

Задачи №3 Логические операции и их свойства

№1 Выразить одним действием следующие формулы:

1. $x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y} = x \leftrightarrow y$
2. $\bar{x} \vee y = x \rightarrow y$
3. $\overline{x \wedge y} = x \mid y$
4. $\overline{x \vee y} = x \downarrow y$
5. $\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = x \oplus y$
6. $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = x \leftrightarrow y$

№2 Упростить следующие формулы:

1. $(x \oplus y) \vee \overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = 1$
2. $(x \mid y) \wedge (x \wedge y) = \overline{x \wedge y} \wedge (x \wedge y) = 0$
3. $(x \downarrow y) \wedge x = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge x = 0$
4. $(x \mid y) \wedge \overline{(x \downarrow y)} = \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\overline{x \vee y}} = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) =$
 $\bar{x} \wedge x \vee \bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \wedge x \vee \bar{y} \wedge y = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$
5. $x \leftrightarrow y = x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}$
6. $x \oplus y \leftrightarrow \overline{x \oplus y} = 0$
7. $(x \mid y) \vee (x \downarrow y) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
8. $((x \oplus y) \mid y) \leftrightarrow (x \downarrow y) = ((\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}) \mid y) \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} =$
 $\overline{\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}} \vee \bar{y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} =$
 $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \vee \bar{y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} =$
 $x \wedge \bar{x} \vee x \wedge y \vee \bar{y} \wedge \bar{x} \vee \bar{y} \wedge y \vee \bar{y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} =$
 $x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} =$
 $\bar{y} \vee x \wedge y \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} =$
 $(\bar{y} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} =$
 $\bar{y} \vee x \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} = (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x}) \wedge (x \vee y) =$
 $\bar{x} \wedge \bar{y} \vee \bar{y} \wedge y \vee x \wedge \bar{x} \vee x \wedge \bar{y} \vee y \wedge x \vee y \wedge y \vee \bar{x} \wedge x \vee \bar{x} \wedge y =$

$$\bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge \bar{y} \vee x \wedge y \vee y \vee \bar{x} \wedge y =$$

$$\bar{y} \wedge (\bar{x} \vee x) \vee y = \bar{y} \vee y = 1$$

№3 Решите уравнение:

1. $x \oplus y = 1$

2. $(x \mid y) \wedge x = 1$

3. $\bar{x} \wedge \bar{y} \vee y = 0$

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge x = 1$$

$$(y \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x}) = 0$$

$$x \wedge \bar{y} = 1$$

$$y \vee \bar{x} = 0$$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ответ:

Ответ: (1; 0)

Ответ: (1; 0)

(0; 1),

(1; 0)

4. $(x \mid y) \vee (x \oplus y) = 1$

5. $x \leftrightarrow y = 0$

6. $(x \mid y) \leftrightarrow (x \downarrow y) = 1$

$$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = 1$$

$$(x \mid y) \wedge (x \downarrow y) \vee \overline{(x \mid y)} \vee \overline{(x \downarrow y)} = 1$$

$$\bar{x} \vee x \wedge \bar{y} = 1$$

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y) \vee (x \vee y) = 1$$

$$(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = 1$$

$$\bar{x} \wedge \bar{y} \vee x \wedge y = 1$$

$$\bar{x} \vee \bar{y} = 1$$

$$x \leftrightarrow y = 1$$

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ответ:

Ответ:

Ответ: (0; 0) (1; 1)

(0; 0), (0; 1),

(0; 1),

(1; 0)

(1; 0)

№4 Определить какие выражения тождественно истинны, а какие тождественно ложны:

1. $(x \leftrightarrow 0) \wedge x = (x \wedge 0 \vee \bar{x} \wedge \bar{0}) \wedge x = \bar{x} \wedge x = 0$

2. $\bar{y} \wedge (\overline{x \mid y}) = \bar{y} \wedge (x \wedge y) = 0$
3. $\overline{x \wedge \bar{y}} \vee (x \leftrightarrow y) = \overline{x \wedge \bar{y}} \vee x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee x \wedge y = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee y) \vee \bar{y} = \bar{x} \vee y \vee \bar{y} = 1$
4. $\overline{y \downarrow x} \wedge \bar{x} \wedge \bar{y} = (y \vee x) \wedge \bar{x} \wedge \bar{y} = 0$
5. $y \wedge (x \mid y) \wedge (x \downarrow y) = y \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = y \wedge \bar{x} \wedge \bar{y} = 0$
6. $x \wedge (y \oplus x) \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\bar{y} \wedge x \vee y \wedge \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge \bar{y} \wedge (\bar{x} \vee y) = 0$
7. $x \oplus y \leftrightarrow y \oplus x = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \leftrightarrow \bar{y} \wedge x \vee y \wedge \bar{x} = 1$
8. $((y \mid x) \oplus y) \vee y = ((\bar{y} \vee \bar{x}) \oplus y) \vee y = \overline{\bar{y} \vee \bar{x}} \wedge y \vee (\bar{y} \vee \bar{x}) \wedge \bar{y} \vee y = y \wedge x \vee \bar{y} \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \vee y = 1$
9. $((x \oplus y) \downarrow x) \wedge y = ((\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}) \downarrow x) \wedge y = \overline{\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}} \wedge \bar{x} \wedge y = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge x \wedge y = (x \wedge \bar{x} \vee x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y} \vee y \wedge \bar{y}) \wedge \bar{x} \wedge y = (x \wedge y \vee \bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge \bar{x} \wedge y = 0$
10. $\bar{y} \vee ((y \oplus x) \rightarrow y) = \bar{y} \vee (\overline{\bar{y} \wedge x \vee y \wedge \bar{x}} \vee y) = \bar{y} \vee y \vee \overline{\bar{y} \wedge x \vee y \wedge \bar{x}} = 1$
11. $((y \downarrow x) \downarrow y) \wedge \bar{x} \wedge y = (\bar{y} \wedge \bar{x} \downarrow y) \wedge \bar{x} \wedge y = (x \vee y) \wedge \bar{y} \wedge \bar{x} \wedge y = 0$
12. $(x \mid y) \wedge (\overline{x \downarrow y}) \leftrightarrow \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) \leftrightarrow \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = \bar{x} \wedge x \vee \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \vee y \wedge \bar{y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = 1$

№5 Доказать равносильность следующих формул:

1. $(x \wedge y) \oplus x$ и $x \wedge \bar{y}$

Преобразуем левую часть:

$$(x \wedge y) \oplus x = \overline{x \wedge \bar{y}} \wedge x \vee x \wedge y \wedge \bar{x} = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge x = x \wedge \bar{y}$$

$$x \wedge \bar{y} = x \wedge \bar{y} - \text{ч. т. д.}$$

2. $x \leftrightarrow y \rightarrow x$ и $x \wedge x \vee y$

Преобразуем левую часть:

$$x \leftrightarrow y \rightarrow x = x \leftrightarrow \bar{y} \vee x = x \wedge (\bar{y} \vee x) \vee \bar{x} \wedge \overline{(\bar{y} \vee x)} =$$

$$x \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge (y \wedge \bar{x}) = x \vee x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y = x \vee y$$

Преобразуем правую часть:

$$x \wedge x \vee y = x \vee y$$

$$x \vee y = x \vee y - \text{ч. т. д.}$$

3. $(y \downarrow x) \wedge (x \oplus y \vee \overline{x \wedge \overline{y}})$ и $\overline{x} \wedge \overline{y}$

Преобразуем левую часть:

$$(y \downarrow x) \wedge (x \oplus y \vee \overline{x \wedge \overline{y}}) = \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge (\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y} \vee \overline{x \wedge \overline{y}}) = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

$$\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x} \wedge \overline{y} - \text{ч. т. д.}$$

4. $\overline{x \rightarrow y} \vee (x \mid y)$ и $\overline{x} \vee \overline{y}$

Преобразуем левую часть:

$$\overline{x \rightarrow y} \vee (x \mid y) = \overline{x \vee y} \vee \overline{x} \vee \overline{y} = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \vee \overline{y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

$$\overline{x} \vee \overline{y} = \overline{x} \vee \overline{y} - \text{ч. т. д.}$$

5. $((x \mid y) \mid x) \mid y$ и \overline{y}

Преобразуем левую часть:

$$((x \mid y) \mid x) \mid y = \overline{\overline{x \vee y} \vee \overline{x}} \vee \overline{y} = \overline{x \wedge y \vee \overline{x}} \vee \overline{y} = \overline{(\overline{x \vee x}) \wedge (\overline{x \vee y})} \vee \overline{y} = \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{y} = x \wedge \overline{y} \vee \overline{y} = \overline{y}$$

$$\overline{y} = \overline{y} - \text{ч. т. д.}$$

6. $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \rightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow x)$ и $x \wedge y \vee \overline{x} \vee \overline{y}$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} (x \leftrightarrow y) \wedge (x \rightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow x) &= \\ (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y) &= (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = \\ (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x) &= x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \end{aligned}$$

$$x \wedge y \vee \overline{x} \vee \overline{y} = x \wedge y \vee \overline{x} \vee \overline{y} - \text{ч. т. д.}$$

7. $(x \oplus y) \oplus (y \downarrow x)$ и $\overline{x} \vee \overline{y}$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus (y \downarrow x) &= (\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y}) \oplus (\overline{x} \wedge \overline{y}) = \\ \overline{\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y}} \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} \vee (\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y}) \wedge \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} &= \\ (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} \vee (\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y}) \wedge (x \vee y) &= \\ (\overline{x} \wedge \overline{y} \vee x \wedge y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} \vee (0 \vee 0) &= \overline{x} \wedge \overline{y} \end{aligned}$$

$$\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x} \wedge \overline{y} - \text{ч. т. д.}$$

8. $(x \oplus y) \rightarrow (x \mid y) \rightarrow (x \downarrow y) \rightarrow (x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)$ и $x \vee \overline{x}$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \rightarrow (x \mid y) \rightarrow (x \downarrow y) \rightarrow (x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) &= \\ \overline{x \oplus y} \vee (x \mid y) \rightarrow (x \downarrow y) \rightarrow (x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) &= \\ \overline{\overline{x \oplus y} \vee (x \mid y)} \vee (x \downarrow y) \rightarrow (x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\overline{x \oplus y \vee (x \mid y) \vee (x \downarrow y) \vee (x \leftrightarrow y)} \rightarrow (x \rightarrow y)} = \\
& \overline{\overline{x \oplus y \vee (x \mid y) \vee (x \downarrow y) \vee (x \leftrightarrow y) \vee (x \rightarrow y)}} = \\
& (x \oplus y) \wedge \overline{(x \mid y)} \vee (x \downarrow y) \wedge \overline{x \leftrightarrow y} \vee (x \rightarrow y) = \\
& (\overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y}) \wedge x \wedge y \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge \overline{(x \wedge y \vee x \wedge \overline{y})} \vee \overline{x} \vee y = \\
& (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y) \vee \overline{x} \vee y = \\
& \overline{x} \wedge y \vee x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \vee y = \overline{x} \vee x \wedge \overline{y} \vee y = (\overline{x} \vee x) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) \vee y = \overline{x} \vee \overline{y} \vee y = 1
\end{aligned}$$

Преобразуем правую часть:

$$x \vee \overline{x} = 1$$

$1 = 1$ - ч. т. д.