Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Décembre 2013
Durée:1h30
Partiel
2013-2014

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth–Baalbek-Tripoli
Nahr Ibrahim-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice

Examen de Partiel
Base de l'analyse Mathématique - MVA010

1. ($25pts$) Soit la fonction réelle

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\cos x)} + \frac{2}{\sin^2 x}$$

(a) (5pts) Vérifier que lorsque $x \to 0$, $f(x)$ prend le forme indéterminée $+\infty - \infty$
Solution: $x \longrightarrow 0$ donc $\cos x \longrightarrow 1^-$ et $\ln(\cos x) \longrightarrow 0^-$ ainsi $\dfrac{1}{\ln(\cos x)} \longrightarrow -\infty$.
D'autre part, $\sin^2 x \longrightarrow 0^+$ et parsuite $f(x)$ prend la forme indéterminée $-\infty + \infty$

(b) (10pts) Donner le développement limité de $\sin^2 x + 2\ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 4
Solution: $\sin^2 x + 2\ln(\cos x) = [(x - \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon)^2 + 2\ln(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon)] = (x^2 - \dfrac{x^4}{3} + x^4\varepsilon) + 2[(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}) - \frac{1}{2}(\dfrac{x^4}{4}) + x^4\varepsilon] = \dfrac{-1}{2}x^4 + x^4\varepsilon$

(c) (10pts) Déduire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 0 en $x_0 = 0$ et donner la limite de $f(x)$ en 0
Solution: $f(x) = \dfrac{\sin^2 x + 2\ln(\cos x)}{\sin^2 x \ln(\cos x)} = \dfrac{\dfrac{-1}{2}x^4 + x^4\varepsilon}{(x^2 - \dfrac{x^4}{3} + x^4\varepsilon)(-\dfrac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon)} = \dfrac{\dfrac{-1}{2}x^4 + x^4\varepsilon}{-\dfrac{x^4}{2} + x^4\varepsilon} =$
$1 + \varepsilon$ et parsuite $\lim f(x) = 1$.

---

2. ($20pts$) Utiliser le développement limité en l'infini pour trouver l'équation de l'asymptote de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x$ ainsi que sa poistion par rapport à la courbe de f

Solution: 14pts: $f(x) = \sqrt[3]{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})} - x = x(1+t)^{\frac{1}{3}} - x$ où $t = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow \infty$.Ainsi $f(x) = x[1 + \frac{1}{3}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}) + \frac{1}{3}.\frac{-2}{3}\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})^2 + \frac{1}{x^2}\varepsilon] - x = x[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{9}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon] - x = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon$.
2pts+2pts+2pts: On en déduit que l'équation de l'asymptote est $y = \frac{1}{3}$ et lorsque $x \longrightarrow +\infty$ on $f(x) - y \simeq -\frac{1}{9}\frac{1}{x} < 0$ et donc la courbe est au dessous de l'asymptote alors qu'au voisinage de $-\infty$ la courbe est au dessus de l'asymptote

---

3. (25pts) Soit la fonction

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|x+1|}-1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie les conditions du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[-1,1]$ et donner la relation que doit vérifier le réel c tel que

$$f^{'}(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$$

Solution: 2pts: Pour $x\neq 0$, l'application $x\mapsto |x+1|$ est continue et positive donc $x\mapsto \sqrt{|x+1|}$ est continue et parsuite $f(x)$ est continue.

6pts: Pour $x=0$: Si $x\longrightarrow 0$ alors $|x+1|=x+1$ et $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1+\frac{1}{2}x+x\varepsilon-1}{x}=\frac{1}{2}+\varepsilon$ et $\lim f(x)=\frac{1}{2}=f(0)$ et donc f est continue en 0 et parsuite elle est continue sur $\mathbb{R}$.

10pts: D'autre part, si $x>-1$ donc $x+1>0$ alors

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si} \quad x\in]-1,1[-\{0\}\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0\end{cases}.$$

La dérivabilité de $f(x)$ se pose en 0 dans $]-1,1[$. On a $f(x)=\frac{1}{x}[\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\varepsilon]=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x+x\varepsilon$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{8}x+x\varepsilon}{x}=-\frac{1}{8}$.

7pts: On en déduit que f vérifie les conditions du théorème des accroissements finis sur $[-1,1]$ Ainsi, il existe $c\in]-1,1[$ tel que $f^{'}(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{2}=\frac{1}{2}[\sqrt{2}-2]$. Ainsi $c\neq 0$ et : $-\frac{1}{c^2\sqrt{c+1}}\left(c-2\sqrt{c+1}+2\right)=[\sqrt{2}-2]$

---

4. (30pts) On donne les deux suites numériques:

$$u_0=1,\ w_0=12,\ u_{n+1}=\frac{u_n+2w_n}{3}\quad \forall n\geq 0 \text{ et } w_{n+1}=\frac{u_n+3w_n}{4}\quad \forall n\geq 0$$

(a) Soit $a_n=w_n-u_n$ et $b_n=3u_n+8w_n$. Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites suites géométriques dont on demande de déterminer la raison et le premier terme

Solution: 5pts: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{u_n+3w_n}{4}-\dfrac{u_n+2w_n}{3}}{w_n-u_n}=\dfrac{-u_n+w_n}{12(w_n-u_n)}=\frac{1}{12}$ et donc (a_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{12}$ et de premier terme $a_0=11$

5pts: $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{(u_n+2w_n)+2(u_n+3w_n)}{3u_n+8w_n}=1$ et donc (b_n) est une suite constante, c'est à dire une suite géométrique de raison 1 et de premier terme $b_0=99$

(b) Exprimer (a_n) et (b_n) en fonction de n et vérifier qu'elles sont convergenes et donner leurs limites

Solution: 2+2+1+1=6pts: On a $a_n=a_0q^n=\dfrac{11}{12^n}$ et $b_n=b_0=99$. On a $\lim a_n=0$ et $\lim b_n=99$

(c) Déduire que (u_n) et (w_n) sont deux suites convergentes

Solution: 3pts+3pts: On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3u_n + 3w_n & = & 3a_n \\ 3u_n + 8w_n & = & b_n \end{array}\right.$$

donc $11w_n = 3a_n + b_n$ et $w_n = \frac{1}{11}(3a_n + b_n)$ et donc (w_n) converge. D'un autre coté $u_n = w_n - a_n$ est aussi une suite convergente

(d) Vérifier que les deux suites (u_n) et (w_n) sont adjacentes et trouver leur limite commune

Solution: 2pts: On a $a_n = w_n - u_n = \dfrac{11}{12^n} > 0$ et donc $w_n > u_n \quad \forall n$

2+2=4pts: D'autre part, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(2\omega_n - 2u_n) > 0$ et donc (u_n) est croissante. De même $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{4}(u_n - w_n) < 0$ et donc (w_n) est décroissante.

2pts: Finalement, d'après c) on a

$$\lim w_n = \lim \frac{1}{11}(3a_n + b_n) = \frac{99}{11} = 9 \text{ et } \lim u_n = \lim(w_n - a_n) = \lim w_n = 9$$
