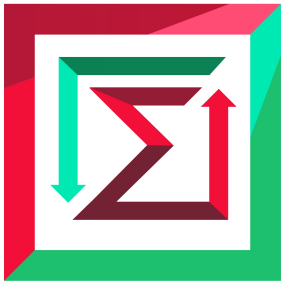
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

НГТУ НЭТИ

Кафедра прикладной математики

Курсовой проект
по дисциплине «Численные методы»



ФПМИ

ГРУППА	ПМ-92
ВАРИАНТ	21
СТУДЕНТ	ГЛУШКО ВЛАДИСЛАВ
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	СОЛОВЕЙЧИК ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

Новосибирск

1 Условие задачи

Формулировка задачи

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии λ разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать метод сопряженных градиентов (МСГ) или локально-оптимальную схему (ЛОС) с неполной факторизацией.

Постановка задачи

Эллиптическая краевая задача для функции *u* определяется дифференциальным уравнением:

$$-div(\lambda\ gradu) + \gamma u = f$$

заданным в некоторой области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и краевыми условиями:

$$u|_{S_1} = u_g$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_3} + \beta(u|_{S_3} - u_\beta) = 0$$

В декартовой системе координат x,y это уравнение может быть записано в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \gamma u = f$$

Исходное уравнение можно переписать в виде: $Lu = f$, где $Lu = -div(\lambda gradu) + \gamma u$. Тогда чтобы решить исходную задачу следует левую и правую части уравнения домножить на функцию v из пространства пробных функций и проинтегрировать по Ω. Фактически это соответствует скалярному умножению Lu и f на v в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$(Lu, v) = (f, v)$$

$$(Lu - f, v) = 0$$

Это уравнение Галеркина в слабой форме.
В пространстве $L_2(\Omega)$ скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(u, v) = \int\limits_\Omega uvd\Omega$$

Перепишем уравнение Галеркина в явном виде:

$$-\int\limits_\Omega div(\lambda\ gradu)v\ d\Omega + \int\limits_\Omega \gamma uv\ d\Omega - \int\limits_\Omega fv\ d\Omega = 0$$

Воспользуемся формулой Грина:

$$\int\limits_{\Omega}(\lambda\ gradu\ gradv)\ d\Omega = -\int\limits_{\Omega} div(\lambda\ gradu)v\ d\Omega + \int\limits_{S}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}v\ dS$$

Сделав соответствующую подстановку, получим уравнение вида:

$$\int\limits_{\Omega}(\lambda\ gradu\ gradv)d\Omega - \int\limits_{S}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}vdS + \int\limits_{\Omega}\gamma uv\ d\Omega \int\limits_{\Omega} fv\ d\Omega = 0$$

Учитывая краевые условия $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, получим:

$$\int\limits_{\Omega}(\lambda\ gradu\ gradv)d\Omega - \int\limits_{S_1}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}vdS - \int\limits_{S_2}\theta vdS - \int\limits_{S_3}\beta(u|_{\beta} - u)vdS + \int\limits_{\Omega}\gamma uv\ d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv\ d\Omega = 0$$

Так как $v|_{S_1} = 0$, то

$$\int\limits_{S_1}\lambda\frac{\partial u}{\partial n}v\ dS = 0$$

Уравнение примет вид:

$$\int\limits_{\Omega}(\lambda gradu\ gradv)d\Omega + \int\limits_{S_3}\beta uvdS + \int\limits_{\Omega}\gamma uvd\Omega = \int\limits_{S_2}\theta vdS + \int\limits_{S_3}\beta u|_{\beta}vdS + \int\limits_{\Omega} fvd\Omega = 0$$

Будем искать решение в виде:

$$u = \sum_{i=1}^{n} q_i\psi_i$$

где ψ_i - базисные функции. Функция v может быть представлена в таком же виде. Подставив, получим СЛАУ для компонент q_i:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \left(\int\limits_{\Omega}(\lambda\ grad\psi_i\ grad\psi_j)d\Omega + \int\limits_{S_3}\beta\psi_i\psi_j\ dS + \int\limits_{\Omega}\gamma\psi_i\psi_j\ d\Omega\right) = \\ = \int\limits_{S_2}\theta\psi_j\ dS + \int\limits_{S_3}\beta u_{\beta}\psi_j\ dS + \int\limits_{\Omega} f\psi_j\ d\Omega$$

Поскольку исходная задача рассматривается в декартовой системе координат, то $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ и, соответсвенно: $grad\ u\ grad\ v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$. Отсюда получаем уравнение в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \int\limits_{\Omega}\lambda\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \frac{\partial\psi_j}{\partial y}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\right)dxdy + \sum_{j=1}^{n} q_j \int\limits_{\Omega}\gamma\psi_j\psi_i\ dxdy + \sum_{j=1}^{n} q_j \int\limits_{\Omega}\beta\psi_j\psi_i\ dxdy = \\ = \int\limits_{\Omega} f\psi_i\ dxdy + \int\limits_{S_2}\theta\psi_i\ dxdy + \int\limits_{S_3}\beta u_{\beta}\psi_i\ dxdy$$

Конечноэлементная дискретизация

Так как для решения задачи используются линейные базисные функции, то на каждом конечном элементе Ω_k - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями $L_1(x,y), L_2(x,y), L_3(x,y)$, такими, что $L_1(x,y)$ равна единице в вершине (x_1,y_1) и нулю во всех остальных вершинах, $L_2(x,y)$ равна единице в вершине (x_2,y_2) и нулю во всех остальных вершинах, $L_3(x,y)$ равна единице в вершине (x_3,y_3) и нулю во всех остальных вершинах. Любая линейная на Ω_k функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника Ω_k. Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся три узла – вершины треугольника.

$$\psi_1 = L_1(x,y)$$
$$\psi_2 = L_2(x,y)$$
$$\psi_3 = L_3(x,y)$$

Учитывая построение *L-функций*, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1 \\ L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 = x \\ L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 = y \end{cases}$$

Т.е. имеем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Отсюда находим коэффициенты линейных функций $L_1(x,y), L_2(x,y), L_3(x,y)$

$$L_i = a_0^i + a_1^i x + a_2^i y, i = \overline{1,3}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|detD|} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Переход к локальным матрицам

Чтобы получить выражения для локальных матриц жёсткости G и массы M каждого конечного элемента Ω_K, перейдём к решению локальной задачи на каждом конечном элементе. Полученное уравнение для области Ω представим в виде суммы интегралов по областям Ω_k без учёта краевых условий. Тогда на каждом конечном элементе будем решать локальную задачу построения матриц жёсткости, массы и вектора правой части.

$$\int\limits_{\Omega_k} \lambda \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) dxdy + \int\limits_{\Omega_k} \gamma \psi_j \psi_i dsdy = \int\limits_{\Omega_k} f \psi_i dxdy$$

Локальная матрица будет представлять собой сумму матриц жёсткости и массы и будет иметь размерность 3×3 (по числу узлов на конечном элементе)

Построение матрицы массы

$$M_{ii} = \int\limits_{\Omega_k} \gamma (\psi_i)^2 d\Omega_k = \gamma \int\limits_{\Omega_k} (L_i)^2 d\Omega_k = \gamma \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} |detD| = \gamma \frac{detD}{12}, i = 1, \ldots, 3$$

$$M_{ij} = \int\limits_{\Omega_k} \gamma \psi_i \psi_j d\Omega_k = \gamma \int\limits_{\Omega_k} L_i L_j d\Omega_k = \gamma \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} |detD| = \gamma \frac{detD}{24}, i \neq j$$

$$M = \gamma \frac{|detD|}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Построение матрицы жёсткости

$$G_{ij} = \int\limits_{\Omega_k} \lambda \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) d\Omega_k = \left| \lambda = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \psi_k \right| =$$

$$= \lambda_1 \int\limits_{\Omega_k} \psi_1 (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j) d\Omega_k + \lambda_2 \int\limits_{\Omega_k} \psi_2 (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j) d\Omega_k + \lambda_3 \int\limits_{\Omega_k} \psi_3 (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j) d\Omega_k =$$

$$= (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j) \left(\lambda_1 \int\limits_{\Omega_k} \psi_1 d\Omega_k + \lambda_2 \int\limits_{\Omega_k} \psi_2 d\Omega_k + \lambda_3 \int\limits_{\Omega_k} \psi_3 d\Omega_k \right) =$$

$$= (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j) \left(\lambda_1 \int\limits_{\Omega_k} L_1 dxdy + \lambda_2 \int\limits_{\Omega_k} L_2 dxdy + \lambda_3 \int\limits_{\Omega_k} L_3 dxdy \right) =$$

$$= (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) |detD| \left(\frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} + \frac{0!1!0!}{(0+1+0+2)!} + \frac{0!0!1!}{(0+0+1+2)!} \right) =$$

$$= (\alpha_1^i \alpha_1^j + \alpha_2^i \alpha_2^j) \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) |detD|}{6} \right)$$

Построение вектора правой части

Рассмотрим правую часть выражения для k-го конечного элемента:

$$\int\limits_{\Omega_k} f\psi_i dxdy$$

представим f в виде $f_1L_1 + f_2L_2 + f_3L_3$, где f_i - значения в вершинах треугольника. Получим:

$$\int\limits_{\Omega_k} f_q L_q L_i dxdy = f_q \int\limits_{\Omega_k} L_q L_i d\Omega_k$$

Таким образом:

$$B_i = \sum_{q=1}^{3} f_q \int\limits_{\Omega_k} L_q L_i d\Omega_k \quad i = \overline{0,2}$$

Сборка глобальной матрицы и глобального вектора

При формировании глобальной матрицы из локальных, полученных суммированием соответствующих матриц массы и жесткости, учитываем соответствие локальной и глобальной нумераций каждого конечного элемента. Глобальная нумерация каждого конечного элемента однозначно определяет позиции вклада его локальной матрицы в глобальную. Поэтому, зная глобальные номера соответствующих узлов конечного элемента, определяем и то, какие элементы глобальной матрицы изменятся при учете текущего конечного элемента. Аналогичным образом определяется вклад локального вектора правой части в глобальный. При учете текущего локального вектора изменятся те элементы глобального вектора правой части, номера которых совпадают с глобальными номерами узлов, присутствующих в этом конечном элементе.

Учёт первых краевых условий

Для учета первых краевых условий, в глобальной матрице и глобальном векторе находим соответствующую глобальному номеру краевого узла строку и зануляем всё кроме диагонального элемента, которому присваиваем 1, а вместо элемента с таким номером в векторе правой части - значение краевого условия, заданное в исходной задаче.

Учёт вторых и третьих краевых условий

Рассмотрим краевые условия второго и третьего рода:

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_3} + \beta(u|_{S_3} - u_\beta) = 0$$

Отсюда получаем, что для учёта краевых условий необходимо вычислить интегралы:

$$\int\limits_{S_2} \theta\psi_j dxdy, \qquad \int\limits_{S_3} \beta u_\beta \psi_j dxdy, \qquad \int\limits_{S_3} \beta\psi_i\psi_j dxdy$$

Краевые условия второго и третьего рода задаются на рёбрах, т.е. определяются двумя узлами, лежащими на ребре. Будем считать, что параметр β на S_3 постоянен, тогда параметр u_β будем раскладывать по двум базисным функциям, определённым на этом ребре:

$$u_\beta = u_{\beta 1}\phi_1 + u_{\beta 2}\phi_2$$

где $\phi_i,\ i = \overline{0,1}$ - локально занумерованные линейные базисные функции, которые имеют также свои глобальные номера во всей расчетной области, а $u_{\beta i}$ - значение функции u_β в узлах ребра.

Аналогично поступаем и при учете вторых краевых условий, раскладывая по базису ребра функцию:

$$\theta = \theta_0\phi_0 + \theta_1\phi_1$$

Тогда приведенные выше интегралы примут вид:

$$I_1 = \int\limits_{S_2} (\theta_0\phi_0 + \theta_1\phi_1)\phi_i dxdy$$

$$I_2 = \beta \int\limits_{S_3} (u_{\beta 1}\phi_0 + u_{\beta 2}\phi_1)\phi_i dxdy$$

$$I_3 = \beta \int\limits_{S_3} \phi_i\phi_j dxdy$$

Фактически, решая задачу учета краевых условий второго и третьего рода, мы переходим к решению одномерной задачи на ребре для того, чтобы занести соответствующие результаты в глобальную матрицу и вектор.

Базисными функциями ребра являются две ненулевые на данном ребре базисные функции из $\phi_i,\ i = \overline{0,1}$ конечного элемента.

Для учёта вклада вторых и третьих краевых условий рассчитываются 2 матрицы 2×2.

Игтегралы I_1, I_2, I_3 будем вычислять по формуле:

$$\int (L_i)^{v_i}(L_j)^{v_j} dS = \frac{v_i! v_j!}{(v_i + v_j + 1)!} mes\Gamma,\ i \neq j$$

где $mes\Gamma$ длина ребра. При этом независимо от того, что на каждом из ребер присутствуют свои функции, интегралы, посчитанные по приведенным выше формулам, будут равны:

$$I_1 = \begin{pmatrix} \int\limits_{S_2} L_1 L_1 dxdy & \int\limits_{S_2} L_1 L_2 dxdy \\ \int\limits_{S_2} L_2 L_1 dxdy & \int\limits_{S_2} L_2 L_2 dxdy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} mes S_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Этот вектор поправок в правую часть позволяет учесть не только вторые краевые условия, но и часть βu_β из третьих. Осталось рассмотреть матрицу поправок в левую часть:

$$I_3 = \beta \int\limits_{S_3} \phi_i \phi_j dxdy$$

Очевидно, что получится та же матрица, только не умноженная на вектор констант:

$$I_3 = \frac{1}{6} mes S_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавляя эту матрицу в левую часть, на места соответствующие номерам узлов, получаем учет третьих краевых условий.

2 Текст программы

Ссылка к полному проэкту: https://github.com/ISTECTION/FEM

main.cpp

```cpp
#include "argparse/argparse.hpp"
#include "timer/cxxtimer.hpp"
#include "FEM.hpp"

#include <iostream>
#include <optional>
#include <fstream>

int main(int argc, char* argv[]) {
    std::ios_base::sync_with_stdio(false);

    using namespace    ::Log;
    using ::std::chrono::milliseconds;

    argparse::ArgumentParser _prs("FEM", "1.0.0");
    _prs.add_argument("-i", "--input")
        .help( "path to input files" )
        .required();

    _prs.add_argument("-o", "--output")
        .help( "path to output files" );

    _prs.add_argument("-d", "--debug")
        .help("debugging information")
        .default_value(false)
        .implicit_value(true);

    try {
        using std::string;

        _prs.parse_args(argc, argv);
        std::optional         _opt = _prs.present    ("-o");
        std::filesystem::path _inp = _prs.get<string>("-i");
        std::filesystem::path _out = _opt.has_value()
                                        ? _prs.get<string>("-o")
                                        : _inp / "sparse";

        Function::setFunction(_inp.string());
        cxxtimer::Timer _timer(true);
        FEM _FEM(_inp, _prs.get<bool>("-d"));
        _FEM.startLOS(_out);
        _timer.stop();

        if (_prs["-d"] == true) {
```

```
            _FEM.printAll();
            _FEM.printSparse();
            _FEM.createTable();
        } else
            _FEM.printZ();

        std::cout << _timer;
    } catch(const std::runtime_error& err) {
        #define ARGUMENTS_NO_RECEIVED 2
        Logger::append(getLog(
            "argc != 2 (FEM --input ./input)"
        ));
        std::cerr << err.what() << std::endl;
        std::cerr <<    _prs    << std::endl;
        std::exit(  ARGUMENTS_NO_RECEIVED  );
    }
    return 0;
}
```

Union.hpp

```
#include <vector>
#include <array>

namespace Union {
    struct XY       { double x, y;         };
    struct Material { double betta, gamma; };

    struct Element {
        size_t area;
        std::array<size_t, 3> nodeIdx;
    };

    struct Boundary {
        size_t cond, type, area;
        std::array<size_t, 2> nodeIdx;
    };

    struct Param {
        size_t nodes;
        size_t elems;
        size_t areas;
        size_t conds;
    };
}
```

FEM.hpp

```
#ifndef _FEM_HPP_
#define _FEM_HPP_
#include "indicators/indicators.hpp"
#include "utils/lightweight.hpp"
#include "utils/overload.hpp"
#include "utils/friendly.hpp"
#include "nlohmann/json.hpp"
#include "Function.hpp"
#include "LOS/LOS.hpp"
#include "Logger.hpp"
#include "Union.hpp"

#include <algorithm>
#include <chrono>
#include <thread>
#include <cmath>
#include <set>

class FEM
{
private:
    Union::Param _size;

    std::vector<Union::XY>       nodes;
    std::vector<Union::Element>  elems;
    std::vector<Union::Boundary> boundarys;
    std::vector<Union::Material> materials;

    std::vector<double> gb;
    std::vector<double> gg;
    std::vector<double> di;
    std::vector<size_t> ig;
    std::vector<size_t> jg;

    bool _debugging;
public:
    FEM(std::filesystem::path _path, bool debugging)
            : _debugging(debugging) {

        assert(readJson(_path));
        portrait(true);
        global();
        boundaryCondition();
    }

    void startLOS(const std::filesystem::path& _out) {
        using ::Cond::HOLLESKY;
        using ::Cond::DIAGONAL;
```

```
49          using ::Cond::NONE;
50
51          const double _eps = 1E-20;
52          const double _itr = 10000;
53          Cond _cond = DIAGONAL;
54
55          LOS<double> _LOS (getDate(), getNodes(), _eps, _itr);
56          _LOS.solve(_cond, true);
57          _z = std::move(_LOS.getX());
58      }
59
60      double getValue   (double, double) const;
61  private:
62      void global();
63      void resize();
64
65      array::x   localB(const std::array<Union::XY, 3>&, size_t) const;
66      array::xxx localA(const std::array<Union::XY, 3>&, size_t) const;
67
68      array::xxx G(const std::array<Union::XY, 3>&, size_t) const;
69      array::xxx M(const std::array<Union::XY, 3>&, size_t) const;
70
71      bool readFile(const std::filesystem::path&  );
72      bool readJson(const std::filesystem::path&  );
73      void portrait(const bool isWriteList = false);
74
75      void boundaryCondition();
76      void first (const Union::Boundary& bound);
77      void second(const Union::Boundary& bound);
78      void third (const Union::Boundary& bound);
79
80      template<size_t N,
81          typename _Struct>
82          void loc_A_to_global(
83              const std::array<std::array<double, N>, N>&,
84              const _Struct&
85          );
86
87      template<size_t N,
88          typename _Struct>
89          void loc_b_to_global(
90              const std::array<double, N>&,
91              const _Struct&
92          );
93  };
94
95  void FEM::portrait(const bool isWriteList) {
96
97      const size_t N {    _size.nodes     };
```

```
98      std::vector<std::set<size_t>> list(N);
99
100     for (size_t el = 0; el < _size.elems; el++)
101     for (size_t point = 0; point < 3; point++) {
102         for (size_t i = point + 1; i < 3; i++) {
103             size_t idx1 = { elems[el].nodeIdx[point] };
104             size_t idx2 = { elems[el].nodeIdx[  i  ] };
105             idx1 > idx2 ?
106                 list[idx1].insert(idx2) :
107                 list[idx2].insert(idx1) ;
108         }
109     }
110
111     for (size_t i = 2; i < ig.size(); i++)
112         ig[i] = ig[i - 1] + list[i - 1].size();
113
114     jg.resize(ig[N]);
115     gg.resize(ig[N]);
116
117     for (size_t index = 0, i = 1; i < list.size(); i++)
118     for (size_t value : list[i])
119         jg[index++] = value;
120 }
121
122 void FEM::global() {
123     std::array<Union::XY, 3> coords;
124     for (size_t i = 0; i < _size.elems; i++) {
125         for (size_t j = 0; j < 3; j++) {
126             size_t point = elems[i].nodeIdx[j];
127             coords[j].x = nodes[point].x;
128             coords[j].y = nodes[point].y;
129         }
130         array::x   local_b = localB(coords, elems[i].area);
131         array::xxx local_A = localA(coords, elems[i].area);
132
133         loc_A_to_global<3>(local_A, elems[i]);
134         loc_b_to_global<3>(local_b, elems[i]);
135     }
136 }
137
138 template<size_t N, typename _Struct>
139 void FEM::loc_A_to_global(
140         const std::array<std::array<double, N>, N>& locA,
141         const _Struct& elem) {
142
143     using            ::std::vector;
144     using iterator = ::std::vector<size_t>::iterator;
145
146     for (size_t i = 0; i < N; i++) {
```

```
147             di[elem.nodeIdx[i]] += locA[i][i];
148
149             for (size_t j = 0; j < i; j++) {
150                 size_t a = elem.nodeIdx[i];
151                 size_t b = elem.nodeIdx[j];
152                 if (a < b) std::swap(a, b);
153
154                 iterator _beg = jg.begin() + ig[a];
155                 iterator _end = jg.begin() + ig[a + 1];
156
157                 auto _itr = std::lower_bound(_beg, _end, b);
158                 auto _idx = _itr - jg.begin();
159                 gg[_idx] += locA[i][j];
160             }
161         }
162     }
163
164     template<size_t N, typename _Struct>
165     void FEM::loc_b_to_global(
166             const std::array<double, N>& loc_b,
167             const _Struct& elem) {
168
169         for (size_t i = 0; i < N; i++)
170             gb[elem.nodeIdx[i]] += loc_b[i];
171     }
172
173     array::x
174     FEM::localB(const std::array<Union::XY, 3>& elem, size_t area) const {
175         std::array<double, 3> function {
176             Function::f(elem[0], area),
177             Function::f(elem[1], area),
178             Function::f(elem[2], area)
179         };
180
181         double det_D = fabs(determinant(elem));
182         double _koef = det_D / 24;
183
184         return {
185             _koef * (2 * function[0] + function[1] + function[2]),
186             _koef * (2 * function[1] + function[0] + function[2]),
187             _koef * (2 * function[2] + function[0] + function[1])
188         };
189     }
190
191     array::xxx
192     FEM::localA(const std::array<Union::XY, 3>& elem, size_t area) const {
193         std::array<std::array<double, 3>, 3> G = FEM::G(elem, area);
194         std::array<std::array<double, 3>, 3> M = FEM::M(elem, area);
195         std::array<std::array<double, 3>, 3> A = G + M;
```

```
196     return A;
197 }
198 
199 array::xxx
200 FEM::G(const std::array<Union::XY, 3>& elem, size_t area) const {
201     double det   = fabs(determinant(elem));
202     double _koef = (
203             Function::lambda(elem[0], area) +
204             Function::lambda(elem[1], area) +
205             Function::lambda(elem[2], area)
206     ) / (det * 6);
207 
208     std::array<std::array<double, 3>, 3> G;
209     std::array<std::array<double, 2>, 3> a {
210             elem[1].y - elem[2].y,
211             elem[2].x - elem[1].x,
212 
213             elem[2].y - elem[0].y,
214             elem[0].x - elem[2].x,
215 
216             elem[0].y - elem[1].y,
217             elem[1].x - elem[0].x
218     };
219 
220     for (int i = 0; i < 3; i++)
221     for (int j = 0; j < 3; j++)
222         G[i][j] = _koef * (
223             a[i][0] * a[j][0] +
224             a[i][1] * a[j][1]
225         );
226 
227     return G;
228 }
229 
230 array::xxx
231 FEM::M(const std::array<Union::XY, 3>& elem, size_t area) const {
232     double det = fabs(determinant(elem));
233     double gammaKoef = materials[area].gamma * det / 24;
234     std::array<std::array<double, 3>, 3> M;
235     for (size_t i = 0; i < 3; i++)
236     for (size_t j = 0; j < 3; j++) {
237         M[i][j] =
238             (i == j) ? (2 * gammaKoef) :
239                        (    gammaKoef) ;
240     }
241     return  M;
242 }
243 
244 void FEM::boundaryCondition() {
```

```
245     using namespace ::Log;
246 
247     std::sort(
248         boundarys.begin(),
249         boundarys.end(),
250         [](Union::Boundary& _left, Union::Boundary& _right){
251             return _left.cond > _right.cond;
252         }
253     );
254 
255     for (size_t _count = 0; _count < _size.conds; _count++) {
256         switch (boundarys[_count].cond)
257         {
258             case FIRST_BOUNDARY_COND:
259                 first(boundarys[_count]);
260                 break;
261             case SECOND_BOUNDARY_COND:
262                 second(boundarys[_count]);
263                 break;
264             case THIRD_BOUNDARY_COND:
265                 third(boundarys[_count]);
266                 break;
267             default:
268                 Logger::append(getLog("There is no such condition"));
269         }
270     }
271 }
272 
273 void FEM::first(const Union::Boundary& bound) {
274     di[bound.nodeIdx[0]] = { 1 };
275     di[bound.nodeIdx[1]] = { 1 };
276 
277     for (size_t i = 0; i < 2; i++)
278         gb[bound.nodeIdx[i]] =
279             Function::firstBound({
280                 nodes[bound.nodeIdx[i]].x,
281                 nodes[bound.nodeIdx[i]].y
282             }, bound.type);
283 
284     for (size_t k = 0; k < 2; k++) {
285         size_t node = bound.nodeIdx[k];
286         for (size_t i = ig[node]; i < ig[node + 1]; i++) {
287             if(di[jg[i]] != 1)
288                 gb[jg[i]] -= gg[i] * gb[node];
289             gg[i] = 0;
290         }
291 
292         for(size_t i = node + 1; i < _size.nodes; i++) {
293             size_t lbeg = ig[i];
```

```
            size_t lend = ig[i + 1];
            for(size_t p = lbeg; p < lend; p++) {
                if(jg[p] == node) {
                    if(di[i] != 1)
                        gb[i] -= gg[p] * gb[node];
                    gg[p] = 0;
                }
            }
        }
    }
}

void FEM::second(const Union::Boundary& bound) {
    std::array<Union::XY, 2>
        coord_borders = {
            nodes[bound.nodeIdx[0]],
            nodes[bound.nodeIdx[1]]
        };

    double _koef =
        edgeLength(coord_borders) / 6;

    std::array<double, 2> corr_b;
    for (size_t i = 0; i < 2; i++)
        corr_b[i] = _koef * (
            2 * Function::secondBound({
                    nodes[bound.nodeIdx[i]].x,
                    nodes[bound.nodeIdx[i]].y
                }, bound.type) +
                Function::secondBound({
                    nodes[bound.nodeIdx[1 - i]].x,
                    nodes[bound.nodeIdx[1 - i]].y
                }, bound.type)
        );

    loc_b_to_global<2>(corr_b, bound);
}

void FEM::third(const Union::Boundary& bound) {
    std::array<Union::XY, 2> coord_borders = {
        nodes[bound.nodeIdx[0]],
        nodes[bound.nodeIdx[1]]
    };

    double _koef =
        materials[bound.area].betta *
        edgeLength(coord_borders) / 6;

    std::array<double, 2>               corr_b;
```

```
343     std::array<std::array<double, 2>, 2> corr_a;
344 
345     for (size_t i = 0; i < 2; i++) {
346         corr_b[i] = _koef * (
347             2 * Function::thirdBound({
348                     nodes[bound.nodeIdx[i]].x,
349                     nodes[bound.nodeIdx[i]].y
350                 }, bound.type) +
351                 Function::thirdBound({
352                     nodes[bound.nodeIdx[1 - i]].x,
353                     nodes[bound.nodeIdx[1 - i]].y
354                 }, bound.type)
355             );
356 
357         for (size_t j = 0; j < 2; j++) {
358             corr_a[i][j] =
359                 (i == j) ? (2 * _koef) :
360                            (    _koef) ;
361         }
362     }
363     loc_b_to_global<2>(corr_b, bound);
364     loc_A_to_global<2>(corr_a, bound);
365 }
366 
367 bool FEM::readFile(const std::filesystem::path& path) {
368     using namespace ::Log;
369     bool isError { true };
370     std::ifstream fin(path / "params.txt");
371     isError &= is_open(fin, getLog("Error - params.txt"));
372     fin >> _size.nodes
373         >> _size.elems
374         >> _size.areas
375         >> _size.conds;
376     fin.close();
377     resize();
378     fin.open(path / "nodes.txt");
379     isError &= is_open(fin, getLog("Error - nodes.txt"));
380     for (size_t i = 0; i < _size.nodes; i++)
381         fin >> nodes[i].x >> nodes[i].y;
382     fin.close();
383     fin.open(path / "elems.txt");
384     isError &= is_open(fin, getLog("Error - elems.txt"));
385     for (size_t i = 0; i < _size.elems; i++) {
386         fin >> elems[i].nodeIdx[0]
387             >> elems[i].nodeIdx[1]
388             >> elems[i].nodeIdx[2];
389     }
390     fin.close();
391     fin.open(path / "areas.txt");
```

```
392     isError &= is_open(fin, getLog("Error - areas.txt"));
393     for (size_t i = 0; i < _size.areas; i++)
394         fin >> materials[i].gamma
395             >> materials[i].betta;
396 
397     for (size_t i = 0; i < _size.elems; i++)
398         fin >> elems[i].area;
399     fin.close();
400     fin.open(path / "bords.txt");
401     isError &= is_open(fin, getLog("Error - bords.txt"));
402     for (size_t i = 0; i < _size.conds; i++)
403         fin >> boundarys[i].area
404             >> boundarys[i].nodeIdx[0]
405             >> boundarys[i].nodeIdx[1]
406             >> boundarys[i].cond
407             >> boundarys[i].type;
408     fin.close();
409     return isError;
410 }
411 #endif /// _FEM_HPP_
```

lightweight.hpp

```
1  double
2  determinant(const std::array<Union::XY, 3>& elem) {
3      return (
4          (elem[1].x - elem[0].x) * (elem[2].y - elem[0].y) -
5          (elem[1].y - elem[0].y) * (elem[2].x - elem[0].x)
6      );
7  }
8 
9  double
10 edgeLength(const std::array<Union::XY, 2>& elem) {
11     return (
12         sqrt (
13             pow(elem[1].x - elem[0].x ,2) +
14             pow(elem[1].y - elem[0].y, 2)
15         )
16     );
17 }
```

3 Тестирование

Тест №1

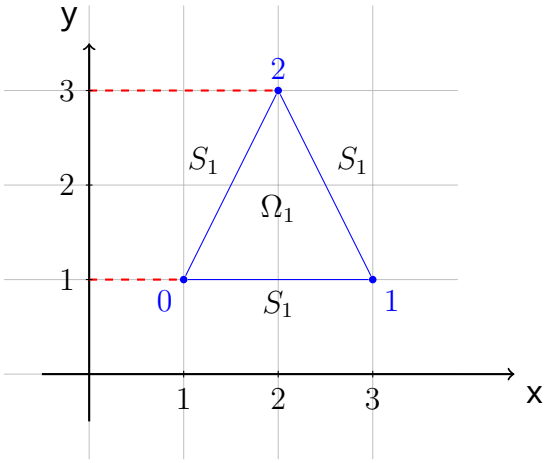
$u(x, y) = 1$

$f(x, y) = 0$

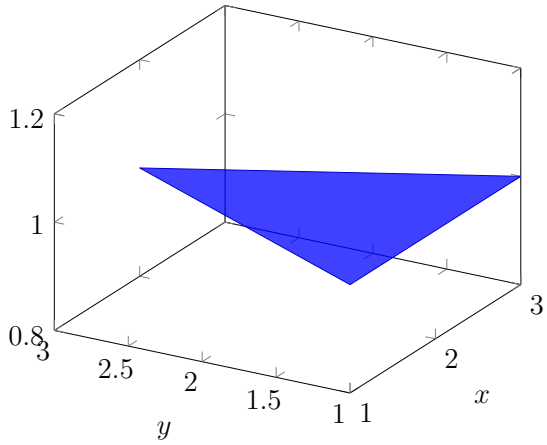
$\lambda = 1$

$\gamma = 0$

$\beta = 0$



$S_1 = 1$

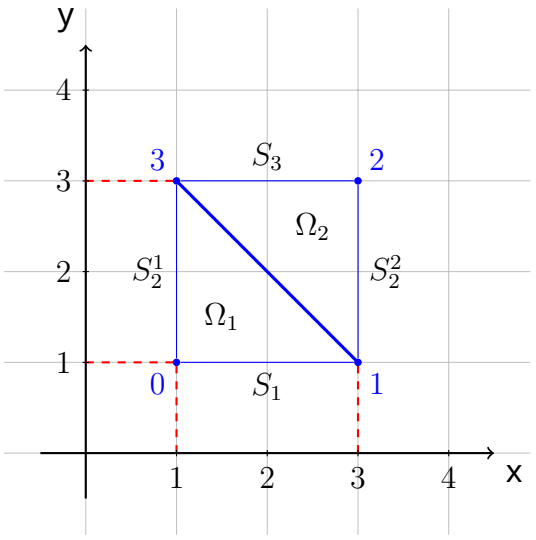


nodes	elems	area	bords
1 1	0 1 2	0	0 0 1 1 0
3 1			0 1 2 1 0
2 3			0 2 0 1 0

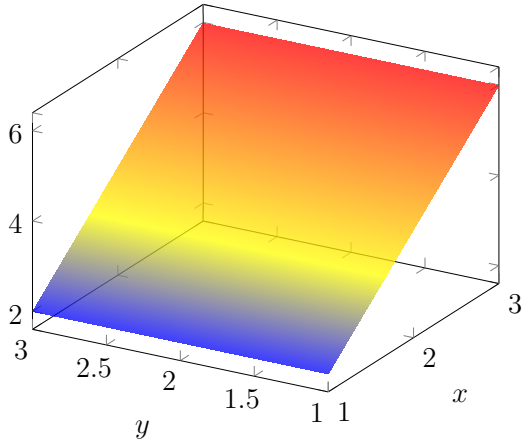
x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
1,000	1,000	0,0e+00	
1,000	1,000	0,0e+00	0,0e+00
1,000	1,000	0,0e+00	

Тест №2

$$u(x,y) = 2x$$
$$f(x,y) = 4x - 2$$
$$\lambda = x$$
$$\gamma = 2$$
$$\beta = 2$$



$$S_1 = 2x$$
$$S_2^1 = -2x$$
$$S_2^2 = 2x$$
$$S_3 = 2x$$



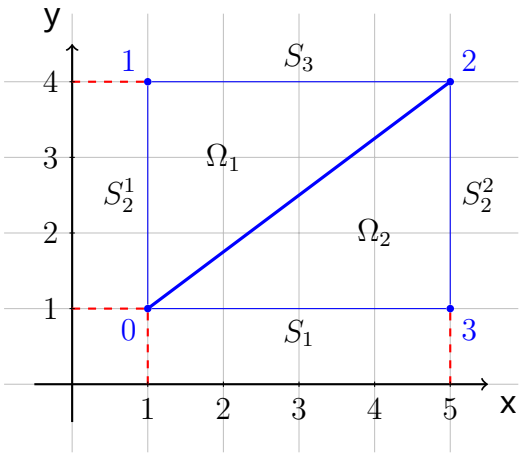
nodes	elems	area	bords
1 1	0 1 3	0	0 0 1 1 0
3 1	1 2 3	0	0 0 3 2 0
3 3			0 1 2 2 1
1 3			0 2 3 3 0

x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
2,000	2,000	0,00e+00	
6,000	6,000	0,00e+00	
6,000	6,000	1,23e-13	1,20e-13
2,000	2,000	-1,29e-14	

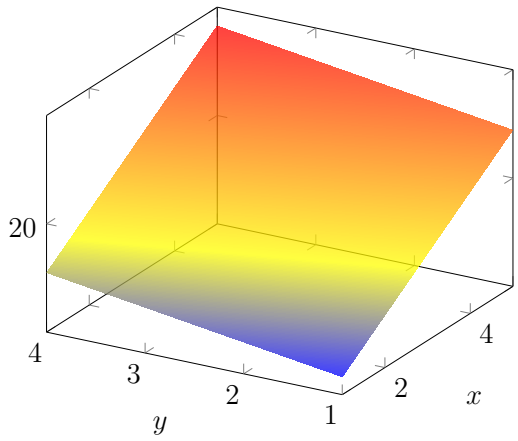
Тест №3

Количество элементов - 2

$$u(x, y) = 5x + 2y$$
$$f(x, y) = 10x + 4y$$
$$\lambda = 2$$
$$\gamma = 2$$
$$\beta = 5$$



$$S_1 = 5x + 2$$
$$S_2^1 = -10$$
$$S_2^2 = 10$$
$$S_3 = 5x + 8,8$$

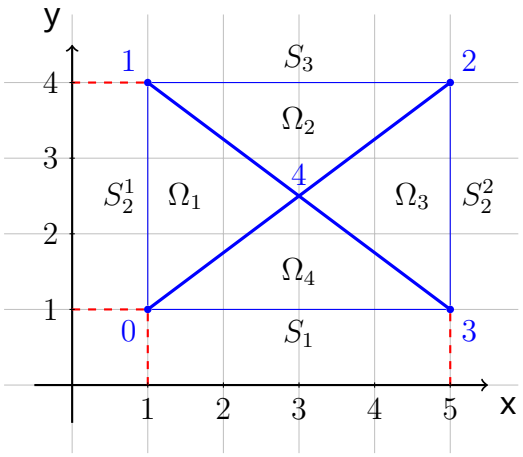


nodes	elems	area	bords
1 1	0 1 2	0	0 0 3 1 0
1 4	0 2 3	0	0 0 1 2 0
5 4			0 3 2 2 1
5 1			0 1 2 3 0

x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
7,000	7,000	0,0e+00	
13,000	13,000	1,8e–13	
33,000	32,000	–3,2e–13	3,6e–13
27,000	27,000	0,0e+00	

Количество элементов - 4

$$u(x,y) = 5x + 2y$$
$$f(x,y) = 10x + 4y$$
$$\lambda = 2$$
$$\gamma = 2$$
$$\beta = 5$$

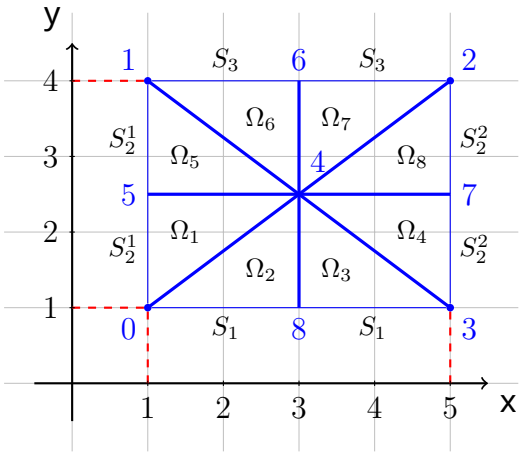


nodes	elems	area	bords
1 1	0 1 4	0	0 0 3 1 0
1 4	1 2 4	0	0 0 1 2 0
5 4	2 3 4	0	0 3 2 2 1
5 1	0 3 4	0	0 1 2 3 0
3 2,5			

x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
7,000	7,000	0,0e+00	
13,000	13,000	–2,5e–13	
33,000	33,000	–2,6e–13	3,7e–13
27,000	27,000	0,0e+00	
20,000	20,000	8,8e–14	

Количество элементов - 8

$$u(x,y) = 5x + 2y$$
$$f(x,y) = 10x + 4y$$
$$\lambda = 2$$
$$\gamma = 2$$
$$\beta = 5$$

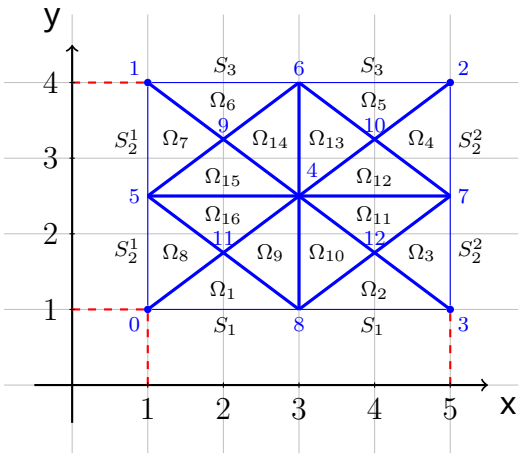


nodes	elems	area	bords
1 1	0 4 5	0	0 0 8 1 0
1 4	0 4 8	0	0 8 3 1 0
5 4	3 4 8	0	0 0 5 2 0
5 1	3 4 7	0	0 5 1 2 0
3 2,5	1 4 5	0	0 3 7 2 1
1 2,5	1 4 6	0	0 7 2 2 1
3 4	2 4 6	0	0 1 6 3 0
5 2,5	2 4 7	0	0 6 2 3 0
3 1			

x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
7,000	7,000	0,0e+00	
13,000	13,000	9,1e–14	
33,000	33,000	–1,2e–12	
27,000	27,000	0,0e+00	
20,000	20,000	4,6e–13	1,7e–12
10,000	10,000	–1,1e–13	
23,000	23,000	7,8e–13	
30,000	30,000	–5,8e–13	
17,000	17,000	0,0e+00	

Количество элементов - 16

$$u(x,y) = 5x + 2y$$
$$f(x,y) = 10x + 4y$$
$$\lambda = 2$$
$$\gamma = 2$$
$$\beta = 5$$



nodes	elems	area	bords
1 1	0 8 11	0	0 0 8 1 0
1 4	3 8 12	0	0 8 3 1 0
5 4	3 7 12	0	0 0 5 2 0
5 1	2 7 10	0	0 5 1 2 0
3 2,5	2 6 10	0	0 3 7 2 1
1 2,5	1 6 9	0	0 7 2 2 1
3 4	1 5 9	0	0 1 6 3 0
5 2,5	0 5 11	0	0 6 2 3 0
3 1	4 8 11	0	
2 3,25	4 8 12	0	
4 3,25	4 7 12	0	
2 1,75	4 7 10	0	
4 1,75	4 6 10	0	
	4 6 9	0	
	4 5 9	0	
	4 5 11	0	

x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
7,000	7,000	0,0e+00	
13,000	13,000	–2,8e–13	
33,000	33,000	–1,2e–12	
27,000	27,000	0,0e+00	
20,000	20,000	5,1e–13	
10,000	10,000	–2,7e–13	
23,000	23,000	8,9e–13	1,8e–12
30,000	30,000	–6,4e–13	
17,000	17,000	0,0e+00	
16,500	16,500	–5,0e–14	
26,500	26,500	–4,1e–13	
13,500	13,500	–2,0e–14	
23,500	23,500	2,2e–13	

Тест №4

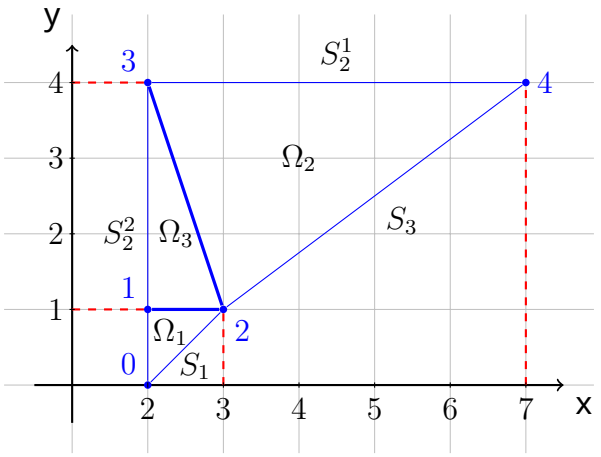
$$u(x,y) = \begin{cases} y^2 \\ 20y - 19 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} -20 \\ 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} 10 \\ 1 \end{cases}$$

$$\gamma = 0$$

$$\beta = 2$$

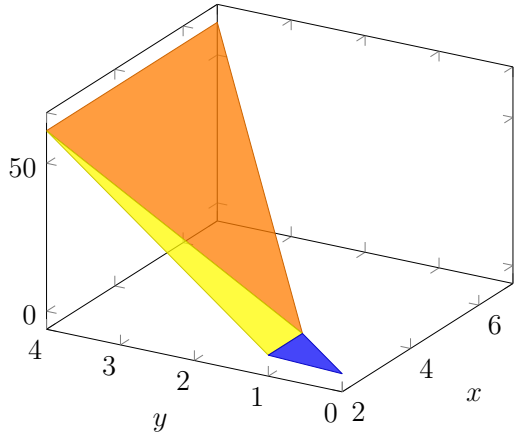


$$S_1 = y^2 x$$

$$S_2^1 = 20$$

$$S_2^2 = 0$$

$$S_3 = 20y - 27$$



nodes	elems	area	bords
2 0	0 1 2	0	0 0 1 2 1
2 1	1 2 3	1	1 1 3 2 1
3 1	2 3 4	1	1 3 4 2 0
2 4			1 2 4 3 0
7 4			0 0 2 1 0

x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
0,000	0,000	0,00e+00	
1,000	1,134	1,34e-01	
1,000	1,000	-1,11e-16	6,63e-01
61,000	60,350	-6,49e-01	
61,000	60,970	-2,95e-02	

Тест №5

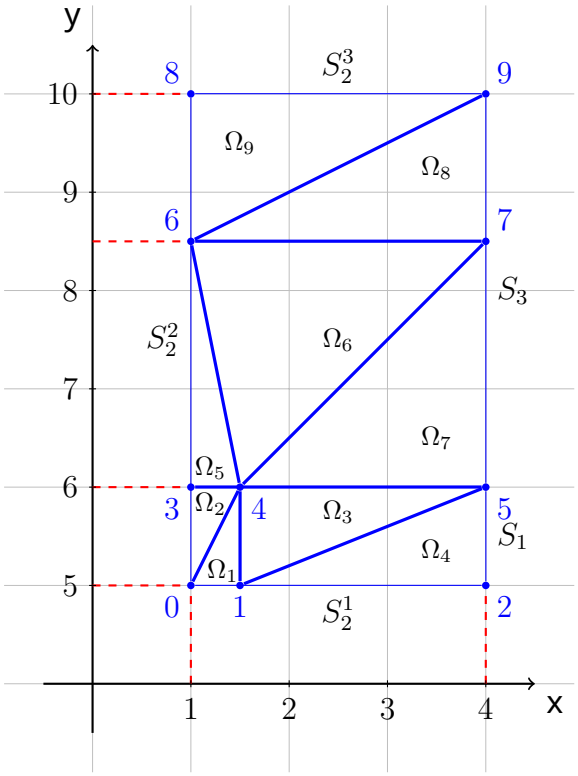
$$u(x,y) = x + 6y - 2$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 5x + 30y - 10 \\ 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 1$$

$$\gamma = \begin{cases} 5 \\ 0 \end{cases}$$

$$\beta = 10$$



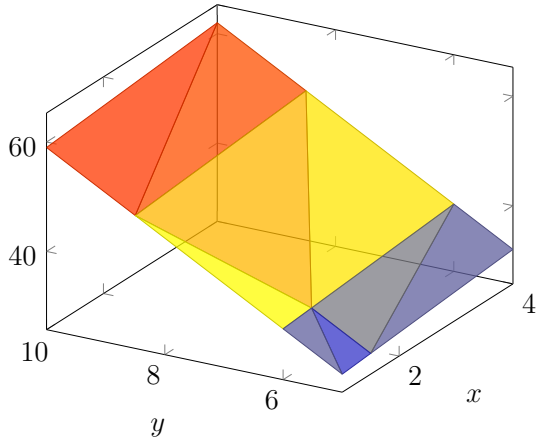
$$S_1 = 6y + 2$$

$$S_2^1 = -6$$

$$S_2^2 = -1$$

$$S_2^3 = 6$$

$$S_3 = 6y + 2.1$$



nodes	elems	area	bords
1 5	0 1 4	0	0 0 1 2 0
1.5 5	0 3 4	0	0 1 2 2 0
4 5	1 4 5	0	0 2 5 1 0
1 6	1 2 5	0	0 0 3 2 1
1.5 6	3 4 6	1	1 5 7 3 0
4 6	4 6 7	1	1 7 9 3 0
1 8.5	4 5 7	1	1 9 8 2 2
4 8.5	6 7 9	1	1 8 6 2 1
1 10	6 8 9	1	1 3 6 2 1
4 10			

x	x^*	$x^* - x$	$\|x^* - x\|$
29,000	29,000	-6,43e-13	
29,500	29,500	-4,48e-13	
32,000	32,000	0,00e+00	
35,000	35,000	-5,12e-13	
35,500	35,500	-6,47e-13	1,60e-12
38,000	38,000	-7,11e-15	
50,000	50,000	4,41e-13	
53,000	53,000	-9,38e-13	
59,000	59,000	3,98e-13	
62,000	62,000	2,34e-13	