

Calculatrice non programmable autorisée. Documents non autorisés.

Examen Final :**Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire – MVA 006**

Consignes particulières aux candidats : Le sujet comporte 2 pages. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1: (4 points)

Soit f la fonction de deux variables réelles définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + ax^2 + ay^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

où a est un paramètre réel.1-Quelle valeur faut-il donner au paramètre a pour que f soit continue en $(0, 0)$?2-On pose $a = 1$ pour toute la suite du problème.2-1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.2-2) On appelle (S) la surface représentative de la fonction f , relativement à un repère orthonormé.Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à (S) au point de coordonnées $(1, 2, \frac{6}{5})$.**Exercice 2:** (5 pts)Soit f la fonction de deux variables réelles définie par $f(x, y) = (x+1)ye^{x+y}$.1-Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f en un point quelconque (x, y) de \mathbb{R}^2 .2-Déterminer tous les couples (x, y) pour lesquels on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.3-Calculer les dérivées partielles secondes de f en un point quelconque (x, y) de \mathbb{R}^2 .

4-Evaluer ces dérivées secondes pour les couples trouvés à la question 2.

5-Ces couples représentent-ils des extrémums de la fonction f ? Si oui préciser la nature de ces extrémums.**Exercice 3:** (5 pts)Soit Γ la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.1-Calculer $\rho(\theta + \pi)$ et $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta)$. En déduire que pour obtenir entièrement Γ il suffit de l'étudier pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, puis d'effectuer deux symétries que l'on précisera.2-Etudier et tracer la portion de la courbe Γ obtenue en faisant varier θ de 0 à $\frac{\pi}{4}$. On précisera les tangentes à Γ en $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Tracer alors entièrement la courbe Γ .

Exercice 4: (5 pts)

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t^3 + t^2 \\ y(t) = t^3 - t^2 \end{cases}$ où le paramètre t varie dans \mathbb{R} .

- 1-En calculant $x(-t)$ et $y(-t)$ déduire que la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie de la courbe (C) .
 - 2-Etudier les variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
 - 3-Etudier les branches infinies de (C) .
 - 4-Montrer que la courbe (C) admet un point singulier en $t = 0$, dont on précisera la nature. Quelle est la tangente en ce point ? La courbe (C) admet-elle d'autres points singuliers ?
 - 5-Dessiner entièrement la courbe (C) .
-

Exercice 5: (5 pts)

On considère la région suivante : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- 1-Dessiner D .
 - 2-Sachant que D est considérée comme une plaque de masse surfacique (densité superficielle) $f(x, y) = x$, calculer la masse de D et son moment d'inertie par rapport à l'origine.
-

Exercice 6: (4 pts)

1-Calculer l'intégrale triple suivante $I = \iiint_D dx dy dz$ où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

- 2-Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de la région de \mathbb{R}^3 (considérée comme un solide homogène) limitée par les surfaces d'équations $z = x^2 + y^2$ et $z = 1$.
-

Exercice 7: (4 pts)

Considérons l'intégrale curviligne suivante : $I = \oint_{\Gamma} y^2 dx - x dy$ où Γ est la frontière du domaine triangulaire de sommets : $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(0,1)$, traversée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

- 1-Calculer I directement en l'écrivant comme somme de trois intégrales curvilignes.
 - 2-Recalculer I en utilisant le théorème de Green-Riemann.
-

Exercice 8: (8 pts)

On considère la matrice suivante: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1-Calculer $A^3 - 2A^2 - 3A$.
- 2-En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .
- 3-Considérons les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants : $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$ et $\vec{w} = (-2, -2, -1)$.
Peut-on trouver deux réels α, β tels que $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$?

- 4-Déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ -2x - 2y - z = -1 \\ 3x + 6y - z = 3 \end{cases}$