Сферическая геометрия №5

Теорема косинусов, теорема синусов.

№ 1

Выведите формулу Пифагора на сфере

Решение

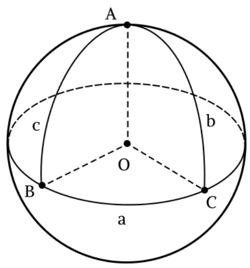
Применим теорему косинусов, получим:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}$$

№ 2

На сфере радиуса R дан треугольник с сторонами a, b, c найдите его площадь.

Решение



1) По сферической теореме косинусов:

$$\begin{cases} \cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A \\ \cos\frac{b}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{c}{R}\cos B \\ \cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos A = \frac{\cos\frac{a}{R} - \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}} \\ \cos B = \frac{\cos\frac{b}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{a}{R}\sin\frac{c}{R}} \\ \cos C = \frac{\cos\frac{c}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}}{\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}} \end{cases}$$

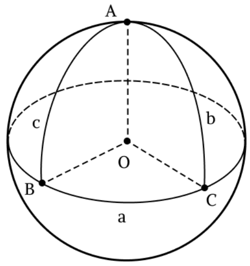
2) Следовательно площадь равна:

$$S = R^2\left(\arccos\frac{\cos\frac{a}{R} - \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}} - + \arccos\frac{\cos\frac{b}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{a}{R}\sin\frac{c}{R}} + \arccos\frac{\cos\frac{c}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}}{\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}}\pi\right)$$

№ 3

На сфере радиуса R дан треугольник со сторонами a, b, c. Угол между a и b равен C. Найдите чему равна сторона c, если радиус сферы R.

Решение



1) По сферической теореме косинусов:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C$$

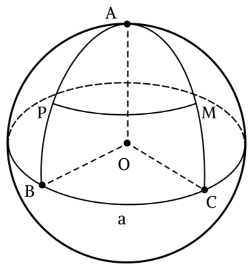
$$\frac{c}{R} = \arccos\left(\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C\right)$$

$$c = R\arccos\left(\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C\right)$$

№ 4

Через боковые стороны равнобедренного сферического треугольника провели среднюю линию. Найдите длину средней линии, если известны стороны исходного треугольника и угол противолежащий основанию.

Решение



1) По теореме косинусов в $\triangle PAM$

$$\cos\frac{PM}{R} = \cos\frac{AP}{R}\cos\frac{AM}{R} + \sin\frac{AP}{R}\sin\frac{AM}{R}\cos A$$

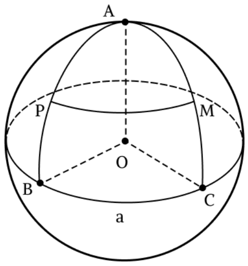
$$PM = R\arccos\left(\cos\frac{AP}{R}\cos\frac{AM}{R} + \sin\frac{AP}{R}\sin\frac{AM}{R}\cos A\right) =$$

$$R\arccos\left(\cos\frac{AB}{2R}\cos\frac{AC}{2R} + \sin\frac{AB}{2R}\sin\frac{AC}{2R}\cos A\right) =$$

№ 5

Через боковые стороны равнобедренного сферического треугольника провели среднюю линию. Найдите углы получившегося треугольника, если известны стороны исходного треугольника и угол противолежащий основанию.

Решение



1) Рассмотрим $\triangle APM$:

$$\begin{cases} \cos\frac{AP}{R} = \cos\frac{PM}{R}\cos\frac{AM}{R} + \sin\frac{PM}{R}\sin\frac{AM}{R}\cos M \\ \cos\frac{AM}{R} = \cos\frac{AP}{R}\cos\frac{PM}{R} + \sin\frac{AP}{R}\sin\frac{PM}{R}\cos P \\ \cos\frac{PM}{R} = \cos\frac{AP}{R}\cos\frac{AM}{R} + \sin\frac{AP}{R}\sin\frac{AM}{R}\cos A \end{cases} \rightarrow$$

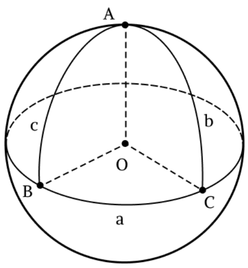
$$\begin{cases} M = \arccos\frac{\cos\frac{AP}{R} - \cos\frac{PM}{R}\cos\frac{AM}{R}}{\sin\frac{PM}{R}\sin\frac{AM}{R}} = \arccos\frac{\cos\frac{AB}{2R} - \cos\frac{PM}{R}\cos\frac{AC}{2R}}{\sin\frac{PM}{R}\sin\frac{AC}{2R}} \\ P = \arccos\frac{\cos\frac{AM}{R} - \cos\frac{AP}{R}\cos\frac{PM}{R}}{\sin\frac{AP}{R}\sin\frac{PM}{R}} = \arccos\frac{\cos\frac{AC}{2R} - \cos\frac{AB}{2R}\cos\frac{PM}{R}}{\sin\frac{AB}{2R}\sin\frac{PM}{R}} \\ A = \arccos\frac{\cos\frac{PM}{R} - \cos\frac{AP}{R}\cos\frac{AM}{R}}{\sin\frac{AP}{R}\sin\frac{AM}{R}} = \arccos\frac{\cos\frac{PM}{R} - \cos\frac{AB}{2R}\cos\frac{AC}{2R}}{\sin\frac{AB}{2R}\sin\frac{AC}{2R}} \end{cases}$$

Средняя линия была найдена в предыдущей задаче.

№ 6

В сферическом треугольнике известны три стороны и один угол. Найдите остальные углы.

Решение



1) По теореме синусов:

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}$$

Пусть известен угол A, тогда:

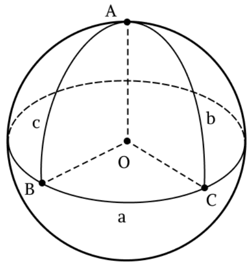
$$B = \frac{\sin\frac{b}{R}\sin A}{\sin\frac{a}{R}}$$

$$C = \frac{\sin\frac{c}{R}\sin A}{\sin\frac{a}{R}}$$

№ 7

В сферическом треугольнике ABC угол B прямой. Найдите косинусы, синусы, тангенсы, котангенсы двух других углов, если известны стороны треугольника и радиус сферы.

Решение



1) По теореме синусов:

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}$$

$$\sin A = \frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\frac{b}{R}}$$

$$\sin C = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\frac{b}{R}}$$

2) По теореме косинусов:

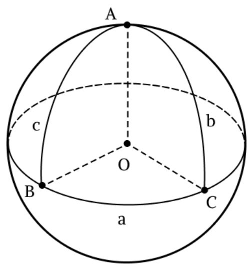
$$\begin{cases} \cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A \\ \cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos A = \frac{\cos\frac{a}{R} - \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}} \\ \cos C = \frac{\cos\frac{c}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}}{\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}} \end{cases}$$

№ 8

В сферическом треугольнике ABC угол B прямой. Найдите сторону AC, если известны все углы, сторона AB и радиус сферы.

Решение



1) По теореме синусов:

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}$$

$$\sin\frac{b}{R} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}$$

$$b = R\arcsin\left(\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}\right)$$