МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

НГТУ НЭТИ

Кафедра прикладной математики

Курсовой проект
по дисциплине «Численные методы»

ГРУППА	ПМ-92
ВАРИАНТ	21
СТУДЕНТ	ГЛУШКО ВЛАДИСЛАВ
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	СОЛОВЕЙЧИК ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ

Новосибирск

1 Условие задачи

Формулировка задачи

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции линейные на треугольниках. Краевые условия всех ти-пов. Коэффициент разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генери-ровать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

Постановка задачи

Эллиптическая краевая задача для функции *u* определяется дифференциальным уравнением

$$-div(\lambda gradu) + \gamma u = f$$

заданным в некоторой области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ и краевыми условиями:

$$u|_{S_1} = u_g$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_2} = \theta$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{S_3} + \beta(u|_{S_3} - u_\beta) = 0$$

В декартовой системе координат x,y это уравнение может быть записано в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \gamma u = f$$

Конечноэлементная дискретизация

Так как для решения задачи используются линейные базисные функции, то на каждом конечном элементе Ω_k - треугольнике эти функции будут совпадать с функциями $L_1(x,y), L_2(x,y), L_3(x,y)$, такими, что $L_1(x,y)$ равна единице в вершине (x_1, y_1) и нулю во всех остальных вершинах, $L_2(x,y)$ равна единице в вершине (x_2, y_2) и нулю во всех остальных вершинах, $L_3(x,y)$ равна единице в вершине (x_3, y_3) и нулю во всех остальных вершинах. Любая линейная на Ω_k функция представима в виде линейной комбинации этих базисных линейных функций, коэффициентами будут значения функции в каждой из вершин треугольника Ω_k. Таким образом, на каждом конечном элементе нам понадобятся три узла – вершины треугольника.

$$\psi_1 = L_1(x,y)$$

$$\psi_2 = L_2(x,y)$$

$$\psi_3 = L_3(x,y)$$

Учитывая построение *L-функций*, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 = 1 \\ L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 = x \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 = y \end{cases}$$

Т.е. имеем систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Отсюда находим коэффициенты линейных функций $L_1(x,y), L_2(x,y), L_3(x,y)$

$$L_i = a_0^i + a_1^i x + a_2^i y, i = \overline{1,3}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

2 Текст программы

3 Тестирование

4 Выводы

```cpp
#include "argparse/argparse.hpp"          /// a+b/2
#include "timer/cxxtimer.hpp"             /// a+b/2
#include "LOS/LOS.hpp"                    /// a+b/2
#include "FEM.hpp"

int main(int argc, char* argv[]) {
    using namespace ::Log;
    using ::std::chrono::milliseconds;

    argparse::ArgumentParser program("FEM", "1.0.0");
    program.add_argument("-i", "--input" ).required().help("path to input files" );
    program.add_argument("-o", "--output").required().help("path to output files");

    try {
        program.parse_args(argc, argv);

        cxxtimer::Timer timer(true);
        FEM fem      (program.get<std::string>("-i"));
        fem.writeFile(program.get<std::string>("-o"), 1E-14, 10000);
        LOS<double> l(program.get<std::string>("-o"));
        l.solve(Cond::HOLLESKY, true);
        timer.stop();

        l.printX();
```

```
25
26          std::cout << '\n' << "Milliseconds: "
27                  << timer.count<milliseconds>() << '\n';
28          fem.printAll();
29          fem.printSparse();
30      }
31      catch(const std::runtime_error& err) {
32          Logger::append(getLog("argc != 3 (FEM -i input -o output)"));
33          std::cerr << err.what();
34          std::cerr << program;
35          std::exit(1);
36      }
37      return 0;
38  }
```