

1. Calculer les intégrales doubles suivantes:

(a) $\iint_D (x^2 + 2y) dx dy$ avec $D : [0; 1] \times [0; 2]$

(b) $\iint_D r dr d\theta$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $a \sin \theta \leq r \leq a$, $a > 0$

(c) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ avec $0 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{x} \leq y \leq x$

2. Calculer l'aire du domaine D dans chacun des cas suivants:

(a) D est limité par $y \leq 2 - x$; $y \geq x^2$, $y \leq x + 2$

(b) D est limité par $y = x^2$; $y = x + 2$

(c) D est limité par $x = y$, $x = 2y$; $x + y = 2$; $x + 3y = 2$,

(d) D est le segment parabolique AOB limité par la parabole BOA et le segment $[BA]$ d'extrémités $A(1; 2)$ et $B(-1, 2)$

(e) D est limité par $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$

(f) D est donné par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1, (x - 2)^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

(g) D est l'intérieur de la rose $r = 2 \sin 2\theta$

3. Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale suivante:

$$I = \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$$

4. Calculer les intégrales doubles suivantes:

(a) $\iint_D x^2 y dx dy$ où D est le domaine triangulaire limité par les points $O(0; 0)$, $A(3; 1)$, $B(-2; 1)$

(b) $\iint_D xy dx dy$ où D est le secteur circulaire AOB de centre O et dont les extrémités de l'arc de cercle sont $A(1; 1)$ et $B(-1; 1)$

(c) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq 2, \text{ et } 1 \leq xy \leq x^2\}$

(d) $\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq 2y \leq x \leq 2\}$

(e) $\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy$ où D est limité par les cercles $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + y^2 = b^2$ avec $0 < a < b$

5. Passer en coordonnées polaires en indiquant les limites d'intégration:

(a) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$

(b) $\iint_D y dx dy$ où D est le demi-cercle de centre $(\frac{a}{2}; 0)$ de diamètre a situé dans le demi-plan $y \geq 0$

6. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$, en utilisant le changement de variables indiqué:

(a) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x+y}}$ avec $x+y = u$; $y = uv$ où D est le triangle de sommets $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$

(b) $f(x, y) = \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$ avec $u = x - y$, $v = x + y$, où D est le triangle de sommets $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$

(c) $f(x; y) = x^2 + 2y^2$ avec $u = xy$ et $v = y$ où D est la surface limitée par les courbes $xy = 1$, $xy = 2$, et les droites $y = x$ et $y = 2x$.

7. Calculer le volume limité par:

(a) le plan $3x + 2y + z = 1$ et les plans de coordonnées

(b) $z = 2x^2 + y^2 + 1$; $x + y = 1$; et les plans de coordonnées

8. Déterminer la masse d'une plaque plane de densité $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprise entre la cardioïde d'équation polaire $r = 1 + \cos \theta$ et le cercle centré à l'origine et de rayon $R = 1$, et ne contenant pas l'origine

9. Calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine homogène D limité par la courbe $y = \sin x$ et la droite (oA) avec $A(\frac{\pi}{2}, 1)$

10. Calculer le moment d'inertie par rapport à (ox) du triangle limité par les droites : $x + y = 2$; $x = 2$; $y = 2$
