Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen Final 2011-2012 Semestre I

Solutions

Exercice 1 (15 points) ***On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :***

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

1. **Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ où A, B, C sont des réels à déterminer.**
2. **Calculer, alors:** $I = \int f(x)\,dx$.
3. **En utilisant un chagement convenable de varaible Déduire** $J = \int \tan^3 t dt$.

Solution 1 $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

1. on démontre que $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   Soit par division eucludienne

   Soit par décomposition en éléments simples:

   $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} \Longrightarrow A = 1, B = -1$ et $C = 0$

   ou bien $\dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x^3+x-x}{1+x^2} = \dfrac{x\left(x^2+1\right)-x}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$

2. $I = \displaystyle\int f(x)\,dx = \int xdx - \int \frac{xdx}{1+x^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $= \displaystyle\int xdx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C_1$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $u = \tan t \Longrightarrow du = \left(1+\tan^2 t\right) dt$

   $\Longrightarrow dt = \dfrac{du}{1+u^2}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $J = \displaystyle\int \tan^3 tdt = \int \frac{u^3}{1+u^2}du$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \dfrac{1}{2}u^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) + C_2$

   $= \dfrac{1}{2}\left(\tan^2 t - \ln\left(1+\tan^2 t\right)\right) + C_2$

   $= \dfrac{1}{2}\tan^2 t + \ln(\cos t) + C_2$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 2 (20 points) ***On considère l'équation différentielle suivante :***

$$(1-x)\,y'+y=\frac{x-1}{x} \tag{E}$$

1. **Résoudre l'équation sans second membre associée, en précisant où elle existe.**
2. **En utilisant la méthode de variation de constante, déterminer une solution particulière de (E).En déduire la solution générale de (E).**
3. **Calculer la solution $y\,(x)$ de (E) telle que $y\,(2)=1$.**

Solution 2 *:*

1. Pour $x\neq 1$ et $y\neq 0$, on a : $(1-x)\,y'+y=0$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\Longrightarrow (1-x)\,\dfrac{dy}{dx}=-y$

   $\Longrightarrow \dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x-1}\Longrightarrow \ln|y|=\ln|x-1|+C=\ln k\,|x-1|$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $$y_g=k\,(x-1)$$

   où $k=k_1$ si $x<1$ et $k=k_2$ si $x>1$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $y_p=k\,(x-1)$ avec $k=k\,(x)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $y_p'=k'\,(x-1)+k$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $(1-x)\,y_p'+y_p=\dfrac{x-1}{x}$

   $\Longrightarrow (1-x)\,(k'\,(x-1)+k)+k\,(x-1)=\dfrac{x-1}{x}$

   On trouve : $k'=\dfrac{1}{x\,(1-x)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\Longrightarrow k=\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $y_p=(x-1)\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $$y\,(x)=(x-1)\left(k+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)\ \boxed{\text{1 point}}$$

3. $y\,(2)=(2-1)\,(k+\ln 2)=1\Longrightarrow k=1-\ln 2$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $$\begin{aligned} y\,(x)&=(x-1)\left(1-\ln 2+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)\\ &=(x-1)\left(1+\ln\left|\frac{x}{2\,(x-1)}\right|\right)\ \boxed{\text{2 points}}\end{aligned}$$

Exercice 3 (20 points) ***On considère les fonctions suivantes :***

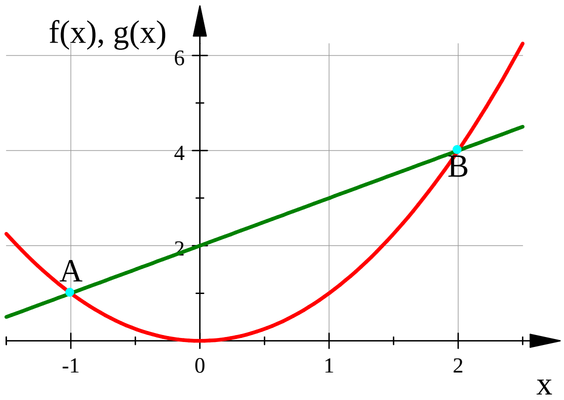
$$f\,(x)=x^2 \quad et \quad g\,(x)=x+2$$

et on désigne par A et B les points d'intersection des ses courbes.

1. **Tracer les courbes des ces fonctions dans le même repère orthonormé et déterminer les coordonnées des points** A **et** B.
2. **Calculer l'aire de la région limitée par les deux courbes.**
3. **Calculer le volume du solide de révolution produit par la rotation de la région limitée par les deux courbes autour de l'axe** $x'Ox$.
4. **Calculer les longueurs du segment** $[AB]$ **et de la branche parabolique** $\widetilde{AB}$.

Solution 3 *:*

1. Graphes: $\boxed{\text{4 points}}$



Les points d'intersection sont tels que $x^2 = x + 2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \longrightarrow y = 4 : B(2,4) \\ x = -1 \rightarrow y = 1 : A(-1,1) \end{cases} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

2. $S = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\, dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx = \dfrac{9}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $V_x = \pi \int\limits_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right) dx = \int\limits_{-1}^{2} \left((x+2)^2 - x^2\right) dx = 18$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Le segment $[AB]$ est un segment de $g(x) = x + 2; g' = 1$

   $\Longrightarrow d\ell = \sqrt{1+1}dx = \sqrt{2}dx$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\ell_{[AB]} = \sqrt{2} \int\limits_{-1}^{2} dx = 3\sqrt{2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\widetilde{AB}$ est une branche du parabole $y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x$

   $d\ell_{\widetilde{AB}} = \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\ell_{\widetilde{AB}} = \int\limits_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}dx$

- <u>1ère méthode</u>:

On pose $x = \dfrac{\sinh\theta}{2} \Longrightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{1}{2}\cosh\theta d\theta \\ \sqrt{1+4x^2} = \cosh\theta \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \cosh^2\theta d\theta = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1+\cosh 2\theta}{2} d\theta$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$= \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sinh 2\theta\right) = \frac{1}{4}(\theta + \sinh\theta\cosh\theta) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

on a $2x = \sinh\theta = \dfrac{e^\theta - e^\theta}{2} \Longrightarrow 4x = e^\theta - e^\theta \Longleftrightarrow e^{2\theta} - 4xe^\theta - 1 = 0$

$\Longrightarrow \theta = \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\cosh\theta = \sqrt{1+\sinh^2\theta} = \sqrt{1+4x^2}$

donc: $\displaystyle\int \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

d'où: $\ell_{\widetilde{AB}} = \displaystyle\int_{-1}^{2} \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}-2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \sqrt{17} = 6.1257$

$\boxed{\text{1 point}}$

- <u>2ème méthode</u>

On pose $x = \dfrac{1}{2}\tan t \Longrightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2 t\right)dt = \dfrac{dt}{2\cos^2 t} \\ \sqrt{1+4x^2} = \sqrt{1+\tan^2 t} = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\displaystyle\int \sqrt{1+4x^2}dx = \int \frac{\cos t dt}{2\cos^4 t}$

On pose $u = \sin t \Longrightarrow du = \cos t dt$ et

$\cos^4 t = \left(1-\sin^2 t\right)^2 = \left(1-u^2\right)^2 = (1+u)^2(1-u)^2$

avec $u = \sin t = \dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 & \to & u = -2/\sqrt{5} \\ x = 2 & \to & u = 4/\sqrt{17} \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\frac{1}{2(1+u)^2(1-u)^2} = \frac{1}{8(u+1)} - \frac{1}{8(u-1)} + \frac{1}{8(u-1)^2} + \frac{1}{8(u+1)^2}$$

$\displaystyle\int \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2/\sqrt{5}}^{4/\sqrt{17}} \frac{du}{(1+u)^2(1-u)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-2/\sqrt{5}}^{4/\sqrt{17}} \left(\frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2} + \frac{1}{4(u+1)^2}\right) du = 6.1257$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2} + \frac{1}{4(u+1)^2}\right) du$

$= \dfrac{1}{8}\left(\ln|1+u| + \ln|1-u| + \dfrac{1}{1-u} + \dfrac{1}{1+u}\right)$

Exercice 4 (20 points) ***On considère l'équation différentielle:***

$$y'' - y' - 6y = xe^{2x} \tag{D}$$

1. **Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à** (D).
2. **Trouver une solution particulière de** (D).
3. **Déterminer la solution générale de l'équation complète** (D).
4. **Trouver la solution particulière de** (D) **vérifiant les conditions :** $y(0) = \dfrac{3}{16}$ **et** $y'(0) = 0$.

Solution 4 $y'' - y' - 6y = xe^{2x}$

1. $y'' - y' - 6y = 0 \longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\Longrightarrow \lambda = 3, -2$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $y_g = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. on propose la solution $y_p = (ax+b)\,e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\Longrightarrow y_p' = ae^{2x} + 2(ax+b)\,e^{2x} = (2ax+a+2b)\,e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $y_p'' = 2ae^{2x} + 2(2ax+a+2b)\,e^{2x} = (4ax+4a+4b)\,e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $y'' - y' - 6y = xe^{2x} \Longrightarrow (4ax+4a+4b) - (2ax+a+2b) - 6(ax+b) = x$

   $\Longleftrightarrow -4ax + 3a - 4b = x$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\Longrightarrow \begin{cases} -4a = 1 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left[a = -\dfrac{1}{4}, b = -\dfrac{3}{16}\right]$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $$y_p = -\left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16}\right) e^{2x} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

3. Solution générale de (D)

   $$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16}\right) e^{2x} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

4. $y(0) = C_1 + C_2 - \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{16} \Longrightarrow C_1 + C_2 = \dfrac{3}{8}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $y'(x) = 3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x} - 2\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{16}\right) e^{2x} - \dfrac{1}{4} e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $y'(0) = 3C_1 - 2C_2 - \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\Longrightarrow 3C_1 - 2C_2 = \dfrac{5}{8}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\Longrightarrow C_1 = \dfrac{11}{40}$ et $C_2 = -\dfrac{1}{10}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $$y(x) = \frac{11}{40} e^{3x} - \frac{1}{10} e^{-2x} - \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{16}\right) e^{2x}$$

Exercice 5 (10 points) ***Etudier la nature et calculer la somme si c'est possible des séries suivantes:***

$$\mathbf{S}_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} \qquad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{2}^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \qquad \mathbf{S}_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n}$$

Solution 5 *:*

1. $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

   $u_n = \frac{1}{n(n+2)} \approx \frac{1}{n^2} \Longrightarrow S_1$ convergente $\boxed{\text{1 point}}$

   $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$

   $S_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2}\right)$

   $= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N+2}\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $S_1 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2. $v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi \frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Si $n \to +\infty$: $2^n \to \infty \Longrightarrow \frac{\pi}{2^n} \to 0 \Longrightarrow \frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \longrightarrow 1 \Longrightarrow v_n \to \pi \neq 0$ donc S_3 diverge $\boxed{\text{1 point}}$

3. soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

   donc $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(x-1)^2} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(x-1)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Pour $x = \frac{1}{5}$ on a $S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} = \frac{2(1/5)^2}{(1-1/5)^3} = \frac{5}{32}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 6 (10 points) ***On considère les deux suites numériques:*** $(u_n)_{n\geq 0}$ ***et*** $(v_n)_{n\geq 0}$ ***définies par:***

$$\begin{cases} u_0 \leq v_0 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1} + v_{n-1}}{3} \\ v_n = \dfrac{2v_{n-1} + u_{n-1}}{3} \end{cases}$$

et soit $\omega_n = u_n - v_n; n \geq 0$

1. **Montrer que ω_n est une suite géométrique, en donnant la raison et le premier terme.**

2. **Exprimer ω_n en fonction de n et en déduire que** $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$.

3. **Montrer que u_n et v_n sont deux suites adjacentes**

4. **calculer leur limites commune en fonction de u_0 et v_0.**

Solution 6 *:*

1. $\omega_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{2v_n + u_n}{3} = \dfrac{1}{3}(u_n - v_n) = \dfrac{\omega_n}{3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   premier terme est $\omega_0 = u_0 - v_0$ et la raison est $q = \dfrac{1}{3}$

2. $\omega_n = \omega_0 \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{u_0 - v_0}{3^n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_0 - v_0}{3^n} = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $v_n - u_n = -3\omega_n = -3\dfrac{u_0 - v_0}{3^n} = \dfrac{v_0 - u_0}{3^{n-1}} \geq 0$

   v_n décroissante minorée par u_0 et u_n croissante majorée par v_0 $\boxed{\text{2 points}}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (u_n)$

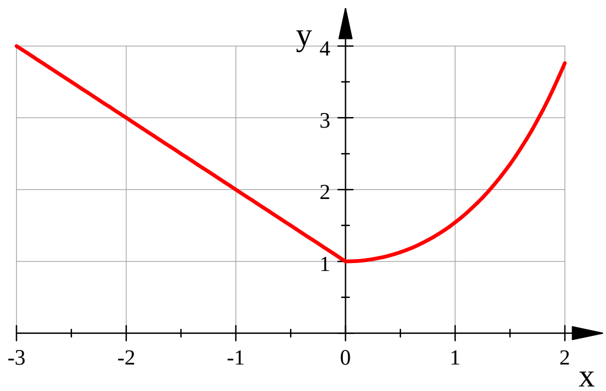
4. $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3+1}{2}u_n + \dfrac{3-1}{2}v_n\right)$

   $= \dfrac{5u_{n-1} + 4v_{n-1}}{3^2} = \dfrac{1}{3^2}\left(\dfrac{3^2+1}{2}u_{n-1} + \dfrac{3^2-1}{2}v_{n-1}\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\vdots$

   $= \dfrac{1}{3^{n+1}}\left(\dfrac{3^{n+1}+1}{2}u_0 + \dfrac{3^{n+1}-1}{2}v_0\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \dfrac{u_0 + v_0}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 7 (5 points) ***On considère la figure suivante qui représente une fonction*** $f(x)$



1. **D'après le graphe ci-dessus et sans faire de calculs, la fonction f est-elle dérivable en 0? Justifier.**

2. **Trouver** $f'(0^+)$ **et** $f'(0^-)$.

Solution 7 $f(x) = \begin{cases} \cosh x & si \quad x > 0 \\ -x+1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ $\boxed{\textit{2 points}}$

1. Au point 0 la courbe admet deux tangentes donc $f(x)$ n'est pas dérivable en ce point. $\boxed{\text{1 point}}$

2. $f'(x) = \begin{cases} \sinh x & si \quad x > 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ donc $f'(0^-) = -1$ et $f'(0^+) = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$