Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Calcul différentiel et intégral- MVA005

Examen Partiel 2012-2013 **Durée : 2: 00 h**

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Exercice 1 (20 points) *On considère la fonction*

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si \quad x<2\\ a & si \quad x=2\\ x^2+b & si \quad x>2\end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction $f(x)$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour les valeurs de a et b ainsi trouvées, tracer le graphe (C_f) de $f(x)$.
3. Déterminer le point $M_1(x_1,y_1)$, où la tangent à C_f est parallèle à la droite $y+2x=1$.
4. Déterminer le point M_2,où la normale à C_f est perpendiculaire à la droite $4y-2x=1$.
5. Calculer au point M_2 les longueurs de la normale et de la sous-normale.

Solution 1 *:*

1. La fonction $f(x)$ est continue sur les intervalles $]-\infty,2[$ et $]2,+\infty[$ elle sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en 2, c'est-à-dire, si et seulement si

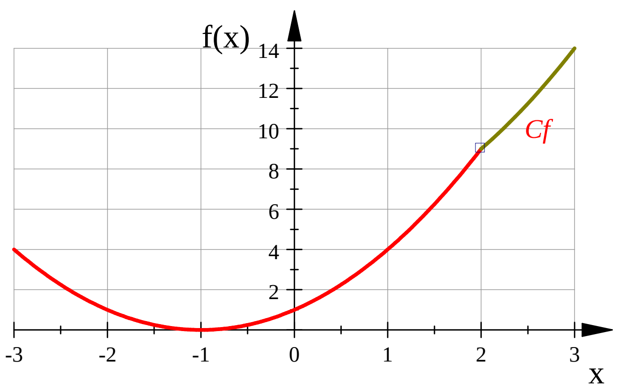
$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)\ \boxed{1\text{ point}}$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x+1)^2=9\ \boxed{2\text{ points}}$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(x^2+b\right)=b+4\ \boxed{2\text{ points}}$$

donc $f(x)$ est continue en 2 si $9=b+4=a\Longrightarrow\begin{cases}a=9 & \boxed{1\text{ point}}\\ b=5 & \boxed{1\text{ point}}\end{cases}$

2. Graphe $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si \quad x<2\\ 9 & si \quad x=2\\ x^2+5 & si \quad x>2\end{cases}$ $\boxed{3\text{ points}}$



3. Equation de la tangente au point $M_1(x_1, y_1)$ $(T): y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

   $(T) // (y + 2x = 1) \Longrightarrow f'(x_1) = -2$

   $$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & si \quad x < 2 \\ 0 & si \quad x = 2 \\ 2x & si \quad x > 2 \end{cases} = -2 \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 & x < 2 & \surd \\ x = -1 & x > 2 & \times \end{cases} \Longrightarrow M_1(-2, 1) \ \boxed{2 \text{ points}}$$

   $(T): y = -2x - 3$

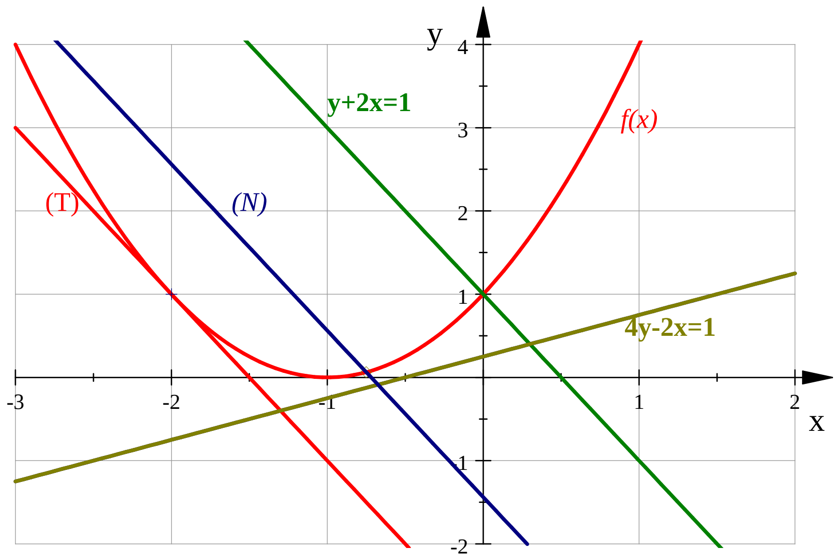
4. Equation de la normale au point $M_1(x_2, y_2)$ $(N): y - y_2 = -\dfrac{x - x_2}{f'(x_2)}$

   $(N) \perp (4y - 2x = 1) \Longrightarrow f'(x_2) = \dfrac{1}{2}$

   $$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & si \quad x < 2 \\ 2x & si \quad x > 2 \end{cases} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} & x < 2 & \surd \\ x = \dfrac{1}{4} & x > 2 & \times \end{cases} \Longrightarrow M_2\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$$

   $\boxed{2 \text{ points}}$

   $(N): y = -2x - \dfrac{23}{16}$



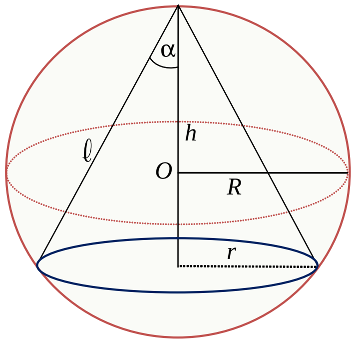
5. au point $M_2: \ell_{SN} = |y_2 \times f'(x_2)| = \left|\dfrac{1}{16} \times \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{32}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

   $\ell_N = \left|y_2\sqrt{1 + f'^2(x_2)}\right| = \left|\dfrac{1}{16} \times \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}}\right| = \dfrac{1}{32}\sqrt{5}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

   ou bien $\ell_N = \sqrt{y_2^2 + \ell_{SN}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{16}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{32}\right)^2} = \dfrac{1}{32}\sqrt{5}$

Exercice 2 *On considère la sphère Σ de centre O et de rayon $R = 1$. On voudrait mettre à l'intérieur de Σ la partie principale d'un cône, dont le sommet est le pôle nord de Σ. On suppose que le rayon de base du cône est r, sa hauteur est $h \in [1, 2]$ et sa directrice est de longueur ℓ. On rappelle que l'aire d'un tel cône est $S = \pi r \ell$ et le volume est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. L'objectif de cet exercice est de mettre un cône de surface maximale dans la sphère.*

1. Montrer que $r^2 = 2hR - h^2$ où $R = 1$ est le rayon de la sphère.



2. Déduire que $S^2 = 2\pi^2(2h^2 - h^3)$.

3. Quels doivent être h, r et ℓ si S est maximale?

4. Les valeurs ainsi trouvées de h et r, correspondent -ils à un volume maximal du domaine intérieur au cône? Justifier!

5. Trouver l'aire maximale du cône qu'on peut insérer dans la shpère.

Solution 2 *:*

1. On a $\cos\alpha = \dfrac{\ell/2}{R} = \dfrac{h}{\ell} \Longrightarrow \ell^2 = 2hR$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Dans une section plane du cône :

   $\ell^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow r^2 = \ell^2 - h^2 = 2hR - h^2 = 2h - h^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $S = \pi r\ell \Longrightarrow S^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2\left(2h - h^2\right)(2h) = 2\pi^2\left(2h^2 - h^3\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

3. $S_{\max} \to \dfrac{dS}{dh} = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$ $\Longrightarrow \dfrac{d}{dh}\left(2\pi^2 h^2 (2-h)\right) = 2\pi^2\left(4h - 3h^2\right) = 0 \Longrightarrow h = \dfrac{4}{3} \to S_{\max}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $r = \sqrt{2h - h^2} = \sqrt{2\left(\dfrac{4}{3}\right) - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\ell^2 = 2hR = 2h \Longrightarrow \ell = \sqrt{2h} = \sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{3}\left(2h^2 - h^3\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\dfrac{dV}{dh} = \dfrac{\pi}{3}\left(4h - 3h^2\right) = 0 \Longrightarrow h = \dfrac{4}{3} \to V_{\max}$ $\boxed{\text{2 points}}$

5. $S_{\max} = \pi r\ell = \pi \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\pi}{3\sqrt{3}}$ unité de surface. $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 3 *On considère la fonction définie sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x}\tan x$.

1. Calculer la dérivée de $f(x)$. En déduire que $f(x)$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Donner le tableau de variations de $f(x)$ et l'allure de son graphe(C_f) sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. En intégrant par parties, calculer $I = \displaystyle\int f^2(x)\,dx$

4. En déduire le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox,du domaine limité par l'axe Ox, la courbe C_f et les droites $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Solution 3 *:*

1. $f(x) = \sqrt{x}\tan x \Longrightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\left(\tan^2 x + 1\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

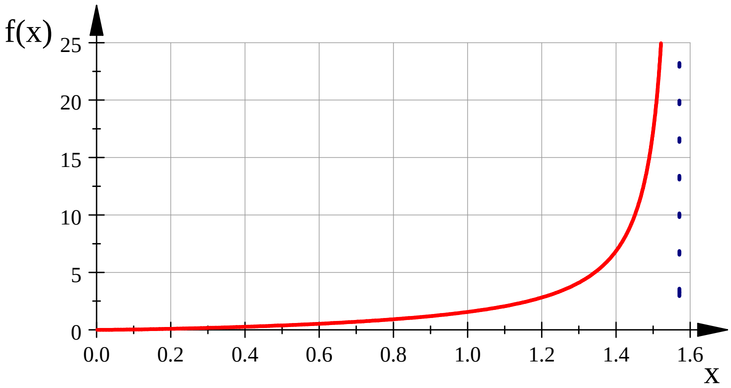
   $f'(x) > 0\ \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow f(x)$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $\boxed{\text{2 points}}$

2.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}\tan x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\sqrt{x}\tan x) = \infty$ $\boxed{\text{3 points}}$

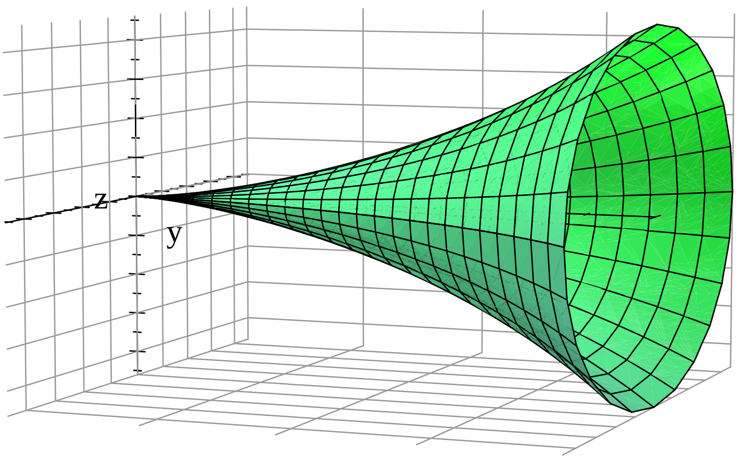
Graphe: $\boxed{\text{3 points}}$



3. $f^2(x) = x\tan^2 x \Longrightarrow I = \displaystyle\int x\tan^2 x\,dx$

   Par parties : $\begin{cases} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = \tan^2 x\,dx = \left(\tan^2 x + 1 - 1\right)dx & \Longrightarrow & v = \tan x - x \end{cases}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $I = x(\tan x - x) - \int(\tan x - x)\,dx = x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \dfrac{1}{2}x^2 + C$ $\boxed{\text{3 points}}$



4. $V_x = \pi \int_0^{\pi/4} f^2(x)\,dx = \pi \left(x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{1}{2}x^2 + C \right)_0^{\pi/4}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$= \pi \left(\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} \right) = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - \ln 2 \right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

Exercice 4 (40 points) *On considère les fonctions*

$$f(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \quad et \quad g(x) = e^{3x}$$

1. Caluler : $\lim_{x \to 1} f(x)$.
2. Calculer l'intégrale: $I = \int f(x)\,dx$.
3. Calculer $g'(1)$ la dérivée de $g(x)$ au point $x_0 = 1$.
4. En utilisant la définition, Calculer la dérivée de $g(x)$au point $x_0 = 1$ en déduire $\lim_{x \to 1} \frac{e^{3x} - e^3}{x^3 - 1}$
5. Soit a un réel positif, donné, Calculer l'intégrale:

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + ax}$$

et déduire : $K = \int \frac{dx}{e^{3x} - e^3}$ $\quad et\ L = \int \frac{dx}{(\sin x + 3)\tan x}$

Solution 4 *:*

1. $f(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$

$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\frac{3}{1-x^3} = \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \left(\frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \right) = -\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $f(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}$

$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{x^2+x+1} \right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Alors $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$I = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+x+1\right) + 3\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} \right) \right) + C$

$= \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+x+1}} - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$ $\boxed{\text{4 points}}$

3. $g'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{3x} - e^3}{x-1} = 3e^3$ $\boxed{\text{3 points}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{3x} - e^3}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{3x} - e^3}{(x-1)(x^2+x+1)}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{3x} - e^3}{(x-1)} \times \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x^2+x+1)} = \dfrac{g'(1)}{1+1+1} = e^3$ $\boxed{\text{3 points}}$

5. $\dfrac{1}{x^2+ax} = \dfrac{1}{(x+a)x} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+x}\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $J = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+ax} = \frac{1}{a}\left(\ln x - \ln(a+x)\right) = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{x+a}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   Pour calculer K on fait un chagement de variable :

   $$\left.\begin{array}{r} u = e^{3x} - e^3 \quad \Longrightarrow \quad du = 3e^{3x}dx = 3\left(u + e^3\right)dx \\ dx = \dfrac{du}{3(u+e^3)} \end{array}\right\} \boxed{\text{3 points}}$$

   $K = \displaystyle\int \frac{dx}{e^{3x} - e^3} = \int \frac{du}{3(u+e^3)u} = \frac{1}{3e^3}\left(\ln u - \ln\left(u+e^3\right)\right) + C$

   $= \dfrac{1}{3e^3}\left(\ln\left(e^{3x} - e^3\right) - \ln\left(e^{3x}\right)\right) + C$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \dfrac{1}{3e^3}\left(\ln\left(e^{3x} - e^3\right) - 3x\right) + C$

   $L = \displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x + 3)\tan x} = \int \frac{\cos x dx}{(\sin x + 3)\sin x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= \displaystyle\int \frac{d(\sin x)}{(\sin x + 3)\sin x} = \frac{1}{3}\ln\frac{\sin x}{\sin x + 3} + C$ $\boxed{\text{3points}}$