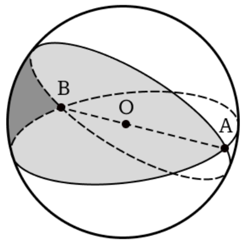
Сферическая геометрия №4

Площадь двуугольника, площадь треугольника.

№ 1

Две сферические прямые пересекаются под углом $\frac{\pi}{6}$. Найдите чему равны площади каждого двуугольника, образованного этими прямыми, и посчитайте их сумму, если радиус сферы $R = 12$ см.

Решение



1) Пусть $\angle\overline{AB}$ - больший двуугольник, $\overline{A}, \overline{B}$ - его углы.

$$\angle A = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle\overline{A} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

2)

$$S_{\angle AB} = 2\angle AR^2 = 2 * \frac{\pi}{6} * 144 = 48\pi \text{ см}^2$$

$$S_{\angle\overline{AB}} = 2\angle\overline{A}R^2 = 2 * \frac{5\pi}{6} * 144 = 240\pi \text{ см}^2$$

3)

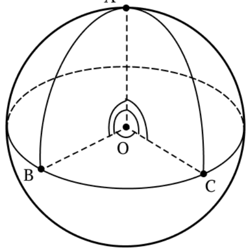
$$\sum S = 4\pi R^2 = 576 \text{ см}^2$$

Ответ: $S_{\angle AB} = 48\pi$ см^2; $S_{\angle\overline{AB}} = 240\pi$ см^2; $\sum S = 4\pi R^2 = 576$ см^2

№ 2

Две сферические прямые пересекаются под углом α, третья прямая пересекает две проведенных прямых под одинаковыми углами. Найдите эти углы, если радиус сферы равен R, а площадь сферического треугольника, образованного этими прямыми S.

Решение



1)

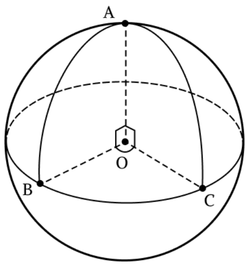
$$S_{\triangle ABC} = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi) = R^2(\alpha + 2\angle B - \pi) \to \angle B = \frac{S}{2R^2} - \frac{\alpha - \pi}{2}$$

Ответ: $\frac{S}{2R^2} - \frac{\alpha-\pi}{2}$

№ 3

Чему равна площадь сферического треугольника, образованного полюсом и двумя сопряженными с ним точками, если сферическое расстояние между этими точками равно h, а радиус сферы равен R.

Решение



1)

$$\angle B = \angle C = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle A = \frac{h}{R}$$

2)

$$S_{\triangle ABC} = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi) = R^2\frac{h}{R}$$

Ответ: $R^2\frac{h}{R}$

№ 4

Дан сферический треугольник с площадью S. Найдите площадь треугольника с такими же углами на сфере с радиусом в два раза больше.

Решение

$$S_1 = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

$$S_2 = (2R)^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi) = 4R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi) = 4S_1$$

Ответ: $4S$

№ 5

Два диаметра, соединяющих пары полюсов пересекаются под углом $\frac{\pi}{6}$, чему равны площади двуугольников, образованных их полярами, если радиус сферы равен 19?

Решение

1) Как было доказано на занятии 2 в номере 7, угол между диаметрами, соединяющими полюсы, равен углу между полярами этих полюсов, тогда на сфере получится два вида двуугольников, площадь которых равны:

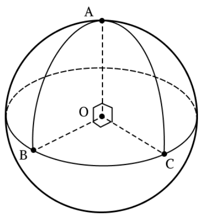
$$S_1 = 2\frac{\pi}{6} * 19 = \frac{19\pi}{3}$$
$$S_2 = 2\frac{5\pi}{6} * 19 = \frac{95\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{19\pi}{3}$; $\frac{95\pi}{3}$

№ 6

Может ли на сфере быть построен сферический треугольник, все углы которого 90°. Если такой треугольник существует, то найдите его стороны и площадь.

Решение



Да, такой треугольник образуют три попарно перпендикулярные сферические прямые.

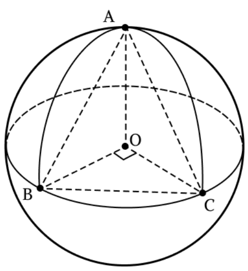
$$\cup AB = \cup AC = \cup BC = \frac{\pi}{2}R$$
$$S = R^2\left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) = R^2 * \frac{\pi}{2}$$

Ответ: стороны равны:$\frac{\pi}{2}R$; площадь: $R^2 * \frac{\pi}{2}$

№ 7

Пусть стороны сферического треугольника равны a, b, c, противолежащие им углы A, B, C соответственно, радиус сферы равен R. Найдите отношение площадей сферического и планиметрического треугольников, имеющих общие вершины.

Решение



1) Найдем углы:

$$\angle BOA = \frac{\cup AB}{R} = \frac{c}{R}$$

$$\angle COA = \frac{\cup AC}{R} = \frac{b}{R}$$

$$\angle BOC = \frac{\cup BC}{R} = \frac{a}{R}$$

2) Найдем стороны планиметрического треугольника:

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB * OA \cos BOA = 2R^2 - 2R^2 \frac{c}{R}$$

$$AB = R\sqrt{2 - \frac{2c}{r}}$$

$$BC = R\sqrt{2 - \frac{2a}{r}}$$

$$AC = R\sqrt{2 - \frac{2b}{r}}$$

Площадь сферического треугольника:

$$S_1 = R^2(A + B + C - \pi)$$

Площадь планиметрического треугольника:

$$p = \frac{R\sqrt{2 - \frac{2a}{r}} + R\sqrt{2 - \frac{2b}{r}} + R\sqrt{2 - \frac{2c}{r}}}{2} = R\frac{\sqrt{2 - \frac{2a}{r}} + \sqrt{2 - \frac{2b}{r}} + \sqrt{2 - \frac{2c}{r}}}{2} =$$

$$S_2 = \sqrt{p\left(p - R\sqrt{2 - \frac{2c}{r}}\right)\left(p - R\sqrt{2 - \frac{2a}{r}}\right)\left(p - R\sqrt{2 - \frac{2b}{r}}\right)} =$$

$$\frac{R^2}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{2 - \frac{2a}{r}} + \sqrt{2 - \frac{2b}{r}} - \sqrt{2 - \frac{2c}{r}}\right)\left(-\sqrt{2 - \frac{2a}{r}} + \sqrt{2 - \frac{2b}{r}} + \sqrt{2 - \frac{2c}{r}}\right)}*$$

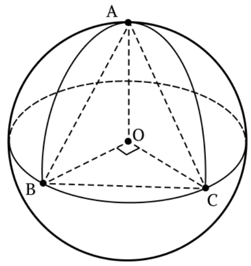
$$\sqrt{\left(\sqrt{2 - \frac{2a}{r}} - \sqrt{2 - \frac{2b}{r}} + \sqrt{2 - \frac{2c}{r}}\right)\cdots}$$

Ну на формуле Герона можно и остановиться)

№ 9

На сфере радиуса R построен сферический треугольник с сторонами a, b, c. Найдите евклидово расстояние между каждой парой его вершин и радиус описанной окружности около планиметрического треугольника, построенного на вершинах сферического.

Решение



1) Найдем стороны планиметрического треугольника:

$$AB = \frac{a}{R}$$

$$BC = \frac{b}{R}$$

$$AC = \frac{c}{R}$$

2)

$$R = \frac{AB * BC * AC}{4S}$$

Дальше страшная формула Герона,

№ 10

На сфере даны два равнобедренных треугольника, имеющих один равный угол. Отношение углов при основании первого треугольника ко второму равно δ. Найдите отношение площадей этих треугольников

Решение

1)

$$S_2 = R^2(A + 2B - \pi)$$

$$S_1 = R^2(A + 2B\delta - \pi)$$

2)

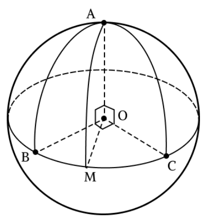
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2(A + 2B - \pi)}{R^2(A + 2B\delta - \pi)} = \frac{(A + 2B - \pi)}{(A + 2B\delta - \pi)}$$

Ответ: $\frac{(A+2B-\pi)}{(A+2B\delta-\pi)}$

№ 11

На сфере дан треугольник, все углы которого равны $90°$. На одну из сторон опустили медиану. Найдите чему равна площадь получившихся треугольников, если площадь изначального треугольника равна S.

Решение



1) $AO \perp BOC$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, тогда $(MOA) \perp (BOC)$ по признаку перпендикулярности плоскостей. Получаем, что в сферическом треугольнике $\triangle ABM$ $\angle B = \angle M = 90°$

2) Осталось найти $\angle A$. Он равен линейному углу $\angle BOM$ Так как $\cup BM = \cup MC$, то $\angle BOM \angle MOC = 45° = \frac{\pi}{4}$

3) Таким образом, искомая площадь равна:

$$S = R^2(\angle BAM + \angle AMB + \angle MBA - \pi) = R^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi\right) = \frac{R^2\pi}{4}$$

Площадь начального треугольника равна:

$$S_0 = \frac{R^2\pi}{2} \to S = \frac{S_0}{2}$$

Ответ:$\frac{S_0}{2}$