

وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	دورة سنة 2008 الأكاديمية الاستثنائية
عدد المسائل : اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, avec justification, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z , alors un argument de $\frac{i}{\bar{z}^2}$ est:	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	Si $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est:	$e^{\frac{5\pi}{6}i}$	$e^{\frac{7\pi}{6}i}$	$\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$	$e^{-\frac{5\pi}{6}i}$
3	Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $ z = 2$ et $z' = z - \frac{1}{\bar{z}}$, alors $ z' =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
4	Si z est un nombre complexe tel que $ z = \sqrt{2}$, alors $ \bar{z} + i\bar{z} =$	$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

II- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points :
 $A(0; 1; -2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(3; 0; -3)$ et $H(2; 2; -2)$.

- 1) Montrer que $x - 2y - z = 0$ est une équation du plan (P) déterminé par les points H, A et B
et vérifier que le point C n'appartient pas à ce plan.
- 2) a- Montrer que le triangle HAB est isocèle en H.
b- Montrer que (CH) est perpendiculaire à (P).
c- Prouver que $CA = CB$ et déterminer un système d'équations paramétriques de la bissectrice
intérieure (δ) de l'angle ACB.
- 3) Soit T le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC).
Montrer que T appartient à (δ) .

III- (4 points)

Pour faire face à une certaine maladie, on vaccine 40% des personnes d'une population.

On remarque par la suite que 85% des personnes vaccinées ne sont pas atteintes par la maladie et que 75% des personnes non vaccinées sont atteintes par la maladie.

On choisit, au hasard, une personne de cette population.

Soit les événements suivants :

M : « la personne choisie est atteinte par la maladie ».

V : « la personne choisie est vaccinée ».

- 1) a- Vérifier que la probabilité de l'événement $M \cap V$ est égale à $\frac{6}{100}$.
b- Quelle est la probabilité que la personne choisie soit atteinte par la maladie et non vaccinée?
c- En déduire la probabilité P (M).
- 2) La personne choisie est non atteinte par la maladie.
Calculer la probabilité qu'elle soit vaccinée.
- 3) Dans cette partie, on suppose que cette population est formée de 300 personnes.
On choisit, au hasard, 3 personnes de cette population.
Quelle est la probabilité que, parmi les 3 personnes choisies, il y ait au moins une qui soit vaccinée ?

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{x \ln x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (d).
- 3) Calculer $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante.
Dresser le tableau de variations de f.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $1,5 < \alpha < 1,6$.
- 5) Tracer (d) et (C).
- 6) a- Calculer l'aire A(t) du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les deux droites d'équations $x = e$ et $x = t$ où $t > e$.
b- Montrer que pour tout $t > e$, on a $A(t) < t$.

وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع: علوم الحياة	دورة سنة 2008 الأكاديمية الاستثنائية
عدد المسائل : أربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (4 points)

In the following table, only one of the proposed answers to each question is correct.
Write the number of each question and give, with justification, the corresponding answer.

N°	Questions	Answers			
		a	b	c	d
1	If $\frac{\pi}{6}$ is an argument of z , then an argument of $\frac{i}{z^2}$ is :	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	If $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, then the exponential form of z is:	$e^{\frac{5\pi}{6}i}$	$e^{\frac{7\pi}{6}i}$	$\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$	$e^{-\frac{5\pi}{6}i}$
3	If z and z' are two complex numbers such that $ z = 2$ and $z' = z - \frac{1}{z}$, then $ z' =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
4	If z is a complex number with $ z = \sqrt{2}$, then $ \bar{z} + i\bar{z} =$	$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

II- (4 points)

In the space referred to an orthonormal system $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, consider the points:
 $A(0; 1; -2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(3; 0; -3)$ and $H(2; 2; -2)$.

- 1) Show that $x - 2y - z = 0$ is an equation of the plane (P) determined by the points H , A and B
and verify that the point C does not belong to this plane.
- 2) a- Show that triangle HAB is isosceles of vertex H.
b- Show that (CH) is perpendicular to (P).
c- Prove that $CA = CB$ and determine a system of parametric equations of the interior
bisector(δ) of angle ACB.
- 3) Let T be the orthogonal projection of H on plane (ABC).
Prove that T belongs to (δ) .

III- (4 points)

In order to prevent a certain disease, we vaccinated 40% of persons of a population. Then we noticed that 85% of the vaccinated persons were not affected by the disease and that 75% of the persons who were not vaccinated are affected by the disease.

A person is chosen randomly from this population.

Consider the following events:

D : « the chosen person is affected by the disease ».

V : « the chosen person is vaccinated ».

- 1) a- Verify that the probability of the event $D \cap V$ is equal to $\frac{6}{100}$.
b- What is the probability that the chosen person is affected by the disease and is not vaccinated?
c- Deduce the probability $P(D)$.
- 2) The chosen person is not affected by the disease.
Calculate the probability that he/she is vaccinated.
- 3) In this part, suppose that this population is formed of 300 persons.
We choose randomly 3 persons from this population.
What is the probability that at least one, among the 3 chosen persons, is vaccinated?

IV- (8 points)

Let f be the function defined over $]1; +\infty[$ by $f(x) = x - \frac{1}{x \ln x}$ and designate by (C) its

representative curve in an orthonormal system $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Calculate $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ and deduce an asymptote to (C).
- 2) Calculate $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Prove that the straight line (d) of equation $y = x$ is an asymptote to (C) and study the position of (C) and (d).
- 3) Calculate $f'(x)$ and show that f is strictly increasing.
Set up the table of variations of f .
- 4) Show that the equation $f(x) = 0$ has a unique root α and verify that $1.5 < \alpha < 1.6$.
- 5) Draw (d) and (C).
- 6) a- Calculate the area $A(t)$ of the region limited by the curve (C), the straight line (d) and the two straight lines of equations $x = e$ and $x = t$ where $t > e$.
b- Show that for all $t > e$, we have $A(t) < t$.

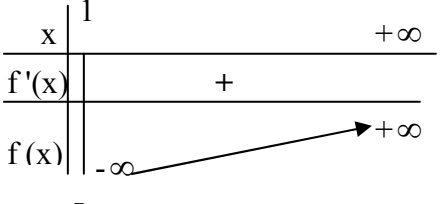
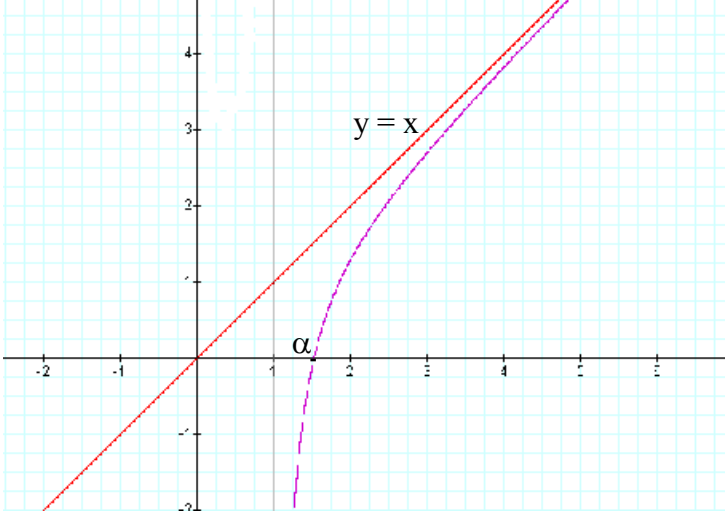
مشروع معيار التصحيح	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	دورة سنة 2008 الالكالمية الاستثنائية
---------------------	---	--------------------------------------

I	Corrigé	Note
1	$\arg\left(\frac{i}{\bar{z}^2}\right) = \arg(i) - 2\arg(\bar{z}) \quad [2\pi] = \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad [2\pi] = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$	d
2	$z = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$	a
3	$z' = \frac{z\bar{z}-1}{\bar{z}} = \frac{ z ^2-1}{\bar{z}} = \frac{3}{\bar{z}}, \text{ donc } z' = \frac{3}{ z } = \frac{3}{2}$	c
4	$ \bar{z} + iz = \bar{z}(1+i) = \bar{z} \times 1+i = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$	b

QII	Corrigé	Note
1	$x_A - 2y_A - z_A = 0 - 2 + 2 = 0$; $x_B - 2y_B - z_B = 2 - 2 - 0 = 0$; $x_H - 2y_H - z_H = 2 - 4 + 2 = 0$, donc $x - 2y - z = 0$ est une équation du plan (P) déterminé par A, B et H. $x_C - 2y_C - z_C = 3 - 0 + 3 \neq 0$, donc C n'appartient pas à (P).	1
2a	$\vec{HA}(-2; -1; 0)$; $\vec{HB}(0; -1; 2)$ donc $HA = HB = \sqrt{5}$.	0.5
2b	$\vec{HC}(1; -2; -1) = \vec{N}_{(P)}$ donc (CH) est perpendiculaire à (P).	0.5
2c	Les triangles AHC et BHC sont égaux donc $CA = CB$ et le triangle ABC est isocèle en C (ou $CA = CB = \sqrt{11}$) donc la bissectrice de l'angle \hat{ACB} est la médiane relative au côté [AB]. $I(1; 1; -1)$ est le milieu de [AB]; $\vec{CI}(-2; 1; 2)$ est un vecteur directeur de (δ) et $C \in (\delta)$ donc un système d'équations paramétriques de (δ) est : $x = -2m + 3$; $y = m$ et $z = 2m - 3$.	1
3	(CH) est perpendiculaire au plan (P) donc (CH) est orthogonale à la droite (AB) de (P) ; la droite (AB) étant orthogonale à (CI) et à (CH) donc (AB) est perpendiculaire au plan (CHI), par suite les plans (ABC) et (CHI) sont perpendiculaires, d'où le projeté T de H sur (ABC) appartient à la droite (CI) = (δ) , intersection de ces plans. OU: $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$ Donc le plan (ABC) a pour équation : $2x + 8y - 2z - 12 = 0$ $(HT) : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 8t + 2 \\ z = -2t - 2 \end{cases} \quad (HT) \cap (ABC) = \{T\}$ par suite $T\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ T appartient à (δ) pour $m = \frac{2}{3}$.	1

QIII	Corrigé	Note
1a	$P(M \cap V) = P(V) \times P(M/V) = \frac{40}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{6}{100}$.	0.5
1b	$P(M \cap \bar{V}) = P(\bar{V}) \times P(M/\bar{V}) = \frac{60}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{45}{100}$.	0.5

1c	$P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V}) = \frac{6}{100} + \frac{45}{100} = \frac{51}{100}.$	1
2	$P(V/\bar{M}) = \frac{P(V \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{85}{100}}{1 - \frac{51}{100}} = \frac{34}{49}.$	1
3	Soit A l'événement : « au moins une personne vaccinée parmi les 3 personnes » $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{180}^3}{C_{300}^3} = 0,785.$	1

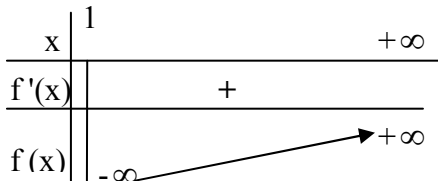
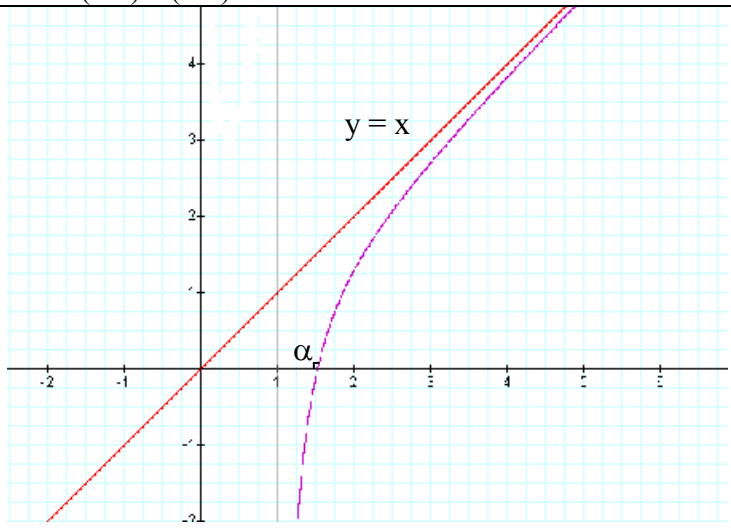
QIV	Corrigé	Note
1	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe (C).	0.5
2.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$, donc la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C). $f(x) - x = -\frac{1}{x \ln x} < 0$, donc (C) est au-dessous de (d).	1
3	$f'(x) = 1 + \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} > 0$ pour $x > 1$, donc f est strictement croissante. 	1.5
4	f est continue et strictement croissante et f(x) croît de $-\infty$ à $+\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine α et $f(1,5) \times f(1,6) = -0,14 \times 0,27 < 0$ donc $1,5 < \alpha < 1,6$.	1
5		1.5
6a	$A(t) = \int_e^t [x - f(x)].dx = \int_e^t \frac{1}{x \ln x}.dx = \int_e^t \frac{(\ln x)'}{\ln x}.dx = [\ln(\ln x)]_e^t$ $= \ln(\ln t) - \ln(\ln e) = \ln(\ln t).$	1.5
6b	$A(t) < t$ si $\ln(\ln t) < t$; $\ln t < e^t$ ce qui est vrai, car la courbe représentative de la fonction \ln est au-dessous de celle de la fonction exponentielle.	1

مشروع معيار التصحيح		امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	دورة سنة 2008 الأكاديمية الاستثنائية
QI	Answer	Mark	
1	$\arg\left(\frac{i}{z^2}\right) = \arg(i) - 2\arg(\bar{z}) \quad [2\pi] = \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad [2\pi] = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$ d	1	
2	$z = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ a	1	
3	$z' = \frac{z\bar{z} - 1}{\bar{z}} = \frac{ z ^2 - 1}{\bar{z}} = \frac{3}{\bar{z}}, \text{ so } z' = \frac{3}{ z } = \frac{3}{2}$ c	1	
4	$ \bar{z} + i\bar{z} = \bar{z}(1 + i) = \bar{z} \times 1 + i = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ b	1	

QII	Answer	Mark
1	$x_A - 2y_A - z_A = 0 - 2 + 2 = 0$; $x_B - 2y_B - z_B = 2 - 2 - 0 = 0$; $x_H - 2y_H - z_H = 2 - 4 + 2 = 0$, then $x - 2y - z = 0$ is an equation of the plane (P) determined by A , B and H. $x_C - 2y_C - z_C = 3 - 0 + 3 \neq 0$, then C does not belong to (P).	1
2a	$\vec{HA}(-2; -1; 0)$; $\vec{HB}(0; -1; 2)$ then $HA = HB = \sqrt{5}$.	0.5
2b	$\vec{HC}(1; -2; -1) = \vec{N}_{(P)}$ then (CH) is perpendicular to (P).	0.5
2c	<p>Triangles AHC and BHC are congruent so $CA = CB$ and triangle ABC is isosceles of vertex C (or $CA = CB = \sqrt{11}$) hence, the bisector of angle \hat{ACB} is the median relative to the side [AB].</p> <p>$I(1; 1; -1)$ is the midpoint of [AB]; $\vec{CI}(-2; 1; 2)$ is a direction vector of (δ) and $C \in (\delta)$. Thus, a system of parametric equations of (δ) is : $x = -2m + 3$; $y = m$ and $z = 2m - 3$.</p>	1
3	<p>(CH) is perpendicular to plane (P) then (CH) is orthogonal to the straight line (AB) in (P) ; the straight line (AB) being orthogonal to (CI) and (CH) , then (AB) is perpendicular to plane (CHI) , consequently planes (ABC) and (CHI) are perpendicular , Therefore T the foot of the perpendicular through H to plane (ABC) belongs to the straight line (CI) = (δ) , intersection of the two planes.</p> <p>•OR: $\vec{AB} \times \vec{AC} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$ Then, plane (ABC) has an equation: $2x + 8y - 2z - 12 = 0$ $(HT) : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 8t + 2 \\ z = -2t - 2 \end{cases} \quad (HT) \cap (ABC) = \{T\}$ then $T\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ T belongs to (δ) for $m = \frac{2}{3}$.</p>	1

QIII	Answer	Mark
1a	$P(M \cap V) = P(V) \times P(M/V) = \frac{40}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{6}{100}$.	0.5
1b	$P(M \cap \bar{V}) = P(\bar{V}) \times P(M/\bar{V}) = \frac{60}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{45}{100}$.	0.5

1c	$P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V}) = \frac{6}{100} + \frac{45}{100} = \frac{51}{100}.$	1
2	$P(V/\bar{M}) = \frac{P(V \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{85}{100}}{1 - \frac{51}{100}} = \frac{34}{49}.$	1
3	Let A be the event : « at least one is vaccinated among the three persons » $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{180}^3}{C_{300}^3} = 0.785.$	1

QIV	Answer	Mark
1	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty$: the straight line of equation $x = 1$ is an asymptote to (C).	0.5
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$, then the straight line (d) of equation $y = x$ is an asymptote to (C). $f(x) - x = -\frac{1}{x \ln x} < 0$, so (C) is below (d).	1
3	$f'(x) = 1 + \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} > 0$ for $x > 1$, then f is strictly increasing . 	1.5
4	f is continuous and strictly increasing and f(x) increases from $-\infty$ to $+\infty$ then the equation $f(x) = 0$ has a unique root α . and $f(1.5) \times f(1.6) = -0.14 \times 0.27 < 0$ then $1.5 < \alpha < 1.6$.	1
5		1.5
6a	$A(t) = \int_e^t [x - f(x)].dx = \int_e^t \frac{1}{x \ln x}.dx = \int_e^t \frac{(\ln x)'}{\ln x}.dx = [\ln(\ln x)]_e^t = \ln(\ln t) - \ln(\ln e) = \ln(\ln t).$	1.5
6b	$A(t) < t$ if $\ln(\ln t) < t$; $\ln t < e^t$ which is true since the representative curve of the \ln function is below that of the exponential function.	1