

## Trabalho 3

### Bola saltitante

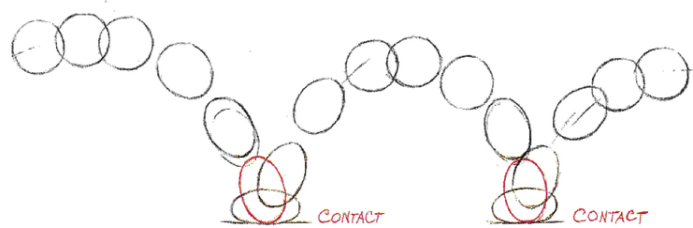


Imagem: Bouncing ball (Roberts & Mallet 2013)

---

*Autores:*

**André Teodósio** : 99889

↪ [andre.teodosio@tecnico.ulisboa.pt](mailto:andre.teodosio@tecnico.ulisboa.pt)

**Francisco Carvalho** : 99941

↪ [franciscoaresc@tecnico.ulisboa.pt](mailto:franciscoaresc@tecnico.ulisboa.pt)

**João Gonçalves** : 99995

↪ [jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt](mailto:jrazevedogoncalves@tecnico.ulisboa.pt)

**Teresa Nogueira** : 100029

↪ [maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt](mailto:maria.teresa.ramos.nogueira@tecnico.ulisboa.pt)

*Docente:*

João Silvestre

*O grupo de alunos acima identificado garante que o texto deste relatório e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.*

Janeiro 2023

## Introdução

Uma vasta panóplia de sistemas mecânicos envolvem impactos. Estes sistemas admitem um *flow*<sup>1</sup> entre impactos. A aproximação (amplamente) considerada para os impactos sugere considerá-los como instantâneos—e, conseqüentemente, como *triggers* que levam a transições de estado do sistema (*jumps*<sup>1</sup>).

Deste modo, sistemas com impactos—tal como o caso de estudo—podem ser vistos como sistemas híbridos.

→ **Bola saltitante** (*modelo de massa puntiforme—lagrangian hybrid system*)

O estado da massa pontual pode ser descrito como

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} z \\ v_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R},$$

onde  $z$  representa a posição da bola (acima da superfície), e  $v_z$  a velocidade vertical.

É natural estipular que o *flow* é permissível quando a bola se encontra acima da superfície, ou quando se encontra na superfície com o vetor velocidade a apontar para cima. Deste modo, o *flow set* é

$$C := \{\mathbf{x} : z > 0 \vee z = 0 \wedge v_z \geq 0\}.$$

E a escolha do *flow map* pode ser dada por

$$f(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} v_z \\ -g \end{bmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in C,$$

onde  $-g$  representa a aceleração gravítica. Os impactos sucedem-se com o embate da massa pontual com velocidade negativa com a superfície. E assim, o *jump set*<sup>2</sup> é

$$D := \{\mathbf{x} : z = 0, v_z < 0\}.$$

O *jump map* é dado, para um determinado  $\alpha \in [0, 1]$  (coeficiente de restituição), por

$$g(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha v_z \end{bmatrix} \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

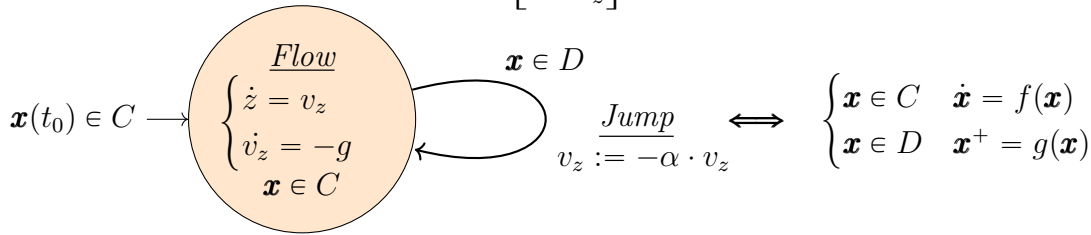


Fig. 1: Modelo da bola saltitante.

No modelo para a bola saltitante exposto acima, para um  $\alpha \in ]0, 1[$ , cada *jump* é seguido por um período de *flow* (sucessivamente mais curto). Por outras palavras, *jumps* consecutivos não ocorrem[1] (apesar de se verificarem consecutivamente menos espaçados,  $\rightarrow 0$ ). Estas ilações iluminam o efeito de Zeno, também alvo de estudo.

### Def.: Efeito de Zeno ★

“Zeno behavior is a phenomenon in hybrid systems that (...) exists when an infinite number of discrete transitions occur in a finite time interval.”[2]

<sup>1</sup>“To shorten the terminology, the behavior of a dynamical system that can be described by a differential equation or inclusion is referred to as flow. The behavior of a dynamical system that can be described by a difference equation or inclusion is referred to as jumps.”[1]

<sup>2</sup>Devido ao funcionamento do SIMULINK® consideramos, na simulação computacional, um  $z \leq 0$ .

## P1 | Simulação do movimento da bola (somente na vertical)

De modo a caracterizar as condições base de partida que fomentam o estudo dos efeitos do coeficiente de restituição  $\alpha$ , e da velocidade inicial  $v_z(t_0^+)$ , apresentam-se abaixo, na Fig. 2, a evolução temporal da posição da bola saltitante e da sua velocidade vertical para  $z(t_0) := z_0 = 10$  m,  $v_z(t_0^+) := v_{z_0} = 0$  ms<sup>-1</sup> e  $\alpha = 0.8$ .

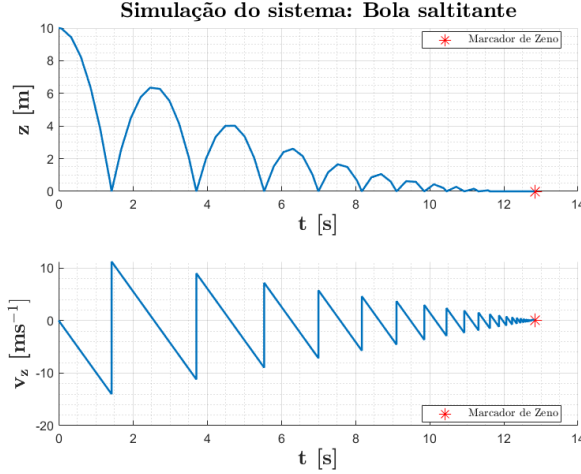


Fig. 2: Simulação do sistema para as condições iniciais supramencionadas e  $\alpha = 0.8$  ( $t_0 \equiv 0$ ).

A posição vertical da massa pontual em períodos de *flow* é regida pela equação:

$$z(t + t_{n-1}) = z(t_{n-1}) + v_z(t_{n-1}^+) \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

em que  $z(t_{n-1})$  é a altura inicial do período de *flow*<sup>4</sup>  $n$ , e  $v_z(t_{n-1}^+)$  a velocidade inicial desse mesmo período (para  $n \geq 2$ , será a velocidade após o *jump* definido acima).

Relembrando a Lei de Conservação d'Energia:  $\Delta E = \Delta T + \Delta U = 0$  (dado que não são aplicadas forças externas ao sistemas ao longo de cada período de *flow*), trivialmente se obtém  $v_z$  imediatamente antes do primeiro choque:

$$\Delta E = 0 \iff mgz_0 + \frac{1}{2}m(v_{z_0})^2 = \frac{1}{2}m[v_z(t_1^-)]^2 \xrightarrow{v_z(t_1^-) < 0} v_z(t_1^-) = -\sqrt{2gz_0 + (v_{z_0})^2}$$

Para condições iniciais arbitrárias, o tempo acumulado após  $N$  choques é dado por:

$$T_N = t_1 + t_2 + t_3 + \dots = \frac{v_{z_0}}{g} + \frac{\sqrt{2gz_0 + (v_{z_0})^2}}{g} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n \right)$$

em que  $t_n$  representa a duração<sup>5</sup> do  $n$ -ésimo período de *flow*, para  $n \in \mathbb{N}$ .

A série geométrica com razão  $\alpha$ , converge para valores do coeficiente  $\alpha \in [0, 1[$ . Define-se finalmente o tempo em que ocorre o fenómeno de Zeno<sup>9,10</sup>:

$$\therefore T_{Zeno} := \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = \frac{1}{g} \left( v_{z_0} + \sqrt{2gz_0 + (v_{z_0})^2} \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) \right), \quad \alpha \in [0, 1[$$

**Nota** → Conceptualmente,  $T_{Zeno}$  pode ser visto como o tempo teórico necessário até que “(...) the ball settles down to the ground with zero velocity (...)”[3].

<sup>3</sup>Denota-se a velocidade logo antes e após o choque com os  $-$  e  $+$  sobrescritos, respetivamente.

<sup>4</sup>A altura inicial é nula para todos os períodos de *flow* subsequentes ao 1º ( $n \geq 2 : z(t_{n-1}) \equiv 0$ ).

Para o primeiro período ( $n = 1$ ), são assumidas as condições iniciais impostas:  $z_0$  e  $v_{z_0}$ .

<sup>5</sup>Note-se que  $t_n$  é a solução positiva da equação quadrática  $z(t + t_{n-1}) = 0$ , para  $n = 1, 2, \dots$  ( $t_0 \equiv 0$ ).

### → Condições iniciais e fenómeno de Zeno

Para as condições iniciais expostas acima e  $\alpha = 0.8$ , obtém-se  $T_{Zeno} = 12.8506$  s. Este fenómeno é capturado em ambiente de simulação através da detecção (*default*) de *consecutive zero crossing events* em intervalos de tempo ínfimos:

✋ An error occurred while running the simulation (...): Simulink will stop the simulation of model 'Plsimulink' because the 1 zero crossing signal(s) identified below caused 1000 consecutive zero crossing events in time interval between 12.850588106411884 and 12.850588107006466.

Na Fig. 2 acima, este comportamento é delimitado pelo "marcador de Zeno" (\*).

De modo a garantir a generalidade da discussão, explora-se a (expectável) relação íntima entre o fator de atenuação e da velocidade inicial com o valor de  $T_{Zeno}$ .

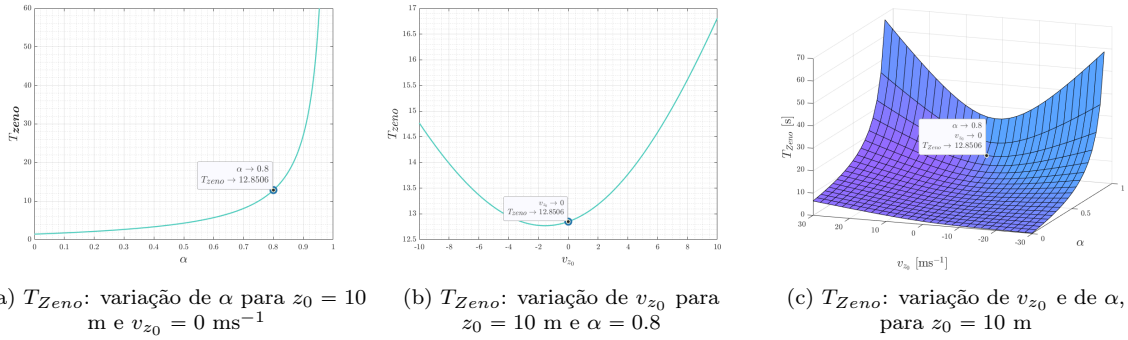


Fig. 3: Efeito da variação de  $\alpha$  e  $v_{z_0}$  no valor de  $T_{Zeno}$ . Note-se que, naturalmente, uma diminuição de  $\alpha$  traduz-se numa diminuição de  $T_{Zeno}$ , e vice-versa<sup>6</sup> (*vide* Fig. 6) → comportamento de acordo com a dinâmica energética do sistema imposta por este parâmetro. Curiosamente, verifica-se que ao alterar a energia inicial do sistema, impondo uma velocidade inicial (para um  $\alpha \in ]0, 1[$ ), despoleta uma evolução de  $T_{Zeno}$ —não óbvia—visível na curva (b). Verifica-se que o valor de  $v_{z_0}$  que minimiza  $T_{Zeno}$ , para um determinado  $\alpha$  fixo (e  $z_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ ), é sempre inferior a  $0^\dagger$  (Fig. 4 (a)).

Como lembra a Análise Matemática, o valor de  $v_{z_0}$  que minimiza  $T_{Zeno}$  (mínimo local) para um dado  $\alpha$ , é deduzido através da 1<sup>a</sup> derivada parcial em ordem a  $v_{z_0}^\dagger$ ,<sup>7</sup>.

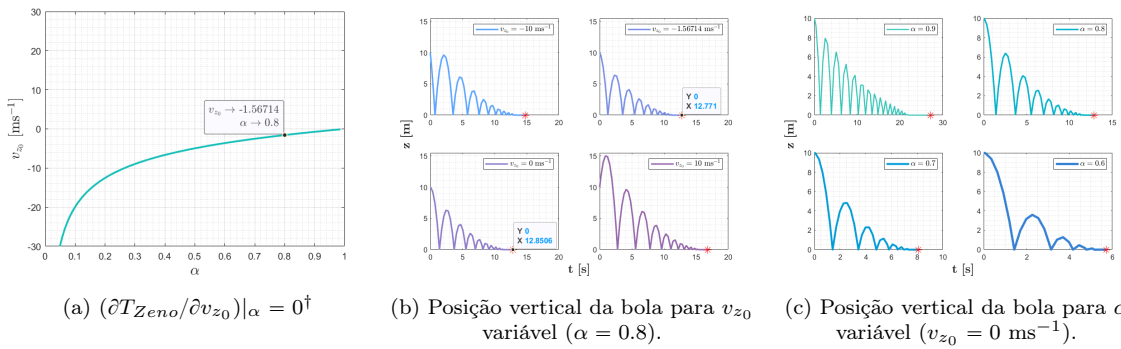


Fig. 4: Curva de nível da derivada parcial de  $T_{Zeno}$  em ordem a  $v_{z_0}^\dagger$  e visualização temporal da posição vertical da massa puntiforme relativamente a alguns exemplos que espelham o efeito da variação da velocidade inicial e do fator de atenuação (para um  $z_0 = 10$  m).

<sup>6</sup>Do outro lado do espectro, um  $\alpha \rightarrow 1$  implica um aumento avassalador de  $T_{Zeno}$  ( $\rightarrow +\infty$ ), como aparente na Fig. 4 (c) e nos retratos de fase subsequentes.

<sup>7</sup>O  $v_{z_0}$  minimizante de  $T_{Zeno}$  diminui o intervalo de tempo até ao 1<sup>o</sup> choque, não aumentando substancialmente os períodos de *flow* subsequentes.

$$\dagger \frac{\partial T_{Zeno}}{\partial v_{z_0}} \Big|_{\alpha} = \frac{1}{g} \left( \frac{v_{z_0}}{\sqrt{2gz_0 + (v_{z_0})^2}} \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) + 1 \right) = 0 \implies v_{z_0} \Big|_{\alpha} = -\sqrt{\frac{gz_0(1-\alpha)^2}{2\alpha}}$$

□

### → Retratos de fase

O efeito do coeficiente de restituição  $\alpha$  e de  $v_{z_0}$  são apresentados condensadamente através da visualização dos retratos de fase do sistema. Note-se: para valores de  $\alpha \in [0, 1[$  ocorre uma diminuição (expectável) da velocidade vertical após cada impacto e consequentemente da altura máxima<sup>8</sup> atingida pela massa pontual no período de *flow* que sucede o embate com a superfície horizontal. Este fenómeno é cada vez mais acentuado para valores de  $\alpha$  sucessivamente mais próximos de 0 (*vide* Fig. 6).

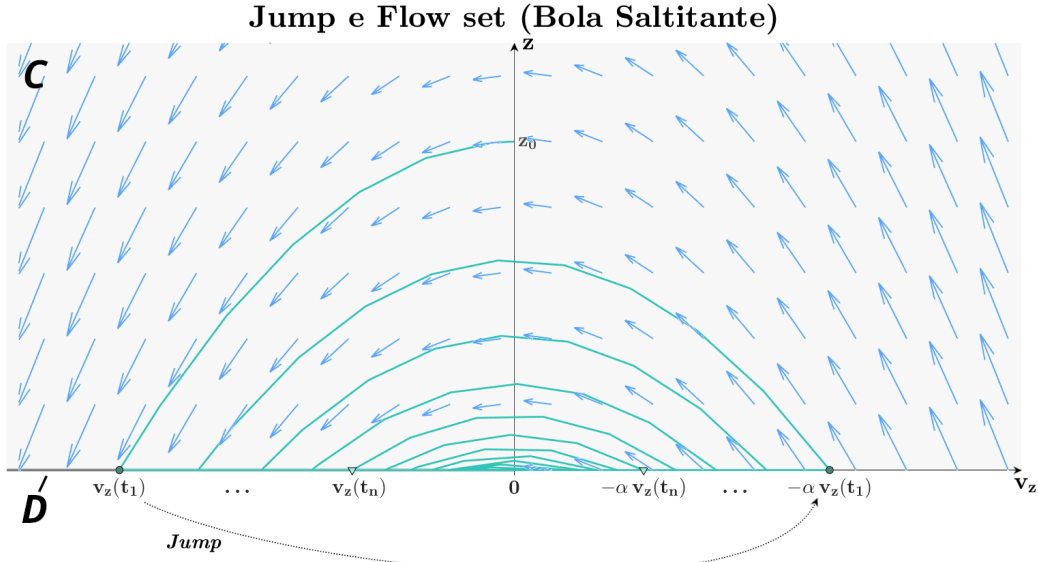


Fig. 5: Retrato de fase do sistema para  $z_0 = 10$  m,  $v_{z_0} = 0$  ms<sup>-1</sup> e  $\alpha = 0.8$ . (Exemplo que traduz a resposta para valores de  $\alpha \in ]0, 1[$  → **colisões elásticas**<sup>9</sup> → perdas energéticas com o embate na superfície; salienta-se a diminuição dos intervalos entre colisões—resposta naturalmente esperada para o caso exposto, cada vez mais acentuada para valores de  $\alpha$  cada vez mais pequenos).

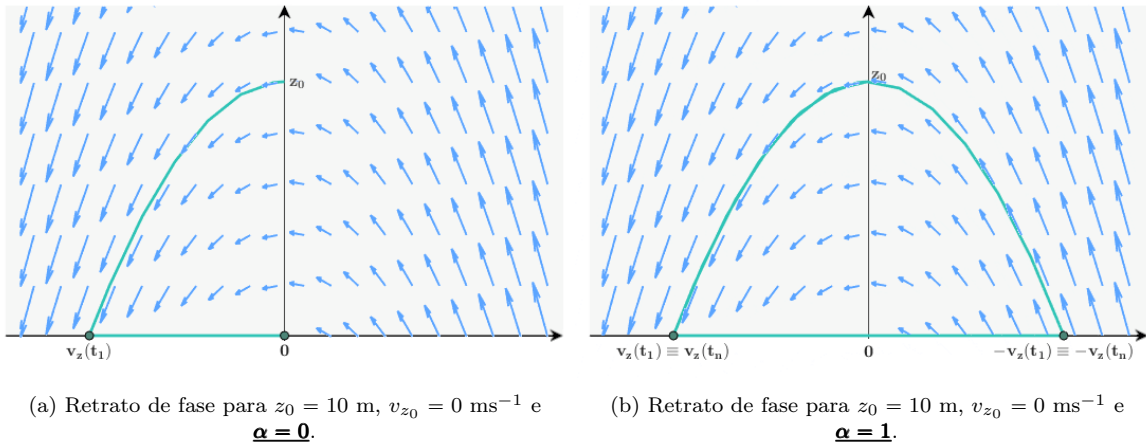


Fig. 6: Comportamento do sistema da bola saltitante para os casos limites em que o coeficiente de restituição  $\alpha$  toma os valores: **0** (**colisão inelástica** → perda máxima de energia →  $T_{Zeno} = t_1$ ) e **1** (**colisão perfeitamente elástica** → conservação total da energia cinética →  $T_{Zeno} \rightarrow +\infty$ ).

Acresce-se ainda o reparo: para  $\alpha = 0$  existe somente um período de *flow*<sup>10</sup> dado que toda a energia cinética é perdida com o choque e a massa pontual permanece, deste modo, pegada à superfície; para  $\alpha = 1$  o comportamento repete-se *ad aeternum*<sup>10</sup>.

<sup>8</sup>Denominaremos por  $z_{m\acute{a}x}$  este valor daqui em diante.

<sup>9</sup>“It is easily shown that if the impacts are not perfectly elastic, the ball displays Zeno behavior”[4].

<sup>10</sup>Para os casos limites  $\alpha \in \{0, 1\}$ , não se verifica o efeito de Zeno (*vide* secção introdutória).

## P2 | Perdas por atrito viscoso (proporcional à velocidade)

### Def.: Atrito Viscoso (*drag*) ★

“The force on an object that resists its motion through a fluid is called drag. When the fluid is a gas like air, it is called aerodynamic drag or air resistance.”[5]

Invocando a segunda Lei de Newton, a equação da aceleração—já previamente abordada na secção introdutória—passa a possuir uma nova componente, sempre contrária ao movimento e cuja magnitude é proporcional à da velocidade:

$$\text{Net Force} = \sum F = F_g + F_{drag} = m\dot{v}_z \rightarrow \dot{v}_z = -g - \frac{\beta}{m} \cdot v_z$$

Onde  $\beta$  é o coeficiente de atrito viscoso (*drag coefficient*).

Supondo que  $\beta/m = 0.8 \text{ kg}^{-1}$  e comparando o novo sistema com a adição de atrito ao já previamente visualizado para  $z_0 = 10 \text{ m}$  e  $v_{z0} = 10 \text{ ms}^{-1}$ , a diferença é aparente:

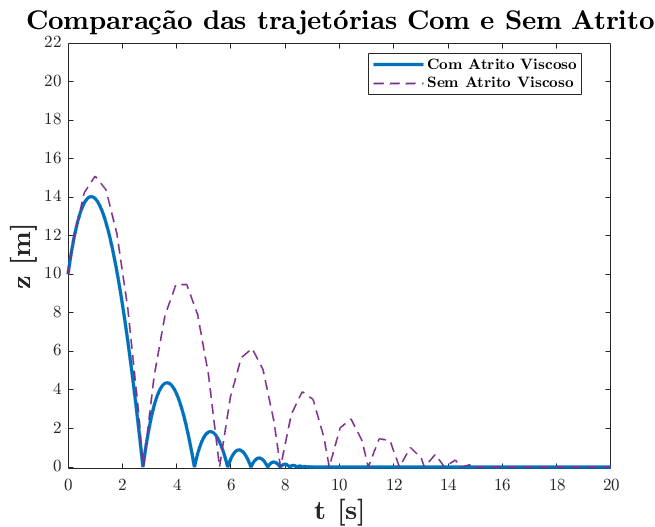


Fig. 7: Altura de ressalto com efeito do atrito a azul.

### → Observações

▲ É verificada uma redução da altura máxima que a bola atinge após cada ressalto, face ao exemplo isento de atrito. O fenómeno de Zeno (*vide* secção P1) é também atingido mais rapidamente em relação ao modelo anterior.

Esta realidade é trivialmente explicada pela mecânica subjacente ao problema:

### → Movimento de queda

Reconhecendo que  $\dot{v}_{z0} = -g \approx -9.81 \text{ ms}^{-2}$ , verifica-se um acréscimo de velocidade, subsequentemente, verifica-se um acréscimo de *drag* e um decréscimo da *net force*. Por sua vez o decréscimo da *net force* implica uma redução da velocidade. Deduz-se então que a velocidade continua a crescer, mas cada vez mais lentamente: A velocidade de impacto é menor na presença de *drag*.

### → Movimento de subida após ressalto

Na subida, para além da velocidade após impacto ser reduzida graças ao efeito de *drag* (a velocidade após impacto é dependente da anterior, *vide* secção introdutória), a diminuição da mesma até atingir  $v_z = 0 \text{ ms}^{-1}$  (onde  $z$  atinge  $z_{m\acute{a}x}$ ) é mais veloz, graças à ação da aceleração: ambas as componentes da *net force* apontam na mesma direção (contrária ao movimento): A altura máxima que a bola atinge após cada ressalto é inferior.

→ **Caso Limite: Velocidade Terminal**

A velocidade terminal (velocidade constante de queda) é atingida quando  $\dot{v}_{z_0} = 0$ , consequência da anulação da *net force* onde  $F_{drag} = F_g$ :

*“Speed continues to increase, but so too does drag. As drag increases, acceleration decreases. Eventually one can imagine a state when the drag and weight forces are equal. You are in equilibrium.”*[5]

Simulando a queda livre da bola<sup>11</sup> de  $z_0 = 100$  m e para  $\alpha = 1$ , o efeito do atrito viscoso, já previamente discutido, é evidente:

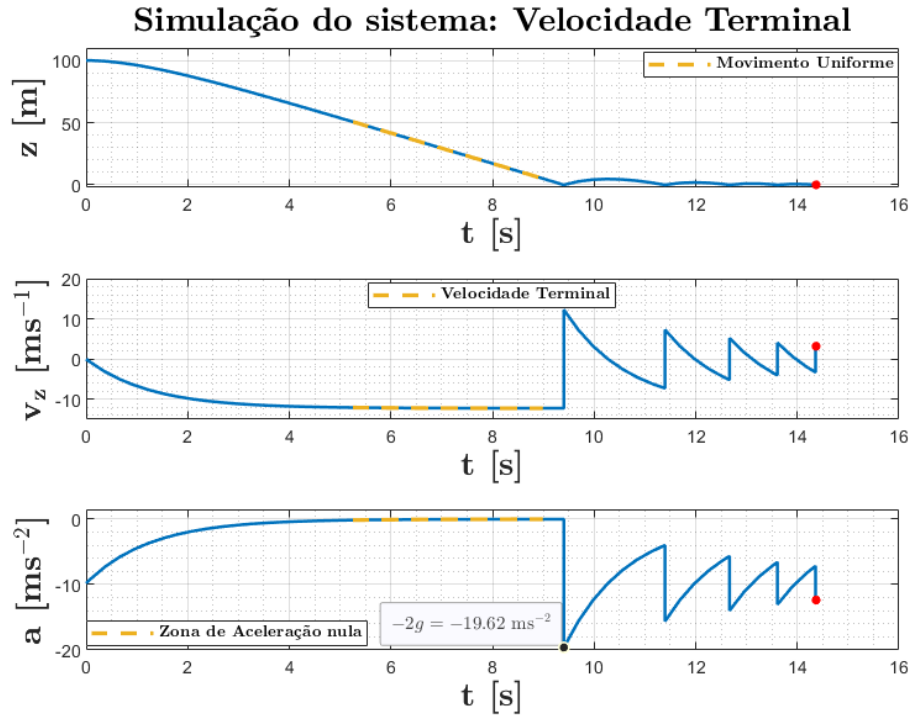


Fig. 8: Efeito do atrito na aceleração e na velocidade, alcançando a velocidade terminal. O marcador (•) denota o fim da simulação.

→ **Curiosidade**

A aceleração após o impacto é:

$$m\dot{v}_z = -F_a - mg \implies \dot{v}_z = -\frac{F_{drag}}{m} - g$$

Como a bola atinge a velocidade terminal, sabe-se que:

$$F_{drag} = F_g \implies F_{drag} = mg \rightarrow \frac{F_{drag}}{m} = g$$

Finalmente, resolvendo em ordem a  $\dot{v}_z(t_1^+)$ , obtém-se:

$$\therefore \dot{v}_z(t_1^+) = -2g \rightarrow -19.62 \text{ ms}^{-2}$$

□

<sup>11</sup>Em mecânica clássica, a queda livre é o movimento resultante unicamente da aceleração provocada pela gravidade (i.e.,  $v_{z_0} = 0 \text{ ms}^{-1}$ ).



### P3 | Introdução de uma velocidade const. segundo a horizontal

A passagem de uma bola saltitante aliada a um movimento horizontal, entre duas superfícies de impacto distintas, sugere uma alteração ao *jump map* (vide secção introdutória), no que toca ao coeficiente de restituição aplicado na atualização da velocidade.

$$\underbrace{\overset{\text{Jump}}{v_z := -\alpha_1 \cdot v_z}}_{\text{Superfície 1}} \xrightarrow{y=10 \text{ m}} \underbrace{\overset{\text{Jump}}{v_z := -\alpha_2 \cdot v_z}}_{\text{Superfície 2}}$$

#### → Velocidade Horizontal

A velocidade horizontal imposta à bola, que governa o seu deslocamento para a direita não sofre qualquer tipo de alteração nem dissipação de energia ao longo de toda a trajetória, já que a aplicação de forças na bola em movimento ocorre somente no eixo vertical, ortogonal à velocidade (simplificação imposta ao modelo, tal como na secção seguinte).

A análise da seguinte figura evidência a diferença entre as perdas energéticas nas respetivas zonas de atenuação para cada impacto:

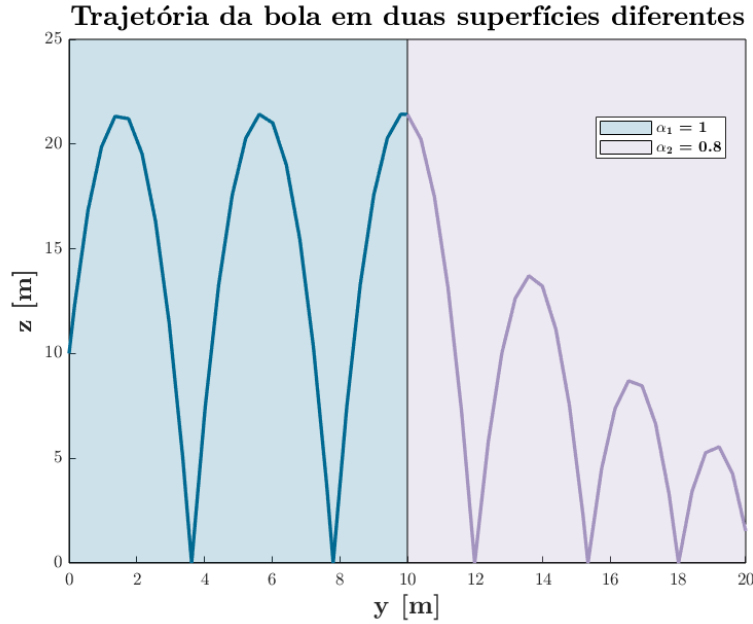


Fig. 9: Trajetória da bola em duas superfícies distintas com coeficientes de restituição  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 0.8$  e para uma velocidade horizontal constante de  $v_y = 1 \text{ ms}^{-1}$  e  $v_{z_0} = 15 \text{ ms}^{-1}$ .

#### → Observações

- ▲ A passagem da zona de colisão perfeitamente elástica ( $\alpha_1 = 1$ ) para a de  $\alpha_2 = 0.8$  verifica uma óbvia diminuição de altura máxima atingida. Como já referido, a atenuação imposta à velocidade vertical sofre uma alteração a partir de  $y = 10 \text{ m}$ . Relembrando a discussão realizada na secção P1, um menor coeficiente de restituição contribui para uma maior dissipação de energia a cada impacto, tal equaciona na já mencionada diminuição progressiva de altura comparativamente com a primeira zona de impacto (onde ocorre conservação total de energia → não ocorre atenuação da velocidade e, conseqüentemente, a altura atingida é sempre a mesma).



## P4 | Velocidade horizontal constante e choque com uma parede

De modo a manter a discussão sucinta, apresenta-se um modelo simplificado para a interação da bola saltitante—com velocidade horizontal constante—com superfícies verticais. Não será apresentada uma formulação teórica (tal como na secção introdutória) para este sistema, pelo que são expostas condições mais relaxadas.

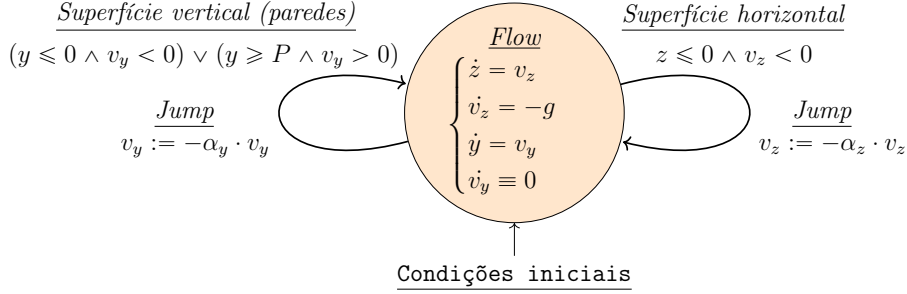
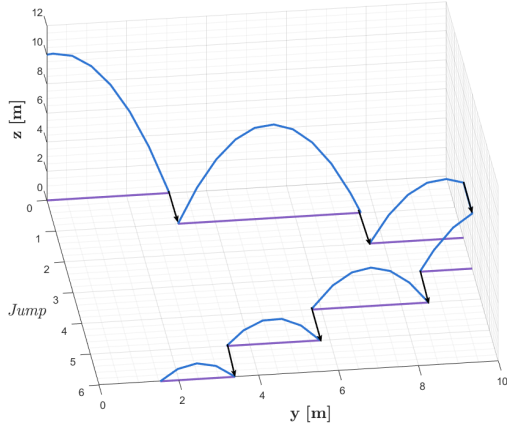


Fig. 10: Modelo utilizado computacionalmente do novo sistema híbrido.

O modelo simplificado pressupõe independência entre as componentes ortogonais da velocidade, i.e., colisões com a superfície horizontal atualizam apenas  $v_z$  mediante o valor do coeficiente de restituição da superfície,  $\alpha_z$ ; analogamente, as colisões com a superfície vertical atualizam somente  $v_y$  consoante um  $\alpha_y$ .



(a) Trajetória para:

Paredes em 0 e  $P = 10$  m,  $z_0 = 10$  m,  $v_{z0} = 0$  ms<sup>-1</sup>,  
 $\alpha_z = 0.8$ ,  $v_y = 2$  ms<sup>-1</sup> e  $\alpha_y = 0.8$ .

(b) Trajetória para:

Paredes em 0 e  $P = 5$  m,  $z_0 = 10$  m,  $v_{z0} = 30$  ms<sup>-1</sup>,  
 $\alpha_z = 0.8$ ,  $v_y = 2$  ms<sup>-1</sup> e  $\alpha_y = 1$ .

Fig. 11: Visualização da trajetória da massa pontual para duas situações distintas. A Fig. 11 (b) é concedida em formato GIF (animada em PDF readers que suportam JavaScript, e.g., Adobe Reader).

### → Observações

- ▲ A Fig. 11 (a) permite visualizar espacialmente os embates da bola com as superfícies e os consequentes *jumps* que se sucedem com estes eventos. O resultado final são segmentos da trajetória obtidos com base no período de *flow* que sucede cada *jump*.
- ▲ O uso das duas paredes delimita a trajetória da massa puntiforme, como visível na Fig. 11 (b). Esta delimitação permite visualizar com uma maior frequência o efeito da reflexão do movimento horizontal, mantendo a massa pontual *bounded*. Caso não se verificasse *bounded*, a posição tenderia para menos infinito após a primeira colisão com a parede, uma vez que não possui aceleração constante no sentido da superfície vertical em  $P$ .

De modo a explorar a independência supramencionada entre as componentes ortogonais do sistemas, é estudada a evolução temporal de cada componente. Para uma melhor visualização, foram seleccionados os parâmetros: Paredes em 0 e  $P = 2$  m,  $z_0 = 10$  m,  $v_{z0} = 15$  ms<sup>-1</sup>,  $\alpha_z = 0.8$ ,  $v_y = 2$  ms<sup>-1</sup> e  $\alpha_y = 0.8$ .

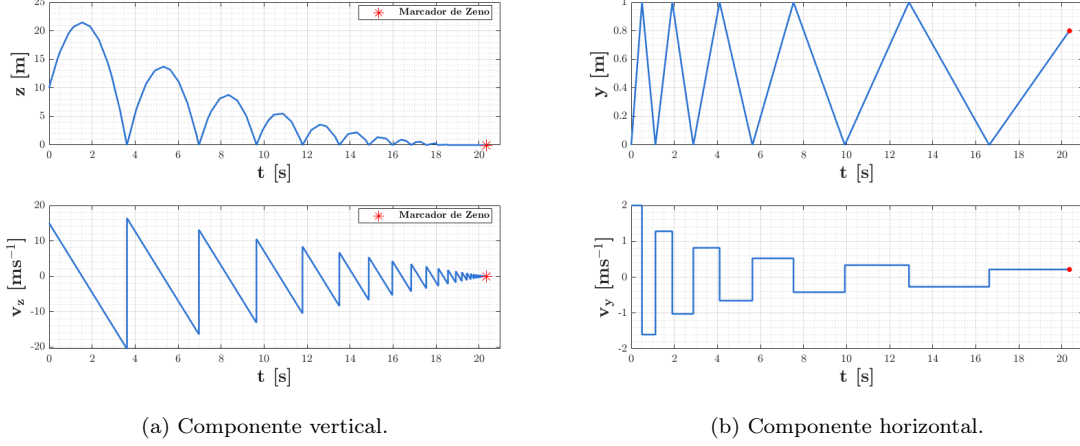


Fig. 12: Evolução temporal das componentes verticais e horizontais do sistema. Ao contrário da vertical, os gráficos associados à parte horizontal sofrem uma dilatação ao longo do tempo, dado que as colisões se tornam cada vez menos frequentes, graças à dissipação energética imposta pelo fator  $\alpha_y = 0.8$ . O marcador (•) denota o fim da simulação (interrompendo o período de *flow*).

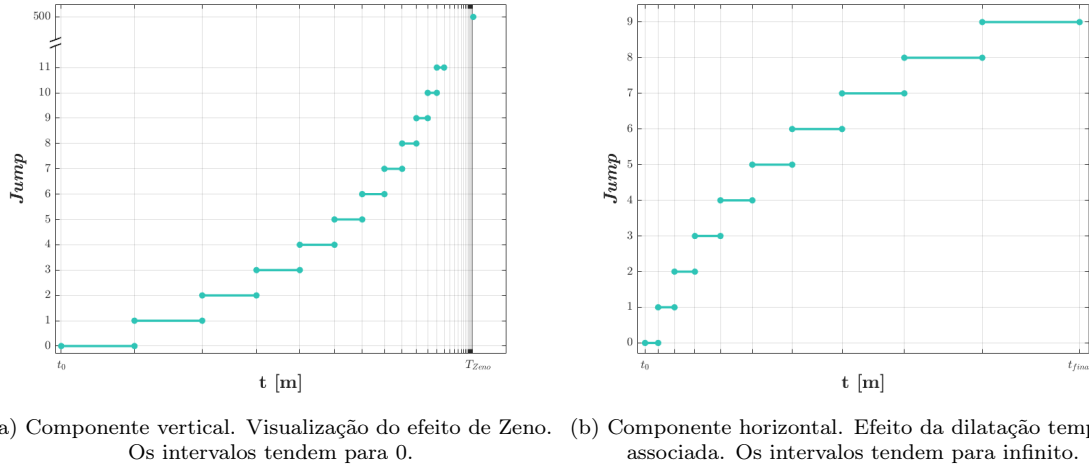


Fig. 13: Evolução da duração dos intervalos de tempo entre colisões com a superfícies horizontal e superfícies verticais. Consoante a discussão na secção P1, verifica-se que  $T_{Zeno} = 20.3576$  s, independente de qualquer influência da componente horizontal, como esperado, dada a ortogonalidade.  $t_{final}$  representa o instante final do último período de *flow* completo aparente na Fig. 12 (b).

## Referências

- [1] R. Goebel, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel. *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press, March 2012. ISBN 978-0-691-15389-6.
- [2] A. D. Ames, A. Abate, and S. Sastry. "Sufficient conditions for the existence of Zeno behavior". In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2006.
- [3] Simulation of a Bouncing Ball - MATLAB & Simulink. <https://www.mathworks.com/help/simulink/slref/simulation-of-a-bouncing-ball.html>. [Accessed: 16-01-2023].
- [4] Yizhar Or and Andrew R. Teel. "Zeno Stability of the Set-Valued Bouncing Ball". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 56(2):447–452, February 2011.
- [5] Glenn Elert. Aerodynamic drag. URL <https://physics.info/drag/>. [Accessed: 16-01-2023].
- [6] "Acceleration of a bouncing ball with Air Resistance". URL <https://physics.stackexchange.com/questions/74547>. [Accessed: 16-01-2023].