TECNICATURA SUPERIOR EN
Telecomunicaciones

Materia: Sistemas de Control y Servicios

Trabajo practico #6: Preliminares al modelado

Alumno: José Augusto Orsili

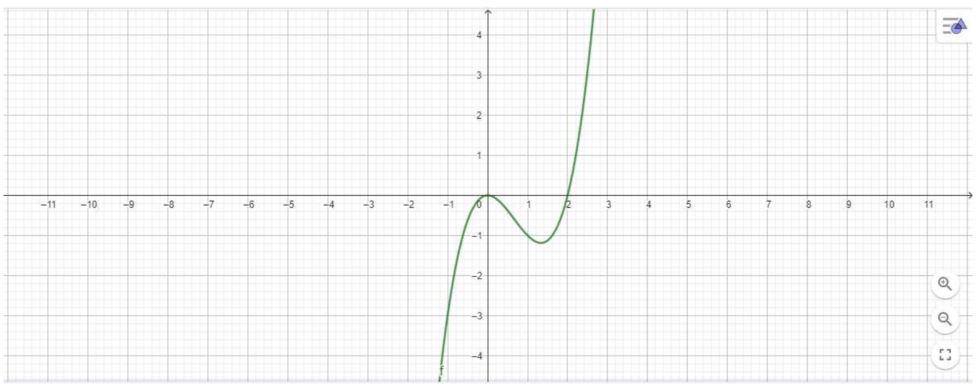
Tema 1: Funciones básicas - Algebraicas, trascendentales y estudio con Geogebra.

1.1. Clasificación de las funciones:

f(x) = x^3 - 2x^2:

Esta función se puede expresar como una combinación finita de operaciones algebraicas (potenciación, multiplicación, resta) con la variable independiente x y constantes reales. No involucra funciones trascendentes como exponenciales, logaritmos o funciones trigonométricas.

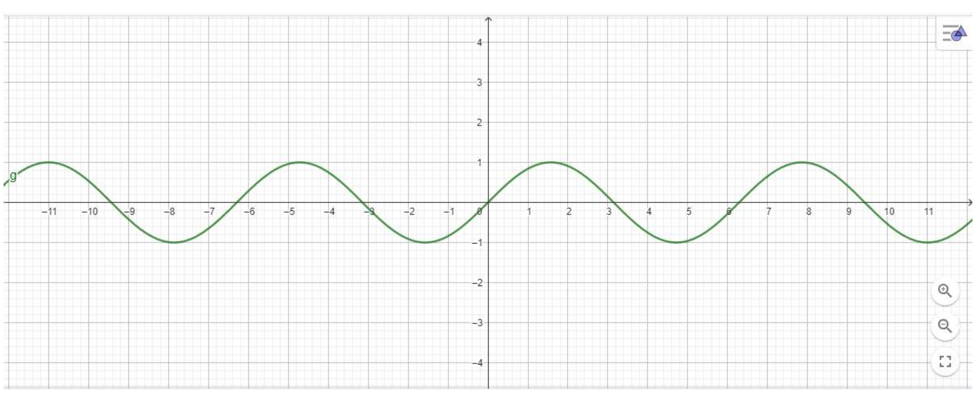
Clasificación: La función f(x) es una **función algebraica**.



g(x) = sin(x):

La función sin(x) es la función trigonométrica del seno. Las funciones trigonométricas se consideran funciones trascendentes. No se pueden expresar como una combinación finita de operaciones algebraicas básicas.

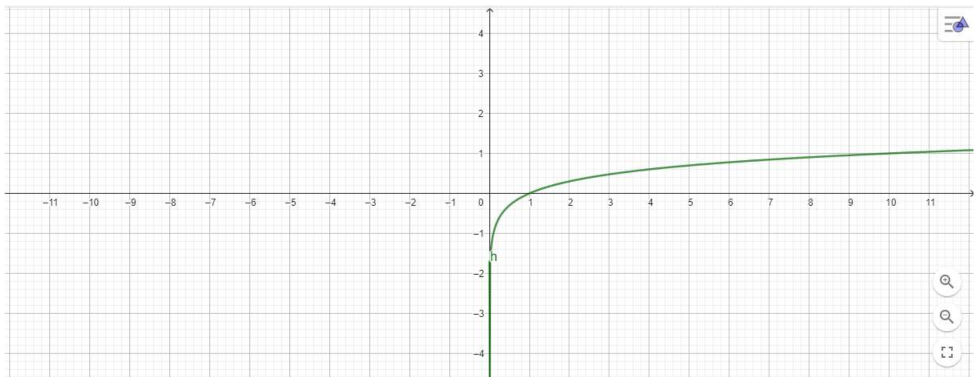
Clasificación: La función g(x) es una **función trascendente**.



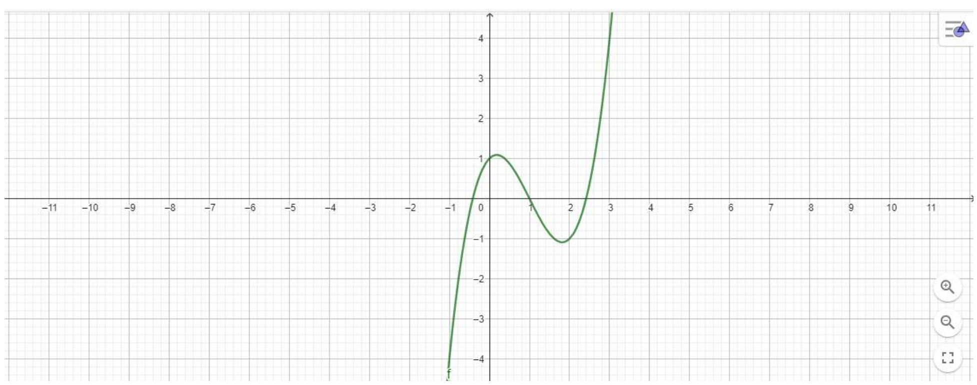
h(x) = log(x):

La función log(x) es el logaritmo en base 10 (o logaritmo neperiano). Los logaritmos son funciones trascendentes. No se pueden expresar como una combinación finita de operaciones algebraicas básicas.

Clasificación: La función h(x) es una **función trascendente**.



1.2. Análisis de la función f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1



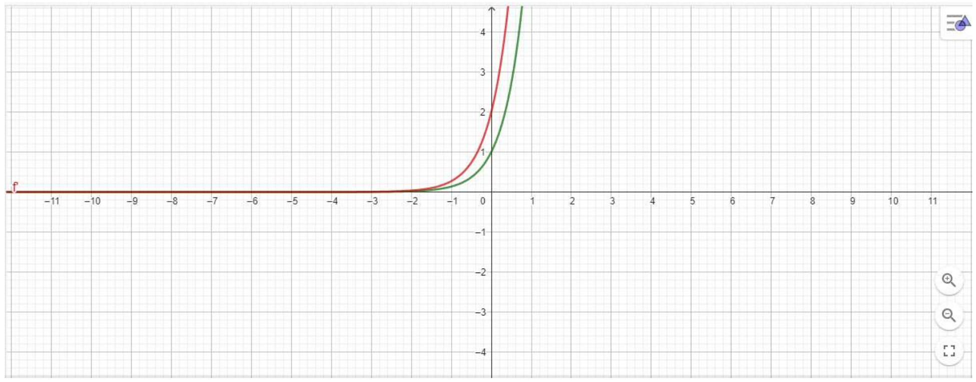
Intervalos de crecimiento, decrecimiento

- Intervalos de crecimiento: (0, 1)
- Intervalos de decrecimiento: (-∞, 0), (1, ∞)

Identificación de puntos críticos:

- Los puntos críticos son x = 0 y x = 1.

1.3. La derivada de la función f(x) = e^(2x) es 2e^(2x)



Tema 2: Espacios vectoriales

2.1. Vectores v1 = (1, 0, 2), v2 = (2, 1, 3) y v3 = (3, 2, 4):

- **Escalares:** No existe un escalar no nulo que multiplicado por v1 nos dé v2 o v3.
- **Combinaciones lineales:** No se puede obtener v2 o v3 como combinación lineal de v1 y otro vector.
- **Resultado**: Los vectores v1, v2 y v3 son linealmente independientes.

Determinante:

Calculo del determinante de la matriz formada por los vectores:

| 1 0 2 |

| 2 1 3 |

| 3 2 4 |

El determinante es diferente de cero (det = 1). En R^3, una matriz con determinante diferente de cero indica que los vectores son linealmente independientes.

Resultado: Los vectores v1, v2 y v3 son linealmente independientes.

Base generadora:

Dado que los vectores v1, v2 y v3 son linealmente independientes, ellos mismos forman una base generadora para R^3.

Resultados finales:

Los vectores v1 = (1, 0, 2), v2 = (2, 1, 3) y v3 = (3, 2, 4) son linealmente independientes y forman una base generadora para el espacio R^3.

2.2. Tipo de funciones para la base: Se consideran las funciones polinomiales como candidatas para la base debido a su diferenciabilidad continua en todo su dominio. Las funciones polinomiales son infinitamente diferenciables, lo que significa que sus derivadas de cualquier orden también son funciones continuas. Esto las hace ideales para representar funciones con comportamientos complejos en un intervalo específico.

Base generadora propuesta: B = {1, x, x^2, x^3, ...} Esta base consiste en las potencias de x, donde x es la variable independiente. Se destaca que esta base es infinita, ya que incluye todas las potencias enteras no negativas de x.

Justificación de la base:

- **Diferenciabilidad continua:** Todas las potencias de x son continuamente diferenciables en el intervalo [0, 1]. Esto significa que sus derivadas de cualquier orden también son funciones continuas en este intervalo.
- **Teorema de aproximación de Weierstrass:** Este teorema establece que cualquier función continuamente diferenciable en [0, 1] puede aproximarse arbitrariamente cerca por una combinación lineal de las potencias de x. En otras palabras, la base B es capaz de representar cualquier función en este conjunto con un grado de precisión arbitrario.

Conclusión obtenida: La base B = {1, x, x^2, x^3, ...} es una base generadora válida para el conjunto de funciones continuamente diferenciables en el intervalo [0, 1]. Esto significa que cualquier función en este conjunto puede expresarse como una combinación lineal de las potencias de x, con coeficientes adecuados.

3.1. Obtención de la matriz AA: matriz proporcionaDA AA: A=[2−111]A=[21−11]

Cálculo del determinante de AA: El determinante de una matriz 2×22×2 se calcula como:det(A)=(a11⋅a22)−(a12⋅a21)det(A)=(a11⋅a22)−(a12⋅a21)

En este caso: det(A)=(2⋅1)−(−1⋅1)=3det(A)=(2⋅1)−(−1⋅1)=3

Casos para la clasificación:

- Si el determinante de AA es cero (det(A)=0det(A)=0):
    - La transformación lineal asociada a AA es no invertible.
    - No es una aplicación unívoca ni tiene inversa.
    - Conserva la dimensión (mapea R2R2 a sí mismo).
    - No es un isomorfismo.

Conclusiones obtenidas:

- El determinante de AA es det(A)=3det(A)=3, que es distinto de cero.
- La transformación lineal asociada a la matriz AA en R2R2 es invertible, una aplicación unívoca y con inversa, no conserva la dimensión y es un isomorfismo.

3.2. Para encontrar la matriz de rotación de 90° en sentido antihorario en R2R2, seguimos estos pasos:

Definición de los Vectores Base: Primero, definimos los vectores base estándar e1=[1,0]e1=[1,0] y e2=[0,1]e2=[0,1], que representan los ejes xx e yy respectivamente.

Aplicación de la Rotación: Utilizamos la matriz de rotación estándar de 90°:

R=[0−110]R=[01−10] para rotar cada vector base. Esta matriz representa la rotación de los vectores base en sentido antihorario.

Formación de la Matriz de Transformación: La matriz de rotación resultante se forma utilizando las imágenes de los vectores base rotados. Por lo tanto, la matriz de rotación es:

R=[0−110]R=[01−10]

Esta matriz tiene propiedades importantes, como ser ortogonal (RT⋅R=IRT⋅R=I) y tener un determinante de -1.

Uso de la Matriz de Rotación: La matriz RR se utiliza para transformar puntos en el plano R2R2 mediante la multiplicación de matrices. Por ejemplo, al multiplicar un punto [x,y][x,y] por la matriz RR, obtenemos las coordenadas del punto rotado.

Resumiendo: la matriz R=[0−110]R=[01−10] representa una rotación de 90° en sentido antihorario en R2R2, y se puede utilizar para transformar puntos en el plano mediante la multiplicación de matrices.

3.3. Para representar la derivación en el espacio vectorial $C$1[a,b]$C$1[a,b] de funciones continuas y diferenciables en el intervalo [a,b][a,b] como una transformación lineal, se sigue este procedimiento:

1. **Transformación Lineal:** La derivación de una función f∈$C$1[a,b]f∈$C$1[a,b], denotada por $f'f'$, es otra función en $C$1[a,b]$C$1[a,b]. Esto define una transformación lineal T:$C$1[a,b]→$C$1[a,b]T:$C$1[a,b]→$C$1[a,b] con T(f)=$f'T$(f)=f'.
2. **Base de Monomios:** Para encontrar la matriz de esta transformación, se elige una base natural para $C$1[a,b]$C$1[a,b], como los monomios B={1,x,x2,...,xn−1}B={1,x,x2,...,xn−1}.
3. **Matriz de Transformación:** Se expresa cada función f∈$C$1[a,b]f∈$C$1[a,b] en la base BB y se obtienen las coordenadas en forma de un vector. La matriz de la

transformación T*T*, denotada por A*A*, se obtiene derivando cada monomio de la base B*B* y evaluando en puntos específicos del intervalo $[a,b]$[*a*,*b*].

4. **Ejemplo:** Para el intervalo [0,1][0,1] con la base $B=\{1,x\}$*B*={1,*x*}, la matriz A*A* es:

   (0100)(0010)

5. **Propiedades de la Matriz:**
   - Es una matriz triangular inferior.
   - La diagonal principal contiene ceros.
   - La subdiagonal principal contiene unos.

Conclusión obtenida: La matriz A*A* que representa la derivación en $C1[a,b]$*C*1[*a*,*b*] es una matriz triangular inferior con ceros en la diagonal principal y unos en la subdiagonal principal, obtenida derivando cada monomio de la base y evaluando en puntos del intervalo.

Tema 4: Ecuaciones con operadores

4.1. Para encontrar la solución general de la ecuación matricial $Ax=y$*Ax*=*y* con $A=(1234)$*A*=(1324) y $y=(56)$*y*=(56), se siguen estos pasos:

1. **Encontrar la RREF de A*A***:

   RREF(A)=(1001)RREF(*A*)=(1001)

   Esto muestra que el sistema tiene una solución única.

2. **Encontrar la solución particular (xp*xp*)**:

   (1001)($xp1xp2$)=(56)(1001)(*xp*1*xp*2)=(56)

   Resolviendo, se obtine xp=(56)*xp*=(56).

3. **Encontrar la solución homogénea (xh*xh*)**:

   $A(xh1xh2)$=(00)*A*(*xh*1*xh*2)=(00)

   Resolviendo el sistema homogéneo:

$xh1+2xh2=03xh1+4xh2=0xh1+2xh23xh1+4xh2=0=0$

Se obtiene $xh1=0xh1=0$ y $xh2=0xh2=0$, por lo tanto, $xh=(00)xh=(00)$.

4. **Encontrar la solución general (xx)**:

   $x=xp+xh=(56)+(00)=(56)x=xp+xh=(56)+(00)=(56)$

   Conclusión obtenida: La solución general de la ecuación matricial $Ax=yAx=y$ es $x=(56)x=(56)$. Esta solución es única.

4.2. Pasos para resolver la ecuación $Ax=yAx=y$ en el espacio $C1[a,b]C1[a,b]$, con AA como el operador de derivación y $y(x)=exy(x)=ex$:

1. **Aplicar el operador de derivación**:

   $A(x')=y'A(x')=y'$

2. **Simplificar la expresión**:

   $A2x=A(ex)A2x=A(ex)$

3. **Sustituir $y(x)=exy(x)=ex$**:

   $A2x=exA2x=ex$

4. **Encontrar la derivada segunda de $exex$**:

   $A2x=exA2x=ex$

5. **Interpretar la ecuación**: La ecuación $A2x=exA2x=ex$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la función $x(t)x(t)$.

6. **Resolver la ecuación diferencial**: Se resuelve la ecuación diferencial $x''=exx''=ex$ considerando las condiciones iniciales específicas del problema.

7. **Encontrar la solución general**: La solución general de la ecuación $x''=exx''=ex$ depende de las condiciones iniciales y puede expresarse en términos de funciones exponenciales.

   Como conclusión, la solución de $Ax=yAx=y$ en $C1[a,b]C1[a,b]$ con AA como operador de derivación y $y(x)=exy(x)=ex$ se encuentra resolviendo la ecuación diferencial $x''=exx''=ex$ con las condiciones iniciales apropiadas.

4.3. Pasos para resolver la ecuación $Ax=yAx=y$ en el espacio $C1[0,1]C1[0,1]$, donde AA es el operador de integración y $y(x)=x2y(x)=x2$:

1. **Aplicar el operador de integración**:

   $\int 01A(x)\,dx=\int 01y(x)\,dx\int 01A(x)dx=\int 01y(x)dx$

2. **Simplificar la expresión**:

   $\int 01x\,dx=\int 01x2\,dx\int 01xdx=\int 01x2dx$

3. **Evaluar las integrales**:

   $[x22]01=[x33]01[2x2]01=[3x3]01$

4. **Sustituir los límites de integración**:

   $(12-0)=(13-0)(21-0)=(31-0)$

5. **Simplificar el resultado**:

   $12\neq 1321$□$=31$

6. **Interpretar el resultado**: La ecuación $Ax=yAx=y$, con AA como operador de integración y $y(x)=x2y(x)=x2$, no tiene solución en el espacio $C1[0,1]C1[0,1]$ porque las integrales de xx y $x2x2$ en el intervalo $[0,1][0,1]$ no son iguales.

Conclusión obtenida: La ecuación $Ax=yAx=y$ no tiene solución en $C1[0,1]C1[0,1]$ debido a la diferencia en los valores de las integrales de xx y $x2x2$ en el intervalo $[0,1][0,1]$.