

*Dieses Praktikum beschäftigt sich mit den Inhalten aus der Vorlesung **Balancierte Bäume**.*

### 3 Praktikum: Rot-Schwarz-Baum

#### 3.1 Aufgabenstellung

Beachten Sie ALLE Lösungshinweise und setzen Sie sich zuerst mit der Funktionsweise eines Rot-Schwarz-Baumes auseinander.

Implementieren Sie die Funktionalitäten des gegebenen Rot-Schwarz-Baum Templates.

Die zu implementierenden Funktionen übernehmen dabei folgende Aufgaben:

- **void flipColors(Node\*)** Diese Methode teilt einen 4-er Knoten im 2-3-4-Baum in zwei 2-er Knoten. Ein 4-er Knoten im 234-Baum entspricht im Rot-Schwarz-Baum einem schwarzen Knoten, der zwei rote Knoten als Nachfolger hat. Das bedeutet im Rot-Schwarz-Baum, dass die drei beteiligten Knoten nur umgefärbt werden müssen. Der schwarze Knoten wird dann rot und die vorab roten Knoten werden dann schwarz (s. Abb. 2).

Der Eingabeparameter dieser Methode sollte der beteiligte schwarze Knoten sein.

- **bool insert(int)**

Entwickeln Sie die Methode, die einen neuen Knoten **TopDown** in den Rot-Schwarz-Baum einfügt. Die Abbildungen 1 bis 8 zeigen Ihnen die Funktionsweise. Dabei ist folgenderweise vorzugehen:

1. Traversieren Sie den Baum von der Wurzel bis zum Blatt entsprechend dem einzufügenden Wert. Die Knoten des Suchpfades, die sich im Beispiel beim Einfügen der 26 ergeben, sind in der Abbildung 5 grau markiert. Wird auf dem Suchpfad von der Wurzel bis zum Blatt ein 4-er-Knoten erkannt, wird dieser auf dem Weg nach unten (TopDown) mit der Methode `flipColors(Node*)` umgefärbt.
2. Erzeugen Sie einen neuen Knoten mit den entsprechenden einzufügenden Daten und fügen den neuen Knoten als roten Knoten als Nachfolger des Blattes mit entsprechender Suchrichtung ein (s. Abb. 5). Der übergebene Parameter `key` kann im neuen Knoten sowohl für `key`, als auch `val` verwendet werden.
3. Untersuchen Sie nun die Knoten entlang des Suchpfades vom eingefügten Blattknoten bis zur Wurzel (Bottom-Up), ob zwei rote Knoten aufeinanderfolgen. Ist das der Fall, müssen die notwendigen Rotationen (siehe Abschnitt 3.2.3) durchgeführt werden. Sie müssen feststellen, in welcher Richtung rotiert werden muss. Beachten Sie, dass ggfls. die Knoten nach der Rotation umgefärbt werden müssen. Die Abbildungen 6 und 7 verdeutlichen hier eine Doppelrotation. Das Ergebnis nach dem Einfügen kann auch als gültiger 2-3-4-Baum interpretiert werden (s. Abb. 8).

- **void print()**

Diese Methode gibt den Rot-Schwarz-Baum in Levelorder als 2-3-4-Baum auf der Konsole aus. Abbildung 8 zeigt links das Ergebnis nach dem Einfügen von Knoten 26 in den Rot-Schwarz-Baum und rechts das zu interpretierende Ergebnis als 2-3-4-Baum. Die entsprechende Ausgabe in Levelorder visualisiert nur die schwarzen Kanten und wäre dann:

Niv. 0: (20,25,30)

Niv. 1: (10) (22) (26,28) (40,50)

Hinweis: Nutzen Sie für die Ausgabe in Levelorder des Rot-Schwarz-Baumes als 2-3-4-Baum zwei Queues. In der einen Queue speichern Sie nur die schwarzen Knoten und in der anderen Queue entsprechend zu dem schwarzen Knoten das Niveau des Knoten im 2-3-4-Baum. Wird ein Knoten aus der Queue entnommen, so entnimmt man auch das dazugehörige Niveau des schwarzen Knotens aus der anderen Queue. Hat der schwarze Knoten rote Nachfolgeknoten, so gehören diese zum schwarzen Knoten (beim 3er oder 4er Knoten bzw. schwarzer Knoten mit 1 roten Nachfolger oder schwarzer Knoten mit 2 roten Nachfolgern) und müssen entsprechend mit ausgegeben werden. Die Nachfolger der roten Knoten sollten dann wieder schwarz sein. Diese nachfolgenden schwarzen Knoten (in der Anzahl 0 bis 4) müssen dann wieder in die Queues mit ihrem entsprechenden 2-3-4-Baum-Niveau gespeichert werden.

- **Node\* rotateRight(Node\*)/rotateLeft(Node\*)**

Es wird der Methode jeweils der obere Knoten übergeben um den rotiert wird. Implementieren Sie die jeweilige Rotation und beachten Sie die richtige Einfärbung der rotierten Knoten. Beachten Sie außerdem, dass der Vorgängerknoten vom oberen Knoten auf den neuen oben stehenden Knoten verweist(z.B. Rückgabetyp der Funktion). Führt man diese Methoden hintereinander aus, erhält man eine Doppelrotation. Im Falle einer Doppelrotation wird zuerst um den oberen roten und danach den schwarzen Knoten rotiert. Ggf. können Sie auch dafür eigene Methoden zur Durchführung der Links-Rechts- sowie der Rechts-Links-Rotation implementieren. Eine Visualisierung der möglichen Rotationen im Rot-Schwarz-Baum finden Sie in Abbildung 3.

Testläufe:

```

1 Person Analyzer v19.84, by George Orwell
-----
3 1) Datensatz einfuegen, manuell
4 2) Ausgabe in Levelorder
5 3) Programm Beenden
6 ?> 1           // Beispiel: manuelles Hinzufügen eines Datensatzes
8 + Bitte geben Sie die den Schluessel ein
9 Key ?> 503
10 + Ihr Datensatz wurde eingefügt

```

```
12 [...]          // Hier Eingabe weiterer Datensätze
13
14 ?> 2          // Beispiel: Anzeigen eines Trees in Levelorder Einträgen
15
16 Ausgabe in Levelorder als 2-3-4-Baum:
17 Niv. 0: (502, 1002)
18 Niv. 1: (403) (503) (2002, 3002)
```

### 3.2 Lösungshinweise

In der Vorlesung wurde zunächst der 2-3-4-Baum vorgestellt. Das ist ein geordneter Suchbaum, bei dem die Knoten einen, zwei oder drei Schlüssel aufnehmen und entsprechend zwei, drei oder vier Nachfolger haben können. Die Implementierung eines 2-3-4-Baumes ist mit einem Rot-Schwarz-Baum möglich. So lässt sich ein gültiger Rot-Schwarz-Baum jederzeit in einen 2-3-4-Baum überführen und umgekehrt.

Ein Rot-Schwarz-Baum ist ein binärer Suchbaum mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

#### 3.2.1 Rot-Schwarz-Baum Kriterien

1. Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz. Ein roter Knoten gehört zu seinem schwarzen Elternknoten und befindet sich im Sinne der 2-3-4-Baumes auf dem gleichen Niveau.
2. Jeder neu einzufügende Blattknoten ist rot.
3. Die Wurzel ist immer schwarz.
4. Die Kinder von einem roten Knoten sind schwarz.
5. Kriterium für Schwarz-Ausgeglichenheit:

Für jeden Knoten  $k$  gilt: Jeder Pfad von  $k$  zu einem Blatt enthält die gleiche Anzahl schwarzer Knoten.

Die Kriterien eines Rot-Schwarz-Baumes müssen vor und nach dem Einfügen erfüllt sein!

#### 3.2.2 Transformationen im 2-3-4 und Rot-Schwarz-Baum

Die folgenden Abbildungen 1 bis 4 zeigen mögliche Transformationen von 3-er und 4-er Knoten aus einem 2-3-4-Baum in Rot-Schwarz-Bäume.

Eine Hauptaufgabe in diesem Praktikum ist das Einfügen eines neuen Knotens in einen Rot-Schwarz-Baum, sowie die niveauweise Ausgabe der Knoten des Rot-Schwarz-Baumes im Sinne des 2-3-4-Baumes.

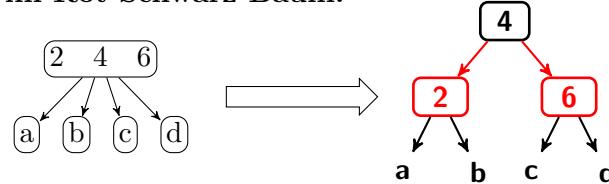
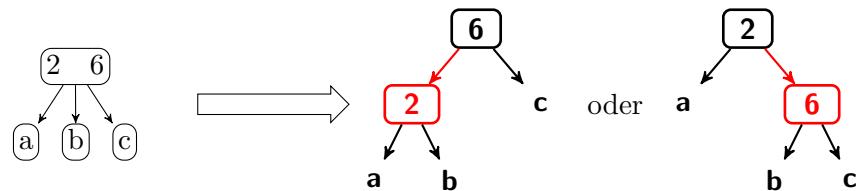
**4-Knoten im Rot-Schwarz-Baum:****3-Knoten im Rot-Schwarz-Baum:**

Abbildung 1: 2-3-4-Baum als Rot-Schwarz-Baum. Abbildungen von 2-3-4-Knoten.

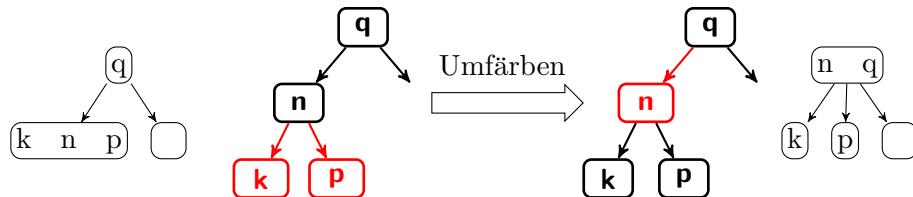


Abbildung 2: Umwandlung des Elternknoten (q) (2-Knoten) in einen 3-Knoten (nq) entspricht dem Umfärbigen der Knoten. (k,n,p)

**3.2.3 Rotationen**

Durch Einfügen neuer Knoten oder Umfärbigen können zwei aufeinander folgende Knoten rot eingefärbt werden. Dies verletzt das 4. Kriterium für einen Rot-Schwarz-Baum und der Baum muss durch Rotationen ausgeglichen werden. Möglich sind Rechts-, Links- oder Doppelrotationen (rechts-links oder links-rechts).

Abbildung 3 zeigt die vier möglichen Rotationen und das jeweilige Ergebnis im Überblick.

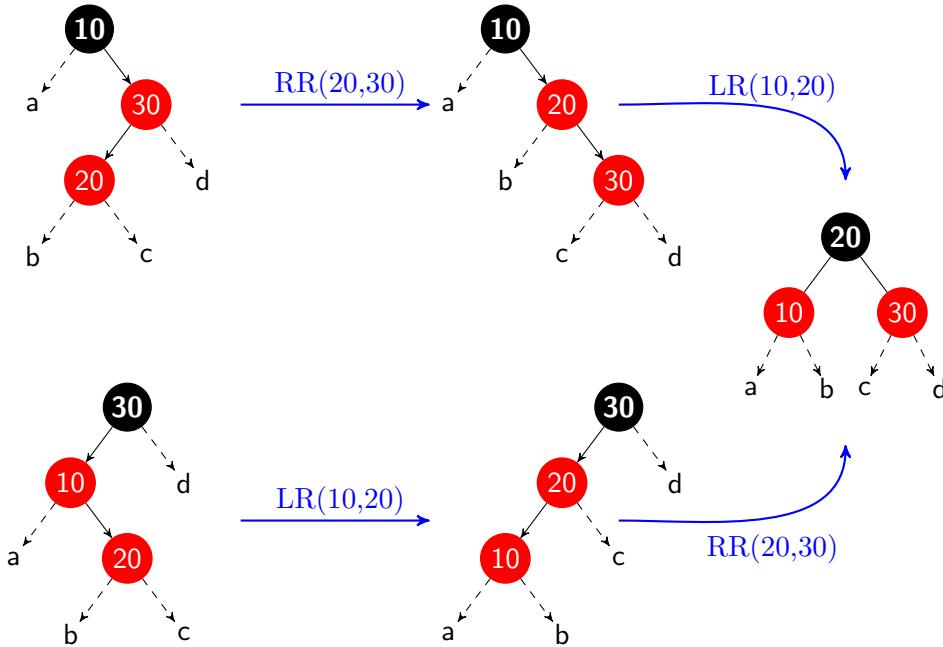
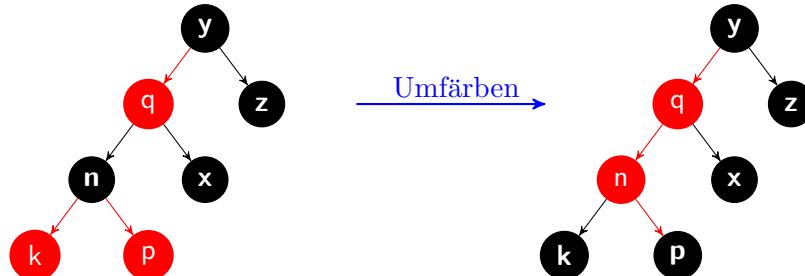


Abbildung 3: Mögliche Rotationen im Rot-Schwarz-Baum.

### 3.2.4 Top-Down Einfügen

Beim Top-Down Einfügen werden entlang des Suchpfades bis zur Einfügeposition alle 4er-Knoten, das sind die schwarzen Knoten mit 2 roten Nachfolgern, umgefärbiert. In Abbildung 4 wird dies für den Knoten  $n$  mit seinen Kindern  $k$  und  $p$  durchgeführt.

Abbildung 4: Umfärbung von Knoten  $(k, n, p)$ 

Dabei kann es zu einer Verletzung des 4. Kriteriums von Rot-Schwarz-Bäumen kommen. Dies muss nach dem Umfärben geprüft und ggf. durch Rotationen behoben werden.

### 3.2.5 Beispiel Einfügen Top-Down

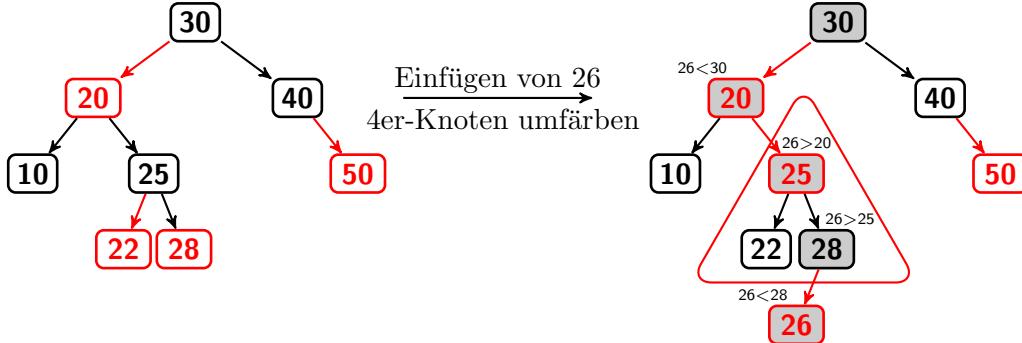


Abbildung 5: Einfügen des neuen Knoten 26 als roter Blattknoten. Der Suchpfad bis zum Knoten 28 bzw. 26 ist grau markiert. Alle 4er Knoten entlang des Suchpfades werden umgefärbiert. Der neue Knoten 26 wird als roter Blattknoten entsprechend der Ordnung eingefügt.

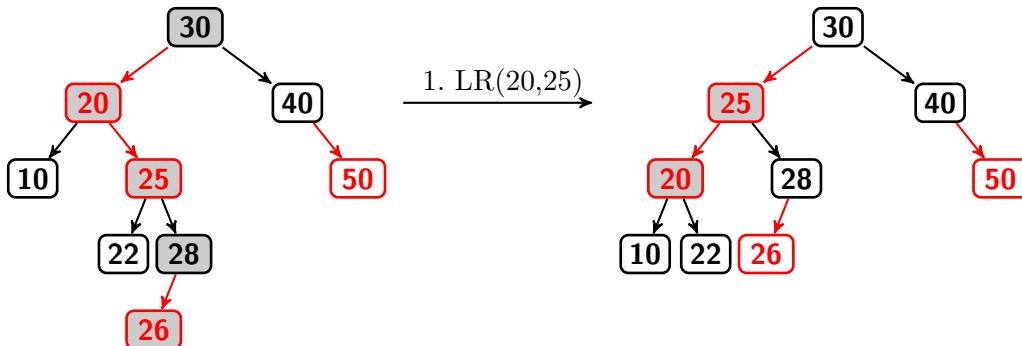


Abbildung 6: Bottom-Up-Verfolgung des Suchpfades vom Blatt-Knoten 26 hoch bis zur Wurzel: Wenn dabei 2 aufeinander folgende rote Knoten im Suchpfad detektiert werden, müssen Sie eine oder zwei Rotationen durchführen. Da diese hier bei den Knoten 30, 20, 25 im Links-Rechts-Weg(Knick) erfolgen, wird eine Doppelrotation durchgeführt. Hier: Die erste Rotation ist eine Links-Rotation zwischen den Knoten 20 und 25.

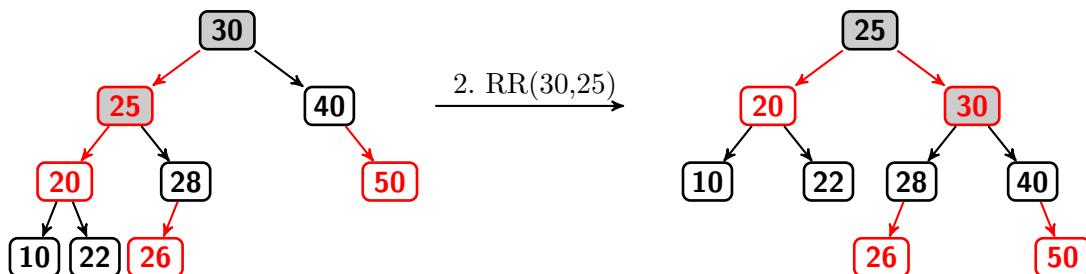


Abbildung 7: Durchführung der zweiten Rotation. Hier: Rechts-Rotation zwischen den Knoten 30 und 25.

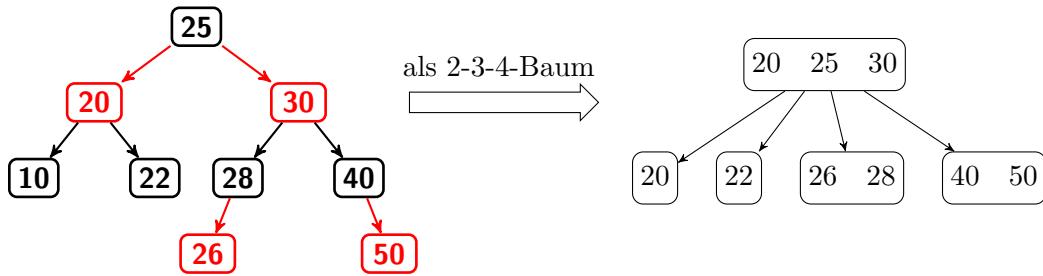


Abbildung 8: Ergebnis nach dem Einfügen des neuen Knoten 26 als Rot-Schwarz-Baum und als 2-3-4-Baum.

Grundsätzlich kann man sich merken:

- Die Richtungen entlang des Suchpfades bis zur Einfügeposition, in der die Knoten verbunden sind, geben die Rotationen vor. Damit ist die Verbindung vom Parent zum rechten oder linken Nachfolger gemeint.
- Zeigen beide aufeinander folgende rote Knoten in die gleiche Richtung, so reicht eine einfache Rotation.
- Zeigen die aufeinander folgenden roten Knoten in verschiedene Richtungen, so muss mit einer ersten Rotation der untere rote Knoten an den oberen roten Knoten angeglichen und danach mit einer zweiten Rotation der schwarze Knoten mit dem roten Knoten rotiert werden. Dies bewirkt einen ausgeglichenen Baum.

**Achtung:** Kontrollieren Sie das richtige Einfärben der Knoten nach Einzel- und Doppelrotationen!