Algorithmen I - Tutorium 3

Sebastian Schmidt – *isibboi@gmail.com*

Arbeitsgruppe Kryptographie und Sicherheit

Folien

Online unter: https://github.com/lSibbol/AlgoI-Tut

function *merge*$(A : \text{Array } [1..n_1] \text{ of } \mathbb{N}_{\geq 0}, B : \text{Array } [1..n_2] \text{ of } \mathbb{N}_{\geq 0})$
assert $A[i] \leq A[j] \quad \forall i \leq j \text{ mit } i, j \in \{1, ..., n_1\}$
assert $B[i] \leq B[j] \quad \forall i \leq j \text{ mit } i, j \in \{1, ..., n_2\}$
$A[n_1 + 1] := \infty, B[n_2 + 1] := \infty$
$n := n_1 + n_2$
$j_A := 1, j_B := 1;$
for $i := 1$ **to** n **do**
  $C[i] = \min(A[j_A], B[j_B])$
  if $A[j_A] < B[j_B]$ **then**
    $j_A = j_A + 1$
  else
    $j_B = j_B + 1$
  invariant $C[1..i]$ enthält genau $A[1..j_A - 1], B[1..j_B - 1]$
  invariant $B[k] \leq A[j_A] \quad \forall k \in \{1..j_B - 1\}, A[k] \leq B[j_B] \quad \forall k \in \{1..j_A - 1\}$
  invariant $C[1..i]$ ist sortiert
assert $j_A = n_1 + 1, j_B = n_2 + 1$
assert $C[i] \leq C[j] \quad \forall i \leq j, i, j \in \{1, ..., n\}$
assert $C[1..n]$ enthält genau $A[1..n_1], B[1..n_2]$
return C

Übungsblatt 1

- Aufgabe 1.a.3) Formal korrekt
  $n^2 \log n \in O\left(n^3\right)$
- Aufgabe 1.c) Hatte niemand richtig
  $\forall f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O\left(2^{g(n)}\right)$

Übungsblatt 1

- Aufgabe 1.a.3) Formal korrekt
  $n^2 \log n \in O\left(n^3\right)$
- Aufgabe 1.c) Hatte niemand richtig
  $\forall f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O\left(2^{g(n)}\right)$

Wiederholung

- Einfach verkettete Liste
- Doppelt verkettete Liste
- Unbounded Array
- Unbounded queue mit doppelt verketteter Liste
  - Direkt
  - Mit splice

Fakultät für Informatik
Arbeitsgruppe Kryptographie und Sicherheit

Wiederholung

- Einfach verkettete Liste
- Doppelt verkettete Liste
- Unbounded Array
- Unbounded queue mit doppelt verketteter Liste
  - Direkt
  - Mit splice

Wiederholung

- Einfach verkettete Liste
- Doppelt verkettete Liste
- Unbounded Array
- Unbounded queue mit doppelt verketteter Liste
  - Direkt
  - Mit splice

Wiederholung

- Einfach verkettete Liste
- Doppelt verkettete Liste
- Unbounded Array
- Unbounded queue mit doppelt verketteter Liste
  - Direkt
  - Mit splice

splice

Procedure splice$(a, b, t : \text{Handle})$ // Cut out $\langle a, \ldots, b \rangle$ and insert after t

  assert b is not before $a \wedge t \notin \langle a, \ldots, b \rangle$

  // Cut out $\langle a, \ldots, b \rangle$

  $a' := a \rightarrow \text{prev}$

  $b' := b \rightarrow \text{next}$

  $a' \rightarrow \text{next} := b'$ //

  $b' \rightarrow \text{prev} := a'$ //

  // insert $\langle a, \ldots, b \rangle$ after t

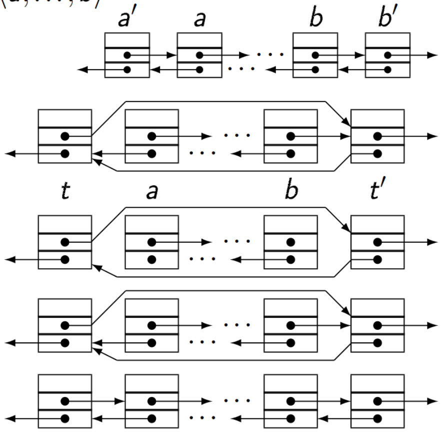
  $t' := t \rightarrow \text{next}$ //

  $b \rightarrow \text{next} := t'$ //

  $a \rightarrow \text{prev} := t$ //

  $t \rightarrow \text{next} := a$ //

  $t' \rightarrow \text{prev} := b$ //



Aufgabe 1.a

Entwickelt eine Datenstruktur, die folgendes kann:

- `pushBack` und `popBack` in $O(1)$ Zeit im Worst-Case
- Wahlfreier Zugriff in $O(\log n)$ Zeit im Worst-Case

Nicht amortisiert!
Speicherallokation geht hier in konstanter Zeit.

Aufgabe 1.b

Entwickelt eine Datenstruktur, die folgendes kann:

- `pushBack` und `popBack` in $O(\log n)$ Zeit im Worst-Case
- Wahlfreier Zugriff in $O(1)$ Zeit im Worst-Case

Nicht amortisiert!
Speicherallokation geht hier in konstanter Zeit.

Aufgabe 2

Was passiert, wenn man `splice(a, b, t : Handle)` fälschlicherweise mit $\mathtt{t} \in \langle \mathtt{a}, \dots, \mathtt{b} \rangle$ aufruft?

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Array $A = A[1], \dots, A[n]$ mit n Zahlen in beliebiger Reihenfolge.
Suche für eine gegebene Zahl x ein Paar $(A[i], A[j]), 1 \leq i, j, \leq n$ mit $A[i] + A[j] = x$.

- Beispiel: Gebt eine Lösung für $x = 33$ und $A = (7, 15, 21, 14, 18, 3, 9)$ an.
- Gebt einen Algorithmus an, der das Problem in erwarteter Zeit $O(n)$ lößt, und bei Erfolg ein Paar $(A[i], A[j])$ ausgibt, ansonsten *NIL*.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Array $A = A[1], \ldots, A[n]$ mit n Zahlen in beliebiger Reihenfolge.
Suche für eine gegebene Zahl x ein Paar $(A[i], A[j]), 1 \leq i, j, \leq n$ mit $A[i] + A[j] = x$.

- Beispiel: Gebt eine Lösung für $x = 33$ und $A = (7, 15, 21, 14, 18, 3, 9)$ an.
- Gebt einen Algorithmus an, der das Problem in erwarteter Zeit $O(n)$ lößt, und bei Erfolg ein Paar $(A[i], A[j])$ ausgibt, ansonsten *NIL*.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Array $A = A[1], \ldots, A[n]$ mit n Zahlen in beliebiger Reihenfolge.
Suche für eine gegebene Zahl x ein Paar $(A[i], A[j]), 1 \leq i, j, \leq n$ mit $A[i] + A[j] = x$.

- Sei $c \in \mathbb{N}$ fest.
- Gebt einen Algorithmus an, der das Problem in deterministischer Zeit $O(n)$ für natürliche Zahlen $A[i] \leq c \cdot n$ lößt, und bei Erfolg ein Paar $(A[i], A[j])$ ausgibt, ansonsten *NIL*.

Aufgabe 3

Gegeben ist ein Array $A = A[1], \ldots, A[n]$ mit n Zahlen in beliebiger Reihenfolge.
Suche für eine gegebene Zahl x ein Paar $(A[i], A[j]), 1 \leq i, j, \leq n$ mit $A[i] + A[j] = x$.

- Haben wir noch Zeit?
- Gebt einen Algorithmus an, der das Problem in deterministischer Zeit $O(n)$ für Ganzzahlen lößt, und bei Erfolg ein Paar $(A[i], A[j])$ ausgibt, ansonsten *NIL*. Hinweise:
  - Wir befinden uns im RAM-Modell mit fixer Wortbreite. Darin kann man ganze Zahlen in $O(n)$ sortieren.