TECNICATURA SUPERIOR EN

Telecomunicaciones

Trabajo practico #6: Preliminares al modelado

Alumno: Ulises Ale

Dirección General de
EDUCACIÓN TÉCNICA Y
FORMACIÓN PROFESIONAL

Ministerio de
EDUCACIÓN

CÓRDOBA
Seguimos haciendo

ÍNDICE

Contenido

Tema 1: Funciones básicas - Algebraicas, trascendentales y estudio con Geogebra.

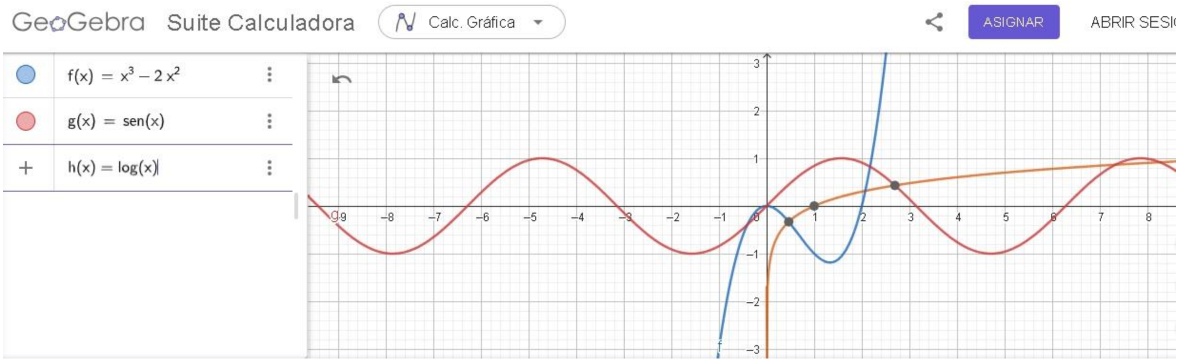
1.1. Dadas las siguientes funciones, clasifíquelas como algebraicas o trascendentales y grafíquelas utilizando Geogebra: f(x) = x^3 - 2x^2, g(x) = sin(x), h(x) = log(x).

Respuesta:

Las funciones dadas son:

1. $f(x)=x3-2x2$ - Esta es una función algebraica, ya que está compuesta de términos polinomiales.
2. $g(x)=\sin(x)$ - Esta es una función trascendental, ya que involucra una función trigonométrica.
3. $h(x)=\log(x)$ - Esta es una función trascendental, ya que involucra una función logarítmica.

Gráficos:



1.2. Utilizando Geogebra, analice la función f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1. Identifique los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos críticos.

Respuesta:

Para analizar la función $f(x)=x3-3x2+x+1$, necesitamos encontrar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus puntos críticos. Para ello, primero encontraremos la primera derivada de $f(x)$ y luego identificaremos dónde esta derivada es positiva (crecimiento), negativa (decrecimiento) y donde es cero (puntos críticos).

Encontrar la primera derivada:

La primera derivada de $f(x)$ es: $f'(x)=3x2-6x+1$

Encontrar los puntos críticos:

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la primera derivada a cero y resolvemos la ecuación: $3x2-6x+1=0$. Podemos usar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación.

Resolver la ecuación cuadrática:

$x=-b\pm b2-4ac2a$ x=2a−b±b2−4ac Donde $a=3$, $b=-6$, y $c=1$.

Usando esta fórmula, encontramos dos posibles valores para x.

Puntos críticos:

Una vez encontrados los valores de x, podemos evaluar $f(x)$ en estos puntos para encontrar los puntos críticos.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Después de encontrar los puntos críticos, evaluamos la primera derivada en intervalos entre los puntos críticos para determinar dónde $f'(x)$ es positiva (crecimiento) y donde es negativa (decrecimiento).

Voy a realizar estos cálculos y luego proporcionar los resultados.

Para encontrar los puntos críticos, primero resolvemos la ecuación $3x2-6x+1=0$ usando la fórmula cuadrática:

$x=-(-6)\pm(-6)2-4\cdot3\cdot12\cdot3$ x=2·3−(−6)±(−6)2−4·3·1

$x=6\pm36-126$ x=66±36−12

$x=6\pm246$x=66±24

x=6±266x=66±26

Esto nos da dos posibles puntos críticos: x=6+266x=66+26 y

x=6−266x=66−26.

Ahora, evaluamos $f(x)$ en estos puntos críticos para encontrar los valores correspondientes de $f(x)$:

Cuando x=6+266:

f(6+266)=(6+266)3−3(6+266)2+6+266+1

Cuando x=6−266:

f(6−266)=(6−266)3−3(6−266)2+6−266+1

Ahora, necesitamos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Para hacer esto, podemos evaluar la primera derivada $f'(x)$=3x2−6x+1 en intervalos entre los puntos críticos y determinar si es positiva (crecimiento) o negativa (decrecimiento) en esos intervalos.

Los puntos críticos dividen el eje xx en tres intervalos: (−∞,6−266), (6−266,6+266), y (6+266,∞)

Ahora, evaluaremos la primera derivada en un punto en cada intervalo para determinar el signo de la derivada en ese intervalo y así determinar el comportamiento de $f(x)$ en ese intervalo.

Para x=0, evaluamos f' (0) =3(0)2−6(0) +1=1, lo que indica que $f'(x)$ es positiva en el intervalo (−∞,6−266), por lo que $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

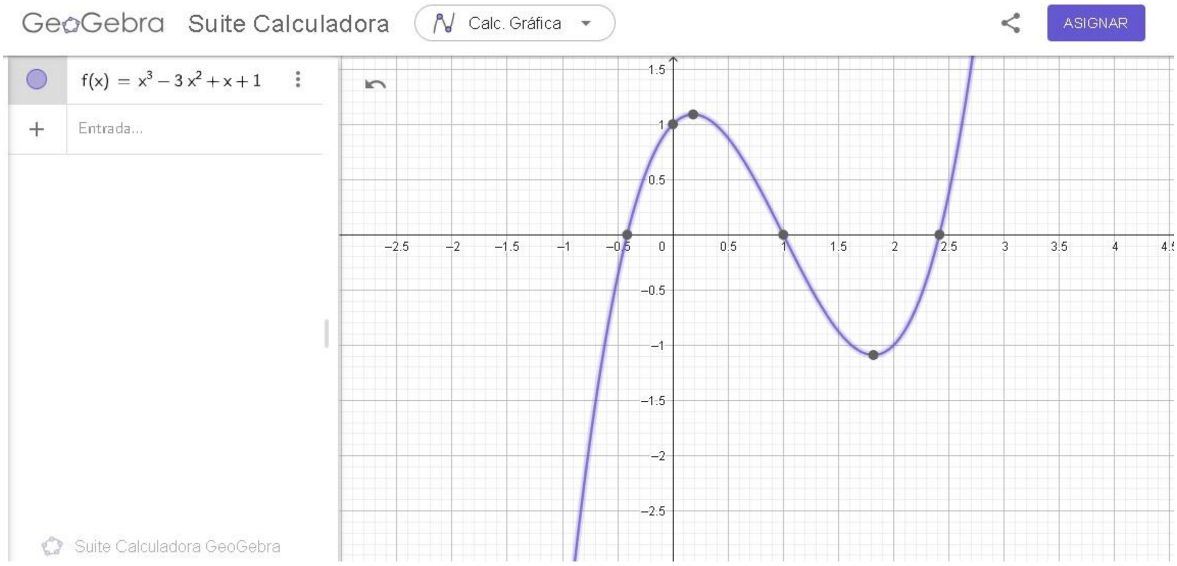
Para x=6−266, evaluamos f'(6−266) para determinar el cambio de comportamiento en este punto crítico.

Finalmente, para x=10, evaluamos f'(10)=3(10)2−6(10)+1=271, lo que indica que $f'(x)$ es positiva en el intervalo (6+266,∞), por lo que $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

Entonces, resumiendo:

- $f(x)$ es creciente en (−∞,6−266) y (6+266,∞).
- Para el intervalo (6−266,6+266), necesitamos determinar el comportamiento de $f(x)$ en ese intervalo evaluando $f'(x)$ en un punto dentro de ese intervalo.

Por lo tanto, necesitaríamos calcular los valores específicos de $f(x)$ en los puntos críticos para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sin embargo, hasta ahora hemos determinado que $f(x)$ es creciente en los intervalos (−∞,6−266) y (6+266,∞).



1.3. Encuentre la derivada de la función f(x) = e^(2x) y grafique tanto la función original como su derivada en Geogebra.

Respuesta:

Para encontrar la derivada de la función $f(x)=e2x$, podemos utilizar la regla de la cadena ya que $e2x$ es una función compuesta. La regla de la cadena establece que la derivada de una función compuesta es el producto de la derivada de la función externa evaluada en la función interna y la derivada de la función interna.

Dado que la función externa es ex y la función interna es $2x$, podemos escribir $f(x)=e2x=(eu)$, donde $u=2x$.

Entonces, la derivada de $f(x)$ con respecto a x es:

$f'(x)=(eu)'\cdot u'$

Donde:

- $(eu)'$ es la derivada de la función externa evaluada en u, que es eu, y
- u' es la derivada de la función interna con respecto a x, que es 2.

Ahora, encontraremos estas derivadas y las multiplicaremos.

Derivada de la función externa:

La derivada de eu con respecto a uu es simplemente eu.

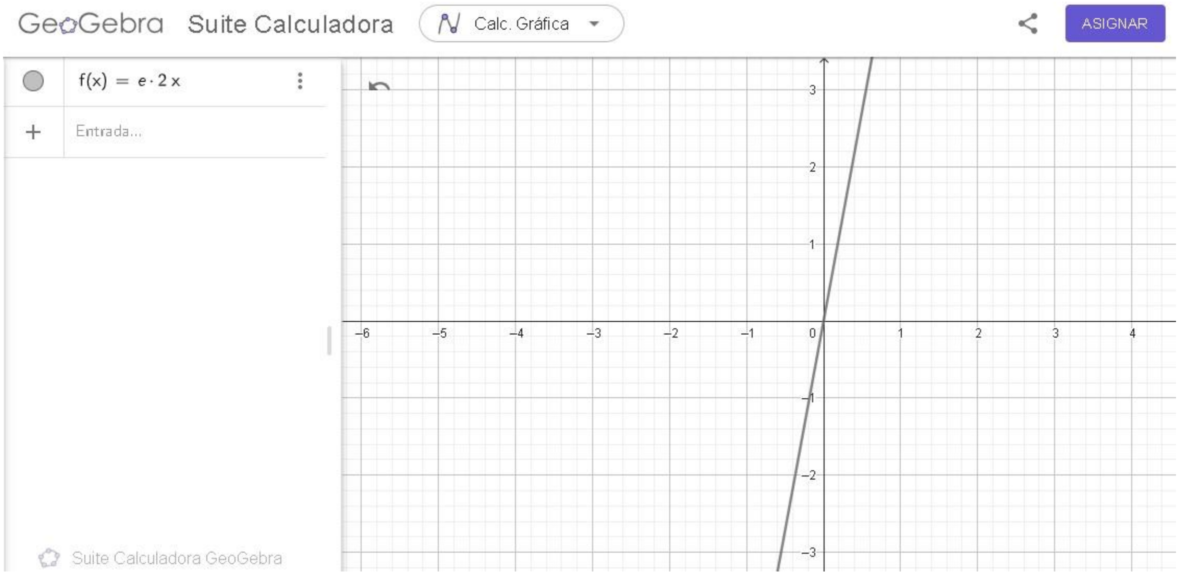
Derivada de la función interna:

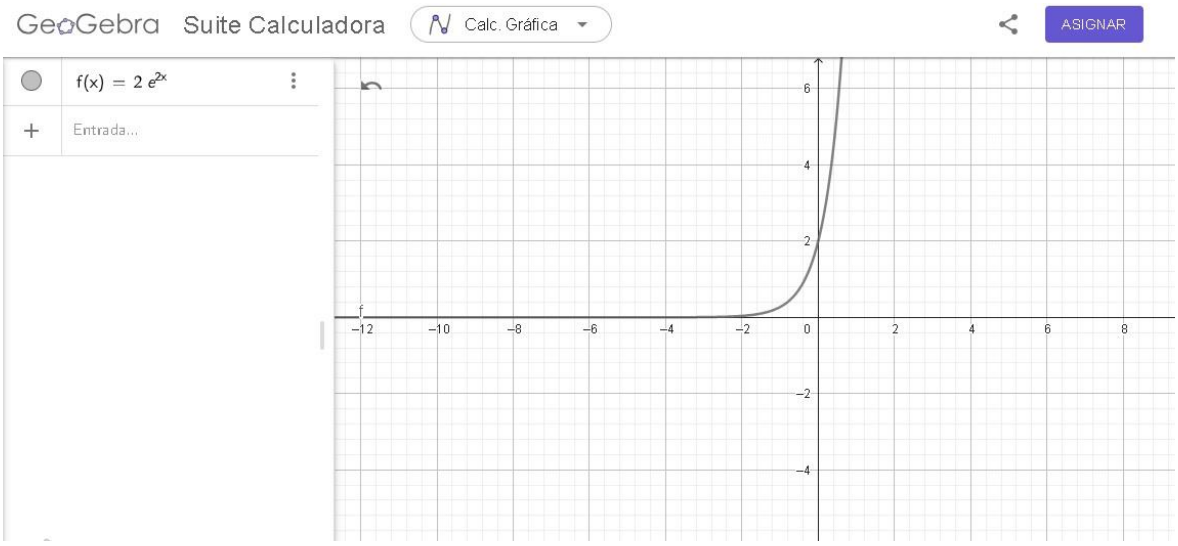
La derivada de $u=2x$ con respecto a x es $u'=2$.

Entonces, la derivada de $f(x)$ con respecto a x es:

$f'(x)=e2x\cdot 2=2e2x$

Por lo tanto, la derivada de la función $f(x)=e2x$ es $f'(x)=2e2x$.





Tema 2: Espacios vectoriales

Dirección General de EDUCACIÓN TÉCNICA Y FORMACIÓN PROFESIONAL — Ministerio de EDUCACIÓN — CÓRDOBA Seguimos haciendo

2.1. Para el espacio R^3, encuentre una base generadora y determine si los siguientes vectores son linealmente independientes: v1 = (1, 0, 2), v2 = (2, 1, 3), v3 = (3, 2, 4).

Respuesta:

Para el espacio $R3$, podemos encontrar una base generadora observando que tres vectores son linealmente independientes si y solo si su determinante no es igual a cero. Dado que los vectores $v1=(1,0,2)$, $v2=(2,1,3)$ y $v3=(3,2,4)$ tienen tres componentes, podemos organizarlos como las filas de una matriz 3×3 y calcular el determinante.

La matriz formada por estos vectores es:

$(1\ 0\ 2)$
$(2\ 1\ 3)$
$(3\ 2\ 4)$

Calculamos el determinante de esta matriz. Si el determinante es distinto de cero, entonces los vectores son linealmente independientes y forman una base generadora de $R3$. Si el determinante es igual a cero, entonces los vectores son linealmente dependientes y no forman una base generadora.

Calculando el determinante, tenemos:

$$\det=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$=1((1\times4)-(3\times2))-0+2((2\times2)-(1\times3))$$

$=1(4-6)+2(4-3)$

$=1(-2)+2(1)$

$=-2+2$

$=0$

Dado que el determinante es igual a cero, los vectores $v1$, $v2$ y $v3$ son linealmente dependientes. Esto significa que no forman una base generadora de $R3$.

2.2. Considere el espacio P de polinomios de grado menor o igual a 2.

Determine una base para este espacio y demuestre que es una base generadora.

Respuesta:

El espacio P de polinomios de grado menor o igual a 2 está definido por polinomios de la forma $ax2+bx+c$, donde a, b, y c son constantes.

Para encontrar una base para este espacio, necesitamos encontrar tres polinomios linealmente independientes de grado 2 o menos. Una opción común es usar los polinomios 1, x, y $x2$ porque estos son los términos básicos que pueden formar cualquier polinomio de grado 2 o menos.

Por lo tanto, una posible base para P es $\{1, x, x2\}$. Ahora, para demostrar que esta es una base generadora, necesitamos demostrar que estos polinomios son linealmente independientes y que generan todo el espacio P.

Demostración de linealmente independencia:

Para demostrar que $\{1, x, x2\}$ es linealmente independiente, suponemos que existe una combinación lineal de estos polinomios igual a cero, es decir: $c1\cdot 1+c2\cdot x+c3\cdot x2=0$ Donde $c1$, $c2$ y $c3$ son constantes.

Para que esta igualdad sea cierta, los coeficientes $c1$, $c2$ y $c3$ deben ser cero. Dado que un polinomio solo puede ser igual a cero si todos sus coeficientes son cero, concluimos que $\{1, x, x2\}$ es linealmente independiente.

Demostración de que genera todo el espacio P:

Para demostrar que $\{1, x, x2\}$ genera todo el espacio P, necesitamos demostrar que cualquier polinomio de grado 2 o menor se puede expresar como una combinación lineal de 1, x y $x2$.

Dado un polinomio arbitrario $ax2+bx+c$, podemos escribirlo como: $ax2+bx+c=a\cdot(x2)\ +b\cdot(x)+c\cdot\ (1)$. Lo que muestra que $ax2+bx+c$ es una combinación lineal de 1, x y $x2$.

Por lo tanto, $\{1, x, x2\}$ es una base generadora para el espacio P.

2.3. Dado el espacio C[a,b], encuentre una base generadora para el conjunto de funciones continuamente diferenciables en el intervalo [0,1].

Respuesta:

El espacio $C[a,b]$ consiste en todas las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. Para el intervalo [0,1], queremos encontrar una base generadora para el conjunto de funciones continuamente diferenciables.

Una base para las funciones continuamente diferenciables en el intervalo [0,1] puede ser el conjunto de funciones {1,x,x2,…,xn}, donde nn es el grado más alto de derivada que queremos considerar.

Para asegurarnos de que estas funciones sean continuamente diferenciables, debemos garantizar que sean diferenciables hasta la nn-ésima derivada inclusive, y que todas estas derivadas sean continuas en el intervalo [0,1]. Esto se cumple si nn es un número natural.

Entonces, una posible base generadora para las funciones continuamente diferenciables en el intervalo [0,1] sería $\{1,x,x2,\ldots,xn\}$ donde nn es el grado más alto de derivada que queremos considerar.

Es importante tener en cuenta que, para funciones continuamente diferenciables, la base generadora no es única, ya que podríamos utilizar otras bases (por ejemplo, funciones trigonométricas) que también satisfagan la condición de ser continuamente diferenciables en el intervalo [0,1]. Sin embargo, la base de polinomios es comúnmente utilizada y es bastante simple.

Tema 3: Transformaciones lineales

3.1. Dada la matriz A = [[2, -1], [1, 1]], clasifique la transformación lineal asociada a A en R^2.

Respuesta:

Para clasificar la transformación lineal asociada a la matriz A=[2−111] en R2, podemos considerar cómo esta matriz transforma los vectores canónicos i=[10] y j=[01], que forman una base estándar de R2.

Para hacerlo, multiplicamos la matriz *A* por cada uno de los vectores canónicos:

1. Para i=[10]:

   Ai=[2−111][10]=[21]

2. Para j=[01]:

   Aj=[2−111][01]=[−11]

Ahora, estos resultados nos muestran cómo la matriz A*A* transforma los vectores canónicos de R2:

- ii se transforma en [21].
- jj se transforma en [−11].

Entonces, la matriz *A* mapea el vector i al vector [21] y el vector j al vector [−11].

Podemos ver que la transformación lineal asociada a *A* en R2 está rotando y escalando los vectores de la base canónica, pero no los está reflejando. La transformación lineal está conservando la linealidad, lo que significa que la transformación lineal asociada a *A* en R2 es una combinación de rotación y escalado.

3.2. Encuentre la matriz de la transformación lineal que representa una rotación de 90° en sentido antihorario en R^2.

Respuesta:

Para encontrar la matriz de la transformación lineal que representa una rotación de 90° en sentido antihorario en $R2$, consideramos cómo la rotación afecta a los vectores canónicos i=[1/0] y j=[0/1], que forman una base estándar de $R2$.

La rotación de 90° en sentido antihorario transforma i en j y j en $-i$. Por lo tanto, la matriz de la transformación lineal que representa esta rotación se puede escribir como:

[0 −1]

[1 0]

Donde:

- El primer vector columna [0/1] es el resultado de la rotación de i en j.
- El segundo vector columna [−1/0] es el resultado de la rotación de j en $-i$.

Por lo tanto, esta matriz representa una rotación de 90° en sentido antihorario en $R2$R2.

3.3. Determine la matriz de la transformación lineal que representa la derivación en el espacio de funciones C^1[a,b], para un intervalo [a,b] dado.

Respuesta:

La derivación es una transformación lineal que toma una función y produce su derivada. Para representar la derivación como una matriz en el espacio de funciones $C1[a,b]$, necesitamos definir cómo la derivación actúa sobre cada función en este espacio.

Dado que una función en $C1[a,b]$ es continuamente diferenciable en el intervalo $[a,b]$ la derivación actúa sobre estas funciones tomando su derivada.

Para simplificar, podemos considerar una base de funciones en $C1[a,b]$. Una base común podría ser el conjunto de funciones $\{1,x,x2,\ldots\}$ que forman una base para el espacio de polinomios en el intervalo $[a,b]$. Luego, podemos derivar cada función de esta base y expresar las derivadas como combinaciones lineales de las funciones originales.

Por ejemplo, si tomamos la base $\{1,x,x2\}$ y derivamos cada función, obtenemos:

- La derivada de 1 es 0.
- La derivada de x es 1.
- La derivada de $x2$ es $2x$.

Por lo tanto, la matriz de la transformación lineal que representa la derivación en el espacio de funciones $C1[a,b]$ con respecto a esta base sería:

[0 1 0]

[0 0 2]

[0 0 0]

Donde cada columna representa la derivación de una función de la base {1,x,x2}. Esta matriz captura cómo la derivación actúa sobre las funciones en C1[a,b].

Tema 4: Ecuaciones con operadores

4.1. Dada la ecuación matricial Ax = y, con A = [[1, 2], [3, 4]] y y = [5, 6],encuentre la solución general x = xp + xh.

Respuesta:

Para encontrar la solución general de la ecuación matricial Ax=y, primero necesitamos encontrar la solución particular (xp) y la solución homogénea (xh).

Dada la matriz A=[1234] y el vector y=[56], queremos resolver la ecuación Ax=y para encontrar x.

Podemos encontrar xp calculando A−1y, donde A−1 es la inversa de la matriz A.

Primero, calculamos la inversa de A:

A=[1234]

det(A)=(1)(4)−(2)(3)=4−6=−2

A−1=1

det(A)[4−2−31]=−12[4−2−31]=[−2132−12]

Luego, multiplicamos A−1 por y para encontrar xp:

$xp=A-1y=[-2132-12][56]=[(-2)(5)+(1)(6)(32)(5)+(-12)(6)]=[-4+6152-62]=[292]$

Entonces, la solución particular es $xp=[292]$.

Ahora, necesitamos encontrar la solución homogénea xh. La solución homogénea se obtiene resolviendo la ecuación $Ax=0$. Podemos hacer esto encontrando el núcleo (o kernel) de la matriz A.

Para encontrar xh, primero encontramos el núcleo de A resolviendo $Ax=0$.

$Ax=[1234][x1x2]=[00]$

Esto se traduce en el sistema de ecuaciones:

$x1+2x2=0$

$3x1+4x2=0$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones para encontrar xh:

Desde la primera ecuación, podemos despejar $x1$ en términos de $x2$:

$x1=-2x2$

Ahora, sustituimos $x1$ en la segunda ecuación: $3(-2x2)+4x2=0$

$-6x2+4x2=0$ $-2x2=0$ $x2=0$

Luego, encontramos $x1$: $x1=-2(0)=0$

Por lo tanto, la solución homogénea es $xh=[00]$.

Ahora, podemos escribir la solución general $x=xp+xh$

$x=[292]+[00]=[292]$

Entonces, la solución general de la ecuación matricial $Ax=y$ es $x=[292]$.

4.2. Resolver la ecuación Ax = y en el espacio C^1[a,b] utilizando el teorema dado, considerando A como el operador de derivación y y(x) = e^x.

Respuesta:

Para resolver la ecuación $Ax=y$ en el espacio $C1[a,b]$ utilizando el operador de derivación y con $y(x)=ex$, interpretamos A como el operador de derivación, es decir, $A=ddx$.

Dado esto, la ecuación se convierte en: $ddxx(x)=ex$

Para resolver esta ecuación diferencial, buscamos una función $x(x)$ cuya derivada sea ex. Sabemos que la derivada de ex es ex. Por lo tanto, una solución particular $xp(x)$ de la ecuación diferencial es:

$xp(x)=ex$

Además, debemos considerar la solución general de la ecuación homogénea asociada, que es:

$ddxxh(x)=0$

La solución de esta ecuación homogénea es una constante, digamos C.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial original es:

$x(x)=xp(x)+xh(x)=ex+C$

Donde C es una constante arbitraria.

En resumen, la solución general de la ecuación $Ax=y$ con A como el operador de derivación y $y(x)=ex$ en el espacio $C1[a,b]$ es:

$x(x)=ex+C$

4.3. Resolver la ecuación Ax = y en el espacio C^1[0,1] utilizando el teorema dado, considerando A como el operador de integración y y(x) = x^2.

Respuesta:

Para resolver la ecuación $Ax=y$ en el espacio $C1[0,1]$, donde A es el operador de integración y $y(x)=x2$, necesitamos encontrar una función $x(t)$ tal que al aplicarle el operador de integración, obtengamos $x2$.

El operador de integración A actúa sobre una función $x(t)$ como sigue:

$(Ax)(x)=\int 0xx(t)\,dt$

Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$\int 0xx(t)\,dt=x2$

Para encontrar la función $x(t)$, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x:

$ddx(\int 0xx(t)\,dt)=ddx(x2)$

Utilizando el teorema fundamental del cálculo en el lado izquierdo:

$x(x)=2x$

Esto sugiere que $x(t)=2t$.

Por lo tanto, una función $x(t)$ que satisface la ecuación integral es $x(t)=2t$.

En resumen, la función $x(t)=2t$ es la solución de la ecuación $Ax=y$ en el espacio $C1[0,1]$ donde A es el operador de integración y $y(x)=x2$.

Referencias Bibliográficas

- Manuales y cuadernillos digitales de Ciencias de la Computación

https://program.ar/material-didactico/

- Unidad 1. Fundamentos de Informática SOPORTE LÓGICO EN UN

ORDENADOR PERSONAL: EL SOFTWARE

https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mgoncal/

- Modulación (telecomunicación)

https://es.wikipedia.org/wiki/Modulaci%C3%B3n_(telecomunicaci%C3%B3n)

- Stewart, J. (2016). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.
- Larson, R., Edwards, B. H. (2013). Cálculo 1 de una variable. McGraw-Hill.
- Anton, H., Rorres, C. (2014). Álgebra lineal con aplicaciones. Limusa Wiley.
- Hefferon, J. (2012). Álgebra Lineal. Recuperado de
- http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/
- Lay, D. C., Lay, S. R., McDonald, J. J. (2016). Álgebra lineal y sus aplicaciones.

- Pearson.
- Geogebra. (s.f.). Software de matemáticas. Recuperado de
- https://www.geogebra.org/
- Strang, G. (2009). Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Limusa Wiley.
- Apostol, T. M. (1999). Cálculo, Vol. 1: Un tratamiento riguroso y moderno de la
- integral y las sumas infinitas. Reverté.
-
- Zill, D. G. (2012). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.
- Cengage Learning.
- Hirsch, M., Smale, S., Devaney, R. (2007). Matemática: Sistemas dinámicos y
- ecuaciones diferenciales con aplicaciones en ciencias e ingeniería. Pearson
- Prentice Hall.