1. Démontrer que les suites suivantes sont convergentes
   a) $(\frac{n}{n^3+n+1})_{n\geq 1}$ b) $(\frac{n^3}{n^3-n-1})_{n\geq 1}$ c) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ d) $(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n})_{n\geq 1}$
2. Démontrer que les suites suivantes sont divergentes
   a) $(\sin(\frac{\pi}{2}n)-2)_{n\geq 0}$ b) $[(\sqrt{1+\frac{1}{n}})^n]_{n\geq 1}$ c) $(\frac{n+7}{2+\sin n})_{n\geq 0}$ d) $(n+\cos n)_{n\geq 0}$
3. Evaluer les limites suivantes:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{1+3^n} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}(n(1-(1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}})) \qquad d)\ \lim_{n\to\infty}(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2})$$

4. Soient les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par:

$$u_n=(-1)^n\frac{n+1}{n+2} \quad et \quad v_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+2}$$

   a) Montrer que (u_n) et (v_n) divergent
   b) Que peut-on dire de la suite $(u_n+v_n)_n$?
5. Vérifer la monotonie de chacune des suites suivantes:
   a) $u_n=n-(\cos 1+\cos\frac{1}{2}+\cdots+\cos\frac{1}{n})$
   b) $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$
   c) $u_n=\dfrac{n^n}{n!}$
6. Considérons la suite $(u_n)_n$ donnée par:

$$0<u_0<1 \ \ et \ \ u_{n+1}=u_n-u_n^2$$

   Démontrer que $(u_n)_n$ converge vers 0
7. Considérons la suite $(u_n)_n$ donnée par

$$u_0=2 \ \ et \ \ 2u_nu_{n+1}=u_n^2+2$$

   a) Etudier les signes de $u_{n+1}-\sqrt{2}$ et de $u_{n+1}-u_n$
   b) Déduire que $(u_n)_n$ est convergente. Trouver sa limite
8. Soit $x\in]0,1[$ et considérons la suite $(s_n)_n$ définie par

$$s_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}, \ \ n\in IN^*$$

   a) Evaluer s_n-xs_n
   b) En déduire que la suite (s_n) est convergente, trouver alors sa limite

9. Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 > 2 \;\; et \;\; u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+u_n} + 1$$

a) Démontrer que $u_n \geq 0, \;\; \forall n \in IN$

b) Démontrer que (u_n) est bornée par 2

c) Démontrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite

d) Soit (v_n) une suite définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}, \;\; n \geq 0$$

i) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et trouver sa raison

ii) Etudier la nature de (v_n) et retrouver le résultat de la $3^{ième}$ question

10. On donne $k \in IR_+^*$ et on considère la suite (u_n) définie par

$$u_1 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{k + u_n}, \quad n \in IN^*$$

Soit α la racine positive de $x^2 - x - k = 0$ et soit $(v_n)_{n>0}$ la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$

a) Montrer que $\alpha > 1$

b) Etablir l'inégalité $|v_{n+1}| < \frac{1}{\alpha}|v_n|$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$ et la nature de la suite (u_n)

11. Considérons la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \sqrt{2} \;\; \text{ et } \;\; u_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{u_n}}, \quad n \in IN$$

a) Montrer que $u_n < 2$

b) Montrer que (u_n) est convergente

12. Soient $a, \; b \in IR_+$. On définit les deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = a, \; b_0 = b \;\; \text{ et } \;\; \forall n \geq 0 \;\; a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \;\; b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

a) i- Montrer que $\forall n \geq 1$ et $a \neq b$ on a:

$$\begin{cases} 0 \leq b_n \leq b_{n+!} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases} \tag{1}$$

ii- Retrouver (1) si $a = b$.

iii- En déduire que (a_n) et (b_n) ont la même limite

b) On note par $M(a,b)$ la limite commune de (a_n) et (b_n). Montrer que $\forall a \geq 0, \;\; b \geq 0, \;\; \lambda \geq 0$ et $n \in IN$ on a: $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$

Déduire que si $a > 0$ alors $M(a,b) = af(\frac{b}{a})$ où f est donnée par

$$f : \underset{x \longrightarrow M(1,x)}{IR_+ \to IR}$$

c) Soit (u_n) la suite (a_n) dans le cas où $a = 1$ et soit (v_n) la suite (b_n) quand $b = x$

i- Montrer que $\forall n \geq 0, \;\; u_n$ et v_n sont continues (en tant que fonctions de x)

ii- Montrer que $\forall n, \;\; \forall x \geq 0$ on a:

$$0 \leq u_n(x) - f(x) \leq 2^n |1 - x|$$

iii- Déduire que f est continue