INSTITUT DES SCIENCES APPLIQUEES ET ECONOMIQUES (ISAE)

Centre associé au CNAM de Paris

MVA 006 : APPLICATIONS DE L'ANALYSE A LA GEOMETRIE, INITIATION A L'ALGEBRE LINEAIRE

Feuille de TD N°3

Exercice 1 :

Calculer les intégrales doubles suivantes:

a) $I = \iint_D x\, sh(xy) dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1\}$

b) $J = \iint_D (x + \frac{x}{y}) dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ et } 1 \le y \le e\}$

c) $K = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2 \text{ et } 1/x \le y \le x\}$

d) $L = \iint_D xydxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \ 0 < y < 1, \ x + y < 3\}$

e) $M = \iint_D y\, dxdy$ où D est le demi-disque supérieur de centre A(1,0) et de rayon 1

f) $N = \iint_D \frac{y}{x^2} dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le 2y \le x \le 2\}$

g) $O = \iint_D (x + 2y) dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \le y \le 3, \ y^2 - 4 \le x \le 5\}$

h) $P = \iint_D x^2 y\, dxdy$ où D est le domaine triangulaire défini par les points $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(-2,1)$

i) $Q = \iint_D x\, e^{x+2xy} dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ , \ y \le 2, \ xy \ge 2\}$

j) $R = \iint_D (y+1)\, dxdy$ où D est le domaine limité par les courbes $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$

Exercice 2 :

Dans chaque cas dessiner la région D et intégrer la fonction f sur D :

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x + 3y \le 1 \ , \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$, $f(x, y) = \sqrt{x + 3y}$

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3 \ , \ x + y \le 5, \ y \ge 2\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(x + y)^3}$

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y + 1 \ge 0 \ , \ x + 2y - 4 \le 0, \ 0 \le x \le 1, \ y \ge 0\}$, $f(x, y) = x$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$

e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = |x - y|$

Exercice 3 :

Calculer les intégrales doubles suivantes:

a) $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1 \text{ et } 0\le y\}$

b) $J=\iint_D x(x^2+y^2)\,dxdy$ où D est le demi-disque supérieur de centre O et de rayon 1

c) $K=\iint_D x\,dxdy$ où D est le demi-disque supérieur de centre A(1,0) et de rayon 1

h) $L=\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$ où D est l'intérieur du cercle d'équation $x^2+y^2-x=0$

i) $M=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2y\ge 0,\ \ x^2+y^2-1\le 0,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}$

j) $N=\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le a^2 \quad x+y\ge a\}$ $(a>0)$

k) $O=\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$

l) $P=\iint_D (x^2-y^2)\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 4\le x^2+y^2\le 16\ ,\ x\le\ y\le\sqrt{3}\mathrm{x}\}$

j) $Q=\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0<y<x<1,\ \ x^2+y^2>1\}$

Exercice 4 :

a) $I=\iint_D (4-x)\,dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 4\le x+y\le 5,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

***indication**:* *poser* $x+y=u$ et $y=v$

b) $J=\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x>0,\ \ y>0,\ \ x+y<1\}$

c) $K=\iint_D \frac{y}{x}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x<y<2x,\ \ x<y^2<2x\}$

d) $L=\iint_D (x+y)^3\,dxdy$ où D est le parallélogramme de sommets :(1,0), (3,1), (2,2) et (0,1)

e) $M=\iint_D x^3y^3\,dxdy$ où D est le domaine situé dans le premier quadrant et limité par les courbes d'équations : $x^2+y^2=2,\ \ x^2+y^2=4,\ \ x^2-y^2=1$ et $x^2-y^2=2$

Exercice 5:

Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $I = \iiint_D x^3 \cos z \sin z \, dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, \; 0 < y < 2\pi, \; 0 < z < \pi/2 \}$

b) $J = \iiint_D z \, dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0, \; x+y+z \leq 1 \}$

c) $K = \iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1 \}$

d) $L = \iiint_D (x^2+y^2) \, dxdydz$ D étant le cône limité par les surfaces d'équations $x^2+y^2 = 2z$ et $z = 2$

Exercice 6:

Calculer le volume de la région limitée par la surface d'équation $z = x^2+y^2+1$, le plan Oxy et le cylindre de génératrices parallèles à l'axe Oz ayant pour base le carré de sommets (0,0,0),(1,0,0),(1,1,0) et (0,1,0).

Exercice 7:

Calculer dans chaque cas le volume de D :

$a)$ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq x^2+y^2+2\}$

$b)$ D est la calotte sphérique définie par $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ et $z \geq \sqrt{2}$

Exercice 8:

1-Calculer l'intégrale $\iiint_V dxdydz$ où $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3, \; 0 \leq y \leq 3-x, \; 0 \leq z \leq 3-x-y \}$.

2-Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la sphère (S) d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2=3$. Le plan (π) tangent à (S) en M(1,1,1) coupe les axes $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$ et $(O,\vec{k})$ en A, B, C respectivement.

2-1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C.

2-2) Quel est le volume du tétraèdre OABC ?

2-3) Déterminer le volume limité par la sphère (S) et le tétraèdre OABC.

Exercice 9:

Dans chaque cas représenter graphiquement la région D , déterminer son aire et son centre de gravité :

$a)$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1, \; y^2 \leq x\}$

$b)$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \; y > 0, \; x^2 + \frac{y^2}{4} < 1\}$

$c)$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \geq 1, \; (x-2)^2+y^2 \leq 4, \quad 0 \leq y \leq x\}$

Exercice 10:

Soit (S) une plaque pesante d'épaisseur négligeable dont la forme est le demi-disque supérieur de rayon R et de centre O(0,0) relativement à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer le centre de gravité de (S) et son moment d'inertie par rapport à son diamètre dans chacun des cas suivants :

a) (S) est une plaque homogène de masse surfacique $f(x, y) = \sigma$
b) (S) est une plaque de masse surfacique $f(x, y) = y$

Exercice 11:

Soit (T) une plaque pesante triangulaire d'épaisseur négligeable limitée par l'axe des y et les droites $y = x$ et $y = 2 - x$, relativement à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer le centre de gravité de (T) et son moment d'inertie par rapport à l'axe des y dans chacun des cas suivants :

a) (T) est une plaque homogène de masse surfacique $f(x, y) = \sigma$
b) (T) est une plaque de masse surfacique $f(x, y) = 6x + 3y + 3$

Exercice 12:

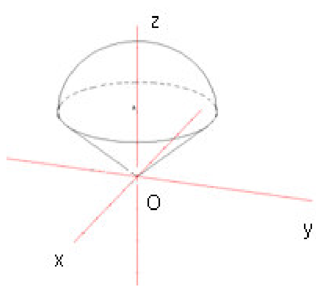
Munissons l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) le solide plein défini par le tétraèdre OABC où O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), l'unité de longueur étant le mètre .

La masse volumique de (S) est donnée par la fonction suivante : $f(x, y, z) = 2(1 - x)$ (en Kg/m³).

Calculer la masse (en Kg) de ce solide (S) et déterminer la position de son centre gravité.

Exercice 13:

Considérons le solide plein homogène D de masse volumique ρ occupant le domaine de l'espace limité supérieurement par une demi-sphère de rayon R et inférieurement par un cône de hauteur R et d'axe Oz(voir figure ci-contre)



1) Déterminer la position du centre de gravité G de D.
2) Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz de D.

Exercice 14:

Déterminer le centre gravité du domaine suivant considéré comme une plaque homogène.