

## Сферическая геометрия №1

### Сечения сферы

#### №1

Что получится в сечении сферы радиуса  $R$  плоскостью, удаленной от центра сферы на  $H$ , если:

1.  $R = 5$  см,  $H = 6$  см.

Ответ: не пересекаются

2.  $R = 2$  см,  $H = 2$  см.

Ответ: точка

3.  $R = 4$  см,  $H = 1$  см.

Ответ: окружность

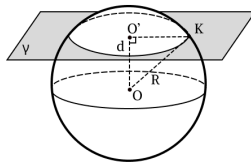
#### №2

Расстояние от центра сферы радиуса  $R$  до секущей плоскости равно  $d$ . Вычислите:

1. Радиус окружности, полученной в сечении плоскостью, если  $R = 5$  см,  $d = 3$  см.

2. Длину окружности, полученной в сечении плоскостью, если  $R = 12$  см,  $d = 8$  см.

**Решение**



1.

$$O'K = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{8 * 2} = 4 \text{ см}$$

2.

$$O'K = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{20 * 12} = 4\sqrt{15} \text{ см}$$

$$L = 2\pi r = 8\pi\sqrt{15} \text{ см}$$

Ответ: 1) 4 см; 2)  $8\pi\sqrt{15}$  см

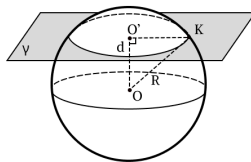
#### №3

Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса  $R$  так, что угол между диаметром и плоскостью равен  $\alpha$ . Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если:

1.  $R = 2$  см,  $\alpha = 30^\circ$ ;

2.  $R = 5$  см,  $\alpha = 45^\circ$

## Решение



$$\angle Q'KO = \alpha, OK = R$$

$$r = R * \cos \alpha$$

$$L = 2\pi r = 2\pi R \cos \alpha$$

1)

$$L = 4\pi \cos 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}\pi}{2}$$

см

2)

$$L = 10\pi \cos 45^\circ = \frac{10\sqrt{2}\pi}{2} \text{ см}$$

Ответ: 1)  $\frac{4\sqrt{3}\pi}{2}$  см; 2)  $\frac{10\sqrt{2}\pi}{2}$  см

### №4

Докажите, что если плоскость проходит через центр сферы, то она содержит ее диаметр.

#### Решение

Если плоскость проходит через центр сферы, то расстояние от центра сферы до плоскости равно нулю. Тогда радиус полученной в сечении окружности равен радиусу сферы, а значит любой диаметр окружности является диаметром сферы.

### №5

Докажите, что прямой на сфере соответствует единственная пара полюсов.

#### Решение

Предположим, что существует две пары полюсов, тогда из центра сферы восстановлены два перпендикуляра к плоскости сечения, что противоречит теореме о единственности перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости.

Таким образом, существует не более 1 пары полюсов, соответствующих прямой на сфере.

Существование следует из той же теоремы о прямой, перпендикулярной к плоскости

### №6

Докажите, что двум диаметрально противоположным точкам на сфере соответствует единственная поляра.

### Решение

Предположим, что это не так, тогда через центр проходит две плоскости, перпендикулярные к диаметру, проходящему через полюсы. Тогда такие плоскости параллельны по теореме о плоскостях перпендикулярных к одной прямой, а так как они имеют общую точку центр сферы, то они совпадают.

### №7

Докажите, что существует единственная прямая, проходящая через две данные различные точки, кроме случая, когда эти точки диаметрально противоположны; тогда таких прямых бесконечно много.

### Решение

1) Точки не диаметрально противоположные. В этом случае можно воспользоваться аксиомой стереометрии и рассмотреть три точки: два полюса и центр сферы. Тогда эти точки не лежат на одной прямой, а значит задают единственную плоскость. Любая плоскость, содержащая центр сферы будет высекать большую окружность(и наоборот), то есть являться прямой на сфере, единственность следует из замечания выше.

2) Если точки диаметрально противоположные, то они лежат на диаметре, то есть центр сферы и полюсы лежат на одной прямой, тогда через эту прямую можно провести бесконечное количество плоскостей, которые будут содержать диаметр, а значит высекать большую окружность, что соответствует определению прямой на сфере.

### №8

Постройте параллельные прямые на сфере или докажите, что это невозможно.

### Решение

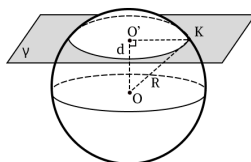
Сферические прямые являются диаметральными сечениями сферы, а значит их плоскости пересекаются по диаметру, то есть прямые имеют две общие диаметрально противоположные точки.

Таким образом, любые две сферические прямые пересекаются, а значит параллельных прямых на сфере не существует.

### №9

Точки  $A$  и  $C$  - полярно сопряженные на окружности радиуса  $R$ . Найдите Евклидово расстояние между этими точками.

### Решение



Для определенности будем считать, что точка  $A$  - полюс, а точка  $C$  лежит на полярке полюса.

Так как полярка является большой окружностью, то ее радиус равен радиусу сферы, а так как  $AB$  - перпендикуляр, то по теореме Пифагора получаем:

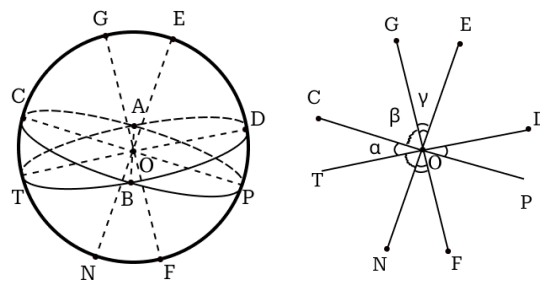
$$AC = \sqrt{CO^2 + AO^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

Ответ:  $R\sqrt{2}$

### №10

Угол между двумя секущими плоскостями, проходящими через центр сферы, равен  $\alpha$ . Чему равен угол между двумя прямыми, каждая из которых соединяет полюсы соответствующей плоскостей?

**Решение**



1) Так как секущие прямые имеют общую точку, то они пересекаются по прямой  $AB$ , что следует из аксиом стереометрии.

2) Восстановим перпендикуляр  $OC \perp AB$  в плоскости  $(BOC)$  и перпендикуляр  $OD \perp AB$  в плоскости  $BOD$ . Проведем прямые, соединяющие полюсы  $GF$  и  $EN$ , так как прямая  $AB$  лежит в плоскостях сечений, то  $CF \perp AB$  и  $EN \perp AB$ .

3)  $OC \perp AB$ ,  $OD \perp AB$ ,  $GF \perp AB$ ,  $EN \perp AB$ , тогда эти прямые  $(OC, OD, GF, EN)$  лежат в плоскости  $(COE)$ , перпендикулярной прямой  $AB$ .

4) Вынесем планиметрический чертеж, на котором  $\angle COT = \alpha$  - линейный угол двугранного угла  $CABT$ , который равен углу между секущими плоскостями. Так как  $GF \perp (TOA)$ , то  $GF \perp TD \subset (TOA)$  и так как  $EN \perp (COP)$ , то  $EN \perp CP \subset (COP)$ . Получаем, что  $\beta = 90^\circ - \alpha = \angle COT$

5) Таким образом:

$$2\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$180^\circ - 2\alpha + \alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha = \gamma$$

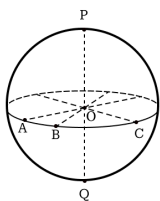
Ответ:  $\alpha$

### №11

Когда полярки(плоскости) трех точек пересекаются по прямой?

**Решение**

1) Рассмотрим случай, когда три точки лежат на одной прямой.



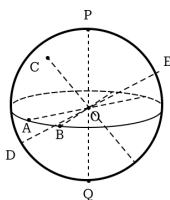
Тогда  $PQ$  - является перпендикулярным к прямой, содержащей точки диаметром, а так как плоскость полярных точек есть множество перпендикулярных прямых, проведенных через центр сферы к диаметру, проведенному через точку, то она содержит  $PQ$ , а так как  $PQ$  перпендикулярна плоскости прямой, содержащей точки, то она перпендикулярна всякой прямой, проведенной в этой плоскости, в частности она перпендикулярна всем диаметрам, проведенным через данные точки, то есть лежит в плоскости полярных каждой точки, а значит является пересечением поляр.

2) Рассмотрим случай, когда три точки не лежат на одной прямой.

Допустим, что  $PQ$  - соединяет полюсы полярных, проведенной через точки  $AB$ , а  $ED$  - соединяет полюсы полярных, проведенной через точки  $BC$ .

Допустим, что эти отрезки совпадают, ведь иначе пересечение поляр трех точек есть центр сферы. Тогда получается, что  $PQ$  перпендикулярен плоскости  $AB$  и  $PQ$  перпендикулярен плоскости  $BC$ , а значит эти плоскости параллельны, но а так как они имеют общую точку  $B$ , то они совпадают, но тогда получается, что прямая  $AB$  совпадает с прямой  $BC$ , то есть  $A, B, C$  лежат на одной прямой - противоречие.

Ответ: когда три точки лежат на одной прямой.



## №12

При каком условии две прямые на сфере содержат полюсы друг друга?

**Решение**

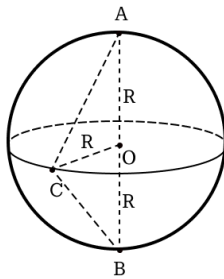
Так как плоскости содержат полюсы друг друга, то они содержат перпендикуляры друг друга, что по признаку перпендикулярности плоскостей означает перпендикулярность плоскостей.

Ответ: при условии перпендикулярности плоскостей, задающих прямые на сфере.

## №13

Чему равна площадь треугольника, образованного двумя полюсами и полярно сопряженной с ними точкой, если радиус сферы  $R$ .

**Решение**



1)  $AB \perp CO$  по определению полюсов.

2)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CO * AB = \frac{1}{2} R * 2R = R^2$$

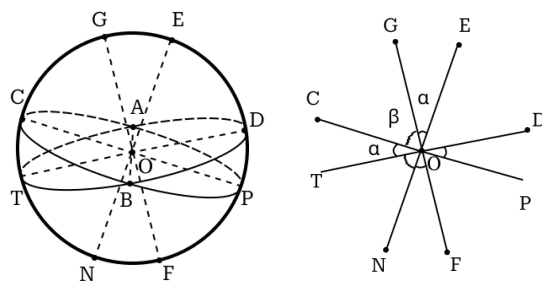
Ответ:  $R^2$

#### №14

Угол между двумя секущими плоскостями равен  $\alpha$ . Чему равен угол между диаметром, соединяющим одну пару полюсов одной плоскости, и другой плоскостью?

**Решение**

Исходя из задач 7 и 9 получаем следующий планиметрический чертёж:



1) Необходимо найти угол  $\beta$ , так как если из  $G$  опустить перпендикуляр к  $CP$ , то он будет перпендикулярен плоскости сечения, так как будет перпендикулярен двум пересекающимся прямым  $AB$  и  $CP$ .

2)  $\beta = 90^\circ - \alpha$

Ответ:  $90^\circ - \alpha$