الدورة الإستثنائية للعام 2010	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	عدد المسائل : اربع

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

I- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Écrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond :

N	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	$\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^2 =$	0	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
2	La forme exponentielle de $z=\sin\theta - i\cos\theta$ est:	$e^{i\theta}$	$e^{-i\theta}$	$e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$	$e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$
3	A , B et C sont les points d’affixes respectives $z_A=-3i$, $z_B=i$ et $z_C=3i$. Le point M d'affixe z, tel que $\lvert z+3i\rvert=\lvert -i\rvert$ décrit:	La médiatrice du segment [AB]	Le cercle de centre A et de rayon 1	Le cercle de centre C et de rayon 1	La médiatrice du segment [CB]
4	Si $Z=\frac{iz}{z+1-i}$ alors :	$\overline{Z}=\frac{i\overline{z}}{\overline{z}-1+i}$	$\overline{Z}=\frac{i\overline{z}}{\overline{z}+1+i}$	$\overline{Z}=\frac{-i\overline{z}}{\overline{z}-1+i}$	$\overline{Z}=\frac{-i\overline{z}}{\overline{z}+1+i}$

II- (4 points)

Dans une boutique il y a deux tiroirs T_1 et T_2 contenant des cravates.

Le tiroir T_1 contient 15 cravates en soie : 3 rouges, 5 vertes et 7 bleues.

Le tiroir T_2 contient 10 cravates en polyester : 2 rouges, 5 vertes et 3 bleues.

A- On choisit au hasard, une cravate de T_1 et une de T_2. On désigne par E et F les deux événements suivants :

E : « les deux cravates choisies sont de même couleur »
F : « les deux cravates choisies sont l’une rouge et l’autre bleue »

1) Démontrer que la probabilité $P(E)$ est égale à $\frac{26}{75}$.
2) Calculer P(F).

B- Dans cette partie, on choisit au hasard un des deux tiroirs et de ce tiroir on choisit au hasard une cravate.
On considère les événements suivants :

R : « la cravate choisie est rouge »
T_1 : « la cravate choisie provient du tiroir T_1 »

1) Calculer $P(R/T_1)$ et $P(R\cap T_1)$.
2) Calculer $P(R)$.

C- On suppose que les 25 cravates sont placées dans un même tiroir T et on choisit simultanément et au hasard trois cravates de T.
Le prix d’une cravate en soie est 50 000LL et celui d’une cravate en polyester est 10 000LL.
On désigne par X la somme des prix des trois cravates choisies.
Calculer $P(X \le 100\ 000)$.

III- (4 points)

Dans l’espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$ on donne le point A (1 ;1 ;2),

le plan (P) d’équation $x+y-z+2=0$ et la droite (d) d’équations paramétriques $\begin{cases} x = m+1 \\ y = m-2 \\ z = 2m+1 \end{cases}$

où m est un paramètre réel.

1) Montrer que la droite (d) est contenue dans le plan (P) et que A n’appartient pas à (P).

2) Trouver une équation du plan (Q) déterminé par le point A et la droite (d) .

3) Montrer que le point $A'\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{10}{3}\right)$ est symétrique de A par rapport à (P).

4) Soit (Q') le plan déterminé par A' et (d). Vérifier qu’une équation de (Q') est $x+5y-3z+12=0$.

5) Soit H le projeté orthogonal de A sur (d) et α l’angle aigu des deux plans (Q) et (Q').
Montrer que l’angle aigu des deux droites (HA) et (HA') est égal à α et calculer $\cos\alpha$.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=x-\dfrac{(\ln x)^2}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (unité : 1 cm)

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Déduire une asymptote à (C).

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (D) d’équation $y=x$ est une asymptote à (C).

3) Le tableau ci-contre donne les variations de la fonction φ définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par :
$\varphi(x)=x^2+(\ln x)^2-2\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Vérifier que $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$. En déduire que f est strictement croissante.

4) a- Démontrer que (D) est tangente à (C) au point A(1;1) et que (D) est au-dessus de (C) pour $x \neq 1$.
b- Vérifier que la tangente (T) à (C) au point d’abscisse e^2 est parallèle à (D).

5) Démontrer que l’équation f(x) = 0 admet une racine unique α et vérifier que $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

6) Tracer (D) , (T) et (C).

7) On désigne par (C') la courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f .
Tracer (C') dans le même repère que (C).

8) a- Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} f(x)dx$ en fonction de α .
b- Déduire, en fonction de α , l’aire du domaine limité par (C), (C') et les deux droites d’équations $x=0$ et $y=0$.