1. Soit $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. la fonction f admet - elle une limite en 0.
2. Trouver les limites suivantes:
   a) $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \frac{\cos x}{x})$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} xE(\frac{1}{x})$
   e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{k+x}-\sqrt{k-x}}{x}$, $k > 0$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x)$ g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$
   h) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3})$ i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3-3x+2}{x^2-x}$ ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$
3. Etudier quand $x \to -1$, la limite de $f(x) = \frac{\sqrt{1-3x}-2}{|x+1|}$
4. Calculer:
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2 \tan 3x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2} (\tan 4x - \tan 2x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 ax}{1 - \cos bx}$, $a \in IR$, $b \in IR^*$
5. Pour tout $x \in IR$, on définit la partie entière de x :
   $$E(x) = \sup\{n \in ZI \quad | \quad n \leq x\}$$
   Considérons aussi les fonctions:
   $$f(x) = E(x), \quad g(x) = \sqrt{x - E(x)} \quad h(x) = \frac{xE(x+1)}{x + E(x)}$$
   a) Tracer le graphe de chacune des fonctions suivantes: $f, g,$ $f+g$, pour $x \in [0,5]$
   b) Etudier la continuité de f, g, $f+g$ et h au point 1.
6. Soient
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 2 & si \;\; x = 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x - E(x) & si \;\; x \neq 0 \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$
   La fonction f est - elle continue en 0? d'un côté de 0? même question pour la fonction g
7. Soit $f(x) = E(x) + E(2-x)$
   a) Montrer que f est périodique de période 1
   b) Montrer que f est paire
   c) Déterminer le domaine de continuité de f
8. Examiner si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité au point 1
   $$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$
9. Discuter en fonction de la valeur de $n \in IN$, si la fonction
   $$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$$
   peut être prolongeable par continuité en 0
10. Soit
   $$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \;\; 0 \leq x < 1 \\ x^3 & si \;\; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
   Quelle doit être la valeur de f au point 1 pour qu'elle soit continue sur $[0, 2]$

11. a) Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe un élément $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$

    b) Soit $g : [0, 2] \longrightarrow IR$ une fonction continue vérifiant $g(0) = g(2)$. Démontrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g(\alpha + 1) = g(\alpha)$

12. Montrer que :

    i) $|xy| = |x||y|$

    ii) $|x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad (\delta > 0)$

    iii) $|x| > \delta \Longleftrightarrow x > \delta$ ou $x < -\delta$

13. Trouver l'ensemble de solutions dans chacun des cas suivants:

    i) $|2x - 3| < 1$

    ii) $(x - 2)^2 \geq 4$

    iii) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

    iv) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$

    v) $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$

    vi) $|x| = x + 1$

    vii) $|x| = x - 1$

14. Montrer que :

    i) $[|x - 2| < \delta \text{ et } 0 < \delta < 3] \Longrightarrow \dfrac{1}{|x - 5|} < \dfrac{1}{3 - \delta}$

    ii) $[|x - 2| < \delta \text{ et } 0 < \delta < 1] \Longrightarrow \dfrac{|x + 1|}{|x - 1|} < \dfrac{3 + \delta}{1 - \delta}$

    iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

15. Calculer la dérivée à gauche et la dérivée à droite, au point indiqué, de chacune des fonctions suivantes:

    a) $f(x) = |x - 1| + x - 1$ au point $x = 1$

    b) $g(x) = |x^2 - 1| + 3x$ au point $x = -1$

16. Soit f une fonction définie sur $[-\alpha, \alpha], \quad \alpha > 0$.

    a) Démontrer que si f est paire (resp. impaire) admettant une dérivée au point $a \in [-\alpha, \alpha]$, alors elle admet une dérivée au point $-a$. Calculer cette dérivée en fonction de $f'(a)$

    b) Démontrer que si f est paire admettant une dérivée en 0 alors $f'(0) = 0$

17. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes:

    a) $\ln \dfrac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}$

    b) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

    c) $(\cos x)^{\sin x}$

    d) $\arg\tanh x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

18. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et telle que, pour tous $x_1, \ x_2 \in [a, b]$, on a:

    $$|f(x_1) - f(x_2)| < c|x_1 - x_2|^{1+\alpha}; \quad c, \ \alpha > 0$$

    Démontrer que f est constante

19. Soit f une fonction définie et dérivable pour $x > c$. On suppose que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que , pour tout $h > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x + h) - f(x)) = 0$

20. Simplifier les expressions suivantes:

    a) $\exp[\frac{(3 \ln 2)}{2}]$

    b) $\exp[\ln(x - 1)]$

    c) $\ln \sqrt{\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}}$

    d) $\frac{1}{x}[\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)]$

21. Calculer, pour $x = \frac{1}{2} \ln 3$, la valeur de l'expression $2 \cosh x - \sinh x$

22. a) Résoudre l'équation

$$\sqrt{3}\sinh\phi + \cosh\phi = 2$$

b) Résoudre le système:

$$\begin{cases} \cosh x + \sinh y = 1 + \sinh 1 \\ \sinh x + \cosh y = \cosh 1 \end{cases}$$

23. Résoudre le système

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

24. Résoudre l'inéquation $\sqrt{1 - 4\sin^2 x} < 2\cos x - 1$

25. On considère la fonction définie sur IR, par:

$$f(x) = \arcsin x + \arcsin 2x$$

a) Quel est le domaine de définition de f

b) f est - elle injective?

c) Sur quel intervalle réel la fonction réciproque de f est - elle définie?

d) Résoudre l'équation $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{2\pi}{3}$

26. Calculer le maximum et le minimum de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x - 5, \quad \text{pour } x \in [-2, 6]$$

En déduire le maximum et le minimum de $|f(x)|$

27. Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 81x + \frac{6561}{4} = 0$$

Calculer toutes les racines de cette équation

28. a) Les conditions de Rolle sont - elles vérifiées par la fonction

$$f(x) = (|x| - 1)^2, \quad x \in [-1, 1]$$

b) Les conditions du T.A.F. sont - elles vérifiées par la fonction

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [-1, 1]$$

29. Soient, pour $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x+1} \\ g(x) &= \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Appliquer à $\ln u$ le T.A.F. sur un intervalle convenable, pour déterminer le signe de f et celui de g

30. a) Si $a,\ b \in IR$ telsque $0 < a < b$. Montrer que

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

b) Déduire que $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

31. Si $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $y = \tan t$. Evaluer $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ au point $t = \dfrac{\pi}{4}$

32. Si $x = \sin\theta$, $y = \sin\alpha\theta$, $\alpha \in IR$

    Montrer que

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \alpha^2 y = 0$$

33. a) Quelle est la dérivée n^{ième} de $y = \frac{1}{x+a}$

    b) Montrer que l'on peut écrire $\frac{1}{x^2-1} = \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\mu}{x+1}$ où $\lambda,\ \mu = ctes$. En déduire la dérivée n^{ième} de $y = \frac{1}{x^2-1}$

34. Soit $g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ un polynôme de degré 5 qui a 5 racines distinctes

    Montrer que $y^{'}$, $y^{''}$ et $y^{'''}$ ont respectivement 4, 3 et 2 racines distinctes.

    Quel résultat général pourrait-on énoncer?

35. On donne $y = \dfrac{x(x-2)}{x^4+1}$. Montrer, sans calculer $y^{''}$, que $y^{''}$ s'annule pour au moins 4 valeurs différentes de x

36. Soit f une fonction non constante, définie et deux fois dérivable sur IR telle que

$$f(x) \geq 0,\ f^{'}(x) \geq 0,\ f^{''} \geq 0 \quad \forall x \in IR$$

    a) Que peut-on dire des sens de variations de f et $f^{'}$?

    b) Montrer qu'il existe $a \in IR$ telque $f^{'}(a) > 0$

    c) Montrer, en utilisant le T.A.F. entre a et x $(x > a)$ que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

    d) Montrer que lorsque $x \to -\infty$, $f(x)$ et $f^{'}(x)$ tendent vers deux limites finies k et $k^{'}$ respectivement, qui sont positives.

    En utilisant le T.A.F. entre 0 et x $(x < 0)$, montrer que $k^{'} = 0$.