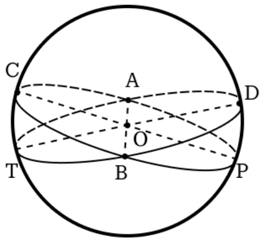
Сферическая геометрия №3

Расстояние между точками, углы между прямыми, сферические окружности.

№ 1

Докажите, что сумма смежных углов между сферическими прямыми равна 180°

Решение



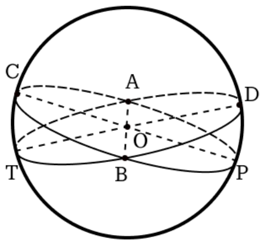
1) $\angle TOC = \angle TBC$, $\angle COD = \angle CBD$ как линейные углы.
2) $\angle TOC$ и $\angle COD$ - смежные в плоскости (TOC), тогда $\angle TOC + \angle COD = 180^\circ$
3) Таким образом,

$$\angle TOC + \angle COD = 180^\circ = \angle TBCC + \angle CBD \text{ - что и требовалось доказать.}$$

№ 2

Докажите, что вертикальные углы между сферическими прямыми равны

Решение



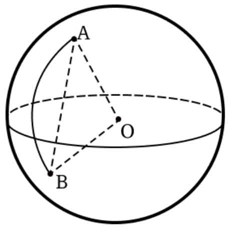
1) $\angle TOC = \angle TBC$, $\angle POD = \angle PBD$ как линейные углы.
2) $\angle TOC = \angle POD$ как вертикальные углы в плоскости (TOP).
3) Таким образом:

$$\angle TOC = \angle POD = \angle TBC = \angle PBD \text{ - что и требовалось доказать.}$$

№ 3

Радиус сферы равен R, евклидово расстояние между двумя точками сферы равно h, чему равно сферическое расстояние между этими точками.

Решение



1) $AO = BO = R$, $AB = h$
2) По теореме косинусов:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB * OA * \cos BOA$$

$$\cos BOA = -\frac{AB^2 - OB^2 - OA^2}{2OB * OA} = -\frac{h^2 - 2R^2}{2R^2} = 1 - \frac{h^2}{2r^2}$$

$$\angle BOA = \arccos\left(1 - \frac{h^2}{2r^2}\right)$$

3)

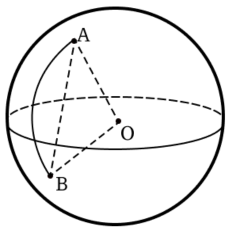
$$\cup AB = R\angle BOA = R \arccos\left(1 - \frac{h^2}{2r^2}\right)$$

Ответ: $R\arccos\left(1 - \frac{h^2}{2r^2}\right)$

№ 4

На большой окружности отметили две точки и провели к ним радиусы. Чему равно сферическое и евклидово расстояние между этими точками, если радиус сферы равен 13 см, а угол между радиусами равен $\frac{\pi}{6}$.

Решение



1)

$$\cup AB = 13 * \frac{\pi}{6} \text{ см}$$

2) По теореме косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO * BO * \cos BOA = 2 * 169 - 2 * 169 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 169(2 - \sqrt{3}) \text{ см}^2$$

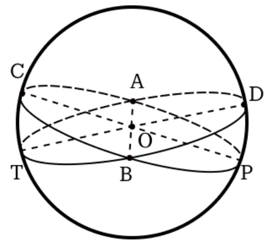
$$AB = 13\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ см}$$

Ответ: $\cup AB = 13\frac{\pi}{6}$ см, $AB = 13\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ см.

№ 5

Угол между двумя сферическими прямыми равен $\frac{\pi}{4}$, радиус сферы равен 7 см. Из центра сферы в плоскостях сечений восстановили перпендикуляры так, что получилось 4 точки пересечения со сферой. Найдите сферическое расстояние между всеми этими точками.

Решение



1) $\angle TOC = \frac{\pi}{4}$, $TO = CO = PO = DO = 7$ см.

2)
$$\cup CT = \cup PD = 7\frac{\pi}{4} \text{ см}$$

3)
$$\cup CD = \cup TP = 7\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 7 * \frac{3\pi}{4} \text{ см}$$

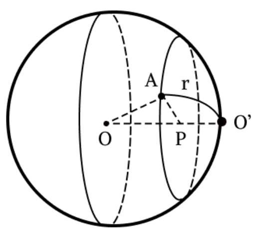
4)
$$\cup TD = \cup CP = 6\pi \text{ см}$$

Ответ: $\cup CT = \cup PD = 7\frac{\pi}{4}$ см; $\cup CD = \cup TP = 7 * \frac{3\pi}{4}$ см; $\cup TD = \cup CP = 6\pi$ см

№ 6

На сфере радиуса R построена сферическая окружность радиусом r. Чему равен радиус малой окружности, совпадающей с данной?

Решение



1) $OO' = OA = R$, $AP \perp OO'$

2)
$$r = R * \angle O'OA \to \angle O'OA = \frac{r}{R}$$

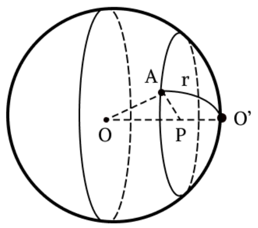
3)
$$AP = OA * \sin POA = R * \sin\frac{r}{R}$$

Ответ: $R \sin\frac{r}{R}$

№ 7

На сфере радиуса R построена сферическая окружность радиусом r. Чему равно евклидово расстояние между центром сферической окружности и центром малой окружности, совпадающей с данной?

Решение



1) Из задачи 6 имеем: $\angle POA = \frac{r}{R}$, тогда:

$$OP = OA * \cos POA = R\cos\frac{r}{R}$$

Следовательно

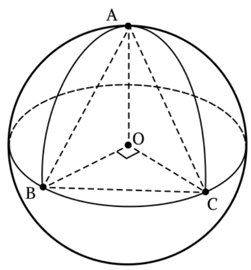
$$PO' = OO' - OP = R - R\cos\frac{r}{R} = R\left(1 - \cos\frac{r}{R}\right)$$

Ответ: $R\left(1 - \cos\frac{r}{R}\right)$

№ 8

На сфере радиуса R проведены три попарно перпендикулярных сферических прямых. Найдите периметр и площадь треугольника, образованного точками пересечения этих прямых.

Решение



1) По теореме Пифагора:

$$AB = BC = AC = R\sqrt{2}$$

2)

$$P_{\triangle ABC} = 3R\sqrt{2}$$

3)

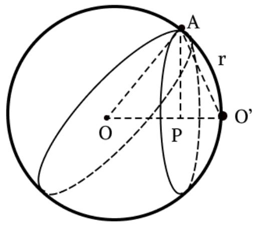
$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $P_{\triangle ABC} = 3R\sqrt{2}; S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

№ 9

Большая и малые окружности имеют одну общую точку. Чему равен угол между образующими их плоскостями, если радиус сферической окружности, совпадающей с малой окружностью, равен r, а радиус сферы равен R.

Решение



1) OP перпендикулярно плоскости малой окружности, тогда касательная α, проведенная к сфере в плоскости большой окружности через точку A перпендикулярна проведенному к ней радиусу OA, что по обратной теореме о трех перпендикулярах означает $\alpha \perp PA$, то есть $\alpha \perp (OPA)$ по признаку. Следовательно, $OA \perp \alpha$ и $PA \perp \alpha$, значит $\angle OAP$ - равен искомому углу.

2)

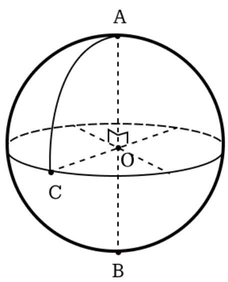
$$r = \angle AOP * R \to \angle AOP = \frac{r}{R} \to \angle OAP = \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$

№ 10

Чему равно сферическое расстояние между полярно сопряженными точками, если радиус сферы равен R?

Решение



1) $\angle COA = \frac{\pi}{2}$

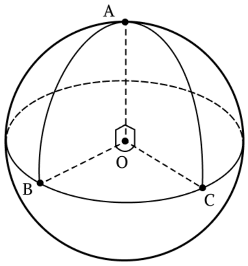
2) $\cup AC = R\frac{\pi}{2}$

Ответ: $R\frac{\pi}{2}$

№ 11

Проведены две сферические прямые, пересекающиеся под углом α, перпендикулярно к ним проведена третья сферическая прямая. Чему равен радиус сферы, если сферическое расстояние между точками пересечения двух прямых третьей равно h?

Решение



1) $BC = h$, $\angle BOC = \alpha$
2)

$$h = \alpha * R \rightarrow R = \frac{h}{\alpha}$$

Ответ: $\frac{h}{\alpha}$