Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Partiel 2010-2011 Semestre I

Solutions

total 100

Partie A: Traiter au choix <u>un</u> exercice (25 points)

Exercice A 1 ***Pour tout*** $n \in N$ ***, on considère les intégrales***

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad et \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$$

1. **Calculer** I_1 **et** J_1

   Réponse. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{2}-1$

   On pose $t = 1+x^2 \Longrightarrow dt = 2xdx \Longrightarrow \begin{cases} x=0 & \to & t=1 \\ x=1 & \to & t=2 \end{cases}$

   $$I_1 = \int_1^2 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_1^2 = \sqrt{2}-1 \qquad \boxed{3 \text{ points}}$$

   $$J_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{3}{2}\sqrt{2}-2$$

   on écrit $x^3 = x^2x$, Soit $t = 1+x^2 \Longrightarrow x^2 = t-1$

   $dt = 2xdx \to \begin{cases} x=0 & \to & t=1 \\ x=1 & \to & t=2 \end{cases}$

   $$J_1 = \int_1^2 \frac{t-1}{2t\sqrt{t}}dt = \frac{3}{2}\sqrt{2}-2$$

   $$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t\sqrt{t}}\right)dt = \left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}-2 \quad \boxed{5 \text{ points}} \quad \blacksquare$$

2. **Montrer que** $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ **et** $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+3}$

Réponse. $\forall x \in [0,1]$ on a $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$

$$\Longrightarrow 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n \Longrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\Longrightarrow 0 \leq I_n \leq \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 \Longrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

De même pour J

$$\forall x \in [0,1] \text{ on a } 0 \leq \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq x^{n+2}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^1 x^{n+2}dx = \left.\frac{x^{n+3}}{n+3}\right|_0^1 = \frac{1}{n+3} \quad \boxed{3 \text{ points}} \quad \blacksquare$$

3. **Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'on a pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **:**

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{(n+1)} J_n$$

Réponse. $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x x^{n+1}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\begin{cases} u = x^{n+1} & \Longrightarrow & du = (n+1)\, x^n dx \\ dv = \dfrac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx & \Longrightarrow & v = \displaystyle\int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

$$J_n = -\left.\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right|_0^1 + (n+1)\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + (n+1)\, I_n$$

$$\Longrightarrow I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{(n+1)} J_n \quad \boxed{3 \text{ points}} \quad \blacksquare$$

4. **Calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n)$

Réponse. $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}} + \dfrac{n}{(n+1)} J_n \right)$

on a : $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{n+3} \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{n}{(n+1)} J_n \leq \dfrac{n}{(n+1)(n+3)}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+3)} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (nI_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \boxed{5 \text{ points}} \quad \blacksquare$$

Exercice A 2 *Soit F la fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

1. Exprimer $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$ au moyenne de de la fonction F.

   Réponse. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1 dx}{1+x^2} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - F(x) + C$ $\boxed{\text{3 points}}$ ■

2. Exprimer $\displaystyle\int xF(x)\,dx$ au moyenne de de la fonction F.

   Réponse. Intégration par partie

   $u = F(x) \Longrightarrow du = F'(x)\,dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$

   $dv = xdx \Longrightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

   $$\int xF(x)\,dx = \frac{x^2}{2}F - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$$
   $$= \frac{x^2}{2}F - \frac{1}{2}(x - F(x) + C) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2+1)F + K \ \boxed{\text{5 points}}$$ ■

3. Calculer la dérivée de $\dfrac{x}{1+x^2}$, et en déduire une expression de $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ au moyenne de la fonction F.

   Plus généralement, trouver une relation liant $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ avec I_{n+1} où $n \in \mathbb{N}$

   Réponse. $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = -\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = -\frac{x^2-2+1}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $$\Longrightarrow \frac{x}{1+x^2} = \int \frac{2dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{dx}{1+x^2}$$
   $$\Longrightarrow \int \frac{2dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + F(x) + C_1$$
   $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + F(x) + C_1\right) \ \boxed{\text{3 points}}$$

   Plus généralement :

   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}\right) = \frac{(1+x^2)^n - 2nx^2(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{(1+x^2) - 2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$
   $$= \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{2n(x^2+1-1)}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1-2n}{(1+x^2)^n} + \frac{2n}{(1+x^2)^{n+1}} \qquad \boxed{\text{6 points}}$$

   Alors on a :

$$\frac{x}{(1+x^2)^n} = \int \left(\frac{1-2n}{(1+x^2)^n} + \frac{2n}{(1+x^2)^{n+1}} \right) dx$$

$$= (1-2n) \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = (1-2n)\, I_n + 2nI_{n+1} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

■

Partie B: Traiter au choix <u>un</u> exercice (20 points)

Exercice B 1 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x+1|}-1}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f

   Réponse. $D_f = \mathbb{R}^*$ $\boxed{\text{3 points}}$ ■

2. Peut-on prolonger f par continuité en 0? Si oui, soit g son prolongement en 0.

   Réponse. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x+1|}-1}{x} = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{7 points}}$

   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x+1|}-1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad x = 0 \end{cases} \quad \boxed{\text{5 points}}$$ ■

3. Montrer que g est dérivable en 0.

   Réponse. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{x+2-2\sqrt{|x+1|}}{2x^2} \right) = -\frac{1}{8}$ $\boxed{\text{5 points}}$ ■

Exercice B 2 *Considérons les fonctions f et g définies par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & si \quad x \in \left]-\infty, 1\right[\\ \dfrac{1}{x} & si \quad \mathbf{x} \in \left[1, +\infty\right[\end{cases} \quad et \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x)$ satisfait aux hypothèses des $A.F.$ sur $[0,2]$ et déterminer la valeur de c telle que : $f(2) - f(0) = 2f'(c)$

   Réponse. $f(x)$ est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[\implies \exists c \in]0,2[\,/\, f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ $\boxed{\textbf{4 points}}$

   $$f'(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \in \left]-\infty, 1\right[\\ -\dfrac{1}{x^2} & si \quad x \in \left]1, +\infty\right[\end{cases} \quad \boxed{\textbf{2 points}}$$

$\boxed{f(0) = \frac{3}{2}}$ et $f(2) = \frac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

$f'(c) = \dfrac{1/2 - 3/2}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$-x = -\dfrac{1}{2} \longrightarrow c = \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{1 points}}$

$\dfrac{-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}, \longrightarrow c = \sqrt{2}$ $\boxed{\textbf{1 points}}$

■

2. La fonction $g(x)$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Etudier la continuité de la fonction $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   Réponse. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cos\dfrac{1}{x}\right) = 0 = g(0) \Longrightarrow g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

   $g'(x) = 2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right) = 0$ alors $g(x)$ est dérivable en $x = 0$ et par suite sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$ mais $\sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas une limite si $x \to 0$ alors $g'(x)$ n'a pas une limite si $x \to 0$ donc n'est pas continue en $x = 0.$ $\boxed{\text{5 points}}$ ■

Partie C: Exercices obligatoires

Exercice C 1 (20 points) *Calculer les inégrales suivantes:*

1. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ $\boxed{\text{10 points}}$

   Réponse. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 1}}$

   $u = x + 1 \Longrightarrow du = dx$

   $I = \displaystyle\int \frac{du}{u + \sqrt{1 + u^2}}$

   $u = \sinh t \Longrightarrow du = \cosh t dt$ et $\sqrt{u^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \cosh t$

   $I = \displaystyle\int \frac{\cosh t dt}{\sinh t + \cosh t} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t}$

   $\dfrac{\cosh t}{\sinh t + \cosh t} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{(e^t - e^{-t}) + e^t + e^{-t}} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2e^t} = \dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{1}{2}$ ■

2. $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ $\boxed{\text{10 points}}$

Réponse. $u = \sqrt{\cos x} \Longrightarrow du = -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$

$x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow u = \sqrt{\cos(\pi/4)} = \frac{1}{\sqrt[2]{2}} \qquad x = 0 \rightarrow u = 1$

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x \sin x}{\sqrt{\cos x}}dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx = -2\int_1^{1/\sqrt[4]{2}} (1-u^4)\,du = \frac{16-9\sqrt[4]{8}}{10} \quad \blacksquare$$

Exercice C 2 (10 points) *Montrer que l'aire comprise entre le graphe de la fonction* $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$*, l'axe des* x*, et les deux droites* $x = 1$ *et* $x = C (C > 1)$ *n'a pas de limite quand* $C \to \infty$*. Mais que le volume de révolution obtenu par rotation complète de cette aire autour de l'axe des* x *a une limite.*

Réponse. $A = \int_1^C \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\left(\sqrt[3]{C}-1\right) \underset{C\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ $\boxed{\textit{5 points}}$

Si, maintenant, on effectue une rotation complète de la figure autour de l'axe Ox*, le plan d'équation* $x = t$ *coupe le solide obtenu suivant un cercle de rayon* $f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$*.donc d'aire* $\pi t^{-4/3}$

Le volume est $V = \int_1^C \pi t^{-4/3}dt = \frac{3\pi}{\sqrt[3]{C}}\left(\sqrt[3]{C}-1\right) \rightarrow 3\pi$ *si* $C \to \infty$ $\boxed{\textit{5 points}}$ $\blacksquare$

Exercice C 3 (25 points) *On rappelle que, pour tout nombre réel* x : $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *et* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$*. Soit* $f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.

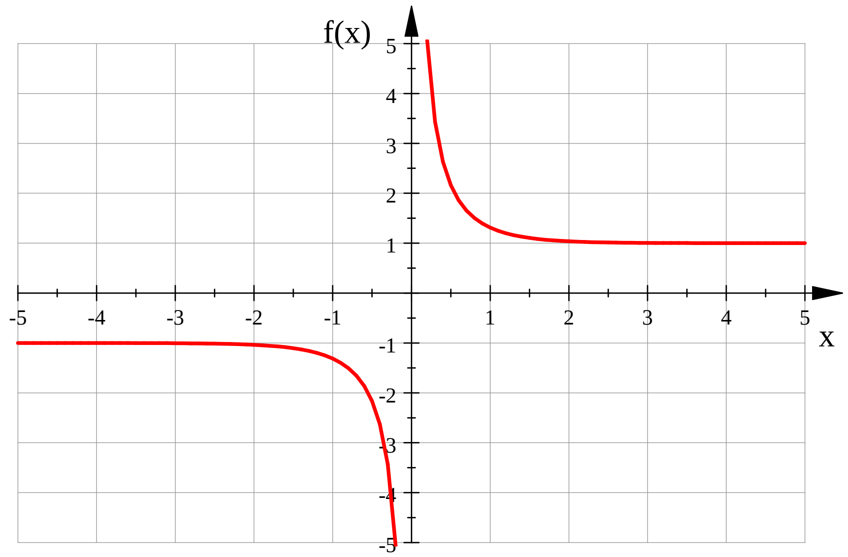
1. Etudier les variations de $f(x)$ et tracer son graphe (C) dans un repère orthonormé.

   Réponse. $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

   $\lim_{x\to 0^+} \coth x = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \coth x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \coth x = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \coth x = -1$

   $\boxed{\textbf{4 points}} = \boxed{1\times 4}$

   Graphe: $\boxed{\textbf{4 points}}$



■

2. Ecrire l'équation de la tangente et celle de la normale à (C) au point d'abscisse $\ln 2$.

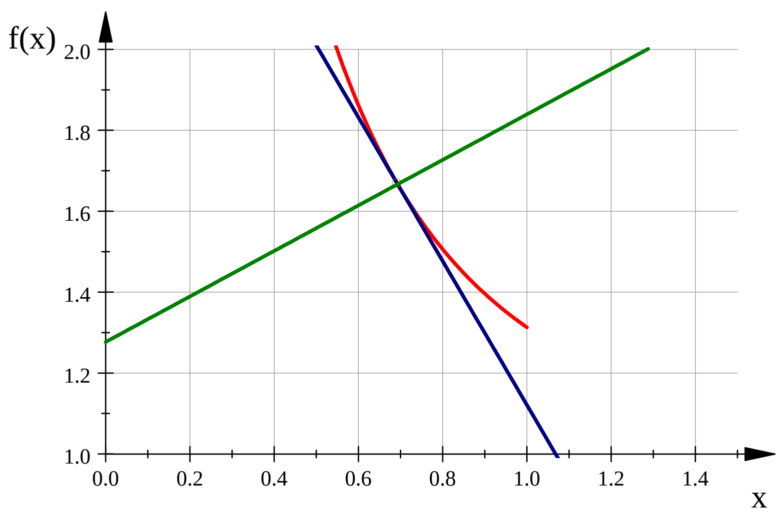
Réponse. $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\tanh x}\right) = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} = -\dfrac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$

$$f'(\ln 2) = -\frac{4}{(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})^2} = -\frac{4}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{16}{9}$$

$$f(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}} = \frac{2 + 1/2}{2 - 1/2} = \frac{5}{3}$$

Eqt. tan.: $y - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{16}{9}(x - \ln 2) \Longrightarrow y = -\dfrac{16}{9}x + \dfrac{5}{3} + \dfrac{16\ln 2}{9}$ $\boxed{\text{5 points}}$

Eqt Normale: $y - \dfrac{5}{3} = \dfrac{9}{16}(x - \ln 2) \Longrightarrow y = \dfrac{9}{16}x + \dfrac{5}{3} - \dfrac{9\ln 2}{16}$ $\boxed{\text{5 points}}$



$\blacksquare$

3. Soit (γ) l'arc de (C) défini par $y = \coth x$ avec $\ln 2 \leq x \leq \ln 3$ et soit L la longueur de (γ). Calculer $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sinh^2 x}$. $\boxed{\text{En déduire que } L \geq \frac{5}{12}.}$

Réponse. $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{1 + \frac{1}{(\sinh x)^4}}dx$ $\boxed{1 \text{ points}}$

$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x|_{\ln 2}^{\ln 3} = (f(\ln 2) - f(\ln 3)) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}} - \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}} = \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$\sqrt{1 + \frac{1}{(\sinh x)^4}} = \frac{\sqrt{1 + \sinh^4 x}}{\sinh^2 x} \geq \frac{1}{\sinh^2 x} \Longrightarrow L \geq \frac{5}{12}$ $\boxed{2 \text{ point}}$ $\blacksquare$