

Fibrés Au Dessus D'une Variété

J.Saab

École Doctorale De L'Université Libanaise
jihadsaab@isae.edu.lb

Résumé

Ce cours introduit d'une façon lucide et simple la notion de fibré et notamment les fibrés vectoriels. Connexions et métriques sont bien étudiées dans ce cours de façon à montrer que ces notions qui étaient abordées auparavant, représentent un cas particulier de ce que contient ce cours. Chaque notion est accompagnée d'un ou de plusieurs exemples pour aider le lecteur à bien assimiler ces notions.

1 Transport Parallèle

Soit $C :]a, b[\longrightarrow M$ une courbe régulière sur une variété différentielle M . On appelle champ de vecteurs le long de C une application V qui associe à tout point $t \in]a, b[$ un élément $V_t \in T_{C(t)}M$. Si (x, U) est une carte autour d'un point de C , on peut donc écrire

$$V_t = v^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} |_{C(t)}$$

On dit que V est C^k si les fonctions $v^i(t)$ sont C^k . L'ensemble des champs C^∞ le long de C est noté $\chi(C)$

Un champ le long de C particulier est le champ vitesse $C' = \frac{dC^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} |_{C(t)}$. Dans ce qui suit on va montrer que si une connexion linéaire est donnée sur M on peut alors définir la dérivée des champs C^∞ le long de C associée à cette connexion

Proposition 1 *Soit ∇ une connexion et C une courbe lisse sur M , il existe alors une et une seule application $D_{C'}$ notée aussi $\frac{D}{dt}$ ou $D_{C'}$:*

$$D_{C'} : \chi(M) \longrightarrow \chi(C)$$

telle que :

1. Si $V = \tilde{V}/C(t)$ où $\tilde{V} \in \chi(M)$ alors $D_{C'}V = \nabla_{C'(t)}\tilde{V}$
2. $D_{C'}(V + W) = D_{C'}V + D_{C'}W$
3. $D_{C'}(v^i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} + v^i(t)\nabla_{C'}\frac{\partial}{\partial x_i}$

Preuve. Supposons qu'une telle application existe. Soit $p \in C(t)$ et soit (x, U) une carte autour de p . soit $V = v^i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{C(t)} \in \chi(C)$. On a :

$$\begin{aligned} D_{C'}V &= D_{C'}v^i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{C(t)} \\ &= \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}|_{C(t)} + v^i(t)\nabla_{C'}\frac{\partial}{\partial x_i}|_{C(t)} \\ &= \frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}|_{C(t)} + v^i(t)\frac{dC^j}{dt}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}|_{C(t)} \end{aligned}$$

et par suite

$$D_{C'}V = \left[\frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} + v^i(t)\frac{dC^j}{dt}\Gamma_{ji}^k(C(t)) \right] \frac{\partial}{\partial x_k}|_{C(t)} \quad (1)$$

Ainsi cette définition est déterminée par la connexion ce qui montre l'unicité. Pour montrer qu'une telle correspondance est bien définie, on lui donne la définition locale donnée par (1) et on montre que cette définition dépend du choix de la connexion et non pas du choix des coordonnées locales. ■

Définition 2 Un champ $V \in \chi(C)$ est dit parallèle le long de C si $D_{C'}V = 0$

Pour bien assimiler cette définition, considérons le cas de \mathbb{R}^n muni de la connexion canonique $\Gamma_{ij}^k = 0$. Si $V = (v^1(t), v^2(t), \dots, v^n(t))$ alors $D_{C'}V = (\frac{dv^1}{dt}, \frac{dv^2}{dt}, \dots, \frac{dv^n}{dt})$. Dire que V est parallèle le long de C revient à dire que $\frac{dv^i}{dt} = 0, \forall i$ c'est à dire $v^i(t) = \text{cte}, \forall i$ ce qui justifie la terminologie :

:/swp55/temp/graphics/swp0000_1.pdf

Proposition 3 Soit M une variété différentielle munie d'une connexion ∇ et soit C une courbe lisse de M . Si $V_a \in T_{C(a)}M$ alors il existe un et un seul champ parallèle $V \in \chi(C)$ qui prolonge V_a

Preuve. Le champ V doit vérifier le système

$$\frac{dv^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} + v^i(t)\frac{dC^j}{dt}\Gamma_{ji}^k(C(t)) = 0, \quad k = 1 \dots n \quad (2)$$

il s'agit d'un système différentiel linéaire donc d'après le théorème de Cauchy la solution existe sur tout intervalle $[a, b]$ et est unique pour la condition $V|_{t=a} = V_a$ ■

Remarque 4 *L'application*

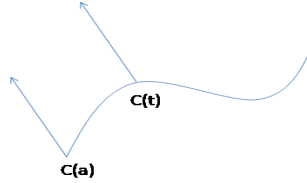
$$\begin{array}{ccc} B_a: \{ \text{solutions de (2)} \} & \longrightarrow & T_{C(a)}M \\ V & \longrightarrow & V_a \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Définition 5 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} P_C|_a^t : T_{C(a)}M & \longrightarrow & T_{C(t)}M \\ V_a & \longrightarrow & V_t = (B_a^{-1}V_a)_{(t)} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. V_t n'est autre que la valeur en t du champ parallèle le long de C qui prolonge V_a , on l'appelle le transport parallèle le long de C de V_a en $C(t)$

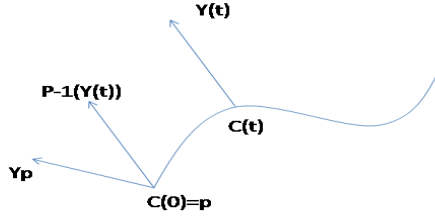


Remarque 6 *La donnée d'une connexion permet de définir pour toute courbe lisse C un isomorphisme*

$$P_C|_a^t : T_{C(a)}M \longrightarrow T_{C(t)}M$$

dit le transport parallèle le long de C . Ainsi si ∇ est une connexion sur M , $X_p \in T_pM$, $Y \in \chi(M)$ et C la courbe intégrale de X_p alors

$$\nabla_{X_p} Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(P_C|_0^h)^{-1} Y(C(h)) - Y(C(0))]$$



ainsi si l'on définit l'application

$$\begin{aligned} f :]0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow f(t) = (P_C|_0^t)^{-1}Y(C(t)) \end{aligned}$$

alors $\nabla_{X_p}Y = f'(0)$ au sens classique de la dérivation.

Exemple 7 On considère la courbe lisse de $M = \mathbb{R}^2$, donnée par $C(t) : \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$. On munit M de la connexion ∇ de coefficients $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}$ et les autres coefficients sont nuls. Un champs $V = V^1(t)\partial_x + V^2(t)\partial_y$ parallèle le long de C est donné par le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{dC^1}{dt} V^2 = 0 \\ \frac{dV^2}{dt} = 0 \end{cases}$$

dont la solution est $V = (-\frac{1}{2}at + b)\partial_x + a\partial_y$. Ainsi le champ parallèle le long de C et qui prolonge un vecteur $V_o = (\alpha, \beta)$ en $o = C(0)$ est

$$V = (-\frac{1}{2}\beta t + \alpha)\partial_x + \beta\partial_y$$

de sorte que l'application de transport parallèle entre T_oM et $T_{C(t)}M$ est donnée par :

$$\begin{aligned} P_C|_0^t : T_oM &\longrightarrow T_{C(t)}M \\ (\alpha, \beta) &\longrightarrow (-\frac{1}{2}\beta t + \alpha, \beta) \end{aligned}$$

son inverse $(P_C|_0^t)^{-1} = P_C|_t^0$ est donnée par

$$\begin{aligned} P_C|_t^0 : T_oM &\longrightarrow T_{C(t)}M \\ (x, y) &\longrightarrow (x + \frac{1}{2}yt, y) \end{aligned}$$

Soit les champs $X = (1+x)\partial_x + \partial_y$ et $Y = y\partial_x + \partial_y$. On a bien $X_o = C'(0) = (1,1)$. Considérons l'application $f(t) = P_C|_t^0(Y(C(t))) = P_C|_t^0(t,1) = (\frac{3}{2}t,1)$. On a :

$$f'(0) = (\frac{3}{2}, 0) = \frac{3}{2}\partial_x$$

Aussi $\nabla_{X_o}Y = (\nabla_X Y)(o) = (\frac{x+3}{2})\partial_x|_o = \frac{3}{2}\partial_x = f'(0)$.

Définition 8 Soit M une variété différentielle munie d'une connexion ∇ . Un champ $X \in \chi(M)$ est dit parallèle relativement à ∇ si $\nabla_Y X = 0$, pour tout $Y \in \chi(M)$. Ainsi X est parallèle si et seulement si X est parallèle le long de toute courbe lisse $C : \nabla_{C'(t)}X(C(t)) = 0$.

À la fin de ce paragraphe, on va se contenter de citer le théorème suivant et lui donner une interprétation géométrique :

Théorème 9 Soit U une carte de M , alors : la courbure $R|_U = 0$ si et seulement si tout vecteur $V_0 \in T_{x_0}M$, $x_0 \in U$ peut être prolonger par parallélisme sur un voisinage $U' \subset U$ de x_0 . c'est à dire : $\forall x_0 \in U$, $\forall V_0 \in T_{x_0}M$, $\exists U' \subset U$, $x_0 \in U'$ et $\exists X \in \chi(U')$ parallèle sur U' et tel que $X_{x_0} = V_0$

Si on voudrais donner une interprétation géométrique de ce théorème, on voit que pour tout vecteur $V_0 \in T_{x_0}M$ il existe un champ parallèle X tel que $X(x_0) = V_0$. en particulier X est parallèle le long des ses courbes intégrales en tout point. Si $\gamma(t)$ est une courbe intégrale de X_p en un point alors le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est parallèle et prolongeant $\gamma'(0)$ ce qui fait dans la géométrie euclidienne de γ une droite. Ainsi le théorème précédent nous dit que si la courbure est nulle, il existe alors un champs dont les courbes intégrales en tout point sont des droites.

2 Variétés Riemanniennes

Définition 10 On appelle variété Riemannienne un couple (M, g) où M est une variété C^∞ et g un tenseur $\binom{0}{2}$ sur M tel qu'en tout point $x \in M$, g_x est un produit scalaire sur T_xM . Ainsi l'on peut voir g de deux façons :

$$\begin{aligned} g : M &\longrightarrow \otimes_2^0 M \\ x &\longrightarrow g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM \\ &\quad (v, w) \longrightarrow g_x(v, w) = \langle v, w \rangle_x \end{aligned}$$

où par identification

$$\begin{aligned} g : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

avec $\langle X, Y \rangle_x = g_x \langle X_x, Y_x \rangle$.

Lemme 11 (fondamental de la géométrie Riemannienne) Sur toute variété Riemannienne (M, g) il existe une et une seule connexion linéaire ∇ telle que

$$\begin{cases} \nabla g = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

où T est la torsion de ∇ .

Preuve. on va donner une démonstration succincte de ce lemme, la première condition se traduit par

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

et la deuxième condition $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ pour tous X, Y et $Z \in \chi(M)$. On peut facilement vérifier qu'une connexion vérifiant ces conditions doit être donnée par la relation suivante

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle \quad (3)$$

Si on définit ∇ par la relation (3) on voit que ∇ est une connexion qui vérifie les conditions du lemme. Aussi, comme g est non dégénérée c'est à dire $\ker g = \{0\}$ alors ∇ est unique. ■

Remarque 12 Grâce à la relation (3) on peut tirer les coefficients de christoffel de ∇ . On va noter par $g_{ij} = \langle \partial x_i, \partial x_j \rangle$ et (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) . On trouve

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} [\partial_{x_i}(g_{jk}) + \partial_{x_j}(g_{ik}) - \partial_{x_k}(g_{ij})][g^{lk}] \quad (4)$$

2.1 Interprétation géométrique :

Définition 13 Une connexion ∇ sur une variété Riemannienne (M, g) est dite compatible avec la metrique g si le transport parallèle, le long de toute courbe lisse C , conserve le produit scalaire c'est à dire l'application $P_C|_a^t : T_{C(a)}M \longrightarrow T_{C(t)}M$ vérifie :

$$\langle V_a, W_a \rangle = \langle P_C|_a^t(V_a), P_C|_a^t(W_a) \rangle$$

ou encore d'une façon équivalente si V et W sont deux champs parallèles le long de C alors $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = 0$.

Lemme 14 Une connexion ∇ est compatible avec g si et seulement si pour toute courbe lisse C de M et pour tous champs $V, W \in \chi(C)$ on a

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle$$

où D est la dérivée le long de C associée à ∇

Preuve. Supposons que ∇ est compatible avec g , soient P_1, P_2, \dots, P_n n -champs parallèles le long de C et orthonormés en $C(0)$. Puisque ∇ est compatible avec g alors ces champs sont orthonormés en tout point de C . On a

$$\begin{cases} V = v^i(t)P_i \\ W = w^j(t)P_j \end{cases}$$

donc $\langle V, W \rangle = v^i w^i$. D'autre part $\frac{D}{dt}V = \frac{D}{dt}(v^i(t)P_i) = \frac{d}{dt}v^i(t)P_i + v^i(t)\nabla_{C'(t)}P_i$. D'où

$$\frac{D}{dt}V = \frac{d}{dt}v^i(t)P_i$$

car P_i est parallèle. De même, on a $\frac{D}{dt}W = \frac{d}{dt}w^j(t)P_j$. Il en vient que

$$\begin{cases} \langle \frac{D}{dt}V, W \rangle = \frac{d}{dt}(v_i) \cdot w_i \\ \langle V, \frac{D}{dt}W \rangle = \frac{d}{dt}(w_i) \cdot v_i \end{cases}$$

Finalement

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \frac{d}{dt}(v_i w_i) = \langle \frac{D}{dt}V, W \rangle + \langle V, \frac{D}{dt}W \rangle$$

Réciproquement, si on a $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle \frac{D}{dt}V, W \rangle + \langle V, \frac{D}{dt}W \rangle$ alors pour tous champs parallèles V et W le long de C on a $\frac{D}{dt}V = \frac{D}{dt}W = 0$ et donc $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle$ par suite ∇ est compatible avec g ■

Corollaire 15 Une connexion ∇ sur (M, g) est compatible avec g si et seulement si $\nabla g = 0$ et par conséquent la connexion associée à la métrique g est une connexion compatible avec g

en effet, pour donner une idée de la démonstration on va montrer dans un sens que la compatibilité implique que $\nabla g = 0$. Pour cela, montrons que $\nabla g|_p = 0$ pour tout $p \in M$. Soient $X, Y, Z \in \chi(M)$ et soit C la courbe intégrale de X_p . On a

$$\begin{aligned} X_p \langle Y, Z \rangle &= C'(0) \langle Y, Z \rangle \\ &= C_*|_0 \left[\frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle \right] \\ &= \frac{d}{dt} \langle Y|_C, Z|_C \rangle \\ &= \langle \frac{D}{dt}Y, Z \rangle + \langle Y, \frac{D}{dt}Z \rangle \\ &= \langle D_{C'}Y, Z \rangle|_{t=0} + \langle Y, D_{C'}Z \rangle|_{t=0} \end{aligned}$$

par suite $\nabla g = 0$.

2.2 Géodésiques d'une variété Riemannienne

Dans tout ce paragraphe (M, g) , désigne une variété Riemannienne et ∇ est la connexion associée à sa métrique g

Définition 16 Une courbe lisse $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est dite géodésique si le vecteur vitesse γ' est parallèle le long de γ c'est à dire $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$

Cette définition indique une ressemblance entre les géodésiques d'une variété Riemannienne et les droites dans un espace Euclidien. En développant $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ on trouve dans un système de coordonnées locales que les géodésiques de ∇ sont les solutions du système différentiel suivant :

$$\frac{d^2}{dt^2} x^k + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{d}{dt} x^i \frac{d}{dt} x^j = 0, \quad k = 1 \cdots n \quad (5)$$

Exemple 17 Dans \mathbb{R}^n muni de la métrique canonique $g = dx^i \otimes dx^i$ la connexion associée est la connexion canonique $\Gamma_{ij}^k = 0$ et donc le système (5) est

$$\frac{d^2}{dt^2} x^k = 0$$

dont la solution est $x^k = a_k t + b_k$, $k = 1 \cdots n$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ainsi les géodésiques sont les droites.

Exemple 18 Géodésiques sur la sphère S^2 : Considérons l'injection

$$\begin{aligned} f : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longrightarrow (x = \cos \theta \sin \phi, y = \sin \theta \sin \phi, z = \cos \phi) \end{aligned}$$

la métrique canonique de \mathbb{R}^3 , $g_0 = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ induit une métrique sur la sphère donnée par $h = f^* g_0$. c'est à dire :

$$h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = g_0(f_* \partial_{x_i}, f_* \partial_{x_j})$$

où $x_i \in \{\theta, \phi\}$. On trouve alors

$$h = \sin^2 \phi d\theta \otimes d\theta + d\phi \otimes d\phi$$

et la connexion associée à h est

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^2 = -\sin \phi \cos \phi \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \cot \phi \\ \Gamma_{ij}^k = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

soit $\gamma(t) = (\theta(t), \phi(t))$ une géodésique de S^2 . Il en vient que :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \theta + 2 \cot \phi \frac{d}{dt} \theta \frac{d}{dt} \phi = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \phi - \sin \phi \cos \phi \left(\frac{d}{dt} \theta \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Considérons deux cas, d'abord si $\theta = \text{cte}$ alors le système devient $\frac{d^2}{dt^2}\phi = 0$ et donc $\phi = at + b$ c'est à dire ϕ est quelconque, ainsi (θ_0, ϕ) est une géodésique $\forall \theta_0$. Ce sont donc les grands cercles verticaux passant par les pôles. Dans le cas où $\theta = \theta(t) \neq \text{cte}$ on a $\phi = \phi(\theta)$ et donc $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$. Aussi, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ &= \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

D'après (6) on a

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d\phi}{d\theta} \left(-2 \cot \phi \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) - \sin \phi \cos \phi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0$$

comme $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ alors

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} - 2 \cot \phi \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 - \sin \phi \cos \phi = 0 \quad (7)$$

Soit $\omega = \cot \phi$. On a $\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{d\phi}{d\theta}$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega}{d\theta^2} &= -\frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{d\phi}{d\theta} \right] \\ &= \frac{2\phi'(\theta) \sin \phi \cos \phi}{\sin^4 \phi} \cdot \phi'(\theta) - \frac{1}{\sin^2 \phi} \phi''(\theta) \\ &\stackrel{(7)}{=} -\cot \phi \\ \omega''(\theta) &= -\omega \end{aligned}$$

dont la solution est

$$\omega = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$$

cest à dire

$$\cot \phi = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$$

ce qui représente en coordonnées sphériques l'équation des plans passant par l'origine $z = c_1 x + c_2 y$ et par conséquent les géodésiques de la sphère sont les grands cercles unitaires de centre $o(0, 0, 0)$ de la sphère.

Remarque 19 La géométrie de la sphère est un modèle de la géométrie non-Euclidienne où les cercles remplacent les droites. Comme chaque deux grands cercles se rencontrent en deux points (les pôles), alors la géométrie de la sphère contredit le postulat de parallélisme en géométrie Euclidienne. En utilisant la projection stéréographique, deux grands cercles de la sphère sont deux droites parallèles du plan projectif qui se rencontrent en l'infini. En plus, l'axiome d'incidence en géométrie Euclidienne qui assure que par deux points on ne peut mener qu'une seule droite cesse d'être valide en géométrie de la sphère où il y a infinité des grands cercles qui passent par deux points.

3 Courbure

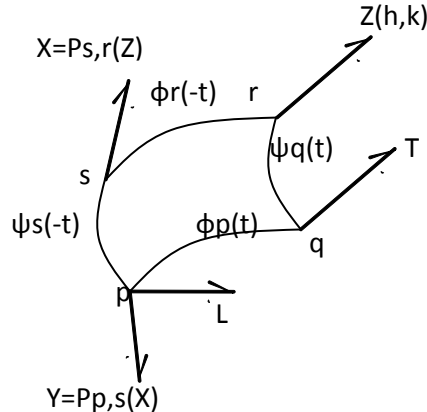
Soit M une variété différentielle, on considère X, Y et Z dans $\chi(M)$. On suppose que X et Y commutent, c'est à dire $[X, Y] = 0$. On va noter par ϕ^t le flot local engendré par X et par ψ^t celui qui est engendré par Y . On va construire un "parallélogramme" de la façon suivante : On part d'un point $p = \phi^0(p)$ on suit la courbe $\phi^t(p)$ entre $t = 0$ et $t = h > 0$ pour un certain h suffisamment petit. Soit $q = \phi^h(p)$, on suit ensuite la courbe $\psi^t(q)$ entre $t = 0$ et $t = k > 0$ pour un certain k suffisamment petit et tel que $\psi^0(q) = q$. On va revenir maintenant à partir du point $r = \psi^k(q)$ selon la courbe $\phi^{-t}(r)$, avec $r = \phi^0(r)$, $0 \leq t \leq h$. Noter que $\phi^{-t}(r)$ est une courbe parallèle à $\phi^t(p)$. On note maintenant $s = \phi^{-h}(r)$ et on va suivre la courbe $\psi^{-t}(s)$ entre $0 \leq t \leq k$. comme les deux champs commutent alors p se coïncide avec $\psi^{-k}(s)$, obtenant ainsi un "parallélogramme". Maintenant, on va transporter parallèlement le champ Z le long de ce contour selon deux cotés consécutifs.

Soit l'application

$$\begin{aligned} s : [0, h] \times [0, k] &\longrightarrow M \\ (x, y) &\longrightarrow s(x, y) = \psi^y \circ \phi^x(p) \end{aligned}$$

l'image de s est le parallélogramme " S " décrit ci-dessus. Soit $Z(x, y)$ la restriction de Z sur S . On va d'abord transporter $Z(h, k)$ de r à q le long de $\psi^t(q)$, on obtient le vecteur $T = P_{q,r}Z(h, k)$, ensuite on transporte T de q à p le long de $\phi^t(p)$, on obtient le vecteur $L = P_{p,q}T = P_{p,q}P_{q,r}Z(h, k)$. Si l'on transporte le vecteur $Z(h, k)$ de r à p le long de deux autres cotés, on va d'abord obtenir $P_{p,s}P_{s,r}Z(h, k)$. Les deux vecteurs de $T_p M$ sont en général différents. On définit la courbure en p par

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{P_{p,q}P_{q,r}Z(h, k) - P_{p,s}P_{s,r}Z(h, k)}{hk}$$



On rappelle que si (C) est une courbe intégrale d'un vecteur X_p et si $Y \in \chi(M)$ alors

$$\nabla_{X_p} Y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P_0^h)^{-1} Y_{C(h)} - Y_{C(0)}}{h}$$

Une simple vérification montre que

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} [P_{p,q} P_{q,r} Z(h,k) - P_{p,q} Z(h,0) - P_{p,s} Z(0,k) + Z(0,0)] = \nabla_X \nabla_Y Z(0,0) \quad (8)$$

En utilisant l'égalité

$$\frac{D_c V}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{c(t_0), c(t)} V_{c(t)} - V_{c(t_0)}}{t - t_0}$$

où D_c est la dérivée covariante le long d'une courbe $c(t)$, on développe la partie à gauche de l'équation (8) :

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [P_{p,q} (\lim_{k \rightarrow 0} \frac{P_{q,r} Z(h,k) - Z(h,0)}{k}) - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P_{p,s} Z(0,k) - Z(0,0)}{k}] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [P_{p,q} \nabla_Y Z(h,0) - \nabla_Y Z(0,0)] = \nabla_X \nabla_Y Z(0,0) \end{aligned}$$

Noter que $p = s(0,0)$, $q = s(h,0)$, $r = s(h,k)$, $s = s(0,k)$. Finalement :

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} [P_{p,q} P_{q,r} Z(h,k) - P_{p,q} Z(h,0) - P_{p,s} Z(0,k) + Z(0,0)] = \nabla_X \nabla_Y Z(0,0)$$

de la même façon

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} [P_{p,s} P_{s,r} Z(h,k) - P_{p,q} Z(h,0) - P_{p,s} Z(0,k) + Z(0,0)] = \nabla_Y \nabla_X Z(0,0)$$

finalemt la courbure telle que l'a été définie est

$$(R(X, Y)Z)_p = \nabla_X \nabla_Y Z(0,0) - \nabla_Y \nabla_X Z(0,0)$$

et si on remplace k et h par \sqrt{h} on obtient

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P_{p,q} P_{q,r} - P_{p,s} P_{s,r})Z}{h} \\ &= (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z)(0,0) \end{aligned}$$

lorsque X et Y ne commutent pas, la courbe ne va pas se refermer

les points p et p' sont joints par le flot de $[X, Y]$ et lorsqu'on prend le transport parallèle de Z le long du contour, il faut ajouter la quantité

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rightarrow \frac{P_{p,p'} Z - Z}{h} = \nabla_{[X,Y]} Z(0,0)$$

et donc $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

Définition 20 La courbure R associée à une connexion ∇ sur une variété M est un champ de tenseurs de type $(1, 3)$ défini par :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

Il n'est pas difficile de vérifier les propriétés suivantes :

1. R est antisymétrique par rapport à ses deux premières composantes : $R(X, Y)Z = - R(Y, X)Z$.
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (Identité de Bianchi).

L'écriture locale de R est

$$R(\partial x_i, \partial x_j) \partial x_k = R_{ijk}^l \partial x_l$$

avec

$$R_{ijk}^l = \sum_{h=1}^m (\Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^l - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^l) + \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j}$$

On va supposer maintenant que la connexion est Riemannienne sur une variété Riemannienne (M, g) , R_{ijk}^l est la composante de $R(\partial x_i, \partial x_j) \partial x_k$ dans la direction de ∂x_l . Noter que $\{\frac{\partial}{\partial x_l}\}_{1 \leq l \leq m}$ n'est pas nécessairement une base orthonormée et donc R_{ijk}^l n'est pas la projection orthogonale de $R(\partial x_i, \partial x_j) \partial x_k$ dans la direction de ∂x_l .

On rappelle que si u et v sont deux vecteurs d'un espace Euclidien, leur produit scalaire est donné par :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \|u\| \|v\| \cos \theta \\ &= \|u\| |proj_u^v|, \end{aligned}$$

où θ est l'angle $\widehat{(u, v)}$ alors

$$|proj_u^v| = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}.$$

Définition 21 La courbure de Riemann sur une variété Riemannienne (M, g) est le champ de tenseurs de type $(0, 4)$ défini par :
pour tous $X, Y, Z, T \in \chi(M)$

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle.$$

On voit donc que cette courbure mesure la projection orthogonale de $R(X, Y)Z$ sur T_x pour tout $x \in M$.

On va noter par $g_{\alpha\beta} = g(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta})$ les composantes locales de g et on note par $R_{ijkl} = \langle R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \rangle$. Alors on a

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^h g_{hl}.$$

et par suite

$$Proj_{\frac{\partial}{\partial x_l}}(R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k}) = \frac{R_{ijkl}}{\|\frac{\partial}{\partial x_l}\|} = \frac{R_{ijkl}}{\sqrt{g_{ll}}}.$$

On peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

1. $g(R(X, Y)Z, T) = -g(R(Y, X)Z, T)$ et donc $R_{ijkl} = -R_{jikl}$
2. $g(R(X, Y)Z, T) = -g(R(X, Y)T, Z)$ et donc $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$
3. $g(R(X, Y)Z, T) = g(R(Z, T)X, Y)$ c'est à dire $R_{ijkl} = R_{klij}$
4. Identité de Bianchi : $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

3.1 Interprétation géométrique sur les surfaces :

Afin de bien comprendre la courbure, on va montrer la proposition suivante :

Proposition 22 Si (S) est une surface plongée dans une variété Riemannienne (M, g) , (S) est une sous-variété de dimension 2 de M , pour tout champ $V \in \chi(M)$, la courbure mesure la non commutativité de la dérivée covariante seconde :

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s})V$$

où

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longrightarrow f(t, s) \end{aligned}$$

est une paramétrisation de (S) dans M , et U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Preuve. On considère les courbes des coordonnées de (S)

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow f(t, s) \\ \text{et} \\ s &\longrightarrow f(t, s) \end{aligned}$$

Soit $x_i = (x_1, \dots, x_m)$ un système de coordonnées locales au voisinage de $p = f(t_0, s_0)$ et $V(t, s) = v^i(t, s) \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs sur (S) au voisinage de p .

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} V &= \frac{D}{\partial s} v^i(t, s) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial v^i(t, s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + v^i(t, s) \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

où $\frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \nabla_{f'(t_0, s)} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Il en vient

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V &= \frac{D}{\partial t} \left(\frac{\partial v^i(t, s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \frac{D}{\partial t} \left(v^i(t, s) \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 v^i(t, s)}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial v^i(t, s)}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial v^i(t, s)}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) + v^i(t, s) \frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = \sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Soit $f(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_m(t, s))$, on obtient

$$\frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial s} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial x^l}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_l}} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

de même, en changeant d'ordre entre s et t :

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 x_j}{\partial s \partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ainsi

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= v^i \left[\frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= v^i \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} R \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) V.$$

■

La proposition précédente donne une interprétation pour toute courbure associée à une connexion linéaire. Une interprétation de la courbure de Riemann en particulier nécessite le développement d'une notion d'une importante capitale, il s'agit de la deuxième forme fondamentale d'une sous variété relative à une connexion induite.

3.2 Deuxième forme fondamentale :

Soient M et M' deux variétés différentielles et $f : M \longrightarrow M'$ un plongement. Si M' est une variété Riemannienne, alors M' induit sur M une structure Riemannienne donnée par

$$I(v, w) = \langle v, w \rangle_M = \langle f_*v, f_*w \rangle_{M'}, \text{ pour tous } v, w \in \chi(M)$$

I est dite la première forme fondamentale sur M .

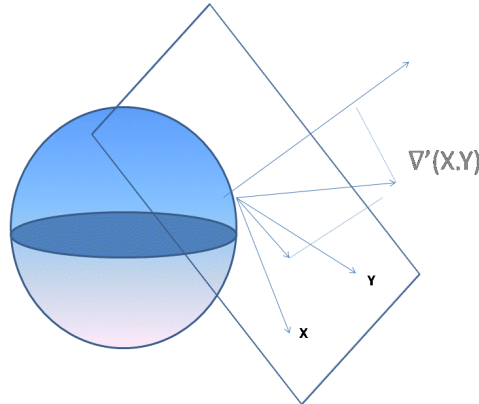
On suppose que f est un plongement et que $M' = f(M)$, donc T_pM est un sous espace vectoriel de T_pM' pour tout $p \in M$, aussi $f_* = id$. Soit ∇' la connexion Riemannienne sur M' , si $X, Y \in \chi(M)$ alors $\nabla'_X Y \in \chi(M')$ et non nécessairement dans $\chi(M)$. Pour tout $p \in M'$, on a la décomposition

$$T_pM' = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

où $(T_pM)^\perp$ désigne le sous espace vectoriel de T_pM' orthogonal à T_pM . Cette décomposition permet de définir deux tenseurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur M :

$$h(X_p) = proj_{T_pM}(X_p) \quad \text{et} \quad v(X_p) = proj_{(T_pM)^\perp}(X_p)$$

où $X_p \in T_pM'$.



Ainsi, on a

$$(\nabla'_X Y)_p = \underbrace{h(\nabla'_X Y)_p}_{\in T_p M} + \underbrace{v(\nabla'_X Y)_p}_{\in (T_p M)^\perp}.$$

On va noter par $(\nabla_X Y)_p = h(\nabla'_X Y)_p$ et $B_p(X, Y) = v(\nabla'_X Y)_p$ et donc, on a

$$(\nabla'_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + B_p(X, Y).$$

Lemme 23 $\nabla_X Y$ est la connexion Riemannienne sur M relative à la métrique induite.

Preuve. Soit $X, Y \in \chi(M)$, l'application $p \longrightarrow \nabla_X Y|_p$ est la composante de la projection orthogonale de $\nabla'_X Y|_{p \in T_p M'}$ sur $T_p M$, c'est donc une application de classe C^∞ . Il est facile de vérifier que ∇ satisfait les conditions d'une connexion linéaire. On va démontrer seulement que ∇ est symétrique, c'est à dire $T = 0$ et que ∇ est compatible avec I c'est à dire $\nabla I = 0$.

Etape 1 : Soient $X', Y' \in \chi(M')$ deux champs qui prolongent X et Y , ce prolongement n'est pas unique. On sait que la valeur du crochet $[X', Y']$ et la valeur de la connexion $\nabla'_{X'} Y'$ en un point ne dépend que des valeurs de X et Y en ce point.

$$\begin{cases} [X', Y']_p = [X, Y]_p \\ \nabla'_{Y'} X'|_p = \nabla'_Y X|_p \end{cases}$$

On a ∇' est symétrique, c'est à dire $\nabla'_{X'} Y' - \nabla'_{Y'} X' - [X', Y'] = 0$ et donc $\nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X, Y] = 0$, il en vient

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X + B(X, Y) - B(Y, X) - [X, Y] = 0.$$

Or on a $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \in T_p M$ et $B(X, Y) - B(Y, X) \in (T_p M)^\perp$ donc

$$\begin{cases} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \\ \text{et} \\ B(X, Y) - B(Y, X) = 0 \end{cases}$$

Parsuite ∇ est symétrique.

Etape 2 : On va démontrer que ∇ est compatible avec I . En effet, soient X, Y et Z trois champs de vecteurs sur M , On a

$$X' \langle Y', Z' \rangle = \langle \nabla'_{X'} Y', Z' \rangle + \langle Y', \nabla'_{X'} Z' \rangle$$

donc

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle B(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, B(X, Z) \rangle$$

or $B(X, Y) \in (T_p M)^\perp$ et $Z \in T_p M$ donc $\langle B(X, Y), Z \rangle = 0$ et de même $\langle Y, B(X, Z) \rangle = 0$. D'où ∇ est compatible avec I . Finalement, la connexion symétrique et compatible avec I est unique et cette connexion est $\nabla = \text{proj}_{TM}^{\nabla'}$. ■

Remarque 24 $B(X, Y)$ est un tenseur symétrique.

Définition 25 Soit $p \in M$, $N_p \in (T_p M)^\perp$. La deuxième forme fondamentale en p le long de N_p est la forme bilinéaire symétrique sur $T_p M$ définie par :

$$A_{N_p}(X_p, Y_p) = \langle N_p, B_p(X_p, Y_p) \rangle.$$

Ainsi la deuxième forme fondamentale mesure la différence entre la connexion sur M' et la connexion induite sur M .

Théorème 26 (Wingarten) Soit $p \in M$, $X_p, Y_p \in T_p M$ et $N_p \in (T_p M)^\perp$ et soient X, Y deux extensions locales de X_p, Y_p sur $\chi(M)$. Soit N une extension de N_p en un champ de vecteurs normaux à M .

$$\begin{aligned} N : U \subset M &\longrightarrow TM' \\ p &\longrightarrow N_p \in (T_p M)^\perp \end{aligned}$$

alors $A_N(X, Y) = \langle N, B(X, Y) \rangle = -\langle \nabla'_X N, Y \rangle$.

Preuve. En effet, $\nabla_X Y$ est orthogonal à N , donc

$$\begin{aligned} \langle N, B(X, Y) \rangle &= \langle N, \nabla'_X Y - \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle N, \nabla'_X Y \rangle \end{aligned}$$

or :

$$X \langle N, Y \rangle = \langle \nabla'_X N, Y \rangle + \langle N; \nabla'_X Y \rangle$$

donc $\langle N; \nabla'_X Y \rangle = X \langle N, Y \rangle - \langle \nabla'_X N, Y \rangle = -\langle \nabla'_X N, Y \rangle$. ■

Exemple 27 On considère sur \mathbb{R}^3 la connexion canonique. Pour tous $X = u^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = v^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ deux champs de vecteurs on a $\nabla_X Y = u^i \frac{\partial v^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ et si

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

une courbe lisse, la dérivée covariante d'un champ de vecteur V le long de (c) associé à ∇ est :

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} V &= \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{9}$$

Aussi, si M est une surface de \mathbb{R}^3 et (c) est une courbe intégrale d'un vecteur $X_p \in T_p M$ alors pour tout $Y \in \chi(\mathbb{R}^3)$, défini au voisinage de p , on a

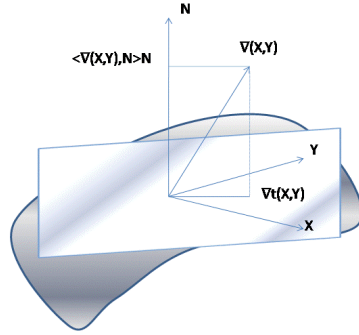
$$\frac{d}{dt}(V(c(t)))|_{t=0} = \frac{D_c(Y_{c(t)})}{dt}|_{t=0} = \nabla_{X_p}^{\mathbb{R}^3} Y.$$

Maintenant, pour $X, Y \in \chi(M)$, si on calcule $\nabla_X Y$ on ne va pas obtenir nécessairement un champ sur M , pour induire une connexion sur M on prend en tout point $p \in M$ la projection de $\nabla_X Y \in \mathbb{R}^3$ sur $T_p M$. Une telle projection se fait relativement à une normale unitaire N_p à M en p .

$$\text{proj}_N(\nabla_X Y |_p) = \langle \nabla_X Y, N \rangle N$$

On définit

$$\nabla_X^t Y = \nabla_X Y - \langle \nabla_X Y, N \rangle N$$



C'est une connexion sur M , dite connexion tangentielle induite sur M par ∇ . Considérons l'application de Gauss :

$$\begin{aligned} G: M &\longrightarrow S \\ q &\longrightarrow N_q \end{aligned}$$

N_q est la normale unitaire à M en q , soit $X_p \in T_p M$ et $c: I \longrightarrow M$ une courbe intégrale de X_p , c'est à dire $c(0) = p$ et $c'(0) = X_p$. On a

$$G_p|_*: T_p M \longrightarrow T_p S \simeq T_p M$$

est donnée par : $G_{*p} X_p = \frac{d}{dt}(N(c(t)))|_{t=0}$. D'après (9), on a

$$G_{*p} X_p = \frac{D}{dt}(N(c(t)))|_{t=0} = \nabla_{X_p}^{\mathbb{R}^3} N.$$

Ainsi,

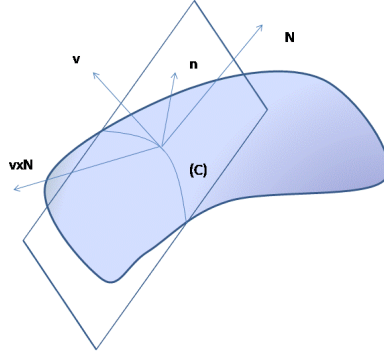
$$\langle G_{*p} X_p, Y_p \rangle = \langle \nabla_{X_p}^{\mathbb{R}^3} N, Y_p \rangle$$

et d'après le théorème de weingarten

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{X_p}^{\mathbb{R}^3} N, Y_p \rangle &= -A_{N_p}(X_p, Y_p) \\ &= -A_{N_p}(Y_p, X_p) \\ &= \langle X_p, G_{*p} Y_p \rangle\end{aligned}$$

donc G_{*p} est symétrique relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En particulier, si $X_p = Y_p$ on obtient : $A_{N_p}(X_p, X_p) = -\langle G_{*p} X_p, X_p \rangle$. il en vient que $-G_{*p}$ admet deux valeurs propres réelles k_1 et k_2 et que les vecteurs propres correspondants v_1 et v_2 sont orthogonaux.

Si l'on coupe la surface par un plan normal en p contenant un vecteur unitaire v en p , l'intersection avec la surface est une courbe $c : I \rightarrow M$ avec $c(0) = p$ et $c'(0) = v$ (on suppose que c est paramétrisé par le paramètre curviligne)



Comme $c''(t)$ se trouve dans le plan normal et il est perpendiculaire à $c'(t)$ alors $c''(t)$ est colinéaire avec $N_{c(t)}$. Ainsi

$$\langle c'(t), G(c(t)) \rangle = 0$$

En prenant la dérivée par rapport à t et puis on pose $t = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\langle c''(t), G(c(t)) \rangle &= -\langle c'(t), G_{*(c(t))} c'(t) \rangle \\ \langle c''(0), N_p \rangle &= -\langle v, G_{*p} v \rangle = II_{N_p}(v, v)\end{aligned}\tag{10}$$

où on a noté par II_{N_p} la deuxième forme fondamentale A_{N_p} . Le membre à gauche n'est autre que la courbure orientée de c en p . Il est clair que les valeurs extrémales de la courbure en faisant varier la section normale correspondent aux valeurs extrémales de forme quadratique $II_{N_p}(v, v)$ où v est un vecteur tangent unitaire. Il est connu que ces valeurs sont

atteintes dans les directions des vecteurs propres de la matrice II_{N_p} . Ceci montre que les nombres k_1 et k_2 sont les courbures principales et que v_1 et v_2 sont les directions principales. La courbure de Gauss est par définition $k_1.k_2$. D'autre part, on peut calculer la deuxième forme fondamentale en fonction d'une paramétrisation locale

$$\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

est une paramétrisation de M au voisinage de p , $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right\}_p$ est une base de $T_p M$, et N_p est donnée par :

$$N_p = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial x_2}}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right\|}$$

est la normale unitaire en p à M , mais

$$\begin{aligned} B\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}}^{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_j}}^t \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}}^{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, N \right\rangle \cdot N. \end{aligned}$$

Donc sa deuxième forme fondamentale est donnée par :

$$II\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}}^{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, N \right\rangle.$$

Application : Trouver la deuxième forme fondamentale lorsque $M = S^2$ pour la paramétrisation :

$$\begin{aligned} \sigma: S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longrightarrow (x = \cos \theta \sin \phi, y = \sin \theta \sin \phi, z = \cos \phi) \end{aligned}$$

Exemple 28 En utilisant (10), on peut assurer une interprétation naturelle de la deuxième forme fondamentale. On rappelle que la dérivée covariante d'un champ de vecteurs sur une surface est la composante tangentielle de la dérivée d'un champs de vecteurs. Si c est une courbe paramétrisée par un paramètre curviligne, plongée dans une surface M alors

$$c'' = \langle c'', N \rangle N + \frac{Dc'}{dt} = II_N(c', c')N + \frac{Dc'}{dt}$$

la quantité $k_g = \|Dc'/dt\|$ est appelée la courbure géodésique de c . Ainsi une courbe à vecteur vitesse unitaire est une géodésique si et seulement si $k_g = 0$. Pour une courbe géodésique c la courbure est la courbure normale

$$c'' = II_N(c', c')N$$

on dit que $II_N(c', c')$ représente l'accélération de la géodésique

Théorème 29 (l'équation de Gauss) Soit R' la courbure de M' et R une courbure induite sur M . Pour tous champs de vecteurs $X, Y, Z, T \in \chi(M)$ on a l'identité suivante

$$\langle R'(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, T) \rangle.$$

Preuve. On a $\nabla' = \nabla + B$ et donc

$$\nabla'_X \nabla'_Y Z = \nabla_X \nabla_Y Z + B(X, \nabla_Y Z) + \nabla'_X B(Y, Z)$$

comme $\langle B(.,.), T \rangle = 0$, alors on obtient

$$\langle \nabla'_X \nabla'_Y Z, T \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, T \rangle + \langle \nabla'_X B(Y, Z), T \rangle$$

de la même façon, on a

$$\begin{cases} \langle \nabla'_Y \nabla'_X Z, T \rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X Z, T \rangle + \langle \nabla'_Y B(X, Z), T \rangle \\ \langle \nabla'_{[X, Y]} Z, T \rangle = \langle \nabla_{[X, Y]} Z, T \rangle \end{cases}$$

en combinant ces équations, on obtient

$$\begin{aligned} \langle R'(X, Y), Z, T \rangle &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle \nabla'_X B(Y, Z), T \rangle \\ &\quad - \langle \nabla'_Y B(X, Z), T \rangle \end{aligned}$$

finalement par le théorème de Weingarten avec $B(Y, Z)$ et $B(X, Z)$ sont de vecteurs normaux, on obtient

$$\begin{aligned} \langle R'(X, Y), Z, T \rangle &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle \\ &\quad + \langle B(X, Z), B(Y, T) \rangle \end{aligned}$$

■

Corollaire 30 Si $\dim M = \dim M' - 1$ et X, Y, Z et T dans $\chi(M)$ alors

$$\begin{aligned} \langle R'(X, Y), Z, T \rangle &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle II_N(X, T), II_N(Y, Z) \rangle \\ &\quad + \langle II_N(X, Z), II_N(Y, T) \rangle \end{aligned}$$

Preuve. Comme $\dim M = \dim M' - 1$ alors l'espace tangent $T_p M'$ est engendré par $T_p M$ et N_p . Ainsi

$$B(X_p, Y_p) = II_p(X_p, Y_p)N_p$$

comme N est normal unitaire alors

$$\langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle = \langle II_N(X, T), II_N(Y, Z) \rangle$$

et

$$\langle B(X, Z), B(Y, T) \rangle = \langle II_N(X, Z), II_N(Y, T) \rangle$$

■

En prenant $Z = Y$ et $T = X$ dans l'équation de Gauss, on obtient la formule suivante

Corollaire 31 *Si $\dim M = \dim M' - 1$ alors pour tous $X, Y \in \chi(M)$ on a*

$$\langle R'(X, Y), Y, X \rangle = \langle R(X, Y)Y, X \rangle + II_N(X, Y)^2 - II_N(X, X)II_N(Y, Y)$$

Exemple 32 *On va continuer notre exposé sur la courbure des surfaces, on va montrer que la courbure de Gauss est*

$$K = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \quad (11)$$

Noter que le numérateur dépend seulement du tenseur de courbure qui est définie selon le choix de la métrique Riemannienne. Le dénominateur représente l'aire du parallélogramme défini par X_p et Y_p dans T_pM , ainsi cette quatité de'pend seulement de la métrique Riemannienne, il en vient que la courbure de Gauss est invariante par les isométries locales.

Pour vérifier (11) on a besoin de calculer la matrice de la deuxième forme fondamentale selon une certaine base orthonormée du plan tangent, ensuite on prend son déterminant. On suppose que $\{X, Y\} = \{e_1, e_2\}$ est une base orthonomée de T_pM . Dans ce cas

$$K = \det(II_N(e_i, e_j)) = II_N(e_1, e_1)II_N(e_2, e_2) - II_N(e_1, e_2)^2$$

en utilisant le corollaire 31 et le fait que $R' = 0$ on obtient

$$\langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = II_N(e_1, e_1)II_N(e_2, e_2) - II_N(e_1, e_2)^2$$

et $\|e_1\|^2\|e_2\|^2 - \langle e_1, e_2 \rangle^2 = 1$ et donc (11) est vraie.

Maintenant si $\{X, Y\}$ n'est pas orthonormée, on orthonormalise par la procédure de Gram-Schmidt, obtenant ainsi

$$e_1 = \frac{X}{\|X\|} \text{ et } e_2 = \frac{Y - \langle Y, \frac{X}{\|X\|} \rangle \frac{X}{\|X\|}}{\|Y - \langle Y, \frac{X}{\|X\|} \rangle \frac{X}{\|X\|}\|}$$

un simple calcul donne

$$K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

Finalement pour conserver certaines notations concernant la courbure des surfaces, on rappelle que les coefficients $II_N(e_1, e_1), II_N(e_2, e_2), II_N(e_1, e_2)$ de la deuxième forme fondamentale sont notés par e, f, g et que les coefficients de la première forme fondamentale sont notés par E, F, G alors on a

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Exemple 33 Pour une sphère S_r^2 de rayon r , l'application de Gauss $G : S_r^2 \rightarrow S^2$ est donnée par $G(x) = x/r$ et l'orientation est définie par les vecteurs unitaires normaux sortants. on a $G_{*,x} = \frac{1}{r}id$. Les valeurs propres de la matrice associée à $-G_{*,x}$ sont $k_1 = k_2 = -1/r$ et donc $K = 1/r^2$ en particulier, pour la sphère unité S^2 on a $K = 1$

3.3 Courbure Sectionnelle et Courbure de Ricci

On va dans cette partie, donner une nouvelle interprétation de la courbure. Soit p un point d'une variété Riemannienne M , X_p, Y_p sont deux vecteurs linéairement indépendants de T_pM . Soit $\Pi = \Pi_{(X_p, Y_p)}$ le plan engendré par ces deux vecteurs. L'aire du parallélogramme défini par X_p et Y_p est donnée par

$$A(X_p, Y_p) = \|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p \rangle^2$$

Définition 34 la courbure sectionnelle de M en p , déterminée par Π est

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X_p, Y_p)Y_p, X_p)}{A(X_p, Y_p)} \quad (12)$$

Pour vérifier que cette définition a un sens, il faudrait vérifier que K ne dépend pas du choix d'une base de Π . En effet, si $\{X'_p, Y'_p\}$ est une deuxième base de Π alors

$$\begin{cases} X'_p = a_{11}X_p + a_{12}Y_p \\ Y'_p = a_{21}X_p + a_{22}Y_p \end{cases}$$

on trouve

$$\langle R(X'_p, Y'_p)Y'_p, X'_p \rangle = \det(a_{ij})^2 R(X_p, Y_p)Y_p, X_p \rangle$$

de même l'aire du nouveau parallélogramme est $A(X'_p, Y'_p) = \det(a_{ij})^2 A(X_p, Y_p)$ alors

$$K(\Pi_{(X'_p, Y'_p)}) = K(\Pi_{(X_p, Y_p)})$$

Dans le cas des surfaces, il n'y a qu'une seule courbure sectionnelle en tout point qui n'est autre que la courbure de Gauss.

Définition 35 On dit que (M, g) est de courbure positive (respectivement négative), si pour tout $p \in M$ et pour tous deux vecteurs linéairement indépendants $\{u, v\}$ de T_pM on a $K(u, v) \geq 0$ (respectivement $K(u, v) \leq 0$), on dit que (M, g) est à courbure constante si sa courbure sectionnelle $k(u, v)$ ne dépend ni du point p ni de $\{u, v\}$.

On va introduire les résultats suivants comme de propriétés dont la démonstration sera laissée au lecteur

Propriétés :

1. Si R_1 et R_2 sont deux $(1, 3)$ - tenseurs de (M, g) vérifiant l'antisymétrie par rapport aux deux premières composantes et s'ils vérifie l'identité de Bianchi alors : Si $\langle R_1(X, Y)Y, X \rangle = \langle R_2(X, Y)Y, X \rangle$ alors $R_1 = R_2$
2. Dans les mêmes conditions de la première propriété, si on suppose que pour tout point p de M et tout plan $\Pi = \Pi_{(X_p, Y_p)} \subset T_p M$ on a

$$K_1(\Pi) = K_2(\Pi)$$

alors $R_1 = R_2$

3. Si M admet une courbure sectionnelle constante alors

$$R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$$

Définition 36 On appelle opérateur de Ricci, le champ de tenseurs : $\rho : T_p M \longrightarrow T_p M$ donné par

$$\rho(X)(p) = Ricci_p X_P = \sum_{i=1}^n R(X_P, e_i)e_i$$

avec $X \in \chi(M)$, $X_P \in T_p M$ et $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base orthonormée de $(T_p M, g_p)$.

Pour tout $p \in M$ et tous $X_P, Y_P \in T_p M$ fixés on définit la courbure de Ricci par :

$$Ricci(X, Y)(p) = Ricci_p(X_P, Y_P) = g(Ricci_p X_P, Y_P).$$

Exemple 37 On considère l'injection de la sphère S^2 dans \mathbb{R}^3 . La métrique de S^2 est celle induite par la métrique canonique de \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} h &= i^* g_0 \\ &= \sin^2 \phi d\theta \otimes d\theta + d\phi \otimes d\phi \end{aligned}$$

soit $\{e_i\}_{i=1}^2$ une base orthonormée, où $e_1 = \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$ et $e_2 = \frac{\partial}{\partial \phi}$.

La courbure R est donnée par :

$$R(e_1, e_2)e_1 = \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_1 = -e_2.$$

D'où la courbure sectionnelle est :

$$K(e_1, e_2) = -\frac{R(e_1, e_2, e_1, e_2)}{h(e_1, e_1)h(e_2, e_2) - h^2(e_1, e_2)} = -\frac{h(-e_2, e_2)}{1 \times 1 - 0} = 1.$$

Aussi la courbure de Ricci est donnée par :

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^2 R(X, e_i)e_i.$$

Or $Ricci(e_1) = e_1$ et $Ricci(e_2) = e_2$. D'où

$$Ricci = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Fibrés Différentiables

4.1 Introduction

On désigne par \mathbb{k} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Un \mathbb{k} -fibré vectoriel (f.v) de rang r , ayant pour base une variété M , est une réunion disjointe $E = \bigsqcup_{m \in M} E_m$ de \mathbb{k} -e.v de dimension r , reliés différentiablement entre eux en un certain sens à préciser ultérieurement. L'exemple prototype est le fibré vectoriel tangent à une variété $TM = \bigsqcup_{m \in M} T_m M$

La donnée d'un repère (ou une base) de E_m équivaut à la donnée d'un isomorphisme

$$\begin{aligned} z : \quad \mathbb{R}^r &\longrightarrow E_m \\ (a_1, \dots, a_r) &\longrightarrow a_1 e_1 + \dots + a_r e_r \end{aligned}$$

Etant donnés deux tels repères z et z' en m , il existe un élément $g \in GL(\mathbb{k}, r)$ et un seul (la matrice de changement de base) tel que $z' = z \circ g$. On dit que $GL(\mathbb{k}, r)$ opère transitivement à droite sur l'ensemble $R_m(E)$ des repères de E_m . $R(E) = \bigsqcup_{m \in M} R_m(E)$ est un exemple de fibré principal de groupe de structure $GL(\mathbb{k}, r)$. Réduire le groupe de structure à un sous groupe G de $GL(\mathbb{k}, r)$ c'est se donner un G -sous fibré principal P de $R(E)$: cela revient à définir sur chaque fibre E_m une structure plus riche que la seule structure d'e.v d'une façon dépendante différentiablement de m en un certain sens qu'on va préciser dans ce chapitre. Par exemple, lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, réduire le groupe $GL(\mathbb{R}, r)$ en le sous groupe $GL^+(\mathbb{R}, r)$ des matrices à déterminant strictement positifs, équivaut à munir chaque fibre E_m d'une orientation. De même, réduire le groupe en le sous groupe $O(r)$ des matrices orthogonales revient à munir chaque fibre d'un produit scalaire

Finalement, si à partir d'un f.v on peut construire le f.p de ses repères, on peut réciproquement reconstruire le f.v à partir du fibre des repères

4.2 Fibrés localement triviaux

F et M sont deux variétés différentiables (C^∞)

Définition 38 *Se donner un fibré différentiable localement trivial de base M , de fibré type F (plus brièvement de fibré F) et d'espace total E , c'est se donner une variété E et une application différentiable $\pi : E \longrightarrow M$ telle que pour tout $m \in M$ il existe une carte U de M autour de m et il existe un difféomorphisme*

$$\phi_U : F \times U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

avec $\pi|_U \circ \phi_U = P_2$ la deuxième projection, c'est à dire le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}(U) \subset E \\ & \searrow & \downarrow \pi_U \\ & P_2 & U \end{array}$$

est commutatif, où on a noté π_U c'est $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$

Déduction : Si U est réduit à un point $U = \{m\}$ alors $\pi^{-1}(m) \simeq F \times \{m\} \simeq F$ donc $\pi^{-1}(m) \neq \emptyset$ et π est surjective. Aussi, pour tout $m \in U$, $\pi^{-1}(U) \simeq F$ est une variété et par suite π est une submersion. $\pi^{-1}(m)$ se note E_m et par suite $E = \bigsqcup_{m \in M} E_m$

Un difféomorphisme tel que ϕ_U est dit "trivialisation locale" de E

Définition 39 (Fibrés triviaux) *Lorsque $E = F \times M$ et $\pi = P_2 : F \times M \longrightarrow M$ alors (E, F, M, π) est dit fibré trivial et dans ce cas $\phi_U = id$*

$$\begin{array}{ccc} \phi_m : F \times \{m\} & \longrightarrow & E_m = \pi^{-1}(m) = F \times \{m\} \\ (x, m) & \longrightarrow & (x, m) \end{array}$$

est l'identité pour tout $m \in M$

Définition 40 *On appelle section (différentiable), du fibré $\pi : E \longrightarrow M$ toute application $s : M \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ s = id_M$ c'est à dire $\pi(s(m)) = m$ et donc pour tout $m \in M$ on a $s(m) \in \pi^{-1}(m)$ ainsi une section s vérifie :*

$$\begin{array}{ccc} s : M & \longrightarrow & E = \bigsqcup_{m \in M} E_m \\ p & \longrightarrow & s(p) \in E_p \end{array}$$

Noter que de telles sections n'existent pas toujours.

Exemple 41 Un champ $X \in \chi(M)$ est une section sur le fibré $TM = \bigsqcup_{m \in M} T_m M$

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ m &\rightarrow X_m \in T_m M \end{aligned}$$

Une 1- forme différentielle $\omega \in \wedge^1 M$ est une section sur le fibré $T^*M = \bigsqcup_{m \in M} T_m^* M$

$$\begin{aligned} \omega : M &\longrightarrow T^*M \\ m &\rightarrow \omega_m \in T_m^* M \end{aligned}$$

Une k - forme différentielle $\omega \in \wedge^k M$ est une section sur le fibré $\wedge^k T^*M = \bigsqcup_{m \in M} \wedge^k T_m^* M$

$$\begin{aligned} \omega : M &\longrightarrow \wedge^k T^*M \\ m &\rightarrow \omega_m \in \wedge^k T_m^* M \end{aligned}$$

Définition 42 On appelle morphisme (resp. isomorphisme) du fibré $\pi : E \longrightarrow M$ dans le fibré $\pi' : E' \longrightarrow M$ de même base M , toute application différentiable (resp. tout difféomorphisme), $f : E \longrightarrow E'$ telle que $\pi' \circ f = \pi$: la restriction f_m de f à une fibre E_m prend ses valeurs dans la fibre E'_m

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & M & \end{array}$$

Cela voudrait dire que si $x \in E_m = \pi^{-1}(m)$ donc $\pi(x) = m$, on a $\pi'(f(x)) = \pi' \circ f(x) = \pi(x) = m$ et donc $f(x) \in \pi'^{-1}(m) = E'_m$, par suite

$$\begin{aligned} f_m E_m &\longrightarrow E'_m \\ x &\rightarrow f_m(x) = f(x) \end{aligned}$$

Exemple 43 On suppose que F est une variété à bord ($\partial F \neq \emptyset$), on note $\partial_F E = \bigsqcup_{m \in M} \partial E_m$ appelé bord du fibré E . On définit l'application

$$\begin{aligned} \partial\pi \partial_F E &\longrightarrow M \\ x &\rightarrow \pi(x) \end{aligned}$$

l'application $\partial\pi = \pi|_{\partial_F E}$ est différentiable et de plus, pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert U de p dans M et il existe

$$\partial\phi_U : \partial F \times U \longrightarrow (\partial\pi)^{-1}(U)$$

un difféomorphisme, défini de la façon suivante : $m \in U$, $(\partial\pi)^{-1}(m) = \partial E_m$ et comme $F \simeq E_m$ alors $\partial F \simeq \partial E_m$ et donc

$$\partial\phi_m : \partial F \times \{m\} \longrightarrow \partial F$$

est un difféomorphisme. $\partial\pi \circ \partial\phi(x, m) = \partial\pi(\phi_U(x, m)) = m = P_2(x, m)$. D'autre part, l'application différentiable $i : \partial_F E \longrightarrow E$ qui est l'inclusion naturelle, vérifie

$$\begin{array}{ccc} \partial_F E & \xrightarrow{i} & E \\ \partial\pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

$\pi \circ i = \partial\pi$ et donc i est un morphisme d'espaces fibrés

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées locales sur $U \subset M$ et $y = (y_1, \dots, y_r)$ un système de coordonnées locales sur F , on obtient naturellement un système de coordonnées locales (x, y) sur $F \times U$ et par conséquent sur l'espace total du fibré E/U à l'aide de

$$\phi_U : F \times U \xrightarrow{\simeq} \pi^{-1}(U) = E/U$$

Exemple 44 $F = \mathbb{R}^n$ est le fibre type du fibré $TM \longrightarrow M$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times U & \longrightarrow & \pi^{-1}(U) \\ (\xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow & (X_p, p) \end{array}$$

où p a pour composantes locales (x_1, \dots, x_n) et $X_p = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p$

Définition 45 Un tel système de coordonnées locales sur l'espace total du fibré sera dit adapté à la fibration

si (x', y') est un autre système de coordonnées locales adapté, le changement de coordonnées locales est de la forme

$$x = x(x', y'), \quad y = y(x', y')$$

tel que $|\frac{D(x)}{D(x')}| \neq 0$ et $|\frac{D(y)}{D(y')}| \neq 0$

Soit $\pi : E \longrightarrow M$ un fibré différentiable et $f : M \longrightarrow M'$ une application différentiable. On pose :

$$E' = \{(m, e') \in M \times E \mid f(m') = \pi(e)\}$$

comme l'indique le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & M \\ & \uparrow f & \\ E' & \xrightarrow{\pi'} & M' \end{array}$$

Remarque 46 $E' \neq \phi$ car si $m' \in M'$ alors $f(m') \in M$ et comme π est surjective alors il existe $e \in E$ tel que $f(m') = \pi(e)$

L'application

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\pi'} & M' \\ (m', e) & \rightarrow & m' \end{array}$$

fait de E' un fibré localement trivial de base M' et de même fibre type F que E . La trivialisation se fait de la façon suivante : si $\phi_U : F \times U \xrightarrow{\cong} E_U$ est une trivialisation de E , on définit

$$\begin{array}{ccc} \phi'_U : F \times f^{-1}(U) & \longrightarrow & E'_{f^{-1}(U)} = (f \circ \pi')^{-1}(U) \\ (\lambda, m') & \rightarrow & \phi_U(\lambda, f(m')) \end{array}$$

la fibre $E'_{m'}$ de E' est $E_{f(m')}$, c'est à dire $E' = \bigsqcup_{m' \in M'} E_{f(m')}$

Définition 47 Le fibré $\pi' : E' \longrightarrow M'$ est appelé image réciproque de E par f et se note $f^{-1}(E)$

Remarque 48 On a $\phi_U(\lambda, f(m')) \in E_{f(m')} = \pi^{-1}(f(m'))$, c'est un élément de E' et plus précisément de $E'_{m'}$, en effet, on va appelé $e = \phi_U(\lambda, f(m')) \in E_{f(m')}$, donc $\pi(e) = f(m')$ et donc $(m', e) \in E'_{m'} = \{(m', x) \in \{m'\} \times E \mid f(m') = \pi(x)\}$, en fait, il faudrait regarder E_U par exemple comme

$$E_U = \bigsqcup_{m \in U} E_m = \bigsqcup_{m \in U} \{(m, x) \mid \pi(x) = m\}$$

Définition 49 (Fibrés induits). Pour toute sous-variété différentiable N de M , l'image réciproque d'un fibré $E \longrightarrow M$ par l'inclusion $f = i; N \hookrightarrow M$ possède une structure de fibré différentiable de base N et de même fibre type que E qu'on appelle le fibré induit par E sur N ou la restriction de E sur N et que l'on note par $E_{/N} = \bigsqcup_{m \in N} E_m$

Soient $\pi_1 : E_1 \longrightarrow M$ et $\pi_2 : E_2 \longrightarrow M$ deux fibrés localement triviaux de même base M et de fibres types F_1 et F_2 respectivement. Le sous espace $E_1 \times_M E_2$ de $E_1 \times E_2$ donné par

$$E_1 \times_M E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\} = \bigsqcup_{x \in M} (\pi_1^{-1}(x) \times \pi_2^{-1}(x))$$

possède une structure naturelle de fibré localement trivial de base M et de fibre type $F_1 \times F_2$, de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \pi : E_1 \times_M E_2 & \longrightarrow & M \\ (e_1, e_2) & \rightarrow & \pi(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2) \end{array}$$

si $\phi_1 : F_1 \times U \xrightarrow{\sim} E_1|_U$ et $\phi_2 : F_2 \times U \xrightarrow{\sim} E_2|_U$ de'signent des trivialisations locales de E_1 et E_2 au dessus d'un même ouvert U de M , on définit une trivialisation locale

$$\phi : (F_1 \times F_2) \times U \longrightarrow E_1 \times_M E_2|_U$$

telle que

$$\phi((\lambda_1, \lambda_2), m) = (\underbrace{\phi_1(\lambda_1, m)}_{\in E_{1,m}}, \underbrace{\phi_2(\lambda_2, m)}_{\in E_{2,m}})$$

Noter que les images par ϕ_1 et ϕ_2 se rencontrent en m , c'est à dire $E_1 \times_M E_2 = \bigsqcup_{m \in M} (E_{1,m} \times E_{2,m})$

Définition 50 (*Produits fibrés*). Le fibré $E_1 \times_M E_2 \longrightarrow M$ ainsi défini est appelé produit fibré de E_1 et E_2 .

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré différentiable, $\tilde{X} \in \chi(E)$ et soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{\pi_*} & TM \\ \tilde{X} \uparrow & & \uparrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Définition 51 On dit qu'un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \chi(E)$ est prolongeable si pour tous $e_1, e_2 \in E_m$ on a

$$\pi_{*,e_1}(\tilde{X}_{e_1}) = \pi_{*,e_2}(\tilde{X}_{e_2}) \text{ dans } T_m M$$

il existe un unique $X \in \chi(U)$ noté $\pi_*(\tilde{X})$ tel que $X_m = \pi_*(\tilde{X}_e)$ pour n'importe quel $e \in E_m$; Le champ X est dit la projection de \tilde{X} sur M

4.3 Fibrés Vectoriels

Ce sont des f.d.l.t (fibrés différentiels localement triviaux) $E \longrightarrow M$ mais qui vérifient en plus : la fibre type F et chaque fibre E_m sont des e.v (espaces vectoriels) de dimension r et il est possible de choisir une trivialisation locale ϕ_U telle que chaque difféomorphisme $\phi_m : F \longrightarrow E_m$ soit un isomorphisme d'e.v, r est dit le rang du fibré

A tout f.v.complexe $E \longrightarrow M$ de rang r , on peut associer :

- * le f.v. réel sous-jacent $E_{\mathbb{R}} \longrightarrow M$ de rang $2r$
- * le fibré complexe \bar{E} ayant le même fibré vectoriel sous-jacent $E_{\mathbb{R}}$ que E mais tel que la multiplication par i dans \bar{E} soit la multiplication par $-i$ dans E , ce fibré est dit le f.v. conjugué

Exemple 52 $\mathbb{R}^r \times M \xrightarrow{\pi} M$ ou plus généralement $\mathbb{k}^r \times M \longrightarrow M$ est le fibré vectoriel trivial de rang r et de base M . On a $\pi(x, m) = m$ et $\pi^{-1}(m) = \mathbb{R}^r \times \{m\}$ et donc $F = \mathbb{R}^r$, aussi, $\phi_m = id : \mathbb{R}^r \times \{m\} \longrightarrow E_m = \pi^{-1}(m)$ et bien sûr $\mathbb{R}^r \times \{m\} \simeq \mathbb{R}^r$, ce fibré se note $\Theta^r(M)$

Exemple 53 Le fibré tangent sur une variété est donné par

$$\begin{aligned} TM & \xrightarrow{\pi} M \\ (p, X_p) & \rightarrow p \end{aligned}$$

est un fibré vectoriel de rang $n = \dim M$. Si (x, U) est une carte autour de p alors

$$\begin{aligned} \phi_U : \quad \mathbb{R}^n \times U & \longrightarrow T_p M = \pi^{-1}(p) \\ (X^1, \dots, X^n, x_1, \dots, x_n) & \rightarrow X_p = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \end{aligned}$$

est une trivialisation locale de TM .

La trivialisation locale de TM , veut que localement, dans un ouvert U contenant m de M , tout point (m, X_m) de TM admet une écriture unique $(X^1, \dots, X^n, x_1, \dots, x_n)$ où (x_1, \dots, x_n) sont les composantes locales de m et (X^1, \dots, X^n) sont les composantes de X_m sur $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m$.

Exemple 54 Le fibré cotangent

$$\begin{aligned} T^*M & \xrightarrow{\pi} M \\ (p, \omega_p) & \rightarrow p \end{aligned}$$

c'est le fibré de rang n des 1-formes sur une variété M . si $m \in M$ et (x, U) est une carte autour de m , on a la trivialisation

$$\begin{aligned} \phi_U : \quad \mathbb{R}^n \times U & \longrightarrow T_p^* M = \pi^{-1}(p) \\ (\omega^1, \dots, \omega^n, x_1, \dots, x_n) & \rightarrow \omega_p = \omega^i dx_i \Big|_p \end{aligned}$$

ainsi, localement (m, ω_m) s'écrit $(\omega^1, \dots, \omega^n, x_1, \dots, x_n)$

Définition 55 On appelle morphisme (resp. isomorphisme) de fibrés vectoriels de base M , tout morphisme (resp. isomorphisme) de fibrés dont on suppose de plus que la restriction sur chaque fibre est linéaire (resp. isomorphisme d'e.v) c'est à dire $f : E \longrightarrow E'$ est différentiable (resp. difféomorphisme) et tel que $f_m = f|_{E_m} : E_m \longrightarrow E_{f(m)}$ est linéaire (resp. isomorphisme)

Lemme 56 Si $E \longrightarrow M$ désigne un fibré vectoriel différentiable réel ou (resp. complexe), l'ensemble $\Gamma(E)$ des sections différentiables de E est muni d'une structure naturelle de $C^\infty(M)$ -module, (resp. de $C^\infty(M, \mathbb{C})$ -module) : si $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$ donc

$$\begin{aligned} \sigma, \tau : M &\longrightarrow E \\ m &\rightarrow \sigma_m, \tau_m \in E_m \end{aligned}$$

on définit $(u\sigma + v\tau)_{(m)} = u(m)\sigma_m + v(m)\tau_m \in E_m$ où $u, v \in C^\infty(M)$

Remarque 57 Si $f : M' \longrightarrow M$ est une application différentiable alors le fibré inverse $f^{-1}(E) = \bigsqcup_{m \in M'} E_{f(m)} \longrightarrow M'$ est un f.v. de même rang

Définition 58 On appelle métrique riemannienne (resp. hermitienne) ou produit scalaire sur un f.v différentiable réel (resp complexe), $E \longrightarrow M$ la donnée d'une métrique riemannienne (resp. hermitienne), \langle, \rangle_m dans chaque fibre E_m de E et tel que pour toutes sections $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$, la fonction

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tau \rangle : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\rightarrow \langle \sigma, \tau \rangle_m = \langle \sigma_m, \tau_m \rangle_m \end{aligned}$$

est C^∞

Proposition 59 (Existence des produits scalaires) : Tout fibré vectoriel admet un produit scalaire

Preuve. Soit (U_α, ϕ_α) une famille de trivialisations locales

$$M = \bigsqcup_\alpha U_\alpha; \quad \phi_\alpha : \mathbb{R}^r \times U_\alpha \xrightarrow{\simeq} E|_{U_\alpha}$$

On note \langle, \rangle_α le produit scalaire sur chaque fibre de $E|_{U_\alpha}$ obtenu par transport de structure à partir du produit scalaire canonique $\Sigma x_i y_i$ de \mathbb{R}^r (resp $\Sigma x_i \bar{y}_i$ sur \mathbb{C}^r) grâce à ϕ_α . D'un autre côté, soit (ψ_α) une partition de l'unité sur M , subordonnée au recouvrement (U_α) , c'est à dire $\psi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et telle que

$$\text{Supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha \text{ et } \Sigma \psi_\alpha = 1$$

On a $\sum_\alpha \psi_\alpha \cdot \langle, \rangle_\alpha$ est une métrique riemannienne (resp. hermitienne) sur E . C'est à dire

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (\sigma, \tau) &\rightarrow \langle \sigma, \tau \rangle \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \sigma, \tau \rangle : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\rightarrow \langle \sigma, \tau \rangle_m = \sum_\alpha \psi_\alpha(m) \cdot \langle \sigma_m, \tau_m \rangle_\alpha \end{aligned}$$

■

4.4 Opérations sur les fibrés vectoriels

Somme de Whitney

Si E_1 et E_2 sont des fibrés vectoriels de rang r_1 et r_2 respectivement et de même base M , le produit $E_1 \times E_2 \longrightarrow M$ possède une structure naturelle de fibré vectoriel de rang $r_1 + r_2$, qu'on appelle somme de Whitney de E_1 et E_2 et que l'on note $E_1 \oplus E_2$. En tout point m de M on a $(E_1 \oplus E_2)_m = (E_1)_m \oplus (E_2)_m$

Remarque 60 On a $E_1 \times E_2 = \bigsqcup_{m \in M} E_{1,m} \times E_{2,m}$ mais $E_{1,m} \times E_{2,m}$ est isomorphe à $(E_1)_m \oplus (E_2)_m$, en effet

$$\begin{array}{ccc} f : E_{1,m} \times E_{2,m} & \longrightarrow & (E_1)_m \oplus (E_2)_m \\ (x, y) & \longrightarrow & x + y \end{array}$$

est un isomorphisme d'e. v, f est clairement surjective. d'autre part, si $(x, y) \in \ker f$ alors $x + y = 0$ et donc $x = -y$ ce qui donne que x et y sont dans $(E_1)_m \cap (E_2)_m = \{0\}$ et par suite $x = y = 0$ donc $\ker f = \{0\}$. Ainsi, l'on peut dire que $E_1 \times E_2 = \bigsqcup_{m \in M} E_{1,m} \oplus E_{2,m}$ que l'on note par $E_1 \oplus E_2$

Proposition 61 Pour tout f.v $E \longrightarrow M$ de base compacte M , il existe un f.v. $E' \longrightarrow M$ tel que $E \oplus E'$ soit trivial

Preuve. Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un f.v. de rang r . Si M est compacte alors $M = \bigsqcup_{1 \leq \alpha \leq s} U_\alpha$. On considère les trivialisations au dessus de chaque U_α

$$\phi_\alpha : \mathbb{R}^r \times U_\alpha \longrightarrow E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha)$$

D'autre part, on considère la famille $(\varphi_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq s}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement (U_α)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ différentiable} \\ \text{Supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha = 1 \end{array} \right.$$

On note par $\Theta^r(M)$ le fibré trivial $\mathbb{R}^r \times M \longrightarrow M$ de rang r . On définit l'application $\psi_\alpha : E \longrightarrow \Theta^r(M)$ par $\psi_\alpha = (\varphi_\alpha \circ \pi) \cdot \phi_\alpha^{-1}$, c'est à dire :

$$\text{Si } X \in E_\alpha, \text{ alors } \psi_\alpha(X) = \underbrace{(\varphi_\alpha \circ \pi)(X)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\phi_\alpha^{-1}(X)}_{\in \mathbb{R}^r \times U_\alpha}$$

Si $X \notin E_\alpha$ alors $\pi(X) \notin U_\alpha$ et donc $\varphi_\alpha(\pi(X)) = 0$, ainsi $\psi(X) = 0$

On a ψ_α est un morphisme de fibrés vectoriels. On considère le fibré trivial $\Theta^{rs}(M) = \underbrace{\Theta^r(M) \oplus \cdots \oplus \Theta^r(M)}_{s \text{ fois}}$ et soit l'inclusion canonique de la $i^{\text{ème}}$ copie de $\Theta^r(M)$

$$i_\alpha : \Theta^r(M) \hookrightarrow \Theta^{rs}(M)$$

comme $\sum \varphi_\alpha = 1$ alors l'application $\sum i_\alpha \circ [(\varphi_\alpha \circ \pi) \cdot \phi_\alpha^{-1}] : E \longrightarrow \Theta^{rs}(M)$ est un homomorphisme injectif de fibrés vectoriels. Comme, $\Theta^{rs}(M)$ peut être muni d'un produit scalaire, par exemple chaque fibre est munie du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^{rs} , alors le supplémentaire orthogonale E' de E dans Θ^{rs} vérifie $E \oplus E' = \Theta^{rs}(M)$. ■

5 Fonctions De Transition Et Connexion Sur Un Fibré Vectoriel

5.1 Fonctions de transition

Dire que $E \xrightarrow{\pi} M$ est un fibré vectoriel de rang r revient à dire que localement E "ressemble" \mathbb{R}^r , aussi $\pi^{-1}(U)$ "ressemble" à $U \times \mathbb{R}^r$. On rappelle qu'une section de E sur M est une application différentiable $s : M \longrightarrow E$ telle que $s(x) \in E_x$. On peut, grâce à ces données, déduire que pour tout $x \in m$ il existe une carte U de M autour de x et il existe r sections

$$\begin{aligned} e_i : U &\longrightarrow E \\ y &\longrightarrow e_i(y) \quad i = 1 \cdots r \end{aligned}$$

un champ de bases au dessus de U , c'est à dire $\{e_1(x), \dots, e_r(y)\}$ est une base de E_y et telle que la fonction de trivialisatation est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi : U \times \mathbb{R}^r &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (y, a^1, \dots, a^r) &\longrightarrow \sum a^i e_i(y) \in E_y \end{aligned}$$

on dit que $\{e_i\}$ représente un repère de E au dessus de U . Le couple (U, ϕ^{-1}) est dit une carte du fibré au dessus de U

Exemple 62 Soit le fibré tangent $TM \xrightarrow{\pi} M$ donné par $\pi(x, X_x) = x$. C'est un fibré vectoriel de dimension $n = \dim M$. Pour tout $x \in M$ il existe une carte U autour de x telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} : U &\longrightarrow TM \\ p &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M \end{aligned}$$

avec $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i=1\dots n}$ est une base de $T_p M$ et l'application de trivialisat  on :

$$\begin{aligned} \phi : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (p, a^1, \dots, a^r) &\longrightarrow \sum a^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_p M \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. Noter que $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$, les fibres sont $T_p M$, $p \in M$ et que le $C^\infty(M)$ - module des sections sur TM n'est autre que $\chi(M)$ le $C^\infty(M)$ - module des champs de vecteurs.

Soit maintenant $E \xrightarrow{\pi} M$ un f.v de rang r et soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M , comme les fonctions de trivialisations sont des difféomorphismes alors on peut les voir pour tout α , comme $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. On va considérer deux cartes U_α et U_β telles que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Pour un point $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, on a deux champs de bases $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$, $i = 1 \dots r$ tels que $\{e_i(p)\}$ et $\{e'_i(p)\}$ sont deux bases de $E_p = \pi^{-1}(p)$ et donc un point $X_p \in E_p$ s'écrit

$$X_p \underset{U_\alpha}{=} X^i e_i(p) \underset{U_\beta}{=} Y^j e'_j(p)$$

L'application linéaire qui échange les composantes sur les deux bases (la matrice de passage), est donnée par

$$\begin{aligned} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r &\xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}} \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\phi_\beta} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \\ (p, X^1, \dots, X^r) &\longrightarrow X_p = X^i e_i(p) \longrightarrow (p, Y^1, \dots, Y^r) \end{aligned}$$

où X_p s'écrit dans la carte (U_β) , comme $X_p = Y^j e'_j(p)$. Ainsi $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_p$ échange les bases de E_α et E_β . On en conclut l'existence d'une application

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta &\longrightarrow GL(r, \mathbb{R}) \\ p &\longrightarrow \phi_{\alpha\beta}(p) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_p \end{aligned}$$

On a $\phi_{\alpha\beta}(p)(X^1, \dots, X^r) = (Y^1, \dots, Y^r)$ et donc $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(p, X_p) = (p, \phi_{\alpha\beta}(p)(X))$. L'application $\phi_{\alpha\beta}$ est dite application de transition.

Exemple 63 On considère le fibré vectoriel tangent TM , soient (x, U_α) et (y, U_β) deux cartes locales qui se croisent ($U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$). On va supposer que (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont les coordonnées locales d'un point $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Pour $V_p \in \pi^{-1}(p) = T_p M$ on a

$$V_p \underset{U_\alpha}{=} V^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p = V'^j \frac{\partial}{\partial y_j}|_p$$

Pour exprimer le lien entre les composantes V^i et V'^i , il est profitable de rappeler que si $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable entre

deux variétés, alors pour tout point $p \in M$, l'application tangente en p s'exprime localement par

$$f_{*p}(X^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p) = X^i(\frac{\partial f^j}{\partial x_i})(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}|_{f(p)}$$

Pour le cas de changement de cartes on a l'application

$$\begin{array}{ccc} x(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{y \circ x^{-1}} & y(U_\alpha \cap U_\beta) \\ (x_i) & \rightarrow & (y_i) \end{array}$$

et donc $V'^i = V^k \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$. Poursuite

$$\phi_{\alpha\beta}(p)(V^1, \dots, V^n) = (V^k \frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \dots, V^k \frac{\partial y_n}{\partial x_k})$$

et

$$\phi_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemple 64 On peut de même donner les fonctions de transitions du fibré cotangent $T^*M \longrightarrow M$. Soit $\omega_p \in T_p^*M$, on a

$$\omega_p = \omega^i dy_i|_{U_\alpha} = \omega'^j dx_j|_{U_\beta}$$

où (U_α, y) et (U_β, x) sont deux cartes autour de p . On vérifie facilement que $\phi_{\alpha\beta}(p)(\omega^1, \dots, \omega^n) = (\omega^i \frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \dots, \omega^i \frac{\partial y_i}{\partial x_n})$ et poursuite

$$\phi_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemple 65 On considère la variété $\otimes_2^0 M$ où M est une variété de dimension n . On a

$$\begin{array}{ccc} \otimes_2^0 M & \xrightarrow{\pi} & M \\ (p, t_p) & \rightarrow & p \end{array}$$

est un fibré vectoriel rang $n^2 = 4$ donné par $\otimes_2^0 M = \bigsqcup_{p \in M} \otimes_2^0 T_p M$ où $\otimes_2^0 T_p M = \{t_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bilinéaire}\}$ est un espace vectoriel de

dimension 4. Si (x, U) est une carte autour de p alors $\{dx_1 \otimes dx_j|_p\}_{1 \leq i, j \leq 2}$ est une base de $\otimes_2^0 T_p M$. L'application de trivialisatation est donnée par

$$\begin{aligned} \phi_U \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^4 \\ t_p &\longrightarrow (p, t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) \end{aligned}$$

où $t_p = t_{ij} dx^i \otimes dx^j|_p$. Il est utile de rappeler que si $f : M \longrightarrow N$ est une application différentiable, alors f induit une application différentiable entre les variétés des tenseurs :

$$\begin{aligned} f^* \otimes_2^0 N &\longrightarrow \otimes_2^0 M \\ t &\longrightarrow (f^* t)_p(X_p, Y_p) = t_{f(p)}(f_{*p}(X_p), f_{*p}(Y_p)) \end{aligned}$$

et lorsque (U, x) est une carte autour de p et (V, u) est une carte autour de $f(p)$ alors pour $t = t_{ij} du^i \otimes du^j$ on a

$$f^* t = t_{kl} \frac{\partial f^k}{\partial x_i} \frac{\partial f^l}{\partial x_j} dx^i \otimes dx^j$$

Ainsi, lorsqu'on a un changement de variables autour de $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, on a $t \underset{U_\alpha}{=} t_{ij} dy^i \otimes dy^j \underset{U_\beta}{=} t'_{ij} dx^i \otimes dx^j$ alors

$$t'_{ij} = t_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x_i} \frac{\partial y^l}{\partial x_j}$$

et

$$\phi_{\beta\alpha}(p)(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) = (t_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x_1} \frac{\partial y^l}{\partial x_1}, t_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x_1} \frac{\partial y^l}{\partial x_2}, t_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x_2} \frac{\partial y^l}{\partial x_1}, t_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x_2} \frac{\partial y^l}{\partial x_2})$$

Aussi,

$$\phi_{\beta\alpha}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial y^1}{\partial x_1} & \frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial y^2}{\partial x_1} & \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \frac{\partial y^1}{\partial x_1} & \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial y^1}{\partial x_2} & \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial y^2}{\partial x_2} & \frac{\partial y^2}{\partial x_2} \frac{\partial y^1}{\partial x_2} & \frac{\partial y^2}{\partial x_2} \frac{\partial y^2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Exemple 66 Pour une variété M de dimension 2, on peut donner l'exemple de $\wedge^2 M \longrightarrow M$ qui est un f.v de rang $r = 1$, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \phi_{\beta\alpha}(p) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow a \left(\frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial y^2}{\partial x_2} - \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

et par suite

$$\phi_{\beta\alpha}(p) = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x_1} \frac{\partial y^2}{\partial x_2} - \frac{\partial y^1}{\partial x_2} \frac{\partial y^2}{\partial x_1} \right)$$

Exemple 67 On considère la variété $M = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ munie de l'atlas formé de 4 cartes $(U_i, X_i)_{1 \leq i \leq 4}$ avec :

$$\begin{cases} U_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}; X_1(x, y) = y \\ U_2 = \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}; X_2(x, y) = x \\ U_3 = \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}; X_3(x, y) = y \\ U_4 = \{(x, y) \in S^1 \mid y < 0\}; X_4(x, y) = x \end{cases}$$

le changement de carte entre U_1 et U_2 par exemple est donné par :

$$\begin{array}{ccc} X_2 \circ X_1^{-1} :]0, 1[& \longrightarrow &]0, 1[\\ t & \longrightarrow & s = \sqrt{1 - t^2} \end{array}$$

et si on regarde la fonction de transition du fibré tangent en un point $p \in U_1 \cap U_2$, on trouve

$$\begin{array}{ccc} (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi_1^{-1}} \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\phi_2} (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R} \\ (p, \alpha) & \longrightarrow \alpha \frac{d}{dt} \Big|_p \in T_p S^1 & \longrightarrow (p, \beta) \end{array}$$

où $\beta = \alpha \frac{ds}{dt} = \frac{-\alpha t}{\sqrt{1-t^2}}$ et donc

$$\phi_{21}(t)(\alpha) = \frac{-\alpha t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exemple 68 On considère la sphère S^2 munie de l'atlas de 3 cartes $S^2 = \bigsqcup_{1 \leq i \leq 3} U_i$ avec

$$\begin{cases} U_1 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid |x| < 1\}; X_1(x, y, z) = (x, y) \\ U_2 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid |y| < 1\}; X_2(x, y, z) = (x, y) \\ U_3 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid |z| < 1\}; X_3(x, y, z) = (x, z) \end{cases}$$

On définit $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|u\| = 1 \text{ et } \langle u, v \rangle = 0\}$ et $\pi : E \longrightarrow S^2$ par $\pi(u, v) = u$, ainsi $E \xrightarrow{\pi} S^2$ est un fibré vectoriel de rang $r = 2$. En effet, π est surjective; $\pi^{-1}(U) = E_U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v \rangle = 0\}$ n'est autre que l'espace vectoriel orthogonal à $u \in S^2$, c'est donc le plan tangent à S^2 en u qui est un e.v de dimension deux. On va construire les applications de trivialisations associées au recouvrement (U_i) de la façon suivante : Soit $u = (x, y, z) \in S^2$, on a $E_{(x,y,z)}$ est le plan orthogonal à u . On va construire l'isomorphisme d'e.v. :

$$\begin{array}{ccc} E_{(x,y,z)} & \xrightarrow{\phi_{1,(x,y,z)}} & \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, \beta, \gamma) & \longrightarrow & (a = a(\alpha, \beta, \gamma), b = b(\alpha, \beta, \gamma)) \end{array}$$

Pour tout vecteur $(\alpha, \beta, \gamma) \in E_u$, un vecteur de E_u , linéairement indépendant avec (α, β, γ) est

$$v = (x, y, z) \wedge (\alpha, \beta, \gamma) = ((\beta z - \gamma y), -(\alpha z - \gamma x), \alpha y - \beta x))$$

ainsi, on prend a et b comme étant les abscisses de u et v respectivement

$$\begin{cases} a = \beta z - \gamma y \\ b = \alpha \end{cases}$$

Finalement l'application de trivialisatation associée à U_1 est :

$$\begin{aligned} \phi_1 : \quad \pi^{-1}(U_1) &\longrightarrow U_1 \times \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) &\rightarrow (x, y, z; \beta z - \gamma y, \alpha) \end{aligned}$$

Il n'est facile de trouver l'application inverse de ϕ_1 :

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1} : \quad U_1 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \pi^{-1}(U_1) \\ (x, y, z; a, b) &\rightarrow (x, y, z; b, \frac{az - bxy}{1 - x^2}, \frac{-bxz - ay}{1 - x^2}) \end{aligned}$$

Noter que $|x| \neq 1$ pour $u \in U_1$ et ϕ^{-1} est bien différentiable.

De même

$$\begin{aligned} \phi_2 : \quad \pi^{-1}(U_2) &\longrightarrow U_2 \times \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) &\rightarrow (x, y, z; \gamma x - \alpha z, \beta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_3 : \quad \pi^{-1}(U_3) &\longrightarrow U_3 \times \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) &\rightarrow (x, y, z; \alpha y - \beta x, \gamma) \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y, z) \in U_1 \cap U_2$ on a $\phi_{21}(x, y, z) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\phi_{21}(x, y, z)(a, b) = \phi_2 \circ \phi_{1(x, y, z)}^{-1}(a, b) = \phi_2(x, y, z; b, \frac{az - bxy}{1 - x^2}, \frac{-bxz - ay}{1 - x^2}) =$$

$$\begin{aligned} \phi_{21}(x, y, z)(a, b) &= \phi_2 \circ \phi_{1(x, y, z)}^{-1}(a, b) \\ &= \phi_2(x, y, z; b, \frac{az - bxy}{1 - x^2}, \frac{-bxz - ay}{1 - x^2}) \\ &= (\frac{-axy - bz}{1 - x^2}, \frac{az - bxy}{1 - x^2}) \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \begin{pmatrix} -xy & -z \\ z & -xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$\phi_{21}(x, y, z) = \frac{-1}{y^2 + z^2} \begin{pmatrix} -xy & -z \\ z & -xy \end{pmatrix} \in GL(2)$$

de même

$$\phi_{32}(x, y, z) = \frac{-1}{x^2 + z^2} \begin{pmatrix} yz & x \\ -x & yz \end{pmatrix} \in GL(2)$$

et

$$\phi_{13}(x, y, z) = \frac{-1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} xz & y \\ -y & xz \end{pmatrix} \in GL(2)$$

6 Connexions sur les fibrés vectoriels

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel, $\Gamma(E)$ le $C^\infty(M)$ - module des sections de E sur M .

Définition 69 Une connexion sur le fibré E est une application :

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, S) &\longrightarrow \nabla_X S \end{aligned}$$

telle que, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, et pour tous champs $X, Y \in \chi(M)$ et pour toutes sections S, S_1 et $S_2 \in \Gamma(E)$ on a :

1. $\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_Y S$
2. $\nabla_{fX} S = f \nabla_X S$
3. $\nabla_X (S_1 + S_2) = \nabla_X S_1 + \nabla_X S_2$
4. $\nabla_X (fS) = X(f)S + f \nabla_X S$

Notation 70 Si $x \in M$ et $u = X_x \in T_x M$. On note $\nabla_u S = (\nabla_X S)(x) \in E_x$

Exemple 71 Une connexion sur M est une connexion sur le fibré tangent TM . En effet, $\Gamma(TM) = \chi(M)$ et

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

vérifie les conditions ci-dessus

Exercice 72 (Connexion sur le fibré inverse) : Soit $E \xrightarrow{\pi} N$ un fibré vectoriel au dessus de N et $\phi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. On note par $\phi^{-1}E$ le fibré vectoriel inverse de E par ϕ , c'est le fibré au dessus de M donné par $\phi^{-1}E = \bigsqcup_{x \in M} E_{\phi(x)}$. Si ${}^E\nabla$ est une connexion sur le fibré E on peut lui associer l'unique connexion ∇ définie sur le fibré inverse $\phi^{-1}(E)$ telle que pour tout $x \in M$ avec $\phi(x) = y \in N$, pour tout $X \in T_x M$ et toute section $\rho \in \Gamma(E)$ on a

$$\nabla_X (\phi^* \rho) = {}^E \nabla_{\phi_* X} (\rho)$$

où $\phi^* \rho = \rho \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}E)$ et $\phi_* : T_x M \longrightarrow T_{\phi(x)} N$

Solution 73 En effet, il est facile de voir que ∇ vérifie les propriétés d'une connexion linéaire, il suffit donc de donner l'écriture locale de ∇ montrant ainsi l'existence et l'unicité. Soit U_y une carte autour de y . On considère sur U_y , le champ de sections ρ_α , de E tel que $\{\rho_\alpha(q)\}$ est une base de E_q pour tout $q \in U_y$. Si U_x est une carte autour de x telle que

$\phi(U_x) \subset U_y$ et si $V \in \Gamma(\phi^{-1}E)$ est une section au dessus de U_x , dans le sens que $V_z \in E_{\phi(z)}$ pour tout $z \in U_x$ alors, on a :

$$V = f^\alpha \cdot \phi^* \rho_\alpha, \quad \text{où } f^\alpha \in C^\infty(U_x)$$

Si ∇ vérifie les conditions de la donnée, alors

$$\begin{aligned} \nabla_X V &= \nabla_X (f^\alpha \cdot \phi^* \rho_\alpha) \\ &= X(f^\alpha) \phi^* \rho_\alpha + f^\alpha \nabla_X (\phi^* \rho_\alpha) \\ &= X(f^\alpha) \phi^* \rho_\alpha + f^\alpha \cdot {}^E \nabla_{\phi_* X} (\rho_\alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

Noter que l'équation (13) s'écrit dans la fibre $E_{\phi(x)}$. Cette équation montre l'existence d'une telle connexion sur le fibré inverse. Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer que l'équation (13) ne dépend pas du choix de $\{\rho_\alpha\}$. On va continuer cette démonstration de l'unicité mais pour de raisons de familiarité avec les notations et pour aider le lecteur à bien assimiler la preuve, on va se contenter de donner cette démonstration au cas où le fibré $E = TN$ et donc $\phi^{-1}(TN) = \bigsqcup_{x \in M} T_{\phi(x)}N$. On peut donc

poser $\{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\}$ un champ de bases de TN au dessus de U_y , on a ∂z_ν

$$V_p = f^\alpha \cdot \phi^* \rho_\alpha = f^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial y_\alpha} |_{\phi(p)}, \quad \text{pour tout } p \in U_x$$

Si $\{\frac{\partial}{\partial z_\beta}\}$ est un autre champ de bases au dessus de U_y , on a alors

$$V_p = g^\beta \cdot \frac{\partial}{\partial z_\beta} |_{\phi(p)}$$

L'application de transition entre $\{y_\alpha\}$ et $\{z_\beta\}$ donne que

$$\begin{cases} g^\beta = f^\alpha \cdot \frac{\partial z_\beta}{\partial y_\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial z_\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \end{cases} \quad (14)$$

On a

$$\begin{aligned} V &\stackrel{(1)}{=} X(f^\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\alpha} |_{\phi(x)} + f^\alpha(x) \cdot {}^E \nabla_{\phi_* X} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} X(g^\beta) \cdot \frac{\partial}{\partial z_\beta} |_{\phi(x)} + g^\beta(x) \cdot {}^E \nabla_{\phi_* X} \left(\frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) \end{aligned}$$

En partant de l'équation (2) et en utilisant (14) on obtient :

$$\begin{aligned} V &= X(f^\alpha \cdot \frac{\partial z_\beta}{\partial y_\alpha}) \cdot \frac{\partial}{\partial z_\beta} |_{\phi(x)} + f^\alpha \cdot \frac{\partial z_\beta}{\partial y_\alpha} \cdot {}^E \nabla_{\phi_* X} \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial z_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \\ &= X(f^\alpha) \cdot \frac{\partial z_\beta}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial z_\beta} |_{\phi(x)} + f^\alpha \cdot \frac{\partial z_\beta}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_\beta} \cdot {}^E \nabla_{\phi_* X} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \\ &= X(f^\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\alpha} |_{\phi(x)} + f^\alpha(x) \cdot {}^E \nabla_{\phi_* X} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \end{aligned}$$

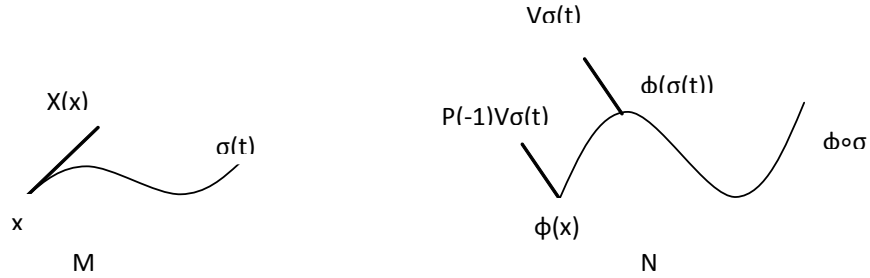
car $X(\frac{\partial z_\beta}{\partial y_\alpha}) = 0$. D'où l'indépendance de cette connexion relativement au changement de cartes.

Remarque 74 Lorsque la section V de $\phi^{-1}E$ sur M n'est pas de la forme $\phi^*\rho$ où $\rho \in \Gamma(E)$ et $E = TN$, alors la connexion ∇ sur le fibré inverse est donnée par

$$\nabla_X V = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}[(^N P_{\phi \circ \sigma_t})^{-1} V(\sigma(t))]$$

avec :

1. $\nabla : \chi(M) \times \Gamma(\phi^{-1}TN) \longrightarrow \Gamma(\phi^{-1}TN)$ et donc $\nabla_X V \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$
c'est à dire $\nabla_X V : M \longrightarrow TN$
 $x \longrightarrow (\nabla_X V)_x \in T_{\phi(x)}N$
2. $t \longrightarrow \sigma(t)$ est la courbe intégrale de $X_x \in T_x M$
3. $^N P_{\phi \circ \sigma_t} : T_{\phi(x)}N \longrightarrow T_{\phi(\sigma(t))}N$ est le transport parallèle entre $\phi(\sigma(0)) = \phi(x)$ et $\phi(\sigma(t))$ relativement à la connexion $^E \nabla$



Preuve. En effet, on peut vérifier qu'il s'agit d'une connexion sur le fibré inverse, c'est surtout la propriété 4 qui demande une démonstration

$$\nabla_X(fV)|_x \stackrel{?}{=} X(f)V|_x + f\nabla_X V|_x \text{ dans } T_{\phi(x)}N$$

On rappelle que si $X \in \chi(M)$, $x \in M$, $f \in C^\infty(M)$ alors $X_x(f) \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$X_x(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f \circ \sigma(t))$$

où σ est une courbe intégrale de X_x . On a

$$\begin{aligned} \nabla_X(fV)|_x &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\{(^N P_{\phi \circ \sigma_t})^{-1}[f(\sigma(t)) \cdot V(\sigma(t))]\} \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\{f(\sigma(t)) \cdot (^N P_{\phi \circ \sigma_t})^{-1}[V(\sigma(t))]\} \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de $^N P_{\phi \circ \sigma_t}$. Il en vient :

$$\begin{aligned} \nabla_X(fV)|_x &= \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}[f(\sigma(t))]\right) \cdot (^N P_{\phi \circ \sigma_t})^{-1}(V(\sigma(t)))\bigg|_{t=0} \\ &\quad + f(\sigma(t))\bigg|_{t=0} \cdot \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\{(^N P_{\phi \circ \sigma_t})^{-1}[V(\sigma(t))]\} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\nabla_X(fV)|_x &= X_x f \cdot V(\sigma(0)) + f(\sigma(0)) \cdot \nabla_X(V)|_x \\ &= X_x f \cdot V(x) + f(x) \cdot \nabla_X(V)|_x\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

On rappelle que si ∇ est une connexion sur M alors pour tout $X \in \chi(M)$, on définit le tenseur contravariant

$$\nabla_X : \wedge^1 M \longrightarrow \wedge^1 M \quad (15)$$

par $(\nabla_X \omega)(Y) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y)$. Dans l'exemple qui suit, on va placer cette définition dans le cadre naturel de la théorie de connexions sur les fibrés vectoriels.

Application : Connexion sur le fibré dual

Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel et soit ∇ une connexion sur E . On rappelle que le fibré dual de E est $E^* \xrightarrow{\pi} M$ où $E^* = \bigsqcup_{x \in M} E_x^*$. La connexion ∇ sur E induit une connexion notée ∇^* sur E^* construite de la façon suivante :

$$\nabla^* : \chi(M) \times \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(E^*) \quad (16)$$

pour tout $X \in \chi(M)$ et tout $\omega \in \Gamma(E^*)$. On a $\Gamma(E^*) = \{\omega : M \longrightarrow E \text{ telle que } \omega_x \in E_x^*\}$ s'identifie au $C^\infty(M)$ module

$$\{\alpha : \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M)\}$$

comme suit, si $\omega \in \Gamma(E^*)$, alors on prend $\alpha(S)(x) = \omega_x(S(x))$. Ainsi une section de E^* sur M peut être vue comme une application $C^\infty(M)$ -linéaire de $\Gamma(E)$ dans $C^\infty(M)$. Dans ces condition ∇^* sera donnée par

$$(\nabla_X^* \omega)(\sigma) = X\omega(\sigma) - \omega(\nabla_X \sigma)$$

pour tout $\sigma \in \Gamma(E)$. Ainsi, l'équation (15) n'est autre que la connexion ∇^* sur le fibré dual T^*M du fibré TM associée à la connexion ∇ de TM .

Exercice 75 Soient V et W deux fibrés vectoriels au dessus d'une même variété M . On note par ${}^V\nabla$ et ${}^W\nabla$ les connexions sur V et W respectivement

1. Montrer que

$$\nabla_X(\sigma \oplus \lambda) := {}^V\nabla_X \sigma \oplus {}^W\nabla_X \lambda$$

définit une connexion sur le fibré $V \oplus W$

2. Montrer que

$$\nabla_X(\sigma \otimes \lambda) := ({}^V\nabla_X \sigma) \otimes \lambda + \sigma \otimes ({}^W\nabla_X \lambda)$$

définit une connexion sur le fibré $V \otimes W$

3. Donner l'écriture locale de chacune d'elle.

Proposition 76 Soit $\phi : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme et $\phi^{-1}TN$ le fibré réciproque de $E = TN$ de base M , on note par ∇ la connexion sur $\phi^{-1}TN$ associée à la connexion ${}^E\nabla$ de E . On suppose que ${}^ET = 0$, alors

$$\nabla_X \phi_* Y - \nabla_Y \phi_* X = \phi_* [X, Y]$$

pour tous $X, Y \in \chi(M)$, où on a noté $\phi_* X = \phi_* \circ X \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$

Preuve. Soient (x, U) et (y, V) deux systèmes de coordonnées locales autour de p et $\phi(p)$ respectivement. On a

$$\begin{cases} X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \phi_* X = X^i \phi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ \phi_* Y = Y^j \phi_j^\beta \frac{\partial}{\partial y_\beta} \end{cases}$$

où on a noté $\phi_i^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i}$.

$$\begin{aligned} \nabla_X \phi_* Y - \nabla_Y \phi_* X &= \nabla_X [Y^i \phi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}] - \nabla_Y [X^j \phi_j^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}] \\ &= [X^j \cdot Y^i - Y^j \cdot X^i] \phi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + X^j Y^i [\phi_{ji}^\alpha - \phi_{ij}^\alpha] \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ &\quad + X^j \phi_j^\beta Y^i \phi_i^\alpha [{}^E\nabla_{\partial y_\beta} \partial y_\alpha - {}^E\nabla_{\partial y_\alpha} \partial y_\beta] \end{aligned}$$

Comme la torsion de ${}^E\nabla$ est nulle, on en déduit que $\nabla_X \phi_* Y - \nabla_Y \phi_* X = \phi_* [X, Y]$ ■

Définition 77 Soit ∇ une connexion linéaire sur un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$. On définit la courbure de ∇ comme étant un tenseur :

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

donné par : $R(X, Y)S = \nabla_X(\nabla_Y S) - \nabla_Y(\nabla_X S) - \nabla_{[X, Y]}(S)$

On peut facilement vérifier que R est $C^\infty(M)$ multilinéaire et que $R(X, Y) = -R(Y, X)$

Exercice 78 1. Donner l'écriture locale d'une courbure R associée à une connexion ∇ d'un fibré vectoriel

2. Si ∇^* est la connexion sur le fibré dual E^* associée à la connexion ∇ de E alors

$$R^*(X, Y)\theta(\sigma) = -\theta(R(X, Y)\sigma)$$

avec $X, Y \in \chi(M)$, $\sigma \in \Gamma(E)$ et $\theta \in \Gamma(E^*)$

3. Si $\nabla = {}^V\nabla \oplus {}^W\nabla$ est la connexion sur le fibré de Whitney $V \oplus W$ alors

$$R(X, Y)(\sigma \oplus \lambda) = {}^V R(X, Y)\sigma \oplus {}^W R(X, Y)\lambda$$

4. Si $\nabla(\sigma \otimes \lambda) = ({}^V\nabla\sigma) \otimes \lambda + \sigma \otimes ({}^W\nabla\lambda)$ alors

$$(R(X, Y)\sigma) \otimes \lambda = ({}^V R(X, Y)\sigma) \otimes \lambda + \sigma \otimes ({}^W R(X, Y)\lambda)$$

5. Si ∇ est la connexion du fibré inverse $\phi^{-1}E$ alors

$$R_x(X, Y)\rho(x) = {}^W R_{\phi(x)}(\phi_*X, \phi_*Y)\rho(x)$$

7 Métrique sur les fibrés vectoriels

Définition 79 On dit qu'un fibré vectoriel admet un produit scalaire h si chaque fibre E_x admet un produit scalaire :

$$h_x : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que l'application $x \longrightarrow h_x$ est C^∞ . Ainsi, pour toutes sections $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ la fonction $h(s_1, s_2)$ sur M définie par :

$$h(s_1, s_2)(x) = h_x(s_1(x), s_2(x)) \quad (17)$$

est de classe C^∞ .

Définition 80 Une définition équivalente à la première définition est qu'une métrique sur un fibré vectoriel est une application

$$h : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M)$$

bilinéaire, symétrique et définie positive. L'identification est donnée par l'équation (17)

Définition 81 On dit que la connexion ∇ d'un fibré vectoriel E est compatible avec le produit scalaire h de E si pour tout $X \in \chi(M)$, $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ on a :

$$Xh(s_1, s_2) = h(\nabla_X s_1, s_2) + h(s_1, \nabla_X s_2).$$

Exemple 82 Pour une variété Riemannienne (M, g) la métrique g est une métrique sur le fibré tangent. On a $\Gamma(TM) = \chi(M)$ et la connexion associée à g est une connexion compatible avec g .

Exemple 83 Dans cet exemple, on va étudier le fibré inverse $E = \phi^{-1}(TN)$ où $\phi : M \longrightarrow N$ est une application différentiable. On suppose que (M, g) et (N, h) sont deux variétés Riemanniennes de dimensions respectives m et n . Soit $\phi \in C^\infty(M, N)$, on rappelle la définition de la connexion induite $\tilde{\nabla}$ sur le fibré induit $E = \phi^{-1}(TN) = \cup_{x \in M} T_{\phi(x)}N$:

$$(\tilde{\nabla}_X V)(x) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} {}^N P_{\phi \circ \sigma(t)}^{-1} V(\sigma(t))$$

avec $X \in \chi(M)$, $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, $x \in M$ et $t \rightarrow \sigma(t) \in M$ est une C^1 -courbe sur M telle que $\sigma(0) = x$ et $\sigma'(0) = X_x \in T_x M$, et σ_t est une "portion" de σ , c'est la courbe donnée par $\sigma_t(s) := \sigma(s)$, tel que $0 \leq s \leq t$, c'est à dire la restriction de σ sur la partie entre x et $\sigma(t)$. et

$${}^N P_{\phi \circ \sigma(t)}^{-1} : T_{\phi(x)}N \longrightarrow T_{\phi(\sigma(t))}N$$

est le transport parallèle le long de la courbe $\phi \circ \sigma(t)$ de N relativement à la connexion de Levi-Civita ${}^N \nabla$ sur (N, h) . L'opérateur $\tilde{\nabla}$ est une connexion sur $E = \phi^{-1}TN$, et ce dernier admet un produit scalaire associé à la métrique Riemannienne h sur N , notée aussi par h et donnée point par point par :

$$h_{\phi(x)} : T_{\phi(x)}N \times T_{\phi(x)}N \longrightarrow \mathbb{R}$$

c'est à dire pour tous $V_1, V_2 \in T_{\phi(x)}N$ on a :

$$h(V_1, V_2)(x) = h_{\phi(x)}(V_1(x), V_2(x)) = \langle V_1(x), V_2(x) \rangle_{T_{\phi(x)}N}$$

On propose de montrer que cette métrique est compatible avec la connexion $\tilde{\nabla}$

En effet, soient $V_1, V_2 \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$, $X \in \chi(M)$, et $x \in M$. On a

$$\begin{aligned} X_x h(V_1, V_2) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h_{\phi(\sigma(t))}(V_1(\sigma(t)), V_2(\sigma(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h_{\phi(\sigma(t))}({}^N P_{\phi \circ \sigma(t)}^{-1} V_1(\sigma(t)), {}^N P_{\phi \circ \sigma(t)}^{-1} V_2(\sigma(t))) \end{aligned}$$

Car ${}^N P$ conserve le produit scalaire, comme ${}^N \nabla$ est compatible avec h . Ainsi :

$$\begin{aligned} X_x h(V_1, V_2) &= h_{\phi(x)}\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} {}^N P_{\phi \circ \sigma(t)}^{-1} V_1(\sigma(t)), V_2(x)\right) + \\ &\quad h_{\phi(x)}\left(V_1(x), \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} {}^N P_{\phi \circ \sigma(t)}^{-1} V_2(\sigma(t))\right) \\ &= h_{\phi(x)}(\tilde{\nabla}_{X_x} V_1, V_2) + h_{\phi(x)}(V_1, \tilde{\nabla}_{X_x} V_2). \end{aligned}$$

7.1 Application musicale :

Dans ce paragraphe et dans le but de créer un opérateur sur $\chi(M)$ qui sera équivalent au Laplacien défini sur $\Lambda^1 M$, on va introduire le dictionnaire musical entre TM et T^*M .

Définition 84 *En tout point x d'une variété riemannienne (M, g) , on définit la fonction musicale \flat_x par :*

$$\begin{array}{ccc} \flat_x : TM & \longrightarrow & T_x^* M \\ X & \longrightarrow & \flat_x X \end{array}$$

telle que $\flat_x(X)(Y) = g_x(X, Y) = \langle X, Y \rangle$. L'application \flat est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Il est claire que l'écriture locale de \flat_x est

$$\flat_x = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

ainsi, pour tout $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ on a $\flat(X) = \omega$, avec $\omega(Y) = g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$ et donc $\omega = g_{ij} X^i dx^j$. Son inverse est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \sharp : T_x^* M & \longrightarrow & T_x M \\ \omega = \omega_i dx^i & \longrightarrow & \sharp(\omega) = \sharp_\omega = X \end{array}$$

qui s'écrit localement par :

$$\sharp_x = \flat_x^{-1} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

et donc

$$\sharp(\omega) = \sharp_\omega = X = g^{ij} \omega_i \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Définition 85 *Soit $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ le fibré dual du fibré $TM \xrightarrow{\pi} M$. On définit la métrique h^* sur le fibré T^*M associée à la métrique h sur le fibré TM par :*

$$\langle \omega, \sigma \rangle_* = \langle \sharp \omega, \sharp \sigma \rangle$$

On en déduit que localement si $\omega = \omega_i dx^i$ et $\sigma = \sigma_j dx^j$ alors

$$\langle \omega, \sigma \rangle_* = g^{ik} \omega_i \sigma_k$$

Exemple 86 On considère \mathbb{R}^2 muni de la métrique

$$g = (1 + x^2)dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

on a alors

$$g = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\omega = xd - xy^2dy$ et $\sigma = x^2dx$ deux éléments de T^*M .

$$\begin{cases} \sharp\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -xy^2 \end{pmatrix} = \frac{x}{1+x^2}\partial x - xy^2\partial y \\ \sharp\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x^2}{1+x^2}\partial x \end{cases}$$

$$\text{de sorte que } \langle \omega, \sigma \rangle_* = \langle \sharp\omega, \sharp\sigma \rangle = \frac{x^3}{1+x^2}$$

Proposition 87 La métrique h^* sur T^*M est compatible avec la connexion ∇^* définie dans l'équation (16)

Preuve. Soient $X \in \chi(M)$, ω et $\sigma \in \Gamma(T^*M) = \wedge^1 M$. On a

$$X \langle \omega, \sigma \rangle_* = X \langle \sharp\omega, \sharp\sigma \rangle$$

Comme la connexion ∇ de TM est compatible avec la métrique \langle, \rangle de TM alors :

$$X \langle \sharp\omega, \sharp\sigma \rangle = \langle \nabla_X \sharp\omega, \sharp\sigma \rangle + \langle \sharp\omega, \nabla_X \sharp\sigma \rangle$$

Or on peut vérifier sans difficulté que

$$\nabla_X^* \omega = \flat(\nabla_X \sharp\omega)$$

donc

$$\nabla_X \sharp\omega = \sharp(\nabla_X^* \omega)$$

Il en vient que

$$\begin{aligned} X \langle \sharp\omega, \sharp\sigma \rangle &= \langle \sharp(\nabla_X^* \omega), \sharp\sigma \rangle + \langle \sharp\omega, \sharp(\nabla_X^* \sigma) \rangle \\ &= \langle \nabla_X^* \omega, \sigma \rangle_* + \langle \omega, \nabla_X^* \sigma \rangle_* \end{aligned}$$

et par suite ∇^* est compatible avec h^* . ■

A The First Appendix

The appendix fragment is used only once. Subsequent appendices can be created using the Section Section/Body Tag.

Following is a short bibliography. It has no relationship to the previous text, but can be used to show sample citations such as [4] and [6]. This typesetting style places each citation inside square brackets. If you want multiple citations to appear in a single set of square brackets you must type all of the citation keys inside a single citation, separating each with a comma. Here is an example : [2, 3, 4].

References

- [1] American Petroleum Institute, Technical Data Book - Petroleum Refining, 5th edition, 1992
- [2] Harstad, K. and Bellan, J., "Isolated fluid oxygen drop behavior in fluid hydrogen at rocket chamber pressures", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1998a, **41**, 3537-3550
- [3] Harstad, K. and Bellan, J., "The Lewis number under supercritical conditions", *Int. J. Heat Mass Transfer*, in print
- [4] Hirshfelder, J. O., Curtis, C. F. and Bird, R. B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley and Sons, Inc., 1964
- [5] Prausnitz, J., Lichtenthaler, R. and de Azevedo, E., *Molecular thermodynamics for fluid-phase equilibrium*, Prentice -Hall, Inc., 1986
- [6] Reid, R. C., Prausnitz, J. M. and Polling, B. E., *The Properties of Gases and Liquids*, 4th Edition, McGraw-Hill Book Company, 1987