INSTITUT DES SCIENCES APPLIQUEES ET ECONOMIQUES (ISAE)

Centre associé au CNAM de Paris

MVA 006 : APPLICATIONS DE L'ANALYSE A LA GEOMETRIE, INITIATION A L'ALGEBRE LINEAIRE

FEUILLE DE TD N°2

Exercice 1 :

Considérons la fonction f définie par $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$.

Montrer que f admet un minimum global (absolu) mais qu'elle n'admet pas de maximum global.

Exercice 2 :

Considérons la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + y^4 - 2y^2$.

1) Etudier les extrémums locaux de f.
2) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + (y^2-1)^2 - 1$.
3) En déduire si les extrémums trouvés à la question 1 sont globaux ou pas.

Exercice 3 :

En discutant suivant les valeurs du paramètre réel a, étudier les extrémums locaux des fonctions définies par :

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

b) $g(x,y) = ax^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y$.

Exercice 4:

Soit la fonction f définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.

1) Montrer que f possède 4 points critiques (stationnaires).
2) En calculant $f(h,0)$ et $f(0,k)$ prouver que f n'admet pas d'extrémum en (0,0).
3) Appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction f au voisinage du point (4,0). En déduire que f admet un minimum local en (4,0).
4) Terminer l'étude des extrémums de f.

Exercice 5:

Rechercher les extrémums locaux des fonctions définies par :

a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$.

b) $g(x,y,z) = x\ln y + z\ln x - y$.

c) $h(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + z^2 - 4z + 5$

On précisera dans chaque cas si les extrémums trouvés sont absolus ou pas.

Exercice 6:

Rechercher les extrémums locaux des fonctions définies par :

a) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

b) $g(x,y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

c) $h(x,y) = x\ln y - y\ln x$

d) $i(x,y) = (y^2 - 2)\sqrt[3]{x^2}$

e) $j(x,y) = x^2 + |x+y|$

Exercice 7:

Considérons la fonction f définie par $f(x,y) = x[lnx^2 + y^2]$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?
2) Calculer la limite de $f(x,y)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.
3) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$. Calculer alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$
4) Etudier les extrémums locaux de f sur son domaine de définition.

Exercice 8:

On veut construire un canal entre deux rivières se trouvant sur une plaine. Si l'on trace deux axes rectangulaires dans cette région, le cours de la première rivière a schématiquement la forme d'une droite d'équation $y = x - 2$. Le cours de la seconde rivière a la forme d'une parabole d'équation $y = x^2$. Déterminer le tracé du canal le plus court et préciser sa longueur.

Exercice 9:

Une compagnie fabrique deux produits A et B, en quantités *x* et *y* respectivement. Le profit réalisé par l'entreprise est donné par $P(x, y) = 540x - 80x^2 + 30xy - 15y - 3y^2 + 2500$.
Quelles sont les valeurs de *x* et *y* qui maximisent le profit?

Exercice 10:

On veut fabriquer une boite en carton de forme parallélépipédique (à angles droits), dont la surface totale est constante égale à A (en m^2). Quelles sont les dimensions de la boite rendant le volume maximal ?