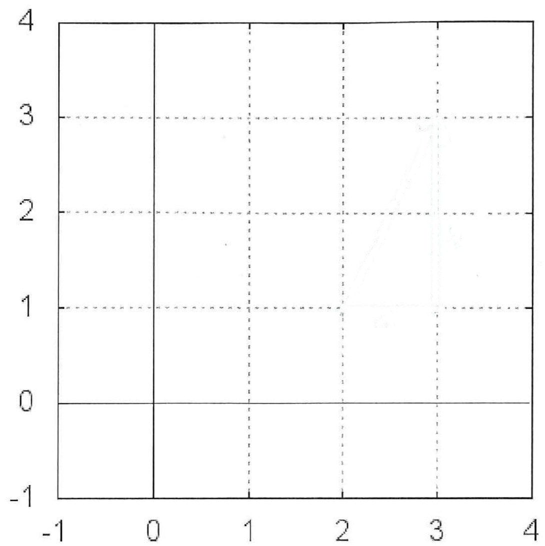
1a) *(2P)* Richtungsfeld

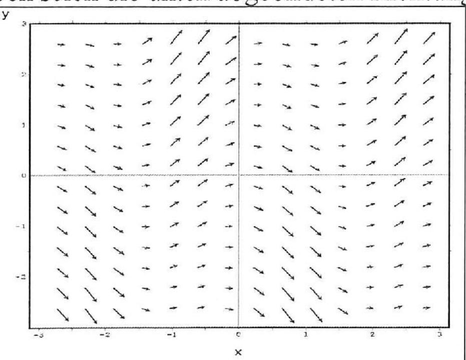
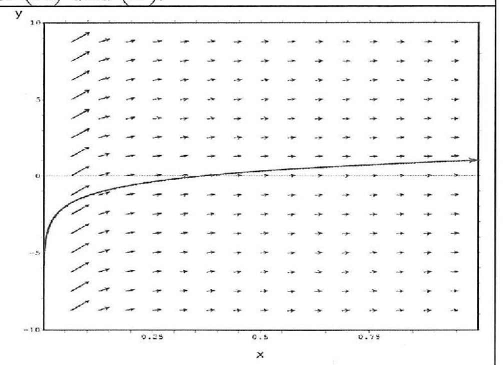
Gegeben sei die Differentialgleichung $y' - y = \frac{1}{4} \cdot x^2$.

- Berechne den Richtungspfeil am Ort (2|1) und trage ihn in der Graphik ein



1b) *(2P)* Richtungsfeld:

Gegeben seien die unten abgebildeten Richtungsfelder (A) und (B).

(A)  (B) 

• Charakterisiere die Richtungsfelder (A) und (B), indem Du die für (A) und (B) mathematisch korrekten Beschreibungen markierst.	trifft für (A) zu	trifft für (B) zu
Das Richtungsfeld beschreibt den Verlauf der expliziten Differentialgleichung als Funktion von x und y.	O	O
Das Richtungsfeld beschreibt den Verlauf der impliziten Differentialgleichung als Funktion von x und y.	O	O
Das Richtungsfeld kann erst nach der Lösung der entsprechenden Differentialgleichung erstellt werden.	O	O
Das Richtungsfeld beschreibt Lösungskurven, die wie Exponentialfunktionen verlaufen.	O	O
Das Richtungsfeld beschreibt Lösungskurven, die sich periodisch wiederholen.	O	O
Das Richtungsfeld beschreibt Lösungskurven, die wie Logarithmusfunktionen verlaufen.	O	O
Das Richtungsfeld beschreibt Lösungskurven, die wie Polynomfunktionen verlaufen.	O	O

1c) *(2P)* Homogene Differentialgleichung

In der folgenden Tabelle sind in der linken Spalte inhomogene Differentialgleichungen (DGL) angeführt.

- Notiere in der rechten Spalte die passende entsprechende homogene DGL

Inhomogene DGL	Passende homogene Differentialgleichung
$2y' - 3y - 5 \cdot x^2 = 0$	
$3\frac{y'}{\cos 2x} = e^x$	

1d) *(5P)* Trennung der Variablen:

Gegeben sei die nebenstehende Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung mit Nebenbedingung. $\frac{1}{3}y' + \sqrt[4]{x} \cdot y^2 = 0$, P(0|2)

- Berechne die allgemeine Lösung der DGL mittels Trennung der Variablen.
- Ermittle die spezielle Lösung der DGL, die durch den Punkt P geht.
- Überprüfe Dein Ergebnis durch eine Probe. Führe diese Probe mit der speziellen Lösung der DGL durch.

(Anmerkung: Die einzelnen Lösungsschritte müssen klar erkennbar sein)

AM_

2 Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

a) *(2P)*

- Argumentiere, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.

b) *(5P)*

Nimm ein begrenztes exponentielles Wachstum mit einer Obergrenze von G=1000 an. Es gilt folgende Funktion: $y(t) = G - c \cdot e^{\lambda \cdot t}$

wobei
t........ Zeitdauer in Jahren
y(t).... Anzahl der Tiere nach t Jahren
c....... Anzahl der Tiere, um die der Anfangsbestand bis zur Obergrenze zunehmen kann

- Überprüfe mit Hilfe der Methode Trennung der Variablen nachweisbar, dass diese Funktion $y(t)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot (G - y)$ ist.

- Bestimme die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung

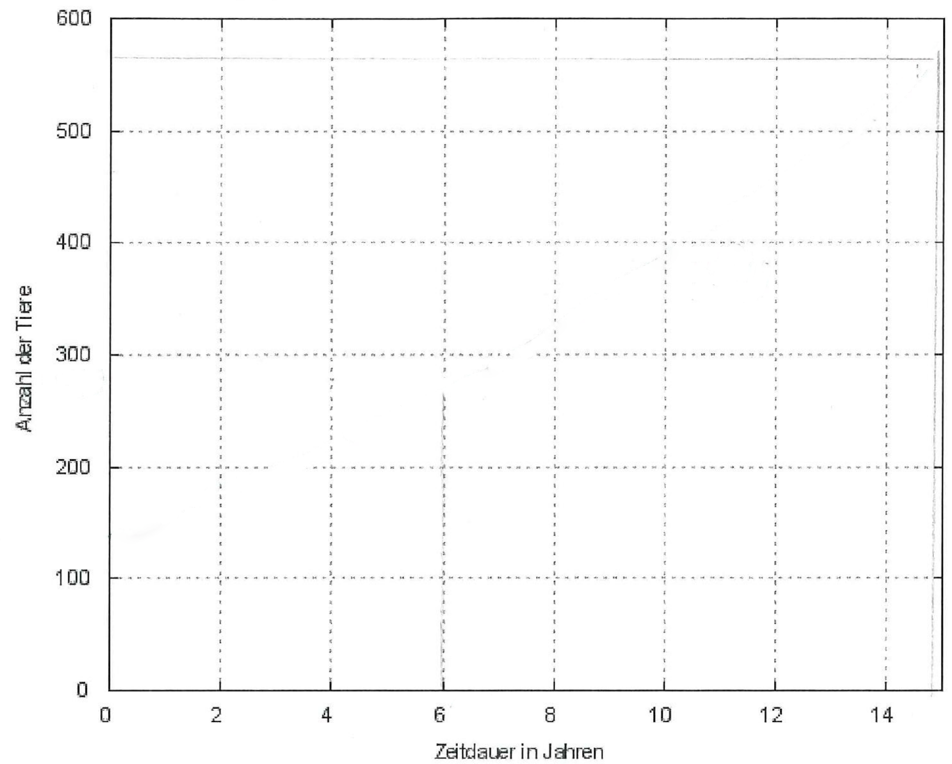
- Berechne den Stand der Population nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung der Vogelpopulation diesem Modell folgt.

c) *(3P)*

In der Realität wird das Wachstum der Großtrappen-Population besser durch die folgende logistische Funktion beschrieben: $y(t) = \frac{1000}{1 + 6.143 \cdot e^{-0.1369 \cdot t}}$

wobei
t......... Zeitdauer in Jahren
y(t)..... Anzahl der Tiere nach t Jahren

- Stelle die Funktion graphisch dar und skizziere sie.



- Lese aus der Graphik ungefähr ab, wann sich der Bestand seit dem Beginn der Beobachtungszeit auf 280 Tiere verdoppelt hat.
- Überprüfe durch Ablesung des Zeitraums bis zur nächsten Verdopplung, ob die Zeitdauer, in der sich der jeweilige Bestand an Tieren verdoppelt, in diesem Modell konstant bleibt und gib das Ergebnis der Überprüfung an.

3) *(10P)* In modernen Teleskopen werden CCD-Kameras eingesetzt. Die aufgenommenen Bilder werden anschließend durch entsprechende Bildbearbeitungsprogramme bearbeitet, um optimale Beobachtungsergebnisse zu erhalten.
Um das elektronische Rauschen möglichst gering zu halten, wird die CCD-Kamera auf eine bestimmte Temperatur abgekühlt. Die Temperaturabnahme mit der Zeit t in Minuten erfolgt nach dem Newton`schen Abkühlungsgesetz:

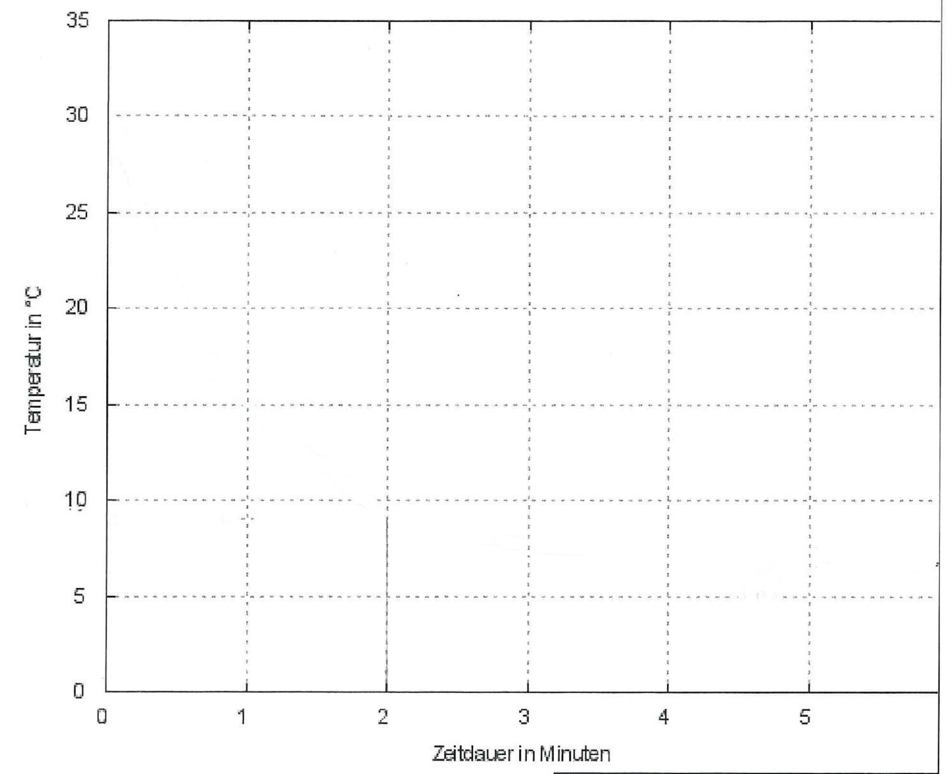
$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_u)$$

T… Temperatur des Körpers in °C
T_u.. Umgebungstemperatur in °C
t … Zeit in Minuten
k… Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

a)
- Formuliere den durch die gegebene Differenzialgleichung beschriebenen Zusammenhalt in Worten
- Argumentiere, warum die Temperatur der Kamera die Umgebungstemperatur T_u nicht unterschreiten kann.
- Erkläre im Sachzusammenhang den Unterschied der beiden Änderungsraten $\frac{dT}{dt} = -k \cdot T$ und $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_u)$

b) Um die Kamera abzukühlen, wird die 20°C warme Kamera in eine Umgebung mit einer Temperatur von 4°C gebracht.
- Gib die Funktionsgleichung für $T(t)$ allgemein an.
- Ermittle die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung für die gegebene Anfangsbedingung.

c) In einer weiteren Beobachtungsnacht wird das Abkühlverhalten der Kamera durch die nebenstehende Funktion beschrieben: $T(t) = 25 \cdot e^{-k \cdot t} + 6$
- Bestimme den Faktor k, wenn die Kamera nach einer Minute auf 14.93°C abgekühlt ist.
- Stelle die Funktion graphisch dar und erstelle eine handschriftliche Graphik.



- Lese aus dem Funktionsgraphen ab, nach wie vielen Minuten die Kamera auf 8°C abgekühlt ist.

d) Für eine weitere spezielle Lösung der Differentialgleichung gilt:
$T(t) = 43 \cdot (0.4317^t - 0.1163)$.
Die Kamera wird zur Zeit t=0 aus einem Raum ins Freie ($T_u = -5°C$) gebracht.
- Ermittle mithilfe der gegebenen speziellen Lösung, nach welcher Zeit t die Kamera eine Temperatur von 0°C aufweist.
- Ermittle, welche Temperatur im Raum herrscht.

4 Die Beziehung zwischen Luftdruck p und Höhe h lässt sich bei konstanter Temperatur mit der folgenden Gleichung beschreiben:

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p, \quad k > 0$$

p... Luftdruck in Hektopascal (hPa)
h... Höhe in Metern (m)

a) *(2P)*

- Überprüfe nachweisbar, dass diese Differentialgleichung die folgende allgemeine Lösung hat: $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$.

b) *(2P)* Der Luftdruck wird am selben Tag zur selben Zeit an 2 verschiedenen Stationen gemessen, in Villach (500m über dem Meeresspiegel) wird ein Druck p=962 hPa gemessen, auf dem Dobratsch (2167m über dem Meeresspiegel) ergibt die Messung p=790 hPa.

- Berechne mit diesen Angaben und mit der in a) gegebenen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung für diese Differentialgleichung.

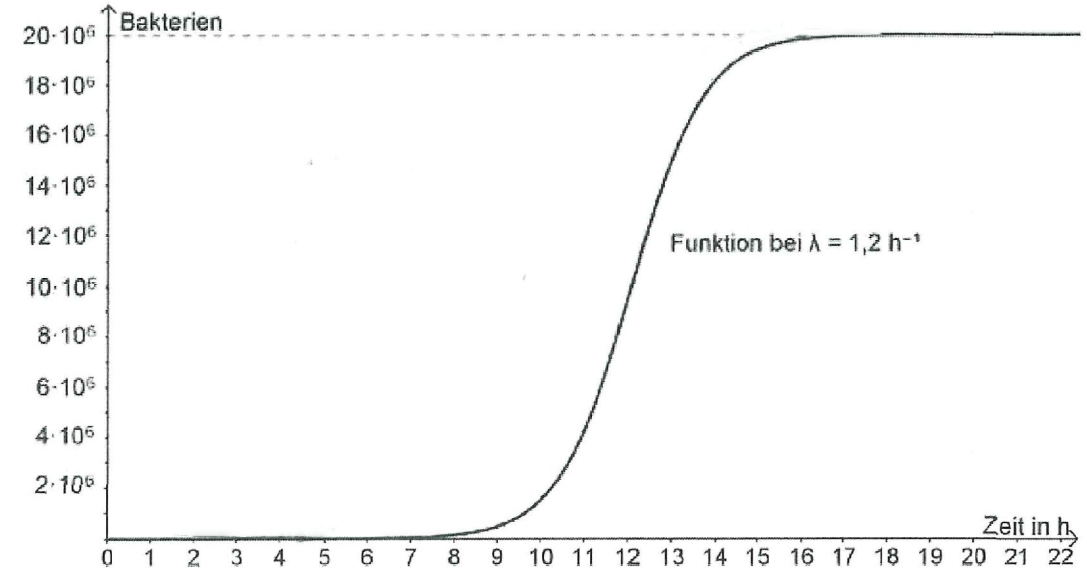
Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

5) *(2P)* Bakterienkultur:
Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt t $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: N(t) ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N. Die entsprechende Proportionalitätskonstante k bezeichnet man als Wachstumskonstante.

- Stelle die zugehörige Differentialgleichung für N auf.
- Ermittle die spezielle Lösung der Differenzialgleichung mithilfe von Maxima.

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

6) *(3P)* Ein Bakterienwachstum verläuft nicht unbeschränkt exponentiell, sondern erreicht wegen der begrenzten Ressourcen eine Sättigungsmenge.



Die obenstehende Graphik zeigt das Wachstum einer Bakterienpopulation mit folgender Funktion N: $N(t) = \frac{20 \cdot 10^6}{1 + 20 \cdot 10^5 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ mit $\lambda = 1.2\ h^{-1}$

wobei t....... Zeit in Stunden (h)
N(t).... Anzahl der Bakterien nach t Stunden
λ....... Wachstumsparameter in h^{-1}

- Skizziere in der Graphik den Verlauf der Kurve für $\lambda = 1.5\ h^{-1}$

λ

Betrachte den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ des Nenners der Funktion N.

- Erkläre, welchen Einfluss eine Veränderung von $\lambda = 1.2\ h^{-1}$ auf $\lambda = 1.5\ h^{-1}$ auf den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ hat.

- Erkläre, welchen Einfluss die Veränderung im Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ auf die gesamte Funktion N hat.