1. Метод Эйлера позволяет найти численное решение $y = F(x)$ на промежутке $a \le x \le b$ дифференциального уравнения вида $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ с начальным условием $y(a) = y_0$. Написать процедуру приближенного решения уравнения $y' = my - nx$, где m, n – положительные числа из промежутка $[0;4]$ с начальным условием $y(0) = 2$, используя 10 точек. Нарисовать поле направлений, точное и приближенное решения.
2. Мяч падает с высоты 54 метра. Каждый раз при отскоке от земли он достигает в 2/3 от предыдущего значения.

   (а) Каково полное расстояние, которое мяч пройдет за все время подскакивания?

   (б) Сколько времени займет «путешествие» мяча?

   Сопротивлением воздуха пренебречь. Вывести график траектории мяча.
3. Написать процедуру вычисления площади фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2$ и касательной к ней в точке $\left(a, -a^2\right)$, на промежутке $[a, a+1]$, если $a \ge 0$, и $[a-1, a]$, если $a < 0$. Построить график функции площади при $x \in [-4, 4]$.
4. Нарисовать фигуру, заданную частью параболы $y = x^2$ при $x \in [-a, a]$, где $a > 0$. Вывести на экран три фигуры с центрами тяжести при $a = 1$, $a = 2$ и $a = 3$.
5. Выполнить следующие действия:

   (а) Пусть L_1 – касательная к кривой $y = x^2$ в точке $P\left(p, p^2\right)$.

   (б) Пусть L_2 – касательная к кривой $y = \ln x$ в точке $Q(q, \ln q)$.

   (в) Пусть L_3 – прямая PQ.

   (г) Найти угловые коэффициенты m_1, m_2 и m_3 прямых L_1, L_2 и L_3 соответственно.

   (д) Записать условие перпендикулярности $L_3 \perp L_1$ и $L_2 \perp L_1$. Найти из этого условия конкретные значения p и q.

   (е) Найти длину PQ (расстояние между кривыми).

   (ж) Повторить шаги (а) – (е) для кривых $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

6. Вдоль прямого шоссе расположены 11 дачных кооперативов. Их местоположение отмечено километровыми метками со значениями 1,8, 2, 2, 3, 3,25, 6,1, 7,35, 7,5, 8,3, 10,6, 11,2, 13,5. Электрическая кампания, которая обслуживает дачные кооперативы, должна построить трансформаторную подстанцию где-то вдоль шоссе. Кампания проводит электрические линии от трансформатора к каждому кооперативу. Написать процедуру, которая находит минимальную суммарную длину всех электрических линий.

7. Предположим, что четверть круга $y=-\sqrt{a^2-x^2}$, $0 \le x \le a$, $a>0$ вращается вокруг оси Oy. При этом получается полусферическая чаша. Построить щуп, который при вставке вертикально в чашу будет определять, когда чаша на четверть полна, когда наполовину полна и когда полна на три четверти. Найти зависимость между процентной долей заполнения чаши и высотой на щупе. Построить график этой зависимости.

8. Написать процедуру, которая строит график параболы $y=x^2$, а также касательную и нормаль к параболе в задаваемой точке $\left(p,p^2\right)$.

9. Написать процедуру, которая вычисляет полиномы Лежандра $L_n(x)$. Эти полиномы удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

   (а) $L_0(x)=1$, $L_1(x)=x$;

   (б) $L_n(x)=\dfrac{n-1}{n}\left(xL_{n-1}(x)-L_{n-2}(x)\right)+xL_{n-1}(x),\ n>1.$

   Вычислить $L_7(x)$ и сравнить Ваш ответ с результатом Maple – процедуры LegenderP.

10. Написать процедуру вычисления жордановой формы квадратной матрицы второго порядка. Учесть следующие обстоятельства:

    (а) если собственные значения матрицы действительные и кратные, то использовать встроенную процедуру jordan из пакета linalg;

    (б) если собственные значения комплексно-сопряженные и равны $\alpha \pm i\beta,$ то записать матрицу Жордана в виде

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \text{ где } \beta > 0;$$

(в) если собственные значения матрицы действительные и различные, то выписать матрицу Жордана в виде

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_1 > \lambda_2.$$

11. Написать процедуру, которая проводит сплайн-интерполяцию линейными, квадратичными и кубическими сплайнами табличных данных по пяти точкам. Вывести формулы и графики. На входе – координаты пяти точек на плоскости.

12. Треугольник задается координатами вершин. Найти:

    (а) уравнения сторон;

    (б) величины углов;

    (в) площадь треугольника.

    В начале процедуры поставить защиту «от дурака», которая проверяет, возможен ли треугольник с задаваемыми юзером вершинами.

13. What is the optimal speed and safe following distance that allows the maximum flow rate (car per unit time)? The solution to the problem would be of use in controlling traffic in tunnels, for roads under repair, or for other congested areas.

    Let's assume a car length of 15 ft. The safe stopping distance

$$d = 1{,}1v + 0{,}054 \cdot v^2$$

was determined, where d is measured in feet and v in miles per hour. Find the velocity in miles per hour and the corresponding following distance d that maximizes traffic flow. How sensitive is the solution to changes in v? Can you suggest a practical rule? How would you enforce it?

14. Рассмотреть модель конкурирующих видов

$$\begin{cases} \dot{x} = 15x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 12y - y^2 - 1{,}5xy \end{cases}.$$

(а) Выполнить графический анализ модели на плоскости xOy (DEtools[DEplot]);

(б) Найти равновесные решения и исследовать их устойчивость;

(в) Найти численное решение, используя метод Эйлера с шагом h=0,05. Применить алгоритм метода к начальным данным $x(0)=5$, $y(0)=4$ и $x(0)=3$, $y(0)=9$. Нарисовать в каждом случае график зависимости $y=y(x)$. Сравнить результаты с графическим анализом модели (п.1).

15. Diffusion through a membrane leads to a first-order system of ordinary linear differential equations. For example, consider the situation in which two solutions of substance are separated by a membrane of permeability P. Assume the amount of substance that passed through the membrane at any particular time is proportional to the difference between the concentrations of two solutions. Therefore, if we let x_1 and x_2 represent the two concentrations and V_1 and V_2 their corresponding volumes, then the system of differential equations is given by

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{P}{V_1}\left(x_2 - x_1\right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{P}{V_2}\left(x_1 - x_2\right)\end{aligned},$$

where the initial amounts of x_1 and x_2 are given.

Consider two salt concentrations of equal volume V separated by a membrane of permeability P. Given that $P=V$, determine the amount of salt in each concentration at time t if $x_1(0)=2$ and $x_2(0)=10$.

(a) Написать систему дифференциальных уравнений, моделирующую это поведение;

(b) Нарисовать графики решений для x_1 и x_2 на одном рисунке;

(c) Применить численный метод Рунге-Кутты для $x_i(4)$ с шагом 0,5. Нарисовать графики численного решения и сравнить их с «аналитическими» графиками.