Determinação da densidade de um sólido

Matheus Aparecido Souza Silva, Isabela Sant' Ana, Gustavo Peres, João Vitor Costa

Turma: TA **Horário**: 6M23 **Curso**: Engenharia Elétrica

1 Metodologia

A metodologia utilizada visou determinar a densidade de um cilindro contendo um furo circular no centro de sua base, por meio de três modelos experimentais distintos.

1.1 Modelo 1

O primeiro modelo adotado foi:

$$\rho_1 = \frac{m}{V}, \tag{1}$$

onde m representa a massa do sólido, determinada diretamente utilizando uma balança semi-analítica de resolução 1 g e V representa o volume de água deslocada quando o cilindro é inserido em um béquer graduado com resolução de 5 mL.

1.2 Modelo 2

O segundo modelo adotado foi:

$$\rho_2 = \frac{m}{m_a}\rho_a, \tag{2}$$

onde m e m_a representam a massa do sólido e a massa de água contida no béquer, respectivamente, determinadas diretamente utilizando uma balança semianalítica de resolução 1 g. ρ_a representa o valor da densidade da água, que é obtida como a razão entre sua massa e seu volume.

$$\rho(m, V) = \frac{m}{V} \tag{3}$$

O valor de referência da densidade da água é $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Neste modelo, estamos substituindo a medição direta do volume de água deslocado quando o sólido é inserido no béquer pela medição direta da respectiva massa de água deslocada quando diferentes sólidos são inseridos no béquer.

1.3 Modelo 3

O terceiro modelo adotado foi:

$$\rho_2 = \frac{4m}{\pi(d_e^2 - d_i^2)h}, \tag{4}$$

onde m representa a massa do sólido, determinada diretamente utilizando uma balança semi-analítica de resolução 1 g, h representa a altura do cilindro, e d_e and d_i representam seus diâmetros externo e interno, respectivamente. As medições de h, d_e, e d_i foram realizadas utilizando um paquímetro de resolução 0.05 mm.

2 Resultados

2.1 Determinação da densidade da água

A densidade da água foi obtida como a razão entre sua massa e seu volume:

$$\rho(m, V) = \frac{m}{V} \tag{5}$$

Usando a balança e o béquer, obtiveram-se os seguintes resultados de medição:

$$m = (239.00 \pm 0.58)\,\mathrm{g} \text{ e } V = (250.0 \pm 2.9)\,\mathrm{cm^3} \tag{6}$$

A incerteza deste modelo de medição é dada por:

$$u_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2 \sigma_V^2} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Porém como a incerteza da massa é desprezível em relação à incerteza do volume o novo modelo do cálculo da incerteza é dado por:

$$\begin{aligned} u_\rho &= \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2 \sigma_V^2} \qquad (9) \\ &= \sqrt{\left(\frac{-\overline{m}}{\overline{V}^2}\right)^2 \sigma_V^2} \\ &= \frac{\overline{m}}{\overline{V}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{\overline{V}}\right)^2} \\ &= \frac{239}{250}\sqrt{\left(\frac{2.9}{250}\right)^2} \\ &\approx 0.011 \end{aligned}$$

Logo, o valor principal será:

$$\rho_{\text{média}} = \frac{\overline{m}}{\overline{V}} = 0.956\,\text{g/cm}^3. \tag{10}$$

Finalmente:

$$\rho = (0.956 \pm 0.011)\,\text{g/cm}^3. \tag{11}$$

2.2 Modelo 1

Os valores encontrados para a massa m e o volume V referentes ao primeiro modelo experimental foram:

$$m = (300.00 \pm 0.58)\,\text{g} \quad \text{e} \quad V = (30.0 \pm 2.9)\,\text{cm}^3. \tag{12}$$

Para ambas as medições, o teste de flutuação de resultados indicou incertezas do tipo B. Assumindo distribuições de probabilidades retangulares para as duas medições, as incertezas foram calculadas de acordo com as expressões:

$$u_m = \frac{\Delta_{rb}}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad u_V = \frac{\Delta_{rq}}{\sqrt{3}}. \tag{13}$$

Onde Δ_{rb} e Δ_{rq} representam as resoluções da balança e do béquer, respectivamente. A resolução da balança é 1 g e a do béquer é 5 mL, assim:

$$u_m = \frac{1.0}{\sqrt{3}} = 0.58\,\text{g} \quad \text{e} \quad u_V = \frac{5.0}{\sqrt{3}} = 2.9\,\text{cm}^3. \tag{14}$$

Desta maneira, encontramos:

$$\rho_1 = \frac{m}{V} = (10.00 \pm 0.97)\,\text{g/cm}^3. \tag{15}$$

Onde a incerteza associada a ρ_1, u_{ρ_1}, foi determinada utilizando a expressão a seguir considerando que a incerteza da balança é uma ordem de grandeza menor que a do béquer:

$$u_{\rho_1} = \frac{\overline{m}}{\overline{V}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{\overline{V}}\right)^2} = 0.97 \tag{16}$$

2.3 Modelo 2

Para o segundo modelo experimental, encontramos os seguintes pares $m - m_a$ como resultados das medições:

$$\begin{array}{rl}
(50.00 \pm 0.58)\,\text{g} & (6.00 \pm 0.58)\,\text{g} \\
(100.00 \pm 0.58)\,\text{g} & (12.00 \pm 0.58)\,\text{g} \\
(150.00 \pm 0.58)\,\text{g} & (18.00 \pm 0.58)\,\text{g} \\
(200.00 \pm 0.58)\,\text{g} & (24.00 \pm 0.58)\,\text{g} \\
(250.00 \pm 0.58)\,\text{g} & (30.00 \pm 0.58)\,\text{g} \\
(300.00 \pm 0.58)\,\text{g} & (36.00 \pm 0.58)\,\text{g}
\end{array}$$

Os quais nos fornecem os seguintes resultados para a densidade ρ_2:

$$\begin{array}{c}
(7.97 \pm 0.78)\,\text{g/cm}^3 \\
(7.97 \pm 0.67)\,\text{g/cm}^3 \\
(7.97 \pm 0.27)\,\text{g/cm}^3 \\
(7.97 \pm 0.20)\,\text{g/cm}^3 \\
(7.97 \pm 0.16)\,\text{g/cm}^3 \\
(7.97 \pm 0.14)\,\text{g/cm}^3
\end{array}$$

Onde a incerteza associada a cada valor encontrado para ρ_2, u_{ρ_2}, foi determinada utilizando a expressão:

$$u_{\rho_2} = \sqrt{\left(\frac{\rho_a}{m_a}\right)^2 u_m^2 + \left(\frac{-m\rho_a}{m_a^2}\right)^2 u_{m_a}^2 + \left(\frac{m}{m_a}\right)^2 u_{\rho_a}^2}. \tag{17}$$

Vale ressaltar que para todas as medições dos pares $m - ma$, o teste de flutuação de resultados indicou incertezas do tipo B, e assumindo distribuições de probabilidades retangulares para as medições, as incertezas foram calculadas de acordo com a expressão:

$$u_m = u_{ma} = \frac{\Delta_{rb}}{\sqrt{3}}. \tag{18}$$

Onde Δ_{rb} representa a resolução da balança utilizada. Como todos os valores encontrados para ρ_2 são compatíveis entre si, podemos combiná-los usando uma média ponderada para obter:

$$\rho_2 = \frac{m\rho_a}{m_a} = (8.333 \pm 0.086)\,\text{g/cm}^3. \tag{19}$$

2.4 Modelo 3

Para o terceiro modelo experimental, encontramos como resultados das medições:

$$m = (50.00 \pm 0.58)\,\mathrm{g}$$
$$h = (7.800 \pm 0.029)\,\mathrm{mm}$$
$$d_e = (33.950 \pm 0.029)\,\mathrm{mm}$$
$$d_i = (3.400 \pm 0.029)\,\mathrm{mm}$$

Para todas as medições, o teste de flutuação de resultados indicou incertezas do tipo B. Assumindo distribuições de probabilidades retangulares para as medições, as incertezas foram calculadas de acordo com as expressões:

$$u_m = \frac{\Delta_{rb}}{\sqrt{3}}, \quad u_h = u_{de} = u_{di} = \frac{\Delta_{rp}}{\sqrt{3}}. \tag{20}$$

Onde Δ_{rb} and Δ_{rp} representam as resoluções da balança and do paquímetro, respectivamente. Desta maneira, encontramos:

$$\rho_3 = \frac{4m}{\pi(d_e^2 - d_i^2)h} = (7.15 \pm 0.64)\,\mathrm{g/cm}^3 \tag{21}$$

2.5 Análise de compatibilidade

Finalmente, como os valores encontrados para ρ_1, ρ_2 e ρ_3 são compatíveis entre si, podemos combiná-los usando uma média ponderada para obter:

$$\rho = (8.309 \pm 0.085)\,\mathrm{g/cm}^3 \tag{22}$$

3 Conclusões

Com base na análise de dados, pode-se concluir que os três modelos experimentais foram satisfatórios para a determinação da densidade do cilindro, uma vez que os valores encontrados são compatíveis entre si. Ao combinarmos os valores obtidos e consultarmos a tabela de densidades fornecida na apostila, identificamos o material do cilindro como sendo latão recozido, $\rho_{\mathrm{ref}} = 8.4$. Contudo, ao analisarmos individualmente cada resultado, encontramos erros relativos de 19.0