Сферическая геометрия №1

Сечения сферы

№1

Что получиться в сечении сферы радиуса R плоскостью, удаленной от центра сферы на H, если:

1. $R = 5$ см, $H = 6$ см.
   Ответ: не пересекаются

2. $R = 2$ см, $H = 2$ см.
   Ответ: точка

3. $R = 4$ см, $H = 1$ см.
   Ответ: окружность

4. $R = 4$ см, $H = \sqrt{15}$ см.
   Оценка:
   $$4 \ ? \ \sqrt{14}$$
   $$16 \ ? \ 14$$
   $$16 > 14 \to 4 > \sqrt{14}$$
   Ответ: окружность

5. $R = 5,65$ см,$H = \sqrt{32}$ см.
   Оценка:
   $$5,65 \ ? \ \sqrt{32}$$
   $$31,9225 \ ? \ 32$$
   $$31,9225 < 32 \to 5,65 < \sqrt{32}$$
   Ответ: не пересекаются

6. $R = 1$ см, $H = (\sqrt{2}+5)^{\sqrt{4}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)}$ см.
   Оценка:
   $$(\sqrt{2}+5)^{\sqrt{4}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)} = (\sqrt{2}+5)^{\sqrt{4}\left(\frac{2-2}{\sqrt{2}}\right)} =$$
   $$(\sqrt{2}+5)^0 = 1 \to 1 = (\sqrt{2}+5)^{\sqrt{4}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)}$$
   Ответ: точка

7. $R = 2^{100}$ см, $H = 100^2$ см.
   Оценка:
   $$2^{100} \ ? \ 100^2$$
   $$2^{50} \ ? \ 100$$
   $$2^{25} \ ? \ 10$$
   $$1024 * 2^{15} \ ? \ 10$$
   $$1024 * 2^{15} > 10 \to 2^{100} > 100^2$$
   Ответ: окружность

8. $R = 200^{300}$ см, $H = 300^{200}$ см.
   Оценка:
   $$200^{300} \ ? \ 300^{200}$$
   $$200^3 \ ? \ 300^2$$
   $$8000000 \ ? \ 90000$$
   $$8000000 > 90000 \to 200^{300} > 300^{200}$$
   Ответ: окружность

9. $R = \sin(0,6)$ см, $H = \sin(1,8)$ см.
   Оценка:
   $$\frac{\pi}{6} < 0,6 < \frac{\pi}{4}$$
   $$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) < \sin(0,6) < \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
   $$\frac{1}{2} < \sin(0,6) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < 1,8 < \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > \sin(1,8) > \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$1 > \sin(1,8) > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \to \sin(1,8) > \sin(0,6)$$

Ответ: не пересекаются

10. $R = \sqrt{2 - \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ см, $H = 1,2$ см.
    Оценка:

$$\sqrt{2 - \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}} \ ?\ 1,2$$

$$2 - \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} \ ?\ 1,44$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} \ ?\ -0,56$$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} \ ?\ 2,24$$

$$3+\sqrt{5} \ ?\ 5,0176$$

$$\sqrt{5} \ ?\ 2,0176$$

$$5 \ ?\ 4.07070976$$

$$5 > 4.07070976 \to \sqrt{2 - \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}} > 1,2$$

Ответ: окружность

11. $R = \pi^2$ см, $H = e^3$ см.
    Оценка:

$$3,14 < \pi < 3,15$$

$$9,8596 < \pi^2 < 9,9225$$

$$2,71 < e < 2,72$$

$$19,902511 < e^3 < 20,123648$$

$$19,902511 > 9,8596 \to \pi^2 < e^3$$

Ответ: не пересекаются

12. $R = 2\sqrt{18} + 2\sqrt{18}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ см,
    $H = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{8}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{8}$ см.
    Оценка:

$$2\sqrt{18} + 2\sqrt{18}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - (2\sqrt{8} + 2\sqrt{8}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{8}) =$$

$$6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3} - 6\sqrt{2} =$$

$$2\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2} =$$

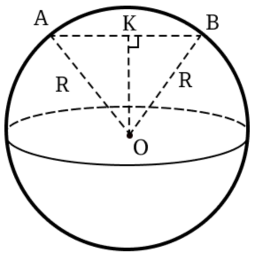
$$4\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$4\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0 \to 2\sqrt{18} + 2\sqrt{18}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{2} > 2\sqrt{8} + 2\sqrt{8}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{8}$$

№2

Точки A и B лежат на сфере радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB, если $AB = m$.

Решение



1) Проведем OA и OB, $\triangle OAB$ - равнобедренный, так как $OA = OB = R$.

2) Проведем $OK \perp AB$, тогда $AK = KB = \frac{m}{2}$, так как OK является высотой и медианой.

3) По теореме Пифагора в $\triangle AKO$:

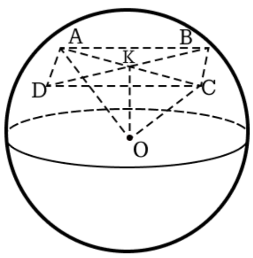
$$OK = \sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}$$

Ответ: $\sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}$

№3

Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.

Решение



1) Заметим, что $\triangle ABC$ - прямоугольный:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

2) Достроим $\triangle ABC$ до прямоугольника $ABCD$, пусть K - точка пересечения диагоналей, тогда $DK = BK = AK = CK$

3) Проведем OK, OA, OB. $OA = OB = R$, где R радиус сферы, тогда $\triangle AOC$ - равнобедренный и OK - высота.

4) Проведем OD, OB. $OD = OB = R$, тогда $\triangle DOB$ - равнобедренный и OK - высота.

5)

$$\left.\begin{array}{r} DB \cap AC = K \\ OK \perp DB \\ OK \perp AC \end{array}\right| \rightarrow OK \perp (ABC) \text{ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости}$$

6)

$$\rho(O; (ABC)) = OK$$

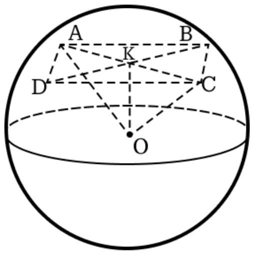
$$OK = \sqrt{R^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{18 * 8} = 12 \text{ см}$$

Ответ: 12 см

№4

Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.

Решение



1) Пусть $ABCD$ - прямоугольник с диагональю 16 см, а $R = 10$ см - радиус сферы, точка пересечения диагоналей K, $DK = BQ = AK = CK$

2) Проведем OK, $OA = OC = R$, тогда $\triangle AOC$ - равнобедренный, а OK - высота

3) Проведем $OB = OD = R$, тогда $\triangle BOD$ - равнобедренный, а OK - высота

4)

$$\left.\begin{array}{r} DB \cap AC = K \\ OK \perp DB \\ OK \perp AC \end{array}\right| \rightarrow OK \perp (ABC) \text{ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости}$$

5)

$$\rho(O; (ABC)) = OK$$

$$OK = \sqrt{R^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{2 * 18} = 6 \text{ см}$$

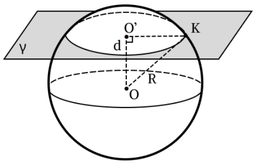
Ответ 6 см.

№5

Расстояние от центра сферы радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислите:

1. Радиус окружности, полученной в сечении плоскостью, если $R = 5$ см, $d = 3$ см.
2. Длину окружности, полученной в сечении плоскостью, если $R = 12$ см, $d = 8$ см.

Решение



1.

$$O'K = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{8 * 2} = 4 \text{ см}$$

2.

$$O'K = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{20 * 12} = 4\sqrt{15} \text{ см}$$

$$L = 2\pi r = 8\pi\sqrt{15} \text{ см}$$

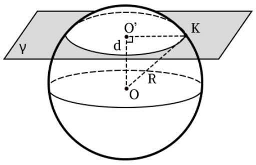
Ответ: 1) 4 см; 2) $8\pi\sqrt{15}$ см

№6

Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если:

1. $R = 2$ см, $\alpha = 30°$;
2. $R = 5$ см, $\alpha = 45°$

Решение



$$\angle Q'KO = \alpha, OK = R$$

$$r = R * \cos\alpha$$

$$L = 2\pi r = 2\pi R \cos\alpha$$

1)

$$L = 4\pi \cos 30° = \frac{4\sqrt{3}\pi}{2}$$

см

2)

$$L = 10\pi \cos 45° = \frac{10\sqrt{2}\pi}{2} \text{ см}$$

Ответ: 1) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{2}$ см; 2) $\frac{10\sqrt{2}\pi}{2}$ см