

Electrónica Microcontrolada



Circuito Digital Numeración



Índice

- Codificación.
- Sistemas Decimal, Binario y Hexadecimal:
 - Codificación en cada sistema.
 - Cambios de base.
 - Operaciones en Binario (suma, multiplicación).
 - Desbordamiento (Overflow).

Números Enteros:

- Sistemas de representación en binario.
- Complemento a 2.
- Overflow en Ca2.



Codificación

- Codificación: Conversión de la información a un sistema de representación distinto.
- Codificación de información en Binario:
 - Un elemento concreto, de un conjunto de M elementos, se codifica como un vector (tira, secuencia) de n bits, con n ≥ log₂M:

$$X = (X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_2, X_1, X_0)$$

- ¿Cómo se realiza la asignación elemento ↔vector? Depende:
 - Caracteres Alfanuméricos: código ASCII de 8 bits (1 byte).
 - Números naturales: sistema convencional en base 2 (binario).
 - Números enteros: Complemento a 2.
 - Números reales: ANSI/IEEE Floating Point Standard.



Codificación

Ejemplo: Tabla ASCII:

- American Standard Code for Information Interchange
 - 1963 (Telegrafía)
 - Ordenado Alfabéticamente (pero empieza en 00110000??)
 - 32 primeros códigos, caracteres de control (para una impresora, por ejemplo)

```
0011 0000
                           0100 1111
                                                0110 1101
                           0101 0000
                                                0110 1110
     0011 0001
                           0101 0001
                                                0110 1111
     0011 0010
                     Q
                           0101 0010
                                                0111 0000
     0011 0011
     0011 0100
                           0101 0011
                                                0111 0001
     0011 0101
                           0101 0100
                                                0111 0010
     0011 0110
                                                0111 0011
                           0101 0101
                                                0111 0100
     0011 0111
                     v
                           0101 0110
                                                0111 0101
     0011 1000
                           0101 0111
                                                0111 0110
                           0101 1000
     0011 1001
                           0101 1001
                                                0111 0111
     0100 0001
                     Y
                                                0111 1000
     0100 0010
                           0101 1010
                                                0111 1001
     0100 0011
                           0110 0001
     0100 0100
                           0110 0010
                                                0111 1010
                           0110 0011
                                                0010 1110
E
     0100 0101
                           0110 0100
                                                0010 0111
     0100 0110
                                                0011 1010
     0100 0111
                           0110 0101
                                                0011 1011
     0100 1000
                           0110 0110
                                                0011 1111
     0100 1001
                           0110 0111
                                                0010 0001
     0100 1010
                           0110 1000
                                                0010 1100
     0100 1011
                           0110 1001
     0100 1100
                           0110 1010
                                                0010 0010
     0100 1101
                           0110 1011
                                                0010 1000
M
N
     0100 1110
                           0110 1100
                                                0010 1001
                                         space
                                                0010 0000
```



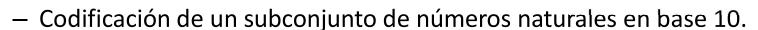
Índice

- Codificación.
- Sistemas Decimal, Binario y Hexadecimal:
 - Codificación en cada sistema.
 - Cambios de base.
 - Operaciones en Binario (suma, multiplicación).
 - Desbordamiento (Overflow).
- Números Enteros:
 - Sistemas de representación en binario.
 - Complemento a 2.
 - Overflow en Ca2.



Probablemente...

- ¿Por qué decimal?
- Sistema convencional en Base 10:



- Números Naturales= {0, 1, 2, 3, ...}.
- Sistema de numeración (reglas de representación):
 - Sea el vector de digitos $X = (X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_2, X_1, X_0)$ con $X_i \in \{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$.
 - El valor que representa el vector X interpretándolo como un número codificado en el sistema convencional en base 10 es:

$$X_{ud} = X_{n-1} 10^{n-1} + X_{n-2} 10^{n-2} + \dots + X_2 10^2 + X_1 10^{1+} X_0 10^0 = \sum_{(i=0,...,n)} X_i 10^i$$

Rango de representación (para n dígitos):

$$0 \le X_{ud} \le 10^{n} - 1$$

Sistema convencional en Base 2:

- Codificación de un subconjunto de números naturales en base 2.
- Números Naturales= {0, 1, 2, 3, ...}.
- Sistema de numeración (reglas de representación):
 - Sea el vector de digitos $X = (X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_2, X_1, X_0)$ con $X_i \in \{0, 1\}$.
 - El valor que representa el vector X interpretándolo como un número codificado en el sistema convencional en base 2 es:

$$X_u = X_{n-1}2^{n-1} + X_{n-2}2^{n-2} + \dots + X_22^{2} + X_12^{1+} X_02^0 = \sum_{(i=0,...,n)} X_i 2^i$$

Rango de representación (para n dígitos):

$$0 \le X_{ij} \le 2^n -1$$

– Ejemplo: X= 1011, Valor??

$$X_u = 1.2^3 + 0.2^2 X + 1.2^1 + 1.2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

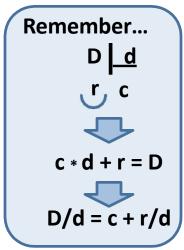


- Cambio de base: <u>Binario → Decimal</u>:
 - Dado X = $(X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_2, X_1, X_0)$ con $X_i \in \{0, 1\}$, encontrar X_u . $X_u = X_{n-1}2^{n-1} + X_{n-2}2^{n-2} + ... + X_22^{2} + X_12^{1} + X_02^{0} = \sum_{(i=0,...,n)} X_i 2^i$
- Cambio de base: <u>Decimal → Binario</u>:
 - Dado X_u encontrar $X = (X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_2, X_1, X_0)$ con $X_i \in \{0, 1\}$.

$$X_{u} = X_{n-1}2^{n-1} + X_{n-2}2^{n-2} + ... + X_{2}2^{2} + X_{1}2 + X_{0}$$
Dividendo
$$X_{u} / 2 = (X_{n-1}2^{n-1} + X_{n-2}2^{n-2} + ... + X_{2}2^{2} + X_{1}2) / 2 + X_{0} / 2 = cociente$$

$$(X_{n-1}2^{n-2} + X_{n-2}2^{n-3} + ... + X_{2}2 + X_{1}) + (0) / 2$$

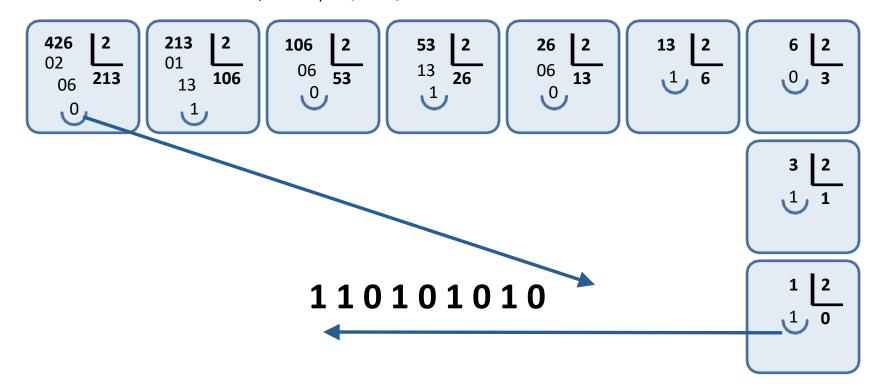
- *El Bit de menor peso es el resto de dividir por 2 el número que se desea representar en binario.
- *Repetir el proceso con el cociente para encontrar el resto de bits.





Ejemplo <u>Decimal → Binario</u>:

- Dado $X_u = 426$ encontrar $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ que lo representa en binario (con $x_i \in \{0, 1\}$).



Sistema convencional en Base 16 (Hexadecimal):

- Codificación de un subconjunto de números naturales en base 16.
- Sistema de numeración (reglas de representación):
 - Sea el vector de digitos $X = (X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_2, X_1, X_0)$ con $X_i \in \{0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F\}$.
 - El valor que representa el vector X interpretándolo como un número codificado en el sistema convencional en hexadecimal es:

$$X_u = X_{n-1} 16^{n-1} + X_{n-2} 16^{n-2} + \dots + X_2 16^2 + X_1 16^{1+} X_0 2^0 = \sum_{(i=0,...,n)} X_i 16^i$$

Rango de representación (para n dígitos):

$$0 \le X_u \le 16^n - 1$$

¿Por qué Hexadecimal?:

- La palabra (word) de los procesadores actuales es de 32 ó 64 bits.
- Es engorroso escribir vectores tan largos en binario. Utilizaremos notación hexadecimal, que es más compacta.

• Cambio de base: **Binario** → **Hexadecimal**:

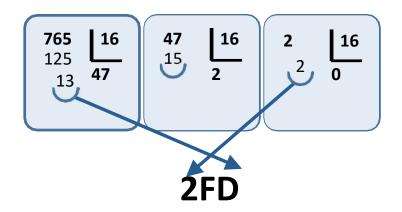
$$- \text{ Dado X} = (X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_2, X_1, X_0) \text{ con } X_i \in \{0, 1\}, \text{ encontrar } X_u.$$

$$X_u = X_{n-1}2^{n-1} + ... + X_1 2^1 + X_0 2^0 = \underbrace{(x_{n-1}2^3 + x_{n-2}2^2 + x_{n-3}2^1 + x_{n-4})}_{h_k} 16^k + ... + \underbrace{(x_72^3 + x_6 2^2 + x_5 2^1 + x_4)}_{h_1} 16 + \underbrace{(x_32^3 + x_2 2^2 + x_1 2^1 + x_0)}_{h_0}$$

- Cambio de base: <u>Hexadecimal → Binario</u>:
 - Convertir cada dígito hexadecimal en su equivalente binario.



- Cambio de base <u>Decimal → Hexadecimal</u>:
 - Mismo proceso de división que en el caso de decimal-->binario. El divisor cambia de 2 a 16.
 - Dado $X_u = 426$ encontrar $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_0)$ que lo representa en binario (con $x_i \in \{0, 1\}$).



Ejercicios:

 Obtener el valor del número natural Zu representado en binario por los siguientes vectores de bits Z:

 Obtener el vector X de 8 bits que representa en binario cada uno de los siguientes números naturales. Expresar X también en hexadecimal. Indicar en qué casos el número no se puede representar con 8 bits:

 Obtener el valor de los siguientes vectores de 16 bits (alguno representado en hexadecimal):

$$X_u = 65342$$
 $X_u = 23$ $X_u = 98767$

Operaciones en base b: <u>SUMA</u>

- Dados 2 vectores de n dígitos, $X = x_{n-1}x_{n-2} \cdot x_1x_0$, $Y = y_{n-1}y_{n-2} \cdot y_1y_0$ con x_i , y_i $\epsilon \{0, 1, ..., b-1\}$ que representan dos números naturales X_u e Y_u en un sistema convencional en <u>base b</u>, encontrar el vector $W = w_n w_{n-1} \cdots w_1 w_0$ con w_i *E{0,1,...,b--1}* que representa en el sistema convencional en <u>base</u> \underline{b} al número natural $W_u = X_u + Y_u$
- Expresado de otra forma; encontrar los dígitos $w_n w_{n-1} w_1 w_0$ tales que cumplan lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^{n} w_i \times b^i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \times b^i + \sum_{i=0}^{n-1} y_i \times b^i$$

$$\mathbf{EQ1}$$

$$w_i \in \{0, 1, ..., b-1\} \ \forall i$$

$$w_i \in \{0,1,...,b-1\} \ \forall i$$

- Un primer intento de solución:
 - Manipulando la EQ1 encontramos la siguiente expresión equivalente:

$$w_n \times b^n + \sum_{i=0}^{n-1} w_i \times b^i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i) \times b^i$$

Una solución trivial (de las infinitas que hay):

$$W_i = x_i + y_i$$
 para $0 \le i \le n - 1$ y $w_n = 0$

• Ejemplo: para b = 10 y n = 4, sumar X = 6493 e Y = 8199:

		Dígito 4	Dígito 3	Dígito 2	Dígito 1	Dígito 0
	Χ		6	4	9	3
	Y		8	1	9	9
W		0	14	5	18	12

Atención, W no cumple EQ2, ya que algunos valores no están representados con un solo dígito de la base.

- ¿Cómo solucionamos el problema con EQ2? Restando b en w_k y sumando 1 (acarreo ó **carry**) a w_{k+1}
 - Se sigue cumpliendo EQ1, ya que:

$$W_{k+1} \times b^{k+1} + W_k \times b^k = W_{k+1} \times b^{k+1} + (W_k + b - b) \times b^k = W_{k+1} \times b^{k+1} + b^{k+1} + (\hat{W}_k - b) \times b^k = (W_{k+1} + 1) \times b^{k+1} + (W_k - b) \times b^k$$

Cumplimos con EQ2. Ejemplo anterior, dígito 1:

		D 4	D 3	D 2	D 1	D0
	X		6	4	9	3
	Y		8	1	9	9
W		0	14	5	18	12

		D 4	D 3	D 2	D 1	D 0
	X		6	4	9	3
	Y		8	1	9	9
W		0	14	6	8	12

^{*} Es necesario repetir el proceso para cada dígito que no cumpla EQ2.

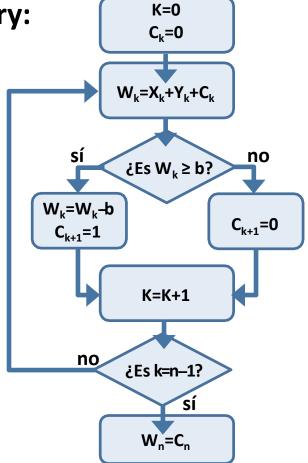


Algoritmo de suma con propagación de carry:

	D 4	D 3	D 2	D 1	D 0
		6	4	9	3
		8	1	9	9

$$k = 0$$
 w_0 2 c_1 1 $k = 1$ w_1 9 c_2 1 $k = 2$ w_2 6 c_3 0 $k = 3$ w_2 4







ISPC INSTITUTO SUPERIOR Decimal, Binario y Hexadecimal

• **SUMA de números BINARIOS**:

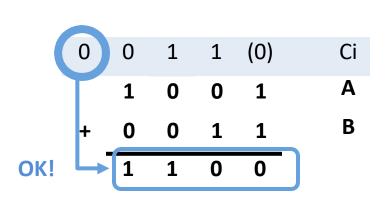
			512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
x	(987)		1	1	1	1		1		0		1
У	(123)					1	1	1	1	0	1	1
Carries		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	
х+у	(1110)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
		S ₁₀	S_9	S ₈	S ₇	s_6	S ₅	S_4	S_3	S_2	S_1	s_0

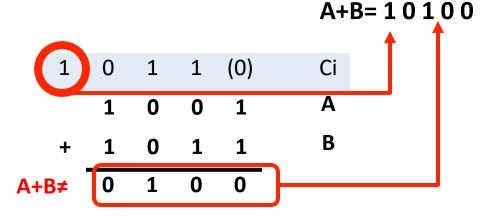
Xi	y i	c_i	<i>c</i> _{<i>i</i>+1}	s _i
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



• El problema del Desbordamiento (overflow):

- Los sistemas digitales operan normalmente sobre un número fijo de dígitos. Suele ser el mismo valor para operandos y resultado.
- Con n bits el rango representable es [0,2ⁿ--1].
- Si A+B>2ⁿ-1 el resultado no es representable, hay overflow.
- El bit de carry señala la existencia de desbordamiento.





TO SUPERIOR Decimal, Binario y Hexadecimal

- Multiplicación y división por potencias de 2:
 - Multiplicación: desplazamiento hacia la izquierda:

$$X_{u} = X_{n-1}2^{n-1} + X_{n-2}2^{n-2} + ... + X_{2}2^{2} + X_{1}2^{1} + X_{0}2^{0}$$

$$X_{u} *2 = X_{n-1}2^{n} + X_{n-2}2^{n-1} + + X_{2}2^{3} + X_{1}2^{2} + X_{0}2^{1}$$

$$X_u *2 = X_{n-1}2^n + X_{n-2}2^{n-1} + + X_2 2^3 + X_1 2^2 + X_0 2^1$$

Ejemplo: 1010*2 = 10100.

División: desplazamiento hacia la derecha:

$$X_u = X_{n-1}2^{n-1} + X_{n-2}2^{n-2} + ... + X_2 2^2 + X_1 2^1 + X_0 2^0$$

$$X_u /2 = X_{n-1} 2^{n-2} + X_{n-2} 2^{n-3} + + X_2 2^1 + X_1 2^0$$

Ejemplo: 1010/2 = 101.



Índice

- Codificación.
- Sistemas Decimal, Binario y Hexadecimal:
 - Codificación en cada sistema.
 - Cambios de base.
 - Operaciones en Binario (suma, multiplicación).
 - Desbordamiento (Overflow).

Números Enteros:

- Sistemas de representación en binario.
- Complemento a 2.
- Overflow en Ca2.

• Buscando una representación:

 Un entero { ..., -2,-1,0, 1, 2, ... } se representa internamente en el computador, como cualquier otra información, mediante un vector de n bits:

$$X = x_{n-1}x_{n-2}...x_2x_1x_0 \text{ con } x_i \in \{0,1\}$$

- Definir una representación consiste en encontrar una tabla o una expresión aritmética que, para cada posible vector de bits, nos indique el número que representa.
- No puede ser la misma para enteros que para naturales (la que conocemos), porque ésta es solo para positivos.
- Hay muchas formas de representación. Se busca una con la que sea sencillo y rápido hacer operaciones con los números.



• Una posible solución: Signo--Magnitud:

- Dado un vector X de n bits que representa al número entero X_{sm} en signo--magnitud, el bit de más a la izquierda del vector de bits codifica el signo (si x_{n-1} = 0 → positivo; si x_{n-1} = 1 → negativo).
- Los n-1 bits restantes representan en binario el valor absoluto de $X_{\rm sm}$ (su magnitud), que es un número natural.
- Inconveniente: ¡¡Dos representaciones para el cero!!

$$X_{sm} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i & \text{si } x_{n-1} = 0 \\ -\left(\sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i\right) & \text{si } x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$-(2^{n-1}-1) \le X_{sm} \le 2^{n-1}-1$$

	X		
$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_0}$	\mathbf{X}_{sm}
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	-0
1	0	1	-1
1	1	0	-2
1	1	1	-3



Suma en Signo--Magnitud:

- Algoritmo habitual:
 - Operandos con el mismo signo: la magnitud del resultado es la suma de las magnitudes de los operandos y el signo del resultado es el signo de los operandos.
 - Operandos de distinto signo: la magnitud del resultado se obtiene restando a la magnitud mayor la menor. El signo del resultado es el signo del operando de mayor magnitud.
- Este algoritmo requiere: un sumador de números naturales codificados en binario con n-1bits (operandos del mismo signo), un comparador y un restador de números naturales codificados en binario con n-1bits (números con distinto signo).
- Conclusión: la suma de números enteros en signo-magnitud es mucho más costosa en hardware y/o en tiempo de propagación que la suma de números naturales en binario.
- Los computadores actuales no usan esta representación para números enteros.



Buscando una representación más efectiva:

- Se busca una representación tal que la suma de números enteros se pueda realizar de la mism forma (con el mismo sumador) que se usa para los números naturales codificados en binario.
- La representación en signo--magnitud no sirve.

Una posible solución:

- Codificamos los números positivos como en binario (y como en signomagnitud). Así la suma de positivos será correcta con el sumador binario (siendo el resultado representable.
- Recordando cómo opera el sumador binario, el valor –1tiene que ser codificado como 111 (para n=3). Este es el único vector que al sumarle el vector 001 (que representa al 1) obtiene el vector 000 (el cero), haciendo que –1+1 sea correcto.



• Representación en Complemento a 2:

- Tomamos como valor de partida nuestro -1(111 para n=3).
- Si seguimos sumando -1, iremos encontrando el resto de valores negativos. Así, -2=-1+-1, se representa como:

– Resumiendo:

	X				
X ₂	X ₁	X ₀	X _s Cero		
0	0	0	0		
0	0	1	1 Positivos		
0	1	0	2 🗸 🥍		
0	1	1		:Dánda nanga la	
1	0	0		¿Dónde pongo la frontera entre positivos	
1	0	1	•••		
1	1	0	-2	y negativos?	
1	1	1	-1 Negativos		



Posibles representaciones:

	X,	X ₁	X ₀	Xs
,	0	0	0	0
	0	0	1	1
	0	1	0	2
	0	1	1	3
- 00	1	0	0	4
	1	0	1	-3
	1	1	0	-2
	1	1	1	-1

-	-	Xs	-	4
- 5		XC		4
_		/ 10		_

X_1	\mathbf{x}_0	X_{s}
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	-5
0	0	-4
0	1	-3
1	0	-2
1	1	-1
	0 0 1 1 0 0	0 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0

-5 ≤ Xs ≤ 2

1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

-4 ≤ Xs ≤ 3

Complemento a 2

- Rango más simétrico (sin ser completamente simétrico).
- El dígito más a la izquierda indica el signo (0→positivo, 1 → negativo).
- La detección de resultado no representable (overflow) es más sencilla que en otros casos (lo veremos a continuación).

- Ca2, generalizando para n bits (Ca2-->decimal):
 - Número positivo:

$$X_s = \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i \ para \ x_{n-1} = 0$$

 Número negativo: al dígito de más a la izquierda le damos el mismo peso que le corresponde en binario (2ⁿ⁻¹) pero con signo negativo y al resto de dígitos el peso y el signo positivo correspondiente a binario.

$$X_s = -2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i \ para \ x_{n-1} = 1$$

Positivos y negativos:

$$X_s = -x_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i$$

Rango de representación:

$$-2^{n-1} \le X_s \le 2^{n-1}-1$$



- Cambio de Signo (usar para decimal → Ca2):
 - Algoritmo para la operación aritmética de cambio de signo de un entero representado en Ca2.
 - Dados los n bits de un vector X, obtener el vector W tal que W_s=–X_s:
 - Paso 1: se complementan los bits (Ca1).
 - Paso 2: se suma 1 al resultado (no se tiene en cuenta el acarreo).
 - Ejemplos:

$$010 \rightarrow 101 \rightarrow 101+1=110$$

 $000 \rightarrow 111 \rightarrow 111+1=000$

	X		
X ₂	$\mathbf{X_1}$	\mathbf{x}_{0}	X _s
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	-4
1	0	1	-3
1	1	0	-2
1	1	1	-1
			-



Suma en Ca2, con detección de overflow:

- El objetivo de la representación en Ca2 es que la suma de dos números enteros se pueda efectuar de la misma forma (con el mismo sumador) que para los naturales representados en binario.
- La única diferencia es la detección del resultado no representable.

- En Ca2 la detección de resultado no representable se efectúa con los bits de signo de los operandos $(x_{n-1} e y_{n-1})$ y del resultado (w_{n-1}) :
 - Si $SIG(x_{n-1}) \neq SIG(y_{n-1})$: Resultado siempre representable.
 - Si $SIG(x_{n-1})=SIG(y_{n-1})$ y $SIG(w_{n-1})=SIG(y_{n-1})$: representable.
 - Si $SIG(x_{n-1}) = SIG(y_{n-1})$ y $SIG(w_{n-1}) \neq SIG(y_{n-1})$: overflow.

DETECCIÓN DE RESULTADO NO REPRESENTABLE (OVERFLOW):

Binario

C_n (carry de la última columna) dicta si el resultado es correcto o no:

> C_n=0: Correcto C_n=1: Overflow

Ca₂

x_{n-1}, y_{n-1}, w_{n-1}, dictan si el resultado es correcto o no:

$$x_{n-1} = y_{n-1} = w_{n-1}$$
: Correcto

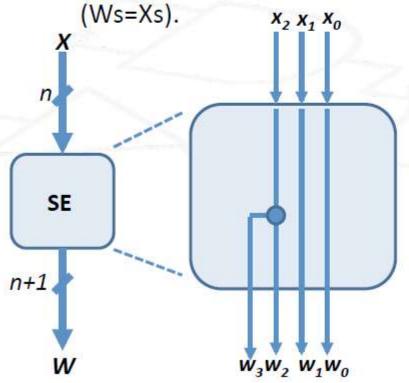
$$x_{n-1} = y_{n-1} \neq w_{n-1}$$
: Overflow

$$V_n = \overline{X_{n-1}} \cdot \overline{Y_{n-1}} \cdot W_{n-1} + X_{n-1} \cdot \overline{Y_{n-1}} \cdot \overline{W_{n-1}}$$



Extensión de Rango:

 Dado el vector X de n bits que representa en Ca2 al número entero Xs, ¿Cómo se obtiene un vector W de n+1 bits que represente a ese mismo número?



		200-04			0	0	0	0	0
e un vector W de				0	0	0	1	1	
o número? 🍴 🎢			0	0	1	0	2		
				/	0	0	1	1	3
	V	8			0	1	0	0	4
	X		v	/	0	1	0	1	5
X,	X ₁	X ₀	Χ,	. /	0	1	1	0	6
0	0	0	0	l /	0	1	1	1	7
0	0	1	1	<i>y</i>	1	0	0	0	-8
0	1	0	2		1	0	0	1	-7
0	1	1	3_		1	0	1	0	-6
1	0	0	-4		1	0	1	1	-5
1	0	1	-3	. 1	-	1	0	0	-3
1 1	1	0	-2		1	7. VIII.	0.00	1.5.00	-4
1	1	1	-1	\ \	1	1	0	1	-3
-		- 3	-		1	1	1	0	-2
					1	1	1	1	-1
					-175			90	620

W

• Ejercicios:

Expresar en Ca2 los siguientes valores (en decimal):
 -5, 176, -176, 204, -204.

Resultado en Ca2

de: Xs= 176+176.

Xs = -176 - 204.

Xs= 176--204.

¿Hay desbordamiento? ¿Por qué?