Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Partiel 2011-2012 Semestre I

Solutions

Exercice 1 (30 points) *On considère les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies par:*

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| + |x-1| + |x-2| \\ g(x) &= \sqrt{|1+x|} - \sqrt{|1-x|} \end{aligned}$$

1. Donner pour chacun des intervalles : $]-\infty, 0], [0,1], [1,2], [2,+\infty[$ une expression de $f(x)$ sans valeurs absolues.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer la courbe de $f(x)$.
4. Quel est le domaine de definition de $g(x)$? Est-elle paire ? impaire ? Expliquer pourquoi elle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Donner, pour chacun des intervalles ouverts $]-\infty,-1[,]-1,1[,]1,+\infty[$ une expression de $g(x)$ sans valeur absolue, puis calculer $g'(x)$,la dérivée de $g(x)$ sur chacun des trois intervalles.
6. Calculer: $a)\ \lim\limits_{x\to-1^-} g'(x)$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to-1^+} g'(x)$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to1^-} g'(x)$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to1^+} g'(x)$
7. On donne, pour $a>0$ et $b>0$: $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

   Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
8. Déterminer au point $x_0 = 0$, les équations de la tangente et de la normale, déduire les longueurs de tangente, et sous tangente.

Solution 1 $f(x) = |x| + |x-1| + |x-2|$

1. Si $x \in]-\infty, 0] \Longrightarrow x \leq 0 < 1 < 2 \Longrightarrow |x| = -x, |x-1| = -x+1$ et $|x-2| = -x+2 \Longrightarrow$

   $$f(x) = -x - x + 1 - x + 2 = -3x + 3 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

   Si $x \in [0,1] \Longrightarrow x > 0$, mais $x \leq 1 < 2$ donc:

   $|x| = x$, $|x-1| = -x+1$ et $|x-2| = -x+2 \Longrightarrow$

   $$f(x) = x - x + 1 - x + 2 = -x + 3 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

   Si $x \in [1,2]$ on a : $|x| = x$, $|x-1| = x-1$ et $|x-2| = -x+2 \Longrightarrow$

   $$f(x) = x + x - 1 - x + 2 = x + 1 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

   Si $x \in [2,+\infty[$ alors $|x| = x$, $|x-1| = x-1$ et $|x-2| = x-2 \Longrightarrow$

   $$f(x) = x + x - 1 + x - 2 = 3x - 3 \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

Soit:

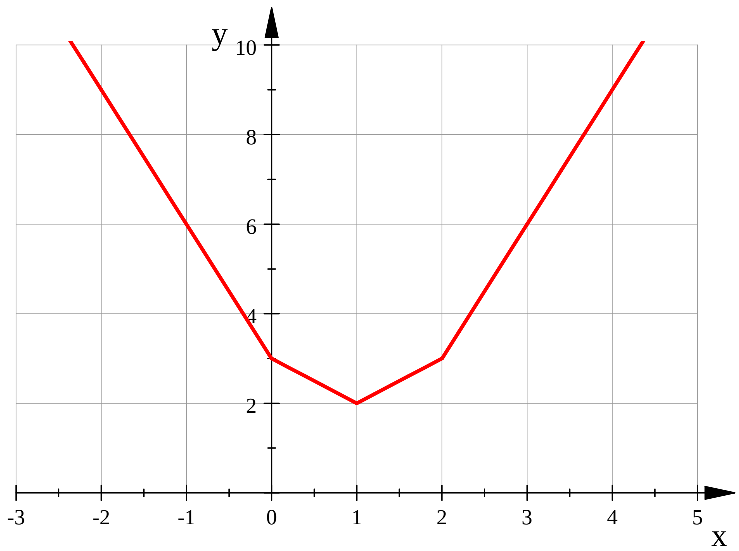
$$f(x) = \begin{cases} -3x+3 & si \quad x \leq 0 \\ -x+3 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 3x-3 & si \quad x \geq 2 \end{cases} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 2 = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$

   $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(2)$

   et à l'interieur de chacun des intervalles précédent, la fonction f est définie par une formule donc elle est continue; Donc $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\boxed{1 \text{ point}}$

3. Graphe de $f(x)$ $\boxed{2 \text{ points}}$



4. La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.Par composition puis somme, on en d´eduit que : $D_g = \mathbb{R}$. $\boxed{1 \text{ point}}$

   $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g(-x) = \sqrt{|1+(-x)|} - \sqrt{|1-(-x)|} = \sqrt{|1-x|} - \sqrt{|1+x|} = -g(x)$ donc $g(x)$ est impaire. $\boxed{1 \text{ point}}$

   La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée et somme de fonctions (polynômes, racine, valeur absolue) qui sont toutes continues sur $\mathbb{R}$. $\boxed{1 \text{ point}}$

5. $g(x) = \sqrt{|1+x|} - \sqrt{|1-x|}$

   Sur $]-\infty, -1[$: $1+x<0$ et $1-x>0$ donc $|1+x| = -1-x$ et $|1-x| = 1-x$

$$g(x) = \sqrt{-1-x} - \sqrt{1-x} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

   et

$$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

   Sur $]-1, 1[$: $1+x>0$ et $1-x>0$ donc $|1+x| = 1+x$ et $|1-x| = 1-x$

$$g(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

et

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \boxed{\text{1 point}}$$

Sur $]1, +\infty[: 1+x > 0 \Longrightarrow |1+x| = 1+x,\ 1-x < 0 \Longrightarrow |1-x| = -1+x$ donc

$$g(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{-1+x} \boxed{\text{1 point}}$$

et

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{-1+x}} \boxed{\text{1 point}}$$

Autrement:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-1-x} - \sqrt{1-x} & si \quad x < -1 \\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} & si \quad -1 < x < 1 \\ \sqrt{1+x} - \sqrt{-1+x} & si \quad x > 1 \end{cases} \boxed{\text{1 point}}$$

et

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} & si \quad x < -1 \\ \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} & si \quad -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{-1+x}} & si \quad x > 1 \end{cases} \boxed{\text{1 point}}$$

6. Calcul de limite de $g'(x)$

   (a) $\lim\limits_{x \to -1^-} g'(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) = -\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (b) $\lim\limits_{x \to -1^+} g'(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) = +\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (c) $\lim\limits_{x \to 1^-} g'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) = +\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 1^+} g'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{-1+x}} \right) = -\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

7. Si on cherche la limite en $+\infty$, on a $g(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} \right) = 0+$ $\boxed{\text{1 point}}$

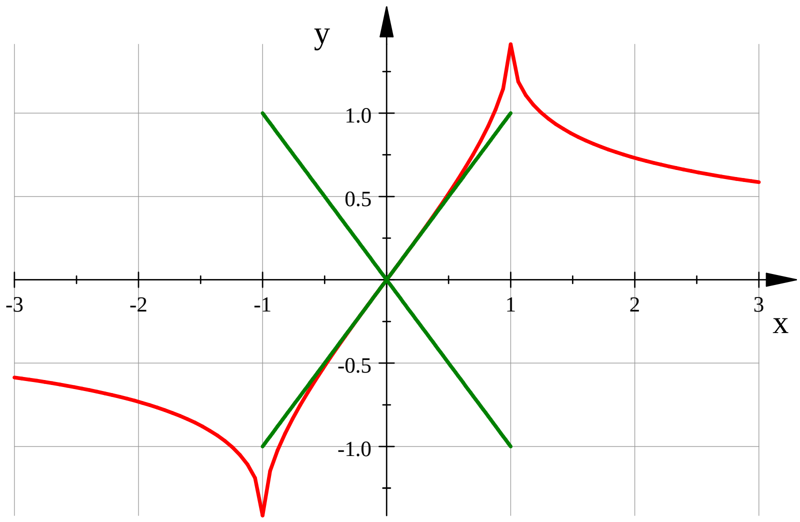
   comme la fonction est impaire alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0-$ $\boxed{\text{1 point}}$

8. Equation de la tangente: $y - y_0 = y'_0 (x - x_0)$

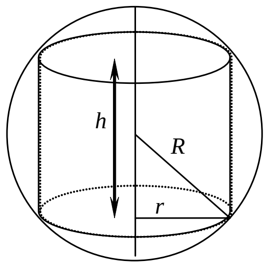
   $x_0 = 0 : y_0 = g(0) = 0$ et $y'_0 = g'(0) = 1 \Longrightarrow y_{\tan}(x) = x$ $\boxed{\text{2 points}}$

   et $y_{norm}(x) = -x$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Au point $x_0 : \ell_T = \ell_{ST} = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$



Exercice 2 (10 points) *Un cylindre de rayon r et de hauteur h, est inscrit dans une sphère de rayon R.Le milieu de l'axe du cylindre se trouve au centre de la sphère.*



Trouver, en fonction de R, le rayon r et la hauteur h du cylindre de plus grand volume possible.Calculer r et h pour $R = \sqrt{3}$.

Solution 2 *:*

On a $R^2 = r^2 + (h/2)^2 \Longrightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Le plus grand cylindre correspondant au volume maximal donc pour $\frac{dV}{dr} = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}\right) = 2\pi \frac{r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Longrightarrow 2R^2 - 3r^2 = 0$ $\boxed{\text{3 points}}$

$\Longrightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$ $\boxed{\text{1 point}}$

et $h = 2\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Pour $R = \sqrt{3} : r = \sqrt{2}$ et $h = 2.$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 3 (30 points) *:*

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$I = \int \frac{dt}{t^2 (1 - t)} \quad et \quad J = \int \frac{du}{u^3 (1 - u^2)}$$

2. Déduire de ce qui précède les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} \quad et \quad K_2 = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

3. On pose $K = \int \frac{dx}{\sin^3(2x)}$.Exprimer K en fonction deK_1 et K_2, et en déduire K.

Solution 3 *:*

1. $I = \int \frac{dt}{t^2(1-t)}$

$\frac{1}{t^2(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t-1}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$I = \int \frac{dt}{t^2(1-t)} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t-1}\right) dt$

$= \ln|t| - \frac{1}{t} - \ln|t-1| + C = \ln\left|\frac{t}{t-1}\right| - \frac{1}{t} + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

$J = \int \frac{du}{u^3(1-u^2)}$

$\frac{1}{u^3(1-u^2)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^3} - \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2(1-u)}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$J = \int \frac{du}{u^3(1-u^2)} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^3} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u}$

$= \ln|u| - \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| + C$ $\boxed{\text{3 points}}$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2}{u^2-1}\right| - \frac{1}{2u^2} + C$ $\boxed{\text{1 point}}$

2. $K_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x \left(1 - \sin^2 x\right)}$ $\boxed{\text{1 point}}$

On pose $u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x dx \Longrightarrow K_1 = \int \frac{du}{u^3(1-u^2)}$ $\boxed{\text{1 point}}$

donc $K_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2}{u^2-1}\right| - \frac{1}{2u^2} + C_1$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x - 1}\right| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1$ $\boxed{\text{1 points}}$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1 = \ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1$ $\boxed{\text{2 points}}$

$K_2 = \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)\cos^3 x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$u = \cos x \Longrightarrow du = -\sin x dx \Longrightarrow K_2 = -\int \frac{du}{u^3(1-u^2)} + C_2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$K_2 = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u^2}{u^2-1}\right| + \frac{1}{2u^2} + C_2$

$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - 1}\right| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C_2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= \ln|\tan x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C_2$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $K = \int \frac{dx}{\sin^3(2x)} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{8}\int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$ 2 points

$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{\sin^3 x \cos x} + \frac{1}{\sin x \cos^3 x}\right) dx$ 2 points

$= \frac{K_1 + K_2}{8} = \frac{1}{8}\left(\ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1 + \ln|\tan x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C_2\right)$ 2 points

$K = \frac{1}{4}\left(\ln|\tan x| - \frac{\cot 2x}{\sin 2x} + C\right)$

Puisque : $-\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2\cos^2 x} = -\frac{\cos 2x}{2\cos^2 x \sin^2 x} = -\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x} = -2\frac{\cot 2x}{\sin 2x}$

Exercice 4 (30 points) *L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale indéfinie suivante*

$$I = \int \frac{x^3}{(1+x^3)^2} dx$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}$.
   En déduire: $J = \int \frac{dx}{1+x^3}$
2. Calculer $K = \int \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}$
3. En utilisant une intégration par parties déduire la valeur de I.

Solution 4 *:*

1. Par décomposition en fractions simples on aura:

$\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$ 2 points

$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right)$ 2 points

On écrit x^2-x+1 sous forme d'un carré parfait

$x^2-x+1 = x^2 - 2\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{(2x-1)^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$ 2 points

Alors:

$\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\right) = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{2}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$ 2 points

D'où finalement :

$$\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{2}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2/3}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$ 1 point

Remarquons que : $(1+x)\left(1-x+x^2\right)=1+x^3$ alors :

$$J=\int \frac{dx}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$\int \frac{dx}{x+1}=\ln(x+1) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}=\ln\left(x^2-x+1\right) \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$\int \frac{2/3}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$J=\int \frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+Ct^e. \quad \boxed{\text{1 point}}$$

2. $K=\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(1+x^3)^2}$

   Posons $t=1+x^3 \Longrightarrow dt=3x^2dx$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\Longrightarrow K=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t}+C=-\frac{1}{3(1+x^3)}+C \quad \boxed{\text{3 points}}$$

3. Intégration par parties de $I=\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^3)^2}dx$

$$\text{Soit: } \begin{cases} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\dfrac{x^2dx}{(1+x^3)^2} \Longrightarrow v=-\dfrac{1}{3(1+x^3)} \end{cases} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

   d'où: $\left(I=uv-\int vdu\right)$

$$I=-\frac{x}{3(1+x^3)}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x^3}=-\frac{x}{3(1+x^3)}+\frac{1}{3}J \quad \boxed{\text{3 points}}$$

   Donc:

$$I=-\frac{x}{3(1+x^3)}+\frac{1}{9}\ln(x+1)-\frac{1}{18}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+Ct^e. \quad \boxed{\text{2 points}}$$