الدورة الإستثنائية للعام 2011	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	عدد المسائل: ست

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Écrire le numéro de chaque question et donner en justifiant la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Si f est la fonction donnée par $f(x) = \ln x$, alors le domaine de définition de $f \circ f$ est :	$]1;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$]0;1[\cup]1;+\infty[$
2	L'image par l'inversion $I(O;1)$ du cercle (C) de centre O et de rayon 1 est :	(C)	une droite	un cercle passant par O
3	La dérivée d'ordre n de la fonction donnée par $f(x)=\ln(x+1)$ est:	$\dfrac{(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^n}$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$	$\dfrac{(-1)^{n}(n-1)!}{(x+1)^n}$
4	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx =$	$\arctan\dfrac{x+2}{2}+k$	$\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x+2}{2}+k$	$\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{x+2}{2}+k$
5	La fonction F définie sur IR par $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$ est :	croissante sur IR	décroissante sur IR	non monotone sur IR
6	ABC est un triangle tel que : AB = 5, BC= 4 et AC = $\sqrt{21}$. La médiane AI est égale à :	2	$\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$	$\sqrt{19}$

II- (2 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne les points A(1 ; –1 ; 1), B(2 ; 0 ; 3), C(–1 ; 1 ; 1) et G(4 ; 2 ; 4) .
On désigne par (P) le plan déterminé par A, B et C.

1) a- Calculer l'aire du triangle ABC.
   b- Calculer le volume du tétraèdre GABC et déduire la distance de G au plan (P).

2) Prouver que x + y – z + 1 = 0 est une équation du plan (P).

3) a- Montrer que le point F(2 ; 0 ; 6) est symétrique de G par rapport au plan (P).
   b- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (d) symétrique de la droite (AF) par rapport au plan (P).
   c- Démontrer que la droite (AB) est une bissectrice de l'angle $\widehat{FAG}$.

III- (3 points)

A- Une urne U contient : cinq boules rouges portant chacune le nombre 2 et
trois boules blanches portant chacune le nombre – 3.
On tire simultanément et au hasard 4 boules de l’urne U.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres portés par les 4 boules tirées.

1) Déterminer les 4 valeurs possibles de X.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

B- Dans cette partie on suppose que l’urne U contient 5 boules rouges et n boules blanches (n >1).
On tire simultanément et au hasard deux boules de l’urne.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E : « Les deux boules tirées sont rouges »
F : « Les deux boules tirées sont de la même couleur ».

2) a- Sachant que les deux boules tirées sont de la même couleur, montrer que la probabilité p qu’elles soient toutes les deux rouges, est $p = \dfrac{20}{n^2 - n + 20}$.
   b- Combien de boules blanches l’urne doit-elle contenir pour que l’on ait $p > \dfrac{10}{13}$?

IV- (3 points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on considère l'hyperbole (H) de foyer $F(2\,;0)$, de directrice la droite (d) d'équation $x=\frac{1}{2}$ et d'excentricité 2.

1) a- Ecrire une équation de (H) et déterminer son centre.
   b- Déterminer les sommets et les asymptotes de (H). Tracer (H).

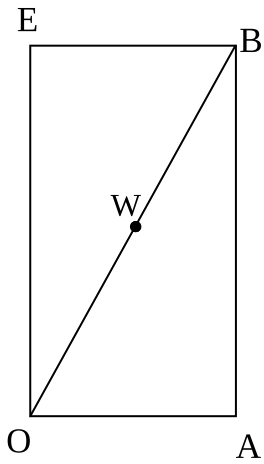
2) Soit (E) l'ellipse de foyer F, de centre O et d'excentricité $\frac{1}{2}$.
   a- Déterminer les sommets de (E) et tracer (E) dans le même repère que (H).
   b- Ecrire une équation de (E).

3) a- Vérifier que le point I(2 ;3) est un point d'intersection de (E) et (H).
   b- Prouver que les tangentes en I à (E) et à (H) sont perpendiculaires.

4) Soit (D) le domaine limité par (E), (H) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
   Calculer le volume du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

V-(3 points)

On donne dans un plan orienté le rectangle OABE tel que $OA=2$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{3}(2\pi)$.



On désigne par (C) le cercle de diamètre [OB] et de centre W.

Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

A-

1) Soit A' le point de la demi-droite [OB) tel que $OA'=2\sqrt{3}$.
   Prouver que A' est l'image de A par S.

2) a- Vérifier que le triangle OAW est équilatéral.
   b- Déterminer l'image par S du triangle OAW.
   c- Construire alors le cercle (C'), image de (C) par S.

B-

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$,tel que :
$z_A=2$ et $z_E=2\sqrt{3}i$.

1) Ecrire la forme complexe de S.

2) Trouver l'affixe de W et celle du point W', image de W par S.

3) Soit f la transformation plane de forme complexe $z'=iz+4+2i\sqrt{3}$.
   a- Montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre H et un angle.
   b- Vérifier que $f(W')=W$ et déterminer $f\circ S(W)$.
   c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f\circ S$.

VI- (7 points)

A-

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

3) a- Tracer la courbe (C).

b- Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation : $me^{2x}-x^2=0$.

B-

Soit (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $I_n=\int_0^1 x^n e^{-2x}dx$.

1) Démontrer que $0\le I_n\le \frac{1}{n+1}$.

2) Démontrer que (I_n) est décroissante.

3) Déduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

4) En utilisant une intégration par parties, démontrer que $I_{n+1}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{e^2}+(n+1)I_n\right]$.

5) Soit h la fonction définie sur IR par $h(x)=-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$, calculer $h'(x)$ puis calculer I_1.

6) Déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

C-

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(f(x))$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et montrer que la courbe représentative de g admet une direction asymptotique.

3) Dresser le tableau de variations de g.

4) Tracer la courbe représentative de g dans un nouveau repère.