# Chapitre 2. Surfaces de $\mathbb{R}^3$

#### Pierre Pansu

## 12 juillet 2005

Il s'agit d'attacher à une surface des invariants qui ne dépendent pas du choix de paramétrisation.

Pour disposer d'un choix d'exemples, on commence en section 1 par paramétrer des surfaces définies en termes géométriques.

La section 2 donne la formule pour le calcul de l'aire d'une surface. La seconde forme fondamentale est introduite en section 3. Elle joue pour une surface le rôle que joue la courbure pour une courbe : elle contient l'information au 2ème ordre, indépendamment de tout choix de paramétrisation. C'est un objet plus complexe, une forme quadratique sur le plan tangent. On peut y penser comme à une fonction sur les directions (la courbure des sections par des plans perpendiculaires au plan tangent). Comme elle est quadratique, elle est en fait déterminée par un repère orthonormé du plan tangent (les directions principales) et deux nombres, les courbures principales (ou alternativement par la courbure moyenne et la courbure de Gauss).

La courbure de Gauss et la courbure moyenne ont chacune une interprétation géométrique. La courbure de Gauss donne l'aire de l'image de la surface par l'application de Gauss (section 4), tandis que la courbure moyenne intervient dans l'aire des surfaces équidistantes (section 5). La positivité de la courbure de Gauss traduit la convexité. L'annulation de la courbure moyenne caractérise les surfaces minimales, qui modélisent les films de savon. A la différence de la courbure moyenne, la courbure de Gauss est invariante par déformation isométrique : c'est un invariant intrinsèque de la surface. La courbure de Gauss et ses généralisations en dimension supérieure joueront donc un grand rôle dans les chapitres ultérieurs.

# 1 Exemples de surfaces

## 1.1 Surfaces de révolution

**Définition 1.1** Soit c un arc tracé dans le demi-plan vertical  $\{y = 0, x > 0\}$ . La surface de révolution de méridienne c est la surface balayée par c lorsqu'elle tourne autour de l'axe vertical.

Autrement dit, c'est la réunion des cercles d'axe Oz passant par un point de c.

## 1.2 Surfaces d'égale pente

**Définition 1.2** Soit c une courbe fermée tracée dans le plan horizontal  $\{z = 0\}$ , soit  $\alpha \in [0, \pi]$ . La surface d'égale pente  $\alpha$  s'appuyant sur c est l'enveloppe des plans tangents à c et dont la normale fait un angle  $\alpha$  avec la verticale.

C'est donc la réunion des droites coupant c à angle droit et faisant un angle  $\alpha$  avec Oz.

Exercice 1 Paramétrer la surface d'égale pente  $\alpha$  s'appuyant sur une courbe plane.

## 1.3 Tubes

**Définition 1.3** Soit c une courbe dans l'espace, et  $\epsilon > 0$ . Le tube de largeur  $\epsilon$  autour de c est la surface balayée par un cercle de rayon  $\epsilon$  tracé dans le plan normal à c.

Rappel 1.4 Soit c une courbe sans point d'inflexion, paramétrée par son abscisse curviligne. Le trièdre de Frenet  $(\tau, \nu, b)$  est défini comme suit.  $\tau = \frac{dc}{ds}$  est la tangente unitaire orientée. Si l'accélération  $\frac{d\tau}{ds}$  ne s'annule pas (i.e. en dehors des points d'inflexion),  $\nu = \frac{d\tau}{ds}/|\frac{d\tau}{ds}|$  est la normale unitaire qui est colinéaire à l'accélération, de même sens.  $b = \tau \wedge \nu$  complète une base orthonormée directe.

**Rappel 1.5** Courbure et torsion des courbes gauches. Le nombre positif ou nul  $\kappa = \left| \frac{d\tau}{ds} \right|$  s'appelle la courbure de la courbe c. Il s'annule en s si et seulement si c(s) est un point d'inflexion de c. Si  $\kappa \neq 0$ , on définit la torsion  $\theta = -\frac{d\nu}{ds} \cdot b$ . Alors

$$\begin{array}{rcl} \frac{d\tau}{ds} & = & \kappa \, \nu, \\ \frac{d\nu}{ds} & = & -\kappa \, \tau - \theta \, b, \\ \frac{db}{ds} & = & \theta \nu. \end{array}$$

Exercice 2 Soit c une courbe sans point d'inflexion. En utilisant le trièdre de Frenet, paramétrer le tube de largeur  $\epsilon$  autour de c.

# 2 Première forme fondamentale

#### 2.1 Définition

Soit X une surface dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Le plan tangent hérite de la structure euclidienne de l'espace ambiant. Etant donnée une paramétrisation locale  $(u, v) \mapsto X(u, v)$ , si

$$w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$$

est un vecteur tangent, sa norme euclidienne est

$$\|w\|^2 = a^2 \|\frac{\partial X}{\partial u}\|^2 + 2ab\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + b^2 \|\frac{\partial X}{\partial v}\|^2$$
.

Si  $t \mapsto c(t) = (u(t), v(t))$  est une courbe tracée dans le domaine des paramètres, la longueur de la courbe correspondante  $\mapsto X(u(t), v(t))$  tracée sur la surface vaut

$$\operatorname{Long}(X \circ c) = \int \sqrt{u'(t)^2 \|\frac{\partial X}{\partial u}\|^2 + 2u'(t)v'(t)\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + v'(t)^2 \|\frac{\partial X}{\partial v}\|^2} dt.$$

La forme quadratique (dépendant du point (u, v))

$$ds^{2} = \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \parallel^{2} du^{2} + 2 \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} du dv + \parallel \frac{\partial X}{\partial v} \parallel^{2} dv^{2}$$

s'appelle parfois la première forme fondamentale de la surface X.

On note traditionnellement 
$$E = \|\frac{\partial X}{\partial u}\|^2$$
,  $G = \|\frac{\partial X}{\partial v}\|^2$ ,  $F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}$ .

#### 2.2 Aire

La première forme fondamentale sert non seulement au calcul des longueurs de courbes, mais aussi à celui des aires.

**Définition 2.1** L'aire (area) d'une surface  $(u,v) \mapsto X(u,v)$   $(u,v) \in U$ , est donnée par l'intégrale

$$Aire(X) = \int_{U} \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| du dv.$$

L'aire ne dépend pas du choix de paramétrisation. Cela résulte de la formule de changement de variable dans les intégrales doubles. Remarquer que l'intégrand vaut

$$\|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Noter que le vecteur  $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$  est orthogonal au plan tangent, et non nul par hypothèse. Il détermine donc une orientation normale du plan tangent. C'est l'orientation déterminée par la paramétrisation  $(u,v)\mapsto X(u,v)$ . Le vecteur unitaire normal orienté à X est

$$\Gamma(X(u,v)) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\|}.$$

Exercice 3 On paramètre la sphère unité par la latitude  $\theta$  et la longitude  $\phi$ . Ecrire cette paramétrisation. La normale orientée sort elle ou rentre-t-elle dans la sphère? Ecrire la première forme fondamentale. Calculer la longueur d'un parallèle. Calculer l'aire de la sphère unité.

**Exercice 4** Si P et Q sont deux points de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , on définit leur distance d(P,Q) comme la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur la sphère qui relient P à Q. Montrer que  $d(P,Q) = \operatorname{Arccos}(P \cdot Q)$ , i.e. que la borne inférieure est atteinte par un des arcs du grand cercle passant par P et Q.

**Exercice 5** Calculer l'aire d'une surface de révolution générale, puis dans le cas particulier du tore de révolution dont la méridienne est un cercle de rayon  $r_2$  dont le centre est situé à distance  $r_1 > r_2$  de l'axe.

Exercice 6 Soit c une courbe sans point d'inflexion. Calculer la première forme fondamentale et l'aire du tube de largeur  $\epsilon$  autour de c, pour  $\epsilon > 0$  assez petit.

## 3 Seconde forme fondamentale

La courbure d'une courbe plane en un point P est un nombre indépendant d'un choix de paramétrisation. On la définit à partir d'une paramétrisation canonique, l'abscisse curviligne. Voici une autre définition possible, reposant sur un autre choix de paramétrisation canonique. Soit  $\tau(P)$  le vecteur tangent unitaire et  $\nu(P)$  le vecteur normal unitaire. Dans le repère  $(P, \tau(P), \nu(P))$ , la courbe est un graphe  $t \mapsto (t, f(t))$ , où f(0) = f'(0) = 0. Alors f admet le développement limité à l'ordre f

$$f(t) = \frac{1}{2}\kappa(P)t^2 + o(t^2)$$

en 0 et on pourrait partir de ce développement limité pour définir la courbure en P. La même idée va nous guider pour définir la courbure d'une surface.

## 3.1 Courbure d'un graphe

Soit f une fonction sur  $\mathbf{R}^2$  qui s'annule avec ses 2 dérivées partielles en (0,0). Considérons son graphe  $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$ . C'est une surface dont le plan tangent en P = (0,0,0) est le plan des coordonnées x et y. f admet un développement limité à l'ordre 2 en (0,0) de la forme

$$f(x,y) = px^2 + 2qxy + ry^2 + o(x^2 + y^2).$$

La forme quadratique  $2(px^2+2qxy+ry^2)$  sur le plan tangent va tenir lieu de courbure du graphe au point P. La courbure d'une surface n'est pas seulement un nombre, mais une forme quadratique (3 composantes indépendantes).

# 3.2 Paramétrisation d'une surface par son plan tangent

Soit X une surface normalement orientée. Alors X est le graphe d'une fonction définie sur son plan tangent en P. Plus précisément, il existe une unique fonction f sur  $T_PX$  telle que l'application

$$T_P X \to \mathbf{R}^3, \quad v \mapsto P + v + f(v)\Gamma(P)$$

soit une paramétrisation locale de X.

**Définition 3.1** La partie principale q du développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est une forme quadratique sur  $T_PX$ , définie indépendamment de tout choix de paramétrage de X. On appelle II = 2q la seconde forme fondamentale de X en P.

Remarque 3.2 Changer l'orientation normale de la surface change le signe de la seconde forme fondamentale.

Exercice 7 Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère unité au pôle nord.

Exercice 8 Soit  $t \mapsto c(t)$  une courbe tracée dans le plan horizontal  $\{z = 0\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit C le cylindre droit sur c, i.e. la réunion des droites verticales coupant la courbe c. Calculer la seconde forme fondamentale du cylindre C en l'un de ses points.

# 3.3 Courbures principales, directions principales, sections normales

**Définition 3.3** Il existe un unique endomorphisme symétrique S du plan tangent  $T_PX$  tel que pour tout  $v \in T_PX$ ,  $II(v) = v \cdot S(v)$ . On l'appelle parfois endomorphisme de Weingarten, (Weingarten map). Les valeurs propres  $k_1$ ,  $k_2$  de S s'appellent les courbures principales de X en P et les droites propres de S s'appellent les directions principales. Une courbe tracée sur X dont la vitesse est en chaque point une direction principale s'appelle une ligne de courbure. La trace de S s'appelle la courbure moyenne (mean curvature) et le déterminant de S la courbure de Gauss (Gauss curvature).

Soit  $(e_1, e_2)$  une base orthonormée formée de vecteurs propres de S (i.e. de directions principales). Dans cette base, la forme quadratique  $II_P$  s'écrit

$$II(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1^2k_1 + a_2^2k_2$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont les courbures principales. Alors

- II est non dégénérée si et seulement si les deux courbures principales sont non nulles :
- II est définie positive si et seulement si  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$ ;
- II possède 2 droites isotropes si et seulement si  $k_1k_2 < 0$ ;

L'intersection du plan (orienté) passant par P et dirigé par  $\tau$  et  $\nu$  est une courbe, et sa courbure en P vaut par définition  $II(\tau)$ . Si  $\tau(\theta)$  fait un angle  $\theta$  avec  $e_1$ , alors

$$II(\tau(\theta)) = k_1^2 \cos(\theta)^2 + k_2^2 \sin(\theta)^2.$$

Par conséquent, les courbures principales sont les valeurs extrèmes de la courbure des sections planes, elles sont atteintes par les directions principales.

La courbure moyenne s'écrit  $h = \operatorname{tr}(S) = k_1 + k_2$ , la courbure de Gauss  $K = \det(S) = k_1 k_2$ . On en donnera plus loin des interprétations géométriques.

## 3.4 Intersection avec le plan tangent

Soit P un point de la surface X. Soit  $\nu$  le vecteur unitaire normal orienté en P. Si  $II_P$  est définie positive (resp. définie négative), il résulte du développement limité que la fonction f garde un signe constant au voisinage de P, et ne s'annule qu'en P.

Le lieu des zéros (vecteurs isotropes) de la forme quadratique  $II_P$  dans le plan tangent donne une idée de l'intersection de la surface X avec son plan tangent. En effet, si  $II_P$  est non dégénérée, le lemme de Morse (voir [?]) garantit qu'il existe un difféomorphisme local du plan tangent, fixant l'origine et dont la différentielle à l'origine est l'identité, envoyant l'intersection  $T_PX \cap X$  sur le cône isotrope de  $II_P$ .

- **Proposition 3.4** si  $II_P$  est définie positive (resp. définie négative), la surface X est entièrement au-dessus (resp. au-dessous) de son plan tangent au voisinage de P:
  - si  $II_P$  change de signe, alors  $T_PX \cap X$  coïncide au voisinage de P avec la réunion de deux courbes transverses en P, et chacune est tangente à une direction asymptotique de  $II_P$ , i.e. une droite isotrope.

Par conséquent, si la courbure de Gauss est strictement positive, la surface reste d'un seul côté de son plan tangent. Si au contraire la courbure de Gauss est strictement négative, la surface traverse son plan tangent.

En particulier, si X est le bord d'un convexe, alors la courbure de Gauss de X est positive ou nulle. Sa seconde forme fondamentale relative à la normale sortante est en chaque point une forme quadratique négative ou nulle.

#### 3.5 Courbes tracées sur une surface

**Lemme 3.5** Soit  $t \mapsto Y(t)$  une courbe tracée sur la surface X. Soit  $P = Y(0) \in X$ ,  $\tau = Y'(0) \in T_P X$ . Alors  $II_P(\tau)$  est la composante normale à X de l'accélération Y''(0).

**Preuve.** Notons c(t) la projection orthogonale de Y(t) - P sur le plan vectoriel  $T_PX$ . Ecrivons X comme le graphe d'une fonction f définie sur son plan tangent. Alors pour tout t proche de 0,

$$Y(t) = P + c(t) + f(c(t)\nu = P + t\tau + \frac{t^2}{2}Y''(0) + o(t^2)$$

mais aussi

$$Y(t) = P + t\tau + \frac{t^2}{2}(c''(0) + II(\tau)\nu) + o(t^2)$$

donc  $II_P(\tau)$  est la composante normale à X de l'accélération.

Exercice 9 Supposons que la surface X contient la droite D. Montrer que D est une direction asymptotique de X

## 3.6 Calcul des courbures principales

**Proposition 3.6** Soit  $(u, v) \mapsto X(u, v)$  une surface paramétrée. La seconde forme fondamentale au point X(u, v) est la forme quadratique sur le plan tangent (engendré par  $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$ ) peut se calculer comme suit.

$$II_{X(u,v)}(a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)) = a^2A + 2abB + b^2C$$

où

$$\begin{split} A = & \parallel \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \parallel^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u,v), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)), \\ B = & \parallel \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \parallel^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(u,v), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)), \\ C = & \parallel \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \parallel^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u,v), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)). \end{split}$$

**Preuve.** On considère la courbe  $t \mapsto Y(t) = X(u+at, v+bt)$  tracée sur la surface. Ses dérivées sont

$$Y'(t) = a\frac{\partial X}{\partial u}(u + at, v + bt) + v\frac{\partial X}{\partial v}(u + at, v + bt)$$

et

$$Y''(0) = a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u, v) + 2ab \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(u, v) + b^2 \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u, v).$$

Par conséquent

$$II_{X(u,v)}(a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v))$$

$$= II(Y'(0))$$

$$= Y''(0) \cdot \nu$$

$$= \|\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)\|^{-1} \det(Y''(0), \frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v))$$

$$= a_2A + 2abB + b^2C.$$

Exercice 10 Soit X le paraboloïde hyperbolique d'équation z=xy. Calculer sa seconde forme fondamentale, ses courbures principales. Quelles sont les directions asymptotiques? On utilisera deux systèmes de coordonnées différents,  $(u,v) \mapsto X(u,v) = (u,v,uv)$  et  $(u',v') \mapsto X_1(u',v') = (u'/v',v',u')$  et on comparera les résultats obtenus.

**Exercice 11** Soit c une courbe tracée dans le plan  $\{z = 0\}$ . Soit V = (0, 0, 1), soit X le cône de sommet V et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale. Quelle est sa signature?

Exercice 12 Soit c une courbe tracée sur la sphère unité. Soit X le cône de sommet l'origine et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale.

Corollaire 3.7 Soit  $(u, v) \mapsto X(u, v)$  une surface paramétrée, munie de l'orientation normale déterminée par la paramétrisation. Notons

$$E du^{2} + 2F du dv + G dv^{2}$$
 et  $A du^{2} + 2B du dv + C dv^{2}$ 

la première et la seconde forme fondamentales. La matrice dans la base  $(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v})$  de l'endomorphisme symétrique S qui relie les deux formes quadratiques est le produit

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

(elle n'est pas nécessairement symétrique). Les courbures principales sont les valeurs propres de cette matrice et les directions principales ses droites propres. En particulier, la courbure de Gauss est donnée par la formule

$$K(X(u,v)) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

**Preuve.** Soient  $w = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v}$  et  $w = a' \frac{\partial X}{\partial u} + b' \frac{\partial X}{\partial v}$  deux vecteurs tangents à X au point X(u,v). Leur produit scalaire s'écrit au moyen de la première forme fondamentale,

$$w' \cdot w = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme symétrique S est défini par la relation

$$II_{X(u,v)}(w',w) = w' \cdot S(w).$$

Sa matrice M satisfait donc

$$w' \cdot S(w) = (a' \ b') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$= (a' \ b') \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

d'où l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres d'un endomorphisme se calculent à partir de sa matrice dans n'importe quelle base, les courbures principales sont les valeurs propres de M.

Enfin

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \det(M) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

donc

$$K = \det(S) = \det(M) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}. \blacksquare$$

Exercice 13 Soit X la surface de révolution décrite par une courbe plane située dans un plan vertical (la méridienne) qu'on fait tourner autour de l'axe des z. Paramétrer X, calculer les courbures principales et les directions principales. Traiter le cas particulier du tore de révolution de méridienne circulaire.

Exercice 14 Soit c une courbe gauche sans point d'inflexion. Dans le plan affine passant par c(t) et orthogonal à la tangente à c, on trace un cercle de rayon  $\epsilon$ . Soit X la surface de décrite par ce cercle. Calculer l'aire, l'intégrale par rapport à l'élément d'aire de la courbure de Gauss ainsi que de sa valeur absolue, les courbures principales et les directions principales.

## 3.7 Contact d'ordre 2

Soit X une surface. Parmi tous les plans affines passant par P, le plan  $\pi = P + T_P X$  est le seul qui approche le la surface au sens suivant : il existe un difféomorphisme  $\phi$  tel que  $\phi(P) = P$ ,  $d_P \phi$  est l'identité et  $X = \phi(\pi)$  au voisinage de P.

Cela a pour conséquence le fait que le plan  $\pi$  épouse la surface : si  $M \in X$  est voisin de P, il existe  $M' \in \pi$  tel que

$$||M - M'|| \le \epsilon(||M - P||)$$

où la fonction  $\epsilon$  satisfait  $\lim_{x\to 0} x^{-1} \epsilon(x) = 0$ . En effet, comme  $d_P(\phi^{-1}) = id$ , pour  $M \in X$  voisin de P,

$$\phi^{1}(M) = P + (M - P) + o(||M - P||)$$

donc  $M' = \phi^1(M) \in \pi$  et ||M - M'|| = o(||M - P||).

L'exemple du plan tangent suggère une notion de contact plus générale.

**Définition 3.8** Deux surfaces  $X_1$  et  $X_2$  ont un contact d'ordre k au point P s'il existe un difféomorphisme local  $\phi$  envoyant  $X_1$  and  $X_2$  et admettant en P un développement limité de la forme

$$\phi(M) = P + o(\| M - P \|^k).$$

**Exemple 3.9** Deux surfaces ont un contact d'ordre 1 en P si et seulement si elles contiennent P et ont même plan tangent en P.

En effet, la condition de contact à l'ordre 0 est que  $P \in X_1 \cap X_2$ . S'il y a contact à l'ordre 1, le difféomorphisme  $\phi$  a une différentielle en P égale à l'identité, donc  $T_PX_2 = d_P\phi(T_PX_1) = T_PX_1$ . Inversement, si les surfaces  $X_1$  et  $X_2$  ont même plan tangent en P, elles ont chacune un contact d'ordre un avec le même plan affine, donc elles ont un contact d'ordre 1 entre elles.

**Proposition 3.10** Deux surfaces  $X_1$  et  $X_2$  ont un contact d'ordre 2 au point P si et seulement si elles contiennent P, y ont même plan tangent et même seconde forme fondamentale.

**Preuve.** Composer une paramétrisation d'une surface avec un difféomorphisme tangent à l'ordre 2 à l'identité en P ne change pas les dérivées secondes en P, donc ne change pas la seconde forme fondamentale, proposition 3.6.

Inversement, supposons que  $X_1$  et  $X_2$  ont même plan tangent et même seconde forme fondamentale en P. Choisissons des coordonnées cartésiennes d'origine P et telles que le plan tangent commun en P ait pour équation  $\{z=0\}$ . Ecrivons  $X_1$  et  $X_2$  comme des graphes au-dessus de leur plan tangent commun, i.e. utilisons les paramétrisations

$$(u, v) \mapsto X_1(w) = (u, v, f_1(u, v))$$
 et  $(u, v) \mapsto X_2(w) = (u, v, f_2(u, v)).$ 

pour  $X_1$  et  $X_2$ . Posons

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z + f_2(x, y) - f_1(x, y)).$$

Alors  $\phi$  est un difféomorphisme local de  ${\bf R}^3$  qui fixe P et dont la différentielle en P est l'identité. Il envoie  $X_1$  sur  $X_2$ . L'égalité des secondes formes fondamentales entraı̂ne que le développement limité à l'ordre 2 de  $f_2 - f_1$  est de la forme

$$(f_2 - f_1)(x, y) = o(x^2 + y^2)$$

donc celui de  $\phi$  est de la forme

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z) + o(x^2 + y^2 + z^2).$$

i.e.

$$\phi(M) = P + (M - P) + o(\|M - P\|^2).$$

donc il y a contact à l'ordre 2. ■

# 4 L'application de Gauss

## 4.1 Définition

**Définition 4.1** Soit X une surface normalement orientée dans  $\mathbb{R}^3$ . L'application de X dans la sphère unité  $S^2$  qui à un point P associe le vecteur unitaire normal orienté  $\Gamma(P)$  s'appelle l'application de Gauss (Gauss map).

Remarque 4.2 Si X est une surface normalement orientée de classe  $C^k$ , l'application de Gauss est de classe  $C^{k-1}$ .

# 4.2 Dérivée de l'application de Gauss

**Lemme 4.3** Soit  $t \mapsto c(t)$  une courbe tracée sur une surface X, telle que c(0) = Pet  $c'(0) = \tau$ . Soit  $\Gamma : X \to S^2$  l'application de Gauss. Alors pour tout vecteur tangent  $w \in T_P X$ ,

$$(\frac{d}{dt}\Gamma(c(t))) \cdot w = -II(\tau, w)$$

où on a encore noté II la forme bilinéaire symétrique associée à II. En particulier,

$$\frac{d}{dt}\Gamma(c(t)) \cdot \tau = -II(\tau).$$

**Preuve.** Prolongeons la paramétrisation  $t\mapsto c(t)$  en une paramétrisation locale  $(t,u)\mapsto X(t,u)$  de X telle que  $\frac{\partial X}{\partial u}=w$  (c'est toujours possible). Notons  $\Gamma(t,u)=\Gamma(X(t,u))$ . Comme pour tout  $t,\frac{\partial X}{\partial u}\cdot\Gamma(t,u)=0$ , il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = 0$$

i.e.

$$\left(\frac{d}{dt}\Gamma(c(t))\right)\cdot w = -G\cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = -II(\tau, \frac{\partial X}{\partial u}) = -II(\tau, w)$$

d'après la proposition 3.6.

Corollaire 4.4 La seconde forme fondamentale est la dérivée de l'application de Gauss. Plus précisément, notons S l'endomorphisme symétrique de l'espace tangent  $T_PX$  tel que pour tout vecteur tangent w  $II_P(w) = S(w) \cdot w$ . Alors l'espace tangent  $T_{\Gamma(P)}S^2 = \Gamma(P)^{\perp} = T_PX$  et  $S = -d\Gamma$ .

**Théorème 1** L'intégrale de la courbure de Gauss par rapport à l'élément d'aire est l'aire de l'image de l'application de Gauss. En particulier, pour une surface compacte et sans bord, l'intégrale de la courbure de Gauss est un multiple entier de l'aire de la sphère unité,

$$\int_X K \, dA = 4\pi \delta.$$

Le nombre  $\delta$  (au signe près) est la moitié de la caractéristique d'Euler de X, et ne dépend que de la topologie de X.

#### Preuve.

Voir chapitres suivants.

# 4.3 Déformations isométriques

**Définition 4.5** Deux surfaces  $X_1$  et  $X_2$  sont dites isométriques s'il existe un difféomorphisme de l'une sur l'autre qui préserve la longueur des courbes. Autrement dit, qui préserve la première forme fondamentale.

**Exemple 4.6** Un cône, un cylindre et un plan sont localement isométriques.

En effet, si C est le cylindre vertical de section une courbe plane horizontale c paramétrée par son abscisse curviligne, l'application

$$\mathbf{R}^2 \to C$$
,  $(u, v) \mapsto X(u, v) = (c(u), v)$ 

est isométrique, car la première forme fondamentale dans cette paramétrisation se lit  $du^2 + dv^2$ .

Pour la même raison, si K est le cône de sommet l'origine s'appuyant sur une courbe c tracée sur la sphère unité et paramétrée par son abscisse curviligne, l'application

$$\mathbf{R}^2 \to K, \quad (s,r) \mapsto r \, c(s)$$

est isométrique.

**Définition 4.7** Soit X une surface, soient P et Q deux points de X. La distance intrinsèque entre P et Q est la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur X reliant P à Q.

**Exemple 4.8** Si X est la sphère unité, la distance intrinsèque est donnée par la formule

$$dist(P, Q) = Arccos(P \cdot Q).$$

Voir exercice 4.

**Théorème 2** Soit X une surface, P un point de X. Pour r > 0, notons  $C_r$  le lieu des points de X dont la distance intrinsèque à P est exactement égale à r. Alors, pour r assez petit,  $C_r$  est une courbe. On a le développement limité

Long
$$(C_r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(P)r^3 + o(r^3)$$

où K(P) est la courbure de Gauss en P.

**Preuve.** Voir chapitre suivant.

Corollaire 4.9 Un difféomorphisme isométrique entre deux surfaces préserve la courbure de Gauss.

Exemple 4.10 La sphère n'est pas localement isométrique à un plan.

On peut montrer que deux surfaces de même courbure constante sont toujours localement isométriques.

Remarque 4.11 On peut en fait donner une formule pour la courbure de Gauss en fonction de la première forme fondamentale seule, c'est le Theorema Egregium de Gauss. Plus généralement, l'étude des propriétés intrinsèques d'une surface munie d'une première forme fondamentale est l'objet de la géométrie riemannienne, voir chapitres suivants.

# 5 Surfaces équidistantes

**Définition 5.1** Soit X une surface normalement orientée. La surface équidistante (offset surface)  $X_{\epsilon}$  est le lieu des points de la forme  $P + \epsilon \Gamma(P)$  où  $\Gamma(P)$  est le vecteur normal unitaire orienté en P.

## 5.1 Aire et courbure des surfaces équidistantes

**Lemme 5.2** Soit  $(u, v) \mapsto X(u, v)$  une paramétrisation locale d'une surface. Posons

$$(u, v) \mapsto X_{\epsilon}(u, v) = X(u, v) + \epsilon \Gamma(X(u, v))$$

C'est une paramétrisation locale de la surface équidistante  $X_{\epsilon}$  tant que le produit de  $\epsilon$  et des courbures principales de X reste inférieur à 1.

Soit S l'endomorphisme qui relie la seconde forme fondamentale de X à la première. Soit M sa matrice dans la base  $(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v})$ . Alors la première forme fondamentale de  $X_{\epsilon}$  est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} E_{\epsilon} & F_{\epsilon} \\ F_{\epsilon} & G_{\epsilon} \end{pmatrix} = (1 - \epsilon M)^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (1 - \epsilon M).$$

La seconde forme fondamentale de  $X_{\epsilon}$  est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{\epsilon} & B_{\epsilon} \\ B_{\epsilon} & C_{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1 - \epsilon M).$$

En particulier, pour  $\epsilon$  petit,

$$Aire(X_{\epsilon}) = Aire(X) - \epsilon \int_{X} h \, dA + \epsilon^{2} \int_{X} K \, dA$$

où h est la courbure moyenne et K la courbure de Gauss de X. La courbure de Gauss de  $X_{\epsilon}$  vaut

$$K_{\epsilon}(P + \epsilon \Gamma(P)) = \frac{K(P)}{1 - \epsilon h(P) + \epsilon^2 K(P)}.$$

**Preuve.** Soit  $w=a\frac{\partial X}{\partial u}+b\frac{\partial X}{\partial v}$  un vecteur tangent à X en P. Soit  $t\mapsto c(t)$  une courbe tracée sur X telle que c(0)=P et c'(0)=w. La courbe

$$t \mapsto c_{\epsilon}(t) = c(t) + \epsilon \Gamma(c(t))$$

est tracée sur  $X_{\epsilon}$ . Sa vitesse en t=0 vaut

$$w_{\epsilon} = c'(0) + \epsilon d_P \Gamma(c'(0)) = w - \epsilon S(w)$$

d'après le corollaire 4.4. C'est un vecteur de  $T_PX$ . On conclut que les plans tangents  $T_PX$  et  $T_{P+\epsilon\Gamma(P)}X_{\epsilon}$  coïncident, et que les normales sont égales,

$$\Gamma_{\epsilon}(P + \epsilon \Gamma(P)) = \Gamma(P).$$

Soient  $k_1$  et  $k_2$  les courbures principales de X en P. Alors les valeurs propres de l'endomorphisme  $id - \epsilon S$  de  $T_P X$  sont  $1 - \epsilon k_1$  et  $1 - \epsilon k_2$ . Si  $\epsilon k_1 < 1$  et  $\epsilon k_2 < 1$ , alors  $id - \epsilon S$  est inversible donc

$$\frac{\partial X_{\epsilon}}{\partial u} = (id - \epsilon S) \frac{\partial X}{\partial u}$$
 et  $\frac{\partial X_{\epsilon}}{\partial v} = (id - \epsilon S) \frac{\partial X}{\partial v}$ 

sont linéairement indépendants,  $X_{\epsilon}$  est une surface au voisinage de  $P + \epsilon \Gamma(P)$ . Par définition,

$$(a \quad b) \begin{pmatrix} E_{\epsilon} & F_{\epsilon} \\ F_{\epsilon} & G_{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \| \frac{d}{dt} (c(t) + \epsilon \Gamma(c(t))) \|^{2}$$

$$= \| (1 - \epsilon S)(w) \|^{2}$$

$$= ((1 - \epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})^{T} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1 - \epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= (a \quad b) (1 - \epsilon M)^{T} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1 - \epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} E_{\epsilon} & F_{\epsilon} \\ F_{\epsilon} & G_{\epsilon} \end{pmatrix} = (1 - \epsilon M)^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1 - \epsilon M).$$

De même, d'après le lemme 4.3,

$$II_{\epsilon}(w_{\epsilon}) = -\frac{d}{dt}\Gamma_{\epsilon}(c_{\epsilon}(t)) \cdot w_{\epsilon}$$
$$= -\frac{d}{dt}\Gamma(c(t)) \cdot w_{\epsilon}$$
$$= II(w, w_{\epsilon}).$$

Matriciellement, cela s'écrit

$$(a \quad b) \begin{pmatrix} A_{\epsilon} & B_{\epsilon} \\ B_{\epsilon} & C_{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= (a \quad b))^{T} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1 - \epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} A_{\epsilon} & B_{\epsilon} \\ B_{\epsilon} & C_{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1 - \epsilon M).$$

La densité par rapport à du dv de l'élément d'aire sur  $X_{\epsilon}$  est

$$\sqrt{E_{\epsilon}G_{\epsilon} - F_{\epsilon}^{2}} = \sqrt{EG - F^{2}} \det(1 - \epsilon M)$$

$$= \sqrt{EG - F^{2}} (1 - \epsilon k_{1}) (1 - \epsilon k_{2})$$

$$= \sqrt{EG - F^{2}} (1 - \epsilon h + \epsilon^{2} K)$$

où h est la courbure moyenne de X et K la courbure de Gauss de X en P. La formule pour l'aire de  $X_{\epsilon}$  en résulte immédiatement. Celle pour la courbure de Gauss résulte

du corollaire 3.7,

$$K_{\epsilon}(X_{\epsilon}(u,v)) = \frac{A_{\epsilon}C_{\epsilon} - B_{\epsilon}^{2}}{E_{\epsilon}G_{\epsilon} - F_{\epsilon}^{2}}$$

$$= \frac{(AC - B^{2})\det(1 - \epsilon M)}{(EG - F^{2})\det(1 - \epsilon M)\det((1 - \epsilon M)^{T})}$$

$$= \frac{K(X(u,v))}{\det(1 - \epsilon M)}$$

$$= \frac{K(X(u,v))}{1 - \epsilon h(X(u,v)) + \epsilon^{2}K(X(u,v))}. \blacksquare$$

Remarque 5.3 La courbure moyenne donne la variation de l'aire d'une surface poussée le long de sa normale. Voici la formule générale pour la variation première de l'aire d'une surface poussée le long d'un champ de vecteurs quelconque.

**Proposition 5.4** Soit X une surface normalement orientée,  $\Gamma$  sa normale unitaire, h sa courbure moyenne. Soit V un champ de vecteurs à support compact sur  $\mathbf{R}^3$ . Soit  $\phi_t$  le groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^3$  engendré par V. Alors

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Aire}(\phi_t(X))_{|t=0} = -\int_X h\Gamma \cdot V. \tag{1}$$

On suppose X fermée bordant un ouvert borné U. Alors

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\phi_t(U))_{|t=0} = \int_X \Gamma \cdot V. \tag{2}$$

Preuve. Voir chapitres suivants.

Corollaire 5.5 Soit X une surface. On suppose que X a une aire minimale parmi toutes ses déformations à support compact. Alors X a une courbure moyenne nulle. Supposons X fermée et bordant un ouvert borné. Si X a une aire minimale parmi toutes ses déformations à support compact qui entoure le même volume, alors X a une courbure moyenne constante.

Remarque 5.6 Une surface à courbure moyenne nulle est dite minimale. De telles surfaces modélisent les films de savon. Une surface à courbure moyenne constante non nulle modélise une bulle de savon, i.e. un film possédant un intérieur et un extérieur dans lesquels règnent des pressions différentes.

# 5.2 Rayon d'injectivité normal

Comme pour une courbe dans le plan, à une surface normalement orientée X de  $\mathbf{R}^3$  est associée l'application exponentielle normale

$$X \times ] - \epsilon, \epsilon [ \to \mathbf{R}^3, \quad (P, t) \mapsto P + t\Gamma(P).$$

C'est un difféomorphisme pour  $\epsilon > 0$  assez petit (même argument que pour les courbes planes). Le plus grand  $\epsilon > 0$  tel que l'exponentielle normale soit un difféomorphisme s'appelle le rayon d'injectivité normal de X.

**Exemple 5.7** Soit c une courbe contenue dans un plan affine  $\pi$  et X le tube de rayon  $\epsilon > 0$  autour de c (voir exercice 14). Soit i le rayon d'injectivité normal de la courbe plane c. Alors le rayon d'injectivité normal de X est  $\min\{\epsilon, i - \epsilon\}$ .

Soit X une surface fermée de classe  $C^k$ . Si i est le rayon d'injectivité normal de X, alors sur l'ensemble U des points de  $\mathbb{R}^3$  situés à distance de X inférieure à i, la projection sur X est bien définie et de classe  $C^{k-1}$ . De même, la distance algébrique à X est de classe  $C^{k-1}$ . Si  $0 < \epsilon < i$ , le lieu des points situés à distance exactement  $\epsilon$  de X est la réunion des deux surfaces équidistantes  $X_{\epsilon}$  et  $X_{-\epsilon}$ . En particulier, on peut faire glisser une sphère de rayon  $\epsilon$  sur la surface X, d'un côté ou de l'autre, sans jamais rencontrer d'obstacle.