1. Déterminer le rayon, et le domaine de convergence des séries entières suivantes:

$$a)\ \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n4^n},\qquad b)\sum_{n\geq 1}\frac{(x-1)^{2n}}{n4^n},\qquad c)\ \sum_{n\geq 0}\frac{nx^n}{(n+1)2^n}$$

$$d)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(x-2)^n}{(2n-1).2^n},\qquad e)\ \sum_{n\geq 0}n!x^n,\qquad f)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^n}{n}$$

$$g)\ \sum_{n\geq 0}\frac{nx^n}{n+2},\qquad h)\sum_{n\geq 0}\frac{\sqrt{n}.x^n}{3^n}.$$

---

2. Donner le domaine de convergence puis la somme des séries suivantes:

$$a)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^n}{n!},\qquad b)\ \sum_{n\geq 0}(x+5)^n,\qquad c)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$$

$$d)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n},\qquad e)\ \sum_{n\geq 1}nx^n,\qquad f)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$$

---

3. Développer en série entières de $(x-c)$ les fonctions suivantes:

$$a)\ f(x) = \frac{1}{2+x},\quad c=0,\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}},\quad c=0$$

$$c)\ f(x) = \cos^2 x,\quad c=0,\qquad d)\ f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{t},\quad c=0 \text{ et } x>0$$

$$e)\ f(x) = \cos(x+\frac{\pi}{3}),\quad c=\frac{\pi}{3},\qquad f)\ f(x)=sh(x-2),\quad c=2$$

---

4. On considère pour l'entier $n\geq 2$ la série de terme général

$$u_n(x)=\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$$

(a) Etudier les séries dérivées $\sum u_n'(x)$ et $\sum u_n''(x)$

(b) Déduire la somme de la série $\sum u_n(x)$

(c) Déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{2^n n(n-1)}$$

---

5. Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes:

$$a)\sum_{n\geq 0}(-1)^n(2n+1)x^{2n},\qquad b)\sum_{n\geq 1}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$$

---

6. Donner le rayon de convergence des séries suivantes:

   (a) $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots$

   (b) $1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \cdots$

   (c) $1 + x + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + x^5 + \cdots$

---

7. Trouver une solution en série entière de $(x - c)$ des équations suivantes:

   (a) $y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0, \quad (c = 0)$

   (b) $(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0, \qquad y(2) = 4$ et $y'(2) = 6, \qquad (c = 2)$

   (c) $y'' + xy' + y = 0, \qquad (c = 0)$

   (d) $2x^2y'' - xy' + (x - 5)y = 0, \qquad (c = 0)$

   (e) $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = 0, \qquad (c = 0)$
