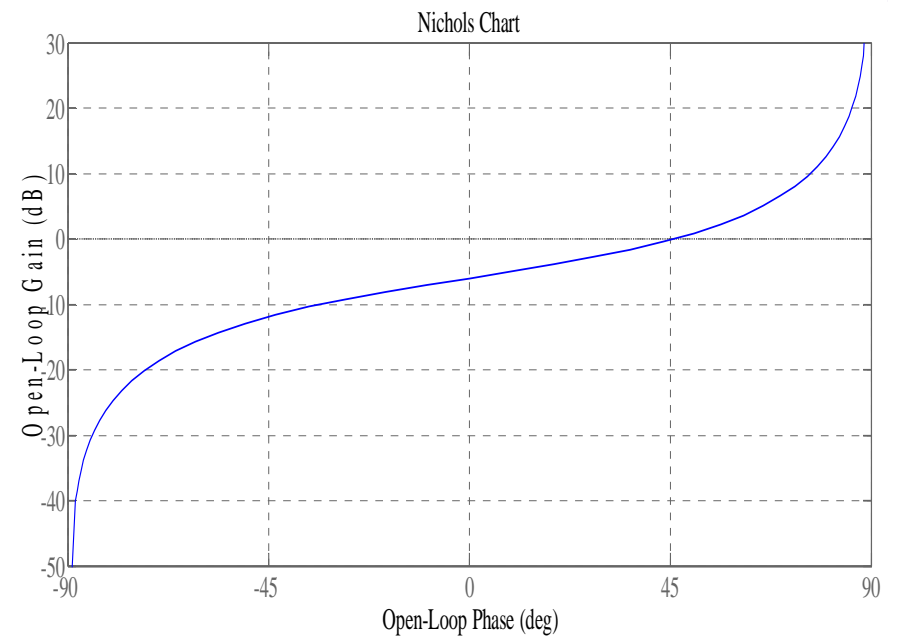
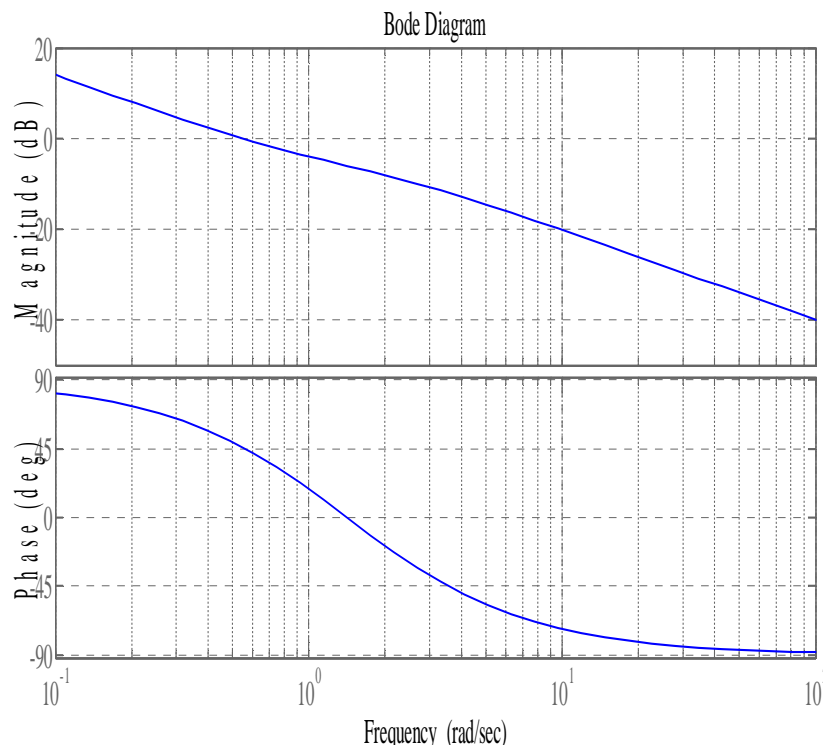


Les outils d'analyse

La stabilité :

Le critère de Nyquist : Exemple 2

$$L_2(p) = \frac{K_p(p-1)}{p(p+2)} \text{ avec } K_p \text{ positif.}$$



Les outils d'analyse

La stabilité : Le critère de Nyquist : Exemple 2

$$L_2(p) = \frac{K_p(p-1)}{p(p+2)} \text{ avec } K_p \text{ positif.}$$

$$p = j\omega \rightarrow$$

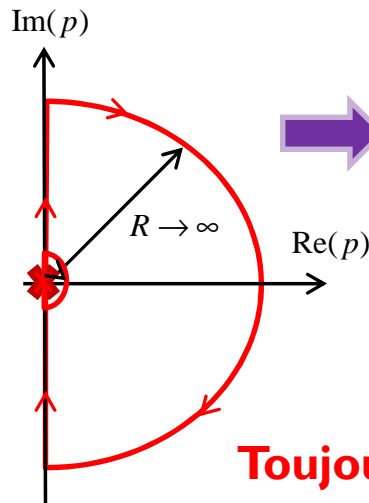
$$|L_2(j\omega)| = K_p \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 4}}$$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(L_2(j\omega)) &= \pi - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{1}\right) \end{aligned}$$

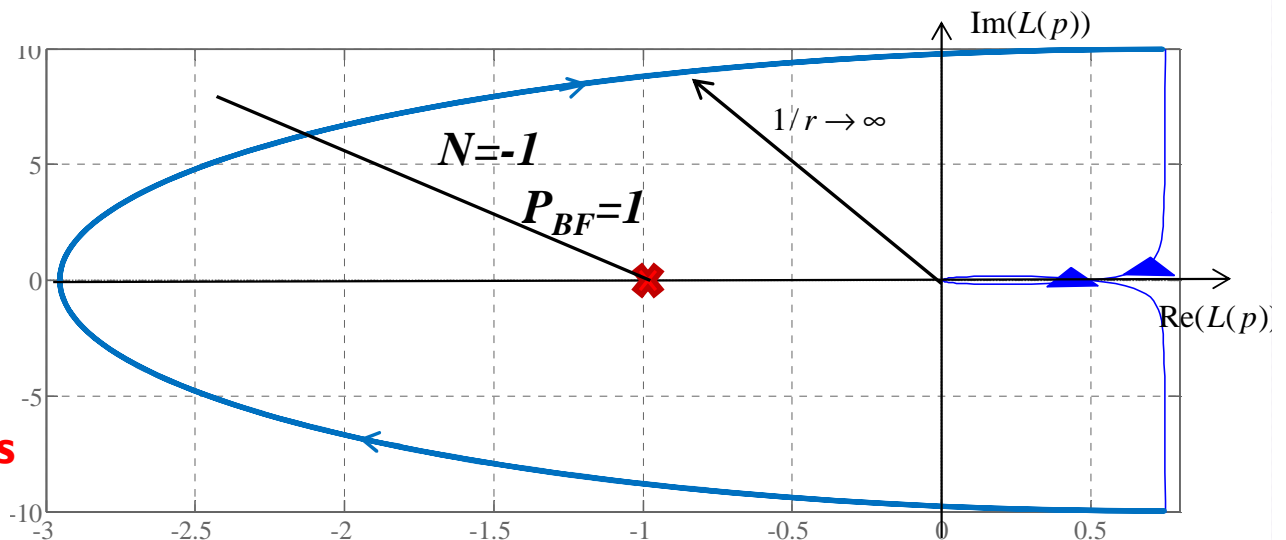
$p = j0^+$	$ L_2(j0^+) = \infty$	$p \rightarrow j\infty$	$ L_2(j\infty) = 0$
	$\text{Arg}(L_2(j0^+)) = \frac{\pi}{2}$		$\text{Arg}(L_2(j\infty)) = -\frac{\pi}{2}$

$$p = re^{j\theta} \text{ avec } \theta: -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad L_2(p) \approx \frac{-K_p}{2r} e^{-j(\theta)} \approx \frac{K_p}{2r} e^{j(\pi-\theta)}$$

$$L_2(p) \rightarrow \infty$$



**Toujours
Instable**



Les outils d'analyse

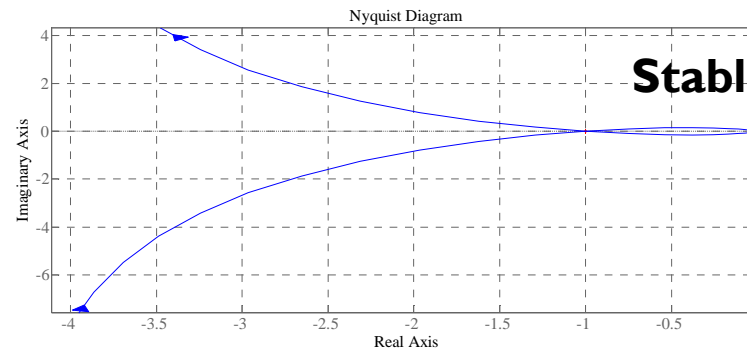
La stabilité :

Le critère de Nyquist : Exemple 3

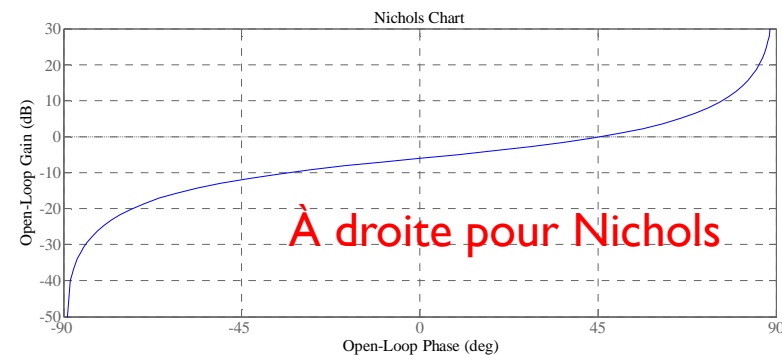
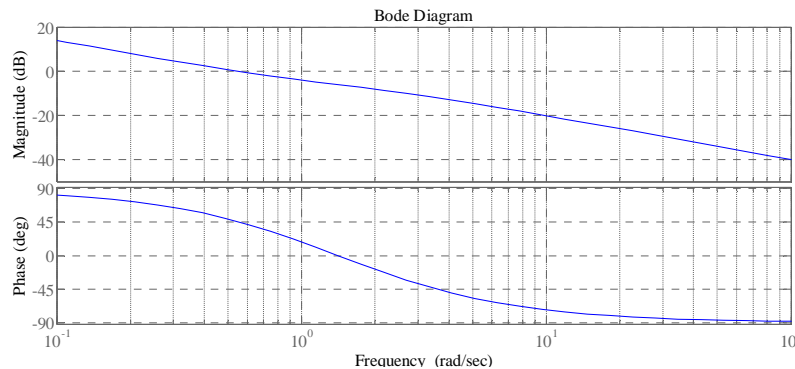
$$L_3(p) = \frac{K_p}{p(p+1)(p+2)} \text{ avec } K_p \text{ positif.}$$

$$|L_3(j\omega)| = K_p \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 4}}$$

$$\text{Arg}(L_3(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{1}\right)$$



Stable si $K_p < 6$



À droite pour Nichols

Critère du revers : ce célèbre critère ne s'applique que sur les systèmes stables et inversement stables.

Un système en boucle fermée est stable lorsque le lieu de Nyquist de $L(j\omega)$ parcouru dans le sens des pulsations croissantes laisse le point -1 à sa gauche.

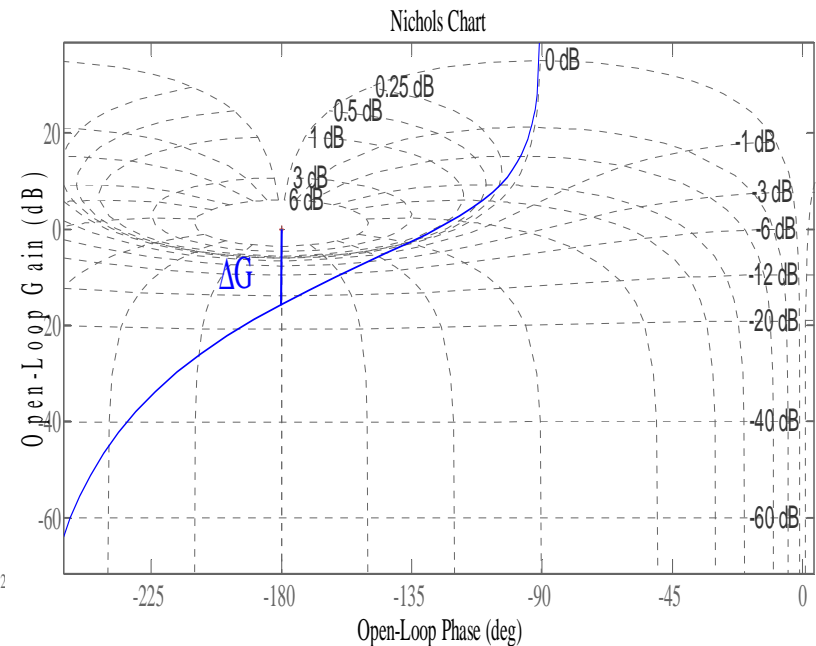
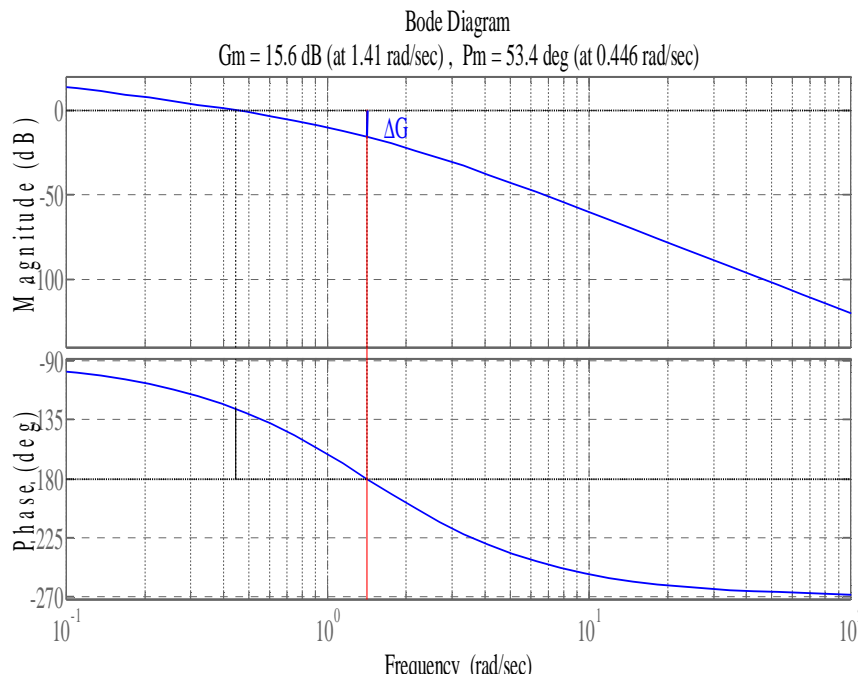
Les outils d'analyse

La stabilité : Les marges de stabilité

Les marges de stabilité sont des mesures permettant de quantifier les variations admissibles de certains paramètres du système à commander.

➤ La marge de Gain : variation du gain statique admissible

$$\Delta G = \frac{1}{L(j\omega_\pi)} \quad \rightarrow \quad \Delta G \cdot |L(j\omega_\pi)| = 1 \quad \text{avec} \quad \text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = \pi$$



Les outils d'analyse

La stabilité : Les marges de stabilité

- La marge de phase : variation admissible de la phase

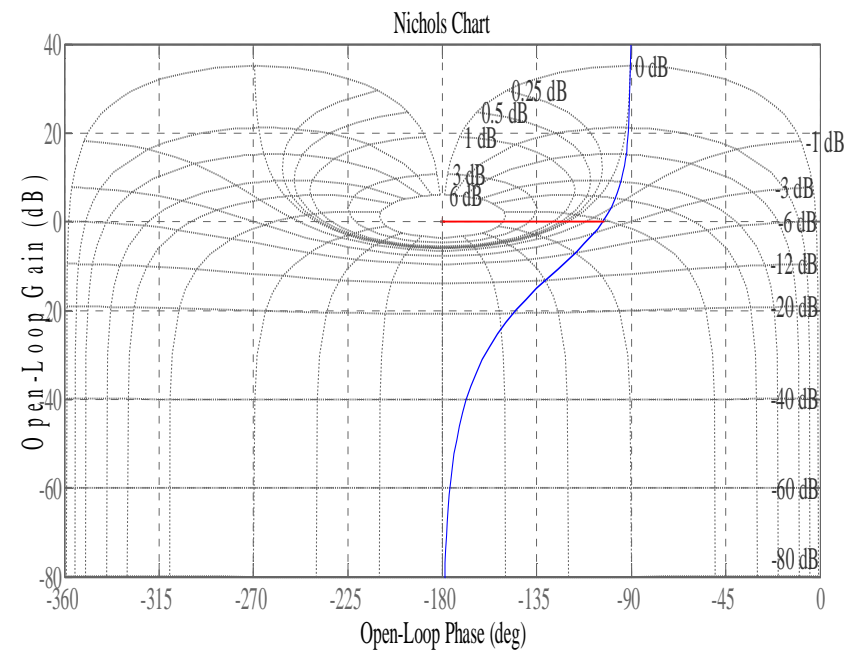
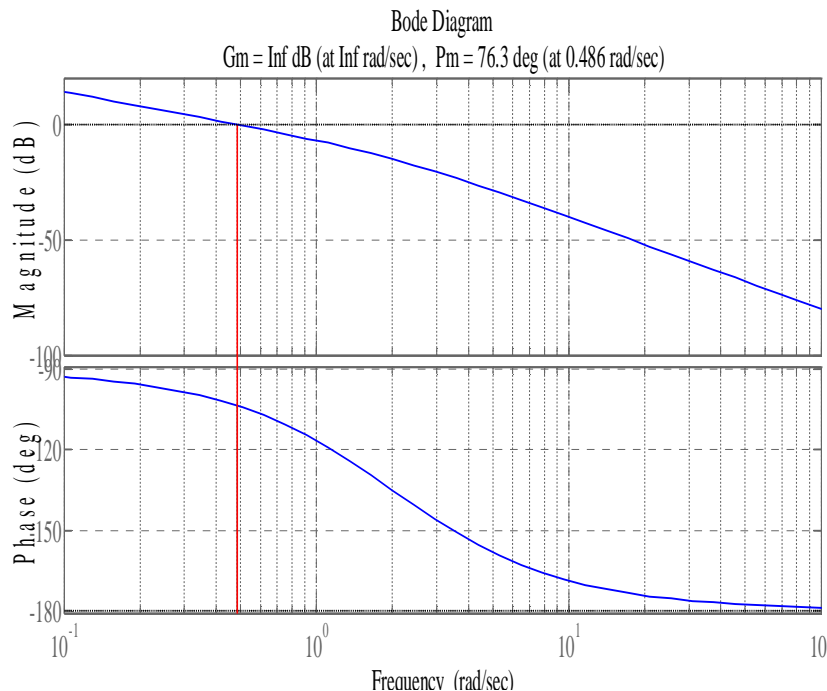
$$\Delta\phi = \pi - \text{Arg}(L(j\omega_c))$$



$$|L(j\omega_c)| = 1 \text{ ou } |L(j\omega_c)|_{dB} = 0_{dB}$$

- La marge de retard : retard additionnel qui amène à l'instabilité

$$\Delta R = \frac{\Delta\phi}{\omega_c}$$



Les outils d'analyse

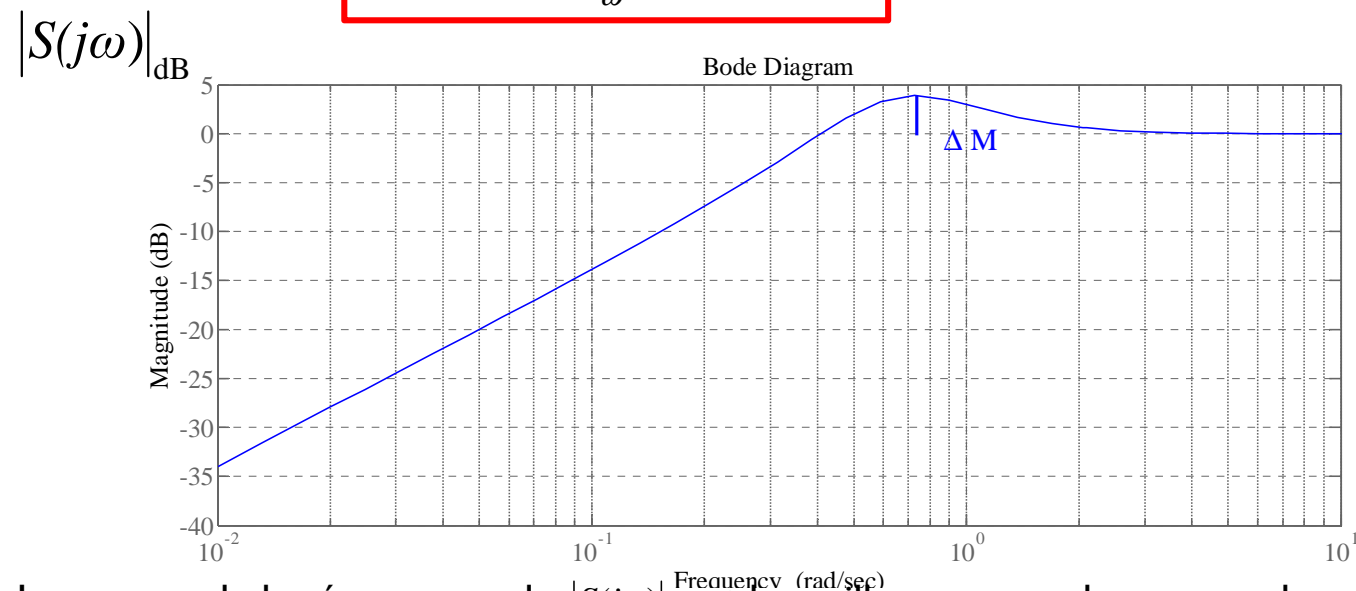
La stabilité : Les marges de stabilité

- La marge de Module : plus générale que la marge de gain car elle prend en compte la variation du gain pour toutes les pulsations.

$$\Delta M = \min_{\omega} (|1 + L(j\omega)|)$$

$$\text{or } S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} \quad \rightarrow \quad \Delta M = \frac{1}{\max_{\omega} (|S(j\omega)|)}$$

$$\Delta M_{\text{dB}} = -\max_{\omega} (|S(j\omega)|_{\text{dB}})$$

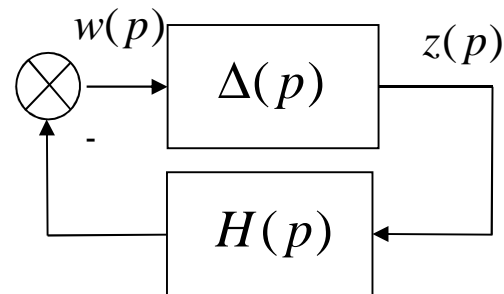


La mesure de la résonance de $|S(j\omega)|_{\text{dB}}$ est le meilleur moyen de mesurer la marge de module

Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

Très souvent les systèmes ont la fâcheuse tendance à être non-linéaires ou incertains. Dans les deux cas, le lieu du système en boucle ouverte peut varier dans des proportions assez fortes ce qui rend assez problématique l'étude de stabilité. Le théorème du petit gain est une aide très précieuse dans ce cas là :



Théorème du petit gain :

Avec la condition que $\Delta(p)$ et $H(p)$ soient des fonctions de transfert stable et propre. Le système bouclé donné ci-dessus est stable si :

$$|\Delta(j\omega)| < \gamma \text{ et } |H(j\omega)| > \frac{1}{\gamma} \quad \forall \omega \in \mathfrak{R}$$

Cette condition est suffisante mais pas nécessaire

□ Les outils d'analyse

○ La stabilité : Le théorème du petit gain

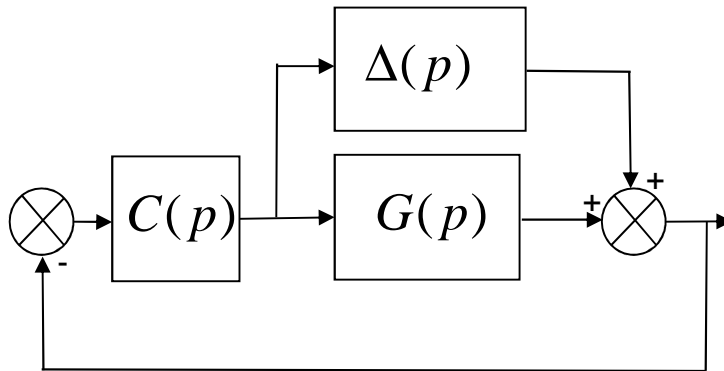
- En considérant que le système peut être décrit par un modèle nominale $G(p)$ et que les variations du système (incertitudes) sont représentées par la fonction de transfert $\Delta(p)$. Il est possible d'utiliser le théorème du petit gain pour étudier la stabilité du système bouclé.
- La représentations de ces incertitudes peut prendre plusieurs formes, on distingue les formes additives directes ou inverses et multiplicatives directes ou inverses, en entrée ou en sortie du système. Il est possible de choisir la forme voulue mais chaque représentation forme est plus adaptée à certaines incertitudes :

Forme	Incertainitude
Additive	Erreurs de modélisation sur toute la bande passante
Multiplicative directe	Actionneurs, capteurs
Multiplicative inverse	Variations des paramètres du modèle

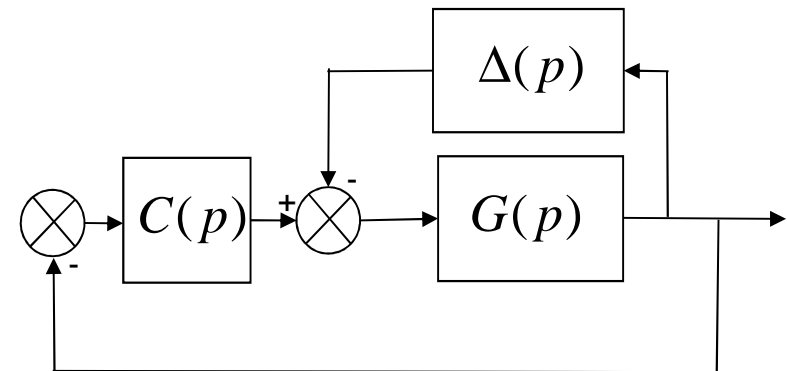
Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

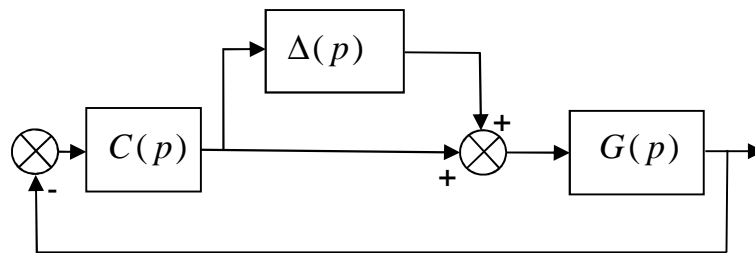
➤ Forme des incertitudes



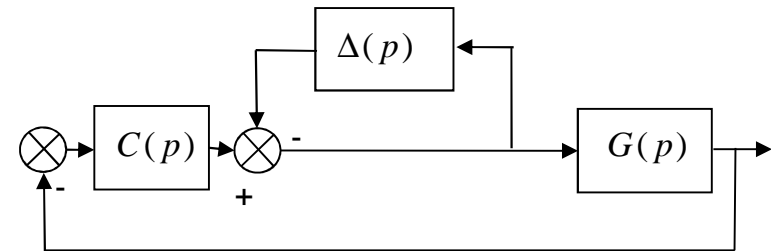
Forme additive directe



Forme additive inverse



Forme multiplicative
directe en entrée

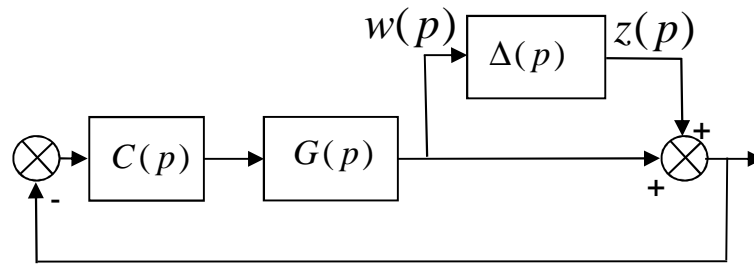


Forme multiplicative
inverse en entrée

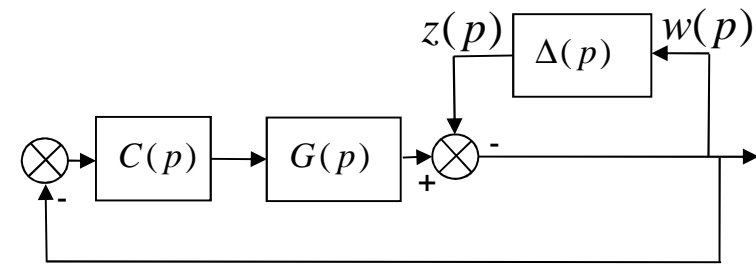
Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

Forme des incertitudes



Forme multiplicative
directe en sortie



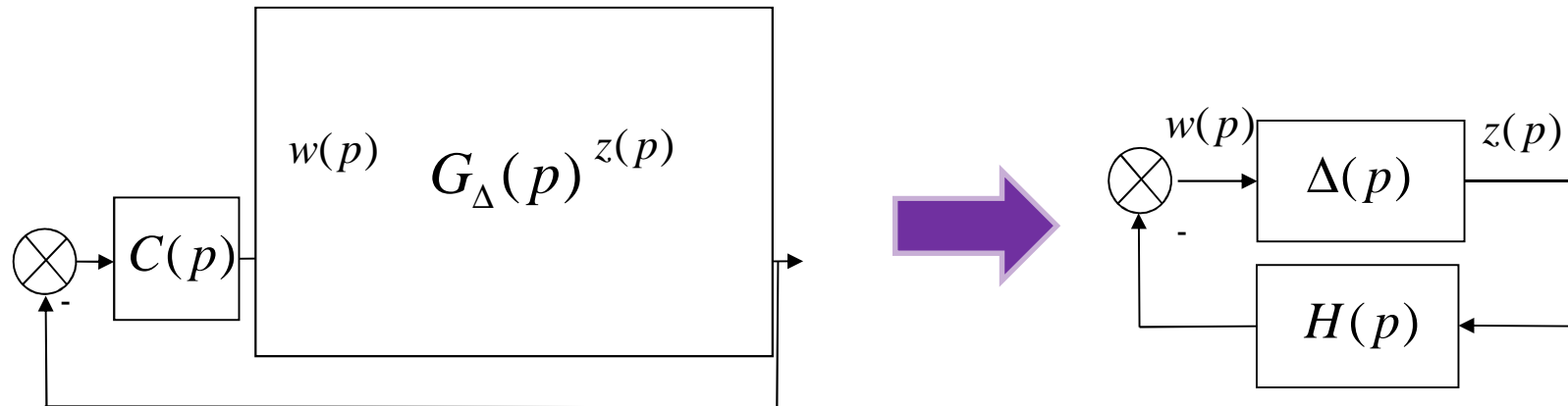
Forme multiplicative
inverse en sortie

Ces différentes formes peuvent se mettre sous la forme donnée par le théorème du petit gain

Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

➤ Forme additive directe



$G_{\Delta}(p)$ est la fonction de transfert du système avec ces incertitudes

$$G_{\Delta} = G + \Delta$$

Etablir l'expression de $H(p)$:

$$z = \Delta w$$

$$w = C(-(Gw + z)) \rightarrow w(1 + CG) = -Cz \rightarrow w = \frac{-C}{(1 + CG)} z$$

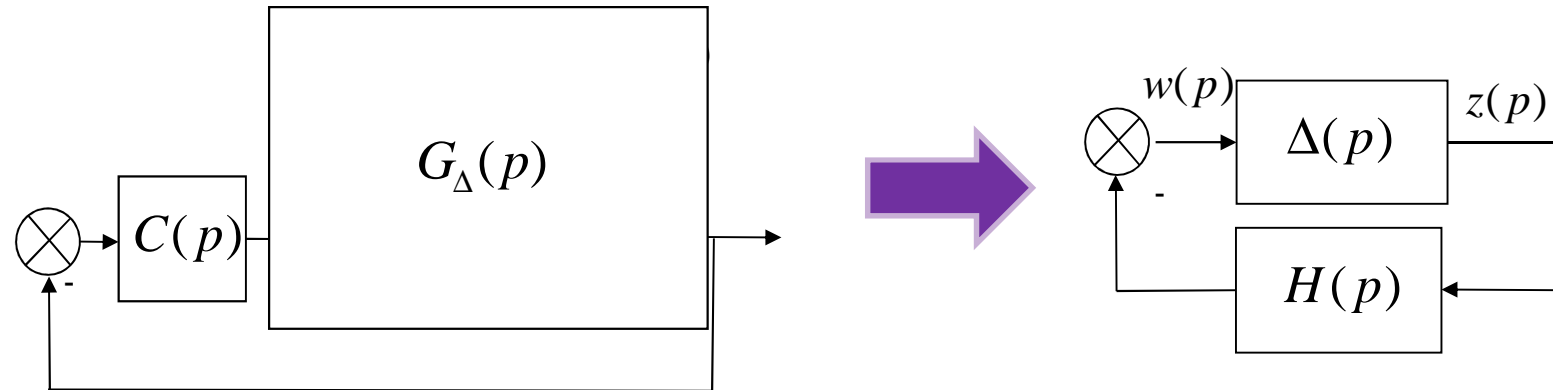
$$w = -CS z$$

Il faut donc que le module de la fonction de transfert $|C(p)S(p)\Delta(p)|$ soit inférieur à 1 pour toutes les pulsations pour que le système bouclé soit stable

Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

➤ Forme additive inverse



$G_{\Delta}(p)$ est la fonction de transfert du système avec ces incertitudes

$$G_{\Delta} = \frac{G}{(1 + G\Delta)} \longleftrightarrow \frac{1}{G_{\Delta}} = \frac{1}{G} + \Delta$$

Etablir l'expression de $H(p)$:

$$z = \Delta w$$

$$w = G(-Cw - z) \longrightarrow w(1 + CG) = -Gz \longrightarrow w = \frac{-G}{(1 + CG)} z$$

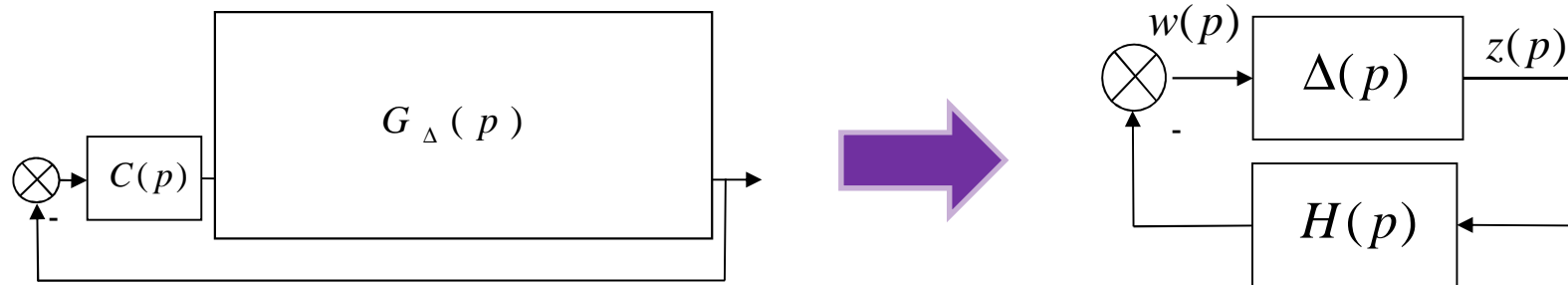
$$w = -GS z$$

Il faut donc que le module de la fonction de transfert $|G(p)S(p)\Delta(p)|$ soit inférieur à 1 pour toutes les pulsations pour que le système bouclé soit stable

Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

➤ Forme multiplicative directe en entrée ou en sortie



$G_{\Delta}(p)$ est la fonction de transfert du système avec ces incertitudes

$$G_{\Delta} = G(1 + \Delta)$$

Etablir l'expression de $H(p)$:

$$w = C(-G(w + z)) \rightarrow w(1 + CG) = -CGz \rightarrow w = \frac{-CG}{(1 + CG)} z$$

$$w = -T z$$

Il faut donc que le module de la fonction de transfert $|T(p)\Delta(p)|$ soit inférieur à 1 pour toutes les pulsations pour que le système bouclé soit stable

□ Les outils d'analyse

○ La stabilité : Le théorème du petit gain

Le tableau suivant donne les fonctions de transfert à prendre en compte en fonction de la forme des incertitudes. En supposant que le transfert caractérisant les incertitudes est stable, nous obtenons une borne sur le module de celui-ci.

Forme des incertitudes	Fonction de transfert
Additive directe	$-CS(p)$
Additive indirecte	$-GS(p)$
Multiplicative directe	$-T(p)$
Additive indirecte	$-S(p)$

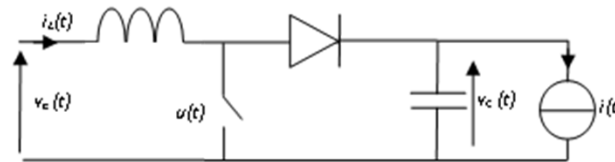
Rq : Dans le cas où les fonctions de transfert ne sont pas stables, la condition d'égalité entre les pôles instables du système et ceux du modèle nominale. (K. Zhou)

□ Les outils d'analyse

○ La stabilité : Le théorème du petit gain

➤ Exemple : Convertisseur DC/DC statique Boost

Les convertisseurs DC/DC sont des systèmes non-linéaires à commutation de plus en plus utilisés dans l'industrie moderne (systèmes embarqués). Seul le bouclage permet de faire fonctionner correctement ces systèmes. La dynamique oscillante de ces systèmes fait que seule la boucle fermée permet un fonctionnement acceptable. Le schéma électrique de ce type de convertisseur est donné ci-dessous :



L'objectif est de maintenir constante la tension de sortie quelque soient les conditions de fonctionnement. Comme le montre le modèle moyen du convertisseur, la non linéarité du système dépend du courant de charge $i(t)$ et de la tension de batterie $v_e(t)$.

$$\begin{cases} \dot{v}_c(t) = \frac{1}{C} ((1 - u(t))i_L(t) - i(t)) \\ \dot{i}_L(t) = \frac{1}{L} (v_e(t) - (1 - u(t))v_c(t)) \end{cases}$$

Une première étape de linéarisation a permis d'obtenir un modèle linéaire dépendant de la charge et de la tension d'alimentation.

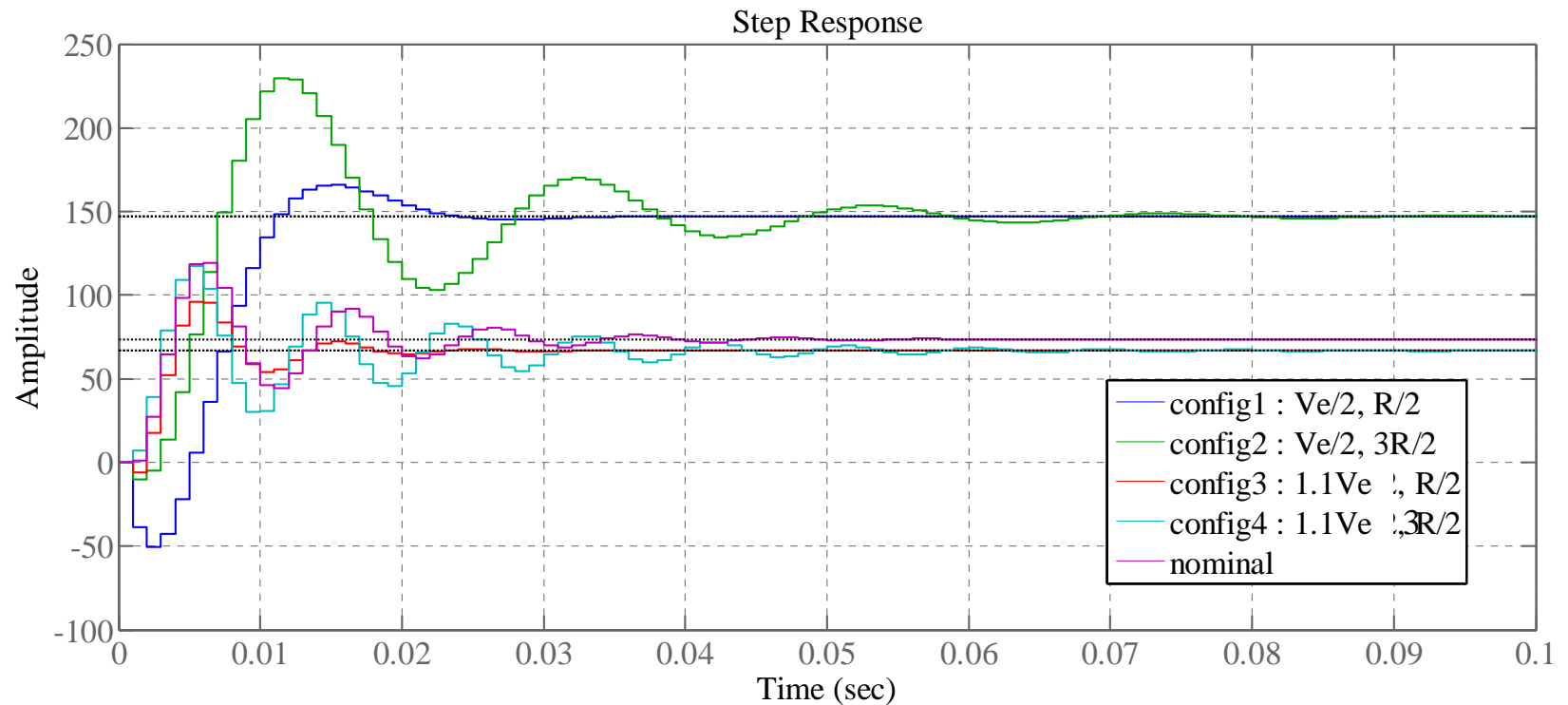
Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

Exemple : Convertisseur DC/DC statique Boost

Réponses temporelles aux différents points de fonctionnement (pires cas) :

$$i(t) \in [0.66i_0, 2i_0] \quad v_e(t) \in [0.5v_{e_0}, 1.1v_{e_0}]$$



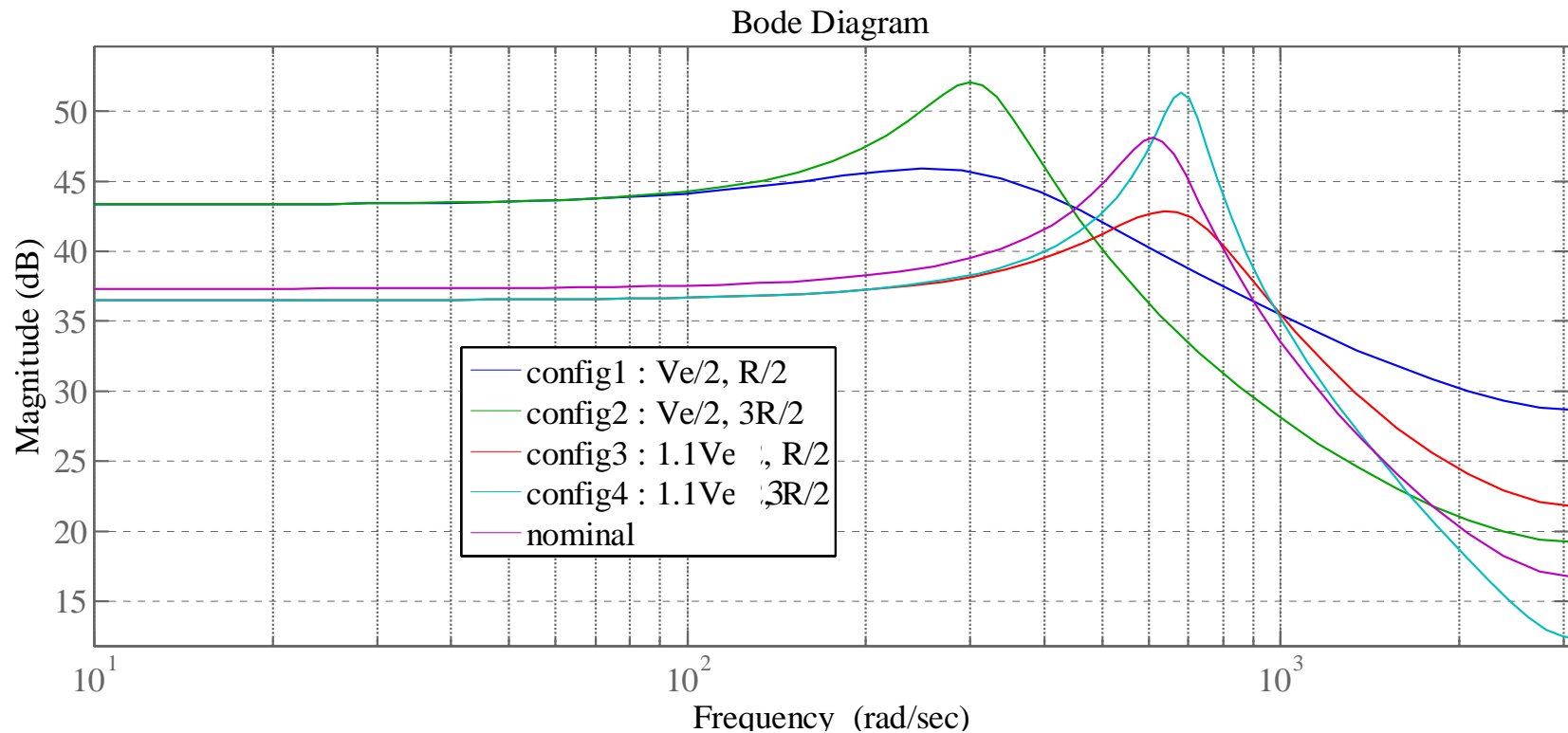
Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

Exemple : Convertisseur DC/DC statique Boost

Réponses fréquentielles aux différents points de fonctionnement (pires cas) :

$$i(t) \in [0.66i_0, 2i_0] \quad v_e(t) \in [0.5v_{e_0}, 1.1v_{e_0}]$$

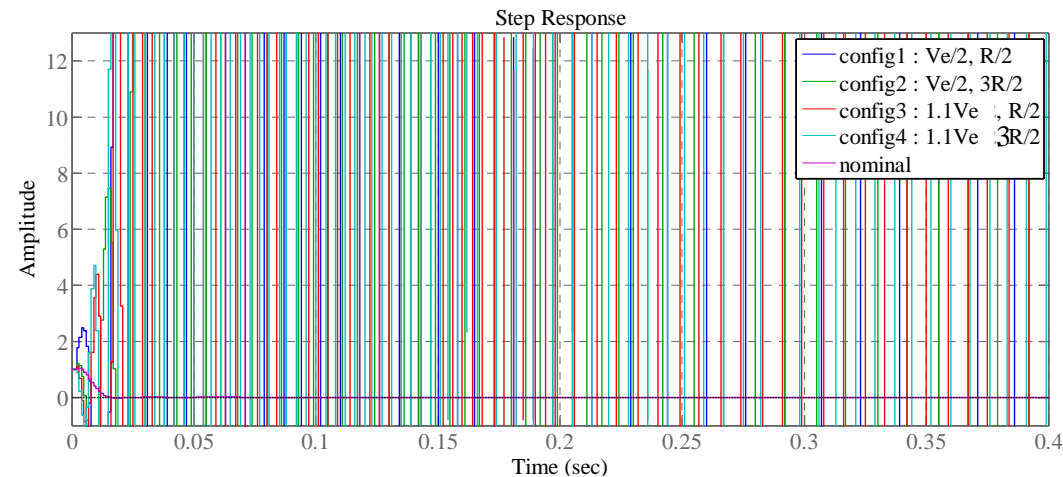
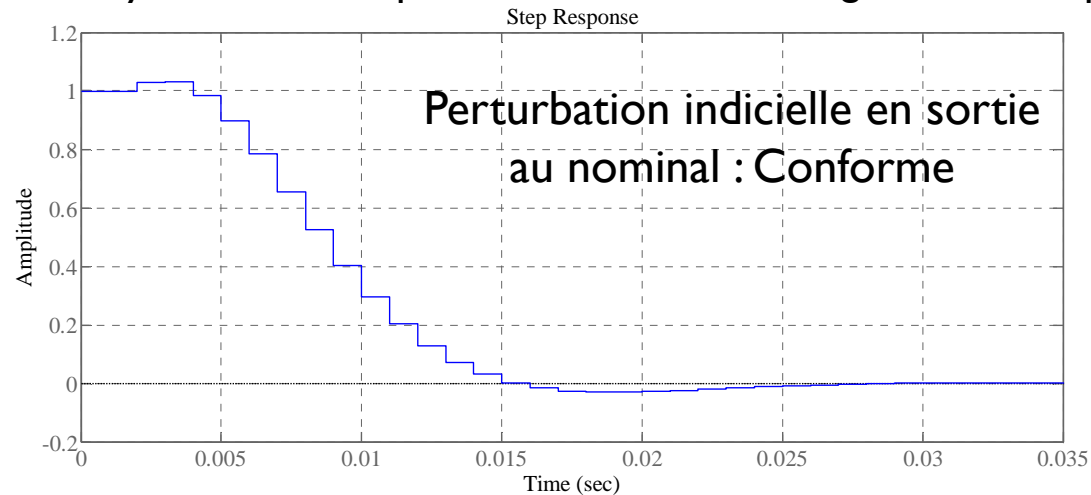


Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

Exemple : Convertisseur DC/DC statique Boost

Première synthèse : En respectant le cahier des charges sur le temps de réponse.



Les outils d'analyse

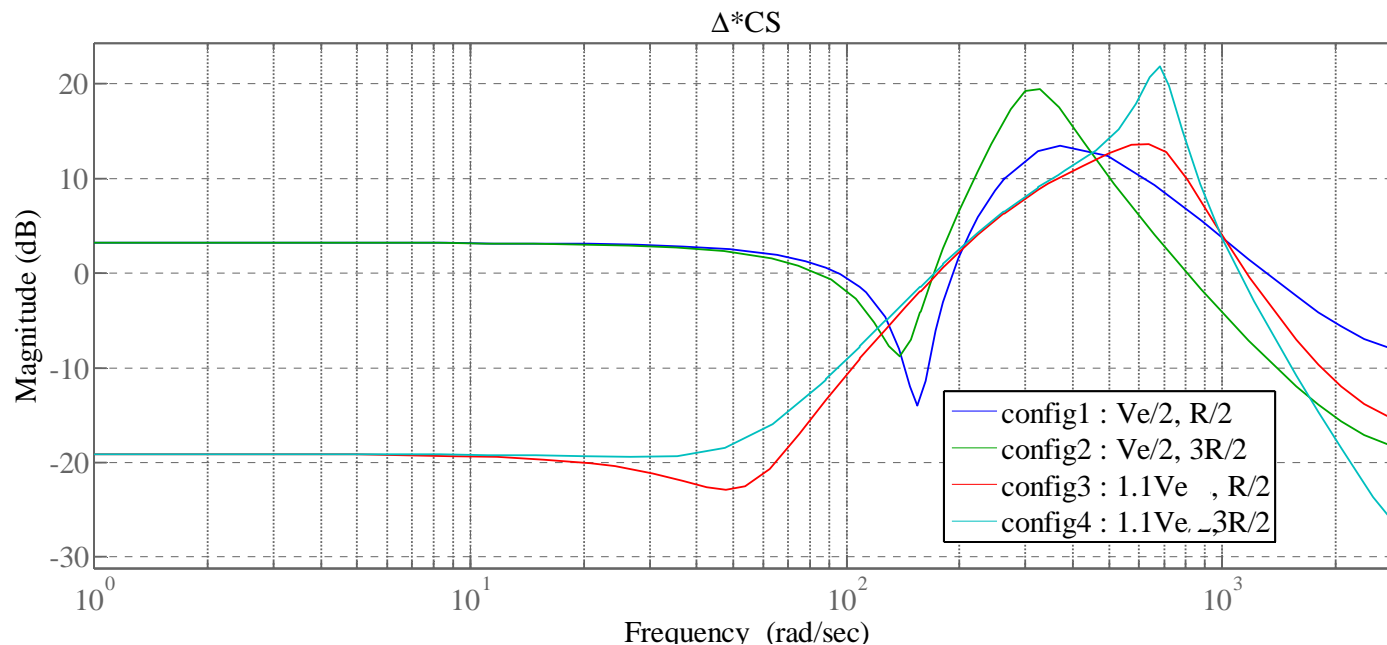
La stabilité : Le théorème du petit gain

Exemple : Convertisseur DC/DC statique Boost

Première synthèse : Utilisation du théorème du petit gain pour étudier la stabilité dans tous les cas de figure. Les variations du modèle sont modélisées comme des incertitudes additives directes.

$$G_{\Delta} = G + \Delta \quad \rightarrow \quad \Delta = G - G_{\Delta}$$

La fonction de sensibilité étudiée est : $|\Delta(p)C(p)S(p)|$

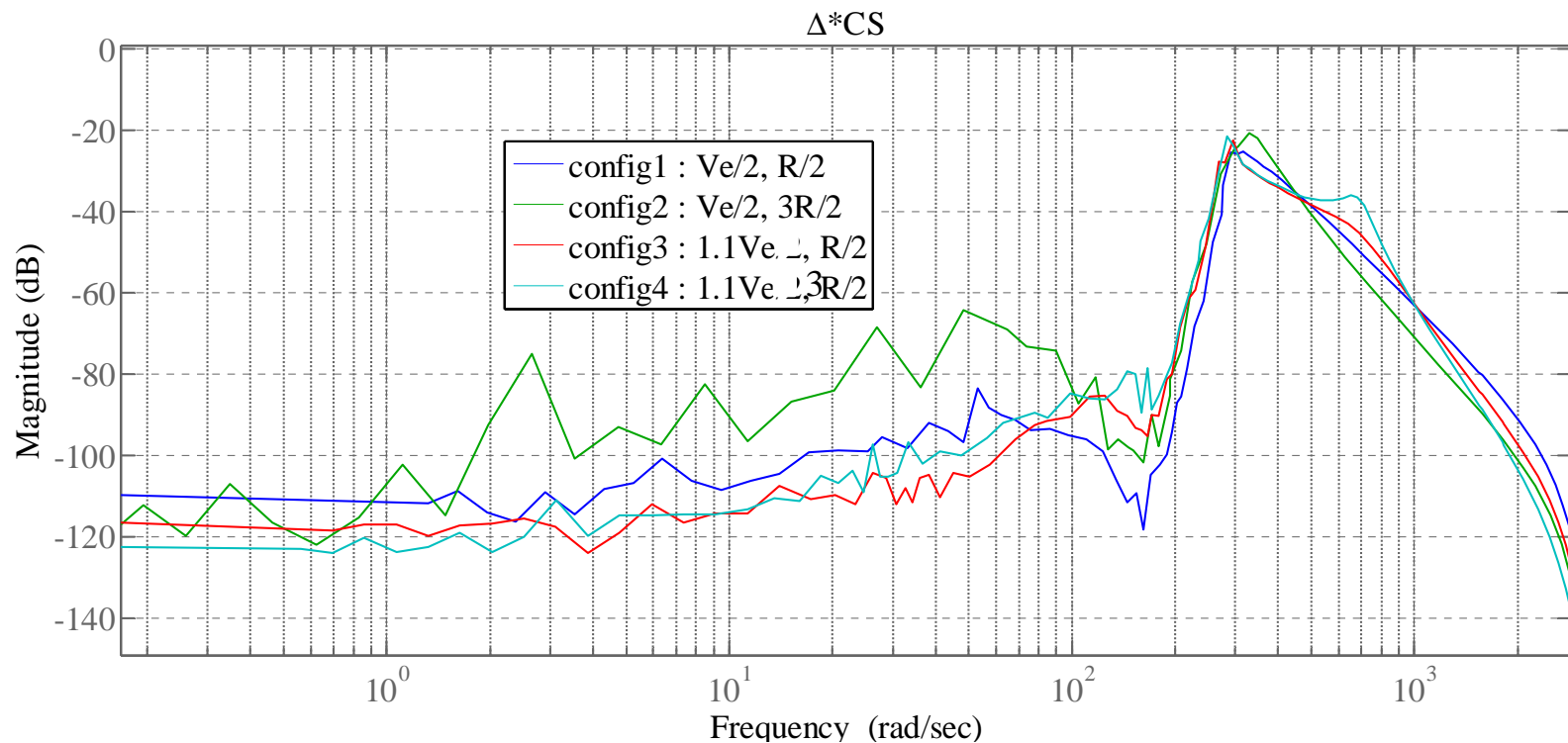


Les outils d'analyse

La stabilité : Le théorème du petit gain

Exemple : Convertisseur DC/DC statique Boost

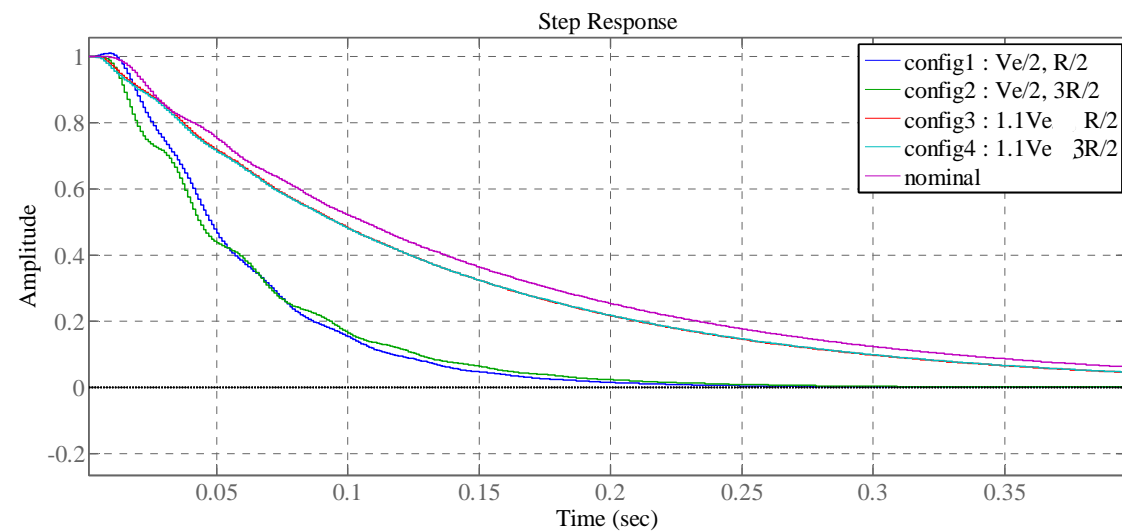
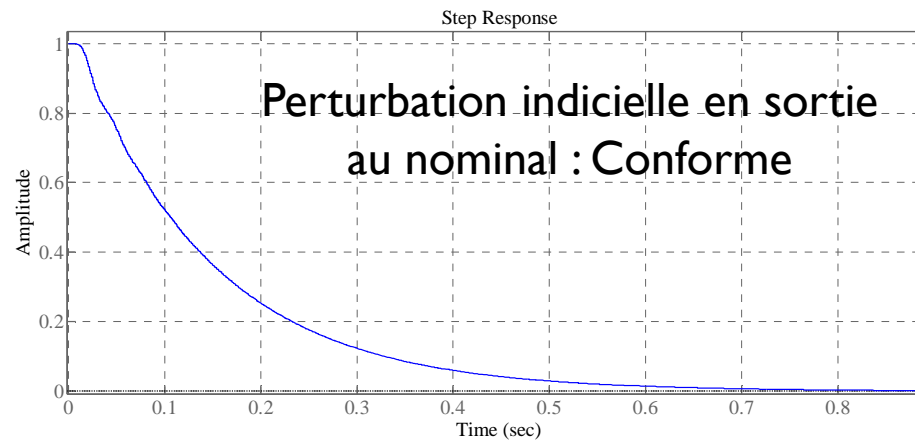
Deuxième synthèse : Utilisation du diagramme de Bode de $-CS(p)$. Ajout d'un filtre du deuxième ordre à 1200 rad/s. On relâche la condition sur le temps de réponse.



Les outils d'analyse

- La stabilité : Le théorème du petit gain
- Exemple : Convertisseur DC/DC statique Boost

Deuxième synthèse :



□ Les outils de synthèse

○ Lieu d'Evans :

➤ Les règles de base du tracé sont obtenues à partir des relations suivantes

Soit $G(p)$ et $F(p)$ les fonctions de transfert du système en boucle ouverte et en boucle fermée, K_p est le gain proportionnel du correcteur. Avec n , le nombre de pôles et m , le nombre de zéros du système en BO.

$$L(p) = K_p \cdot \frac{B(p)}{A(p)} = K_p \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)}; \quad F(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)}; \quad (a) : 1 + K_p \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} = 0;$$

La position des pôles de $F(p)$, donc des racines de l'équation caractéristique (a) permet d'étudier les performances du système bouclé. Le lieu d'Evans donne la position des racines de l'équation (a) en fonction du gain K_p . Pour que dans le plan complexe, le point M appartienne au lieu d'Evans, il faut que ses coordonnées vérifient deux conditions provenant de (a) :

Condition sur les modules

$$\frac{\prod_i |Z_i M|}{\prod_i |P_i M|} = \frac{1}{K_p}$$

Condition sur les arguments

$$\sum_i \arg(Z_i M) - \sum_i \arg(P_i M) = \pm(2\lambda + 1)\pi$$

■ Les outils de synthèse

○ Lieu d'Evans : Méthode de construction

➤ 1] Nombre de branches du lieu.

A chaque racine de l'équation caractéristique (a) correspond une branche du lieu. Ce nombre est égal au degré de cette équation. Pour un système physique, m étant inférieur à n, ce nombre est égal au nombre de pôles du système en boucle ouverte.

➤ 2] Asymptotes du lieu.

Il y a (n-m) directions asymptotiques sur un lieu d'Evans. Ces directions ont un angle avec l'axe réel égal à :

$$\beta = -(2\lambda + 1)\pi / (m - n)$$

Ces asymptotes sont concourantes avec l'axe réel en un point d'abscisse : $\delta = \frac{\sum_i z_i - \sum_i p_i}{m - n}$

➤ 3] Branches du lieu appartenant à l'axe réel.

Si m' est le nombre de zéros réels et n' le nombre de pôles réels situés à droite d'un point M de l'axe réel, la condition des angles stipule que ce point M appartient au lieu uniquement si m'+n' est impair.

➤ 4] Intersection du lieu avec l'axe réel, point double.

Le lieu d'Evans étant symétrique par rapport à l'axe réel, un point double est toujours situé sur l'axe réel. Pour obtenir cet abscisse, il suffit de résoudre la relation : $AB' = BA'$

➤ 5] Intersection du lieu avec l'axe imaginaire.

Ces points d'intersection correspondent à des racines imaginaires pures conjuguées de l'équation caractéristique. Pour les déterminer, on utilise une propriété du tableau de Routh. En effet, dans le cas de racines imaginaires pur, les coefficients de l'avant dernière ligne sont tous nuls.

➤ Exemples : $G(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+0.05)}$

$$G(p) = \frac{p + \alpha}{(p+1)(p+2)}$$

Discuter du lieu en fonction de la position du zéro.

Objectifs et moyens

Les Objectifs

Dans un asservissement, l'objectif est d'obtenir :

$$y(t) = y^*(t) \quad \forall t$$

Objectif impossible à atteindre aussi cette condition devient :

$$y(t) = y^*(t) \quad \text{lorsque} \quad t \rightarrow \infty$$

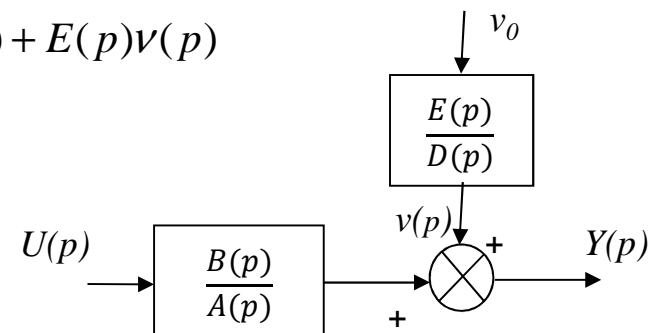
Cet objectif prend en compte l'objectif de poursuite mais il s'agit aussi d'un problème de régulation car cet objectif doit être atteint en présence des différentes perturbations. Il est possible de généraliser l'approche en considérant le signal d'écart, celui-ci devant être nul pour toutes les entrées. La fonction de transfert étudiée dépend de l'entrée sélectionnée :

$$\mathcal{E}(p) = T_{X \rightarrow \mathcal{E}} X(p)$$

Approche générale : Soit la modélisation suivante du système + perturbation :

$$\begin{cases} A(p)Y(p) = B(p)U(p) + E(p)v(p) \\ D(p)v(p) = v_0 \end{cases}$$

$v(p)$ est vu comme un signal généré par un filtre formeur attaqué par une impulsion d'amplitude v_0 . La dynamique de cette perturbation est donnée par $D(p)$



Cas de la perturbation de sortie : $E(p) = A(p)$

Cas de la perturbation d'entrée : $E(p) = B(p)$

Les Objectifs

L'objectif asymptotique peut être étudié par le biais du théorème de la valeur finale. Dans ce cas, l'objectif de l'asservissement s'écrit :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p T_{X \rightarrow \varepsilon} X(p) \rightarrow 0$$

Avec l'expression du correcteur : $C(p) = \frac{R(p)}{S(p)}$ et l'approche générale, nous voyons que le seul moyen d'atteindre l'objectif est que le numérateur de $T_{X \rightarrow \varepsilon}$ contienne le dénominateur de $X(p)$ (réponse impulsionnelle d'un système stable).

Cas de la perturbation de sortie : $E(p) = A(p)$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p T_{v_y \rightarrow \varepsilon} v_y(p) \rightarrow 0$$

$$\varepsilon(p) = \frac{AS}{BR + AS} v(p) \quad \text{avec} \quad v(p) = \frac{A(p)}{D(p)} v_0$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{AS}{BR + AS} \frac{A}{D} v_0 \rightarrow 0$$

Avec un système stable en boucle fermée, il faut que A ou S contienne D . A étant fixé, il faut que le numérateur du correcteur contienne le modèle de la perturbation.

Les Objectifs

Cas de la perturbation d'entrée : $E(p) = B(p)$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p T_{v_u \rightarrow \varepsilon} v_u(p) \rightarrow 0$$

$$\varepsilon(p) = \frac{-BS}{BR + AS} v(p) \quad \text{avec} \quad v(p) = \frac{B(p)}{D(p)} v_0$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{-BS}{BR + AS} \frac{B}{D} v_0 \rightarrow 0$$

Avec un système stable en boucle fermé, il faut que B ou S contienne D . B étant fixé, il faut que le numérateur du correcteur contienne le modèle de la perturbation.

Cas de la poursuite : $v(p) = 0$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p T_{y^* \rightarrow \varepsilon} y^*(p) \rightarrow 0$$

$$\varepsilon(p) = \frac{AS}{BR + AS} y^*(p) \quad \text{avec} \quad y^*(p) = \frac{N_p(p)}{D_p(p)} y_0^*$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{AS}{BR + AS} \frac{N_p}{D_p} y_0^* \rightarrow 0$$

Avec un système stable en boucle fermé, il faut que A ou S contienne D . S étant fixé, il faut que le numérateur du correcteur contienne le modèle de la perturbation.

□ Les Objectifs

○ Règle :

il faut que le dénominateur du correcteur $S(p)$ contienne le modèle de la perturbation ou du signal de consigne $D(p)$.

○ Cas particuliers : $D(p) = p^n$

Il arrive fréquemment que le système à commander contienne un ou plusieurs intégrateurs aussi la règle devient

➤ Poursuite et perturbation de sortie :

$$S(p) = p^{n-n_A} \text{ avec } n_A \text{ le nombre d'intégrateur du système à commander}$$

➤ Poursuite et perturbation d'entrée :

$$S(p) = p^n$$

L'intégrateur doit être situé en amont de la perturbation

Les Objectifs

Contraintes sur la commande :

De plus en plus souvent, des contraintes sur le contenu fréquentielle de la commande sont présentes dans le cahier des charges. Ces contraintes peuvent viser réduire la dépense énergétique (sensibilité aux bruits de mesure) ou limiter les efforts des actionneurs (gradient de la commande). Bien sur cette contrainte supplémentaire ne doit pas empêcher l'objectif premier d'un asservissement.

- Etude fréquentielle : la densité spectrale de puissance (DSP) du signal commande est donnée par la relation suivante :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_u(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)|^2 \mathcal{S}_{y^*}(j\omega) d\omega$$

Pour limiter la puissance de la commande, il est nécessaire de limiter pour toutes les pulsations, le module de la fonction de transfert reliant une entrée à la commande.

Cas de la poursuite : $|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)| = |C(j\omega)S(j\omega)|$

En basses pulsations : $|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{|G(j\omega)|}$

Indépendant du correcteur

En hautes pulsations : $|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)| \rightarrow |C(j\omega)|$



$$|C(j\omega)| \rightarrow 0$$

Compatible avec l'objectif de poursuite

Les Objectifs

○ Contraintes sur la commande :

Cas de la sensibilité aux bruits de mesure : $|T_{w_y \rightarrow u}(j\omega)| = |C(j\omega)S(j\omega)|$

Dans ce cas, $\mathcal{S}_{w_y}(j\omega)$ est très faible en basses pulsations donc l'étude va se limiter aux hautes pulsations.

$$\mathcal{S}_u(j\omega) = |T_{w_y \rightarrow u}(j\omega)|^2 \mathcal{S}_{w_y}(j\omega)$$

En hautes pulsations : $|T_{w_y \rightarrow u}(j\omega)| \rightarrow |C(j\omega)|$ **Compatible avec l'objectif de poursuite**



Il est nécessaire que le correcteur ait une fonction de transfert strictement propre pour satisfaire aux contraintes liées à la commande

Table de Transformés

$f(t) \quad t \geq 0$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$
$\delta(t)$ impulsion unité (Dirac)	1
$1(t)$ échelon unité	$\frac{1}{p}$
$1(t - \tau)$ éch. unité retardé de τ	$\frac{e^{-p\tau}}{p}$
$1(t) - 1(t - \tau)$ impulsion rect.	$\frac{1 - e^{-p\tau}}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(p+a)^3}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab} \left(1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
$\frac{1}{a^2} (1 - (at+1)e^{-at})$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{(a-b)^2} [e^{-at} + ((a-b)t - 1)e^{-bt}]$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$
$\frac{e^{-at}}{(a-b)(a-c)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
$\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$\frac{p \sin(\varphi) + \omega_0 \cos(\varphi)}{p^2 + \omega_0^2}$
$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \theta) \quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\right)$	$\frac{p+\alpha}{p^2 + \omega_0^2}$
$1 - \cos(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}\right)$	$\frac{1}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2}$

□ La bibliographie



[14] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.

[25] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.