Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

6 *(4P)*	Eine Schuld von € 30.000.- soll bei einer Verzinsung von 3% in 4 Jahren durch gleich bleibende Annuitäten getilgt werden. Erstelle nachvollziehbar einen Tilgungsplan und fasse Deine Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

Kredithöhe in €	
Zinssatz in %	
Laufzeit in Jahren	
Annuität in €	

Jahr	Schuld zu Jahresbeginn	Zinsen	Annuität	Tilgung	Schuld zu Jahresende
1					
2					
3					
4					

4xHIT

4.Schularbeit AM SW 35/202223 Gr.A

Name: Klasse:

Punkte für Beispiel	1	2	3	4	5	6	Summe
maximal erreichbar:	6	8	6	8	8	4	40
erreicht:							

Punkteschlüssel	Punkte	Note
	36-40	1
	31-35	2
	26-30	3
	21-25	4
	0-20	5

Für das folgende Beispiel / Für die folgenden Beispiele
ist die Benutzung von *wxMaxima* statthaft und empfohlen.

Information zum Kompetenzbereich / zu den Kompetenzbereichen, die Gegenstand der Schularbeit sind: Die Beispiele dieser Schularbeit beziehen sich auf den Kompetenzbereich
S08D: „Anwendung von Folgen und Reihen“.
Zur positiven Absolvierung der Schularbeit müssen die Anforderung betreffend die Erfassung und Anwendung des Lehrstoffes sowie betreffend die Durchführung der Aufgaben in den wesentlichen Bereichen (d.h. in den Grundkompetenzen dieses Kompetenzbereiches) überwiegend erfüllt sein.

Der Nachweis der Erfüllung der Grundkompetenzen des Kompetenzbereiches
S08D: „Anwendung von Folgemund Reihen“ wurde
O erbracht O nicht erbracht.

Gesamtnote:

Kenntnisnahme der
Erziehungsberechtigten
oder der eigenberechtigten
Schüler

Auszug aus: Formelsammlung Angewandte Mathematik (BHS)

21 Finanzmathematik

Zinsen und Zinseszinsen

K_0 ... Anfangskapital
K_n ... Endkapital nach n Jahren
i ... Jahreszinssatz

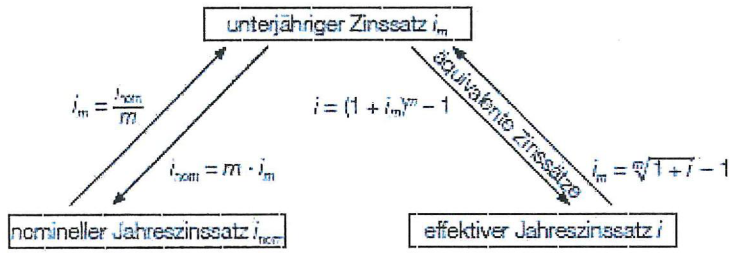
einfache Verzinsung: $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$
Zinseszinsen: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Unterjährige Verzinsung

m ... Anzahl der Zinsperioden pro Jahr

Für Zinssätze gelten folgende Abkürzungen:
p. a. ... pro Jahr
p. s. ... pro Semester
p. q. ... pro Quartal
p. m. ... pro Monat

$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$



Rentenrechnung

R ... Ratenhöhe
n ... Anzahl der Raten
i ... Zinssatz
$q = 1 + i$ ... Aufzinsungsfaktor

Voraussetzung: Rentenperiode = Zinsperiode

	nachschüssig	vorschüssig
Endwert E	$E_{nach} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{vor} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert B	$B_{nach} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$	$B_{vor} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$

Tilgungsplan

Zeit	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				K_0
1	$K_0 \cdot i$	T_1	$A_1 = K_0 \cdot i + T_1$	$K_1 = K_0 - T_1$
...	...	...	...	...

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

1a) *(2P)* Geometrische Folge:
Von einer Folge sind die ersten drei Glieder bekannt:
$\langle c \rangle = \langle 10, 15, 25 \rangle$

- Erkläre, ob es sich um eine geometrische Folge handelt und begründe Deine Entscheidung nachvollziehbar.

O Ja   O Nein
Begründung:

1b) *(2P)* Container:
Container werden derart gestapelt, dass in der ersten Reihe 54 Stück liegen und in jeder weiteren Reihe 6 weniger.

- Gib eine Formel an, mit der die Anzahl der Container in einer beliebigen Reihe berechnet werden kann.
- Gib eine Formal an, mit der die Anzahl an Container, die insgesamt am Stapel liegen, wenn 5 Reihen gestapelt sind, berechnet werden kann.

1 Hühnerfarm:
Auf einer Hühnerfarm werden Eier produziert.

c) *(2P)* Die Hühnerfarm soll durch den Ankauf eines der Nachbargrundstücke vergrößert werden. Es liegen zwei Angebote vor:

- Angebot 1 umfasst ein Grundstück mit 2.000 m²:
  Der Kaufpreis soll in 12 nachschüssigen Jahresraten zu je 1.500.- getilgt werden.
- Angebot 2 umfasst ein Grundstück mit 2.200 m²:
  Der Kaufpreis soll in 24 nachschüssigen Jahresraten zu je 510.- getilgt werden.

Für beide Angebote ist ein Zinssatz von 2.5% p.a. vereinbart. Es soll das Grundstück mit dem niedrigeren Quadratmeterpreis gekauft werden.

- Dokumentiere in Worten, wie man das günstigere Angebot ermitteln kann.
- Berechne den Kaufpreis pro Quadratmeter für das Angebot 2 und notiere das Ergebnis in nebenstehendem Kästchen.

2 Ressourcen

Im Zeitraum von 1970 bis 2010 hat der jährliche globale Rohstoffverbrauch von 22 Milliarden Tonnen auf 70 Milliarden Tonnen zugenommen. Im selben Zeitraum hat sich die Weltbevölkerung auf 7 Milliarden verdoppelt.

a) *(8P)*

- Berechne auf Basis dieser Angaben den durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauch pro Person im Jahr 1970 unter Verwendung der korrekten Einheit.

Die zeitliche Entwicklung des globalen Rohstoffverbrauchs kann durch eine arithmetische Folge oder durch eine geometrische Folge modelliert werden.

Im Modell A wird das jährliche prozentuelle Wachstum bezogen auf das jeweilige Vorjahr als konstant angenommen.

- Erstelle für das Modell A ein explizites Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wähle n=1 für das Jahr 1970, d.h. n=41 entspricht dem Jahr 2010.

Im Modell B wird das jährliche Wachstum als konstant angenommen.

- Erstelle für das Modell B ein rekursives Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wähle n=1 für das Jahr 1970, d.h. n=41 entspricht dem Jahr 2010.

Für das Jahr 2050 wird ein jährlicher globaler Rohstoffverbrauch von 180 Milliarden Tonnen angenommen.

- Trage die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein: 180 Milliarden Tonnen $= 1{,}8 \cdot 10^{\square}$ kg

Im Modell C wird das jährliche Wachstum durch folgenden Ausdruck beschrieben, wobei n=1 für das Jahr 1970 gewählt wurde:

$c_{n+1} - c_n = 0{,}25 \cdot c_n$ mit $c_1 = 22$ Milliarden Tonnen.

- Ermittle den absoluten Fehler zwischen der Vorhersage von Modell C für das Jahr 2010 und dem jährlichen globalen Rohstoffverbrauch im Jahr 2010.
- Ermittle den gesamten Rohstoffverbrauch von 1970 bis 2010 gemäß Modell C.
- Ermittle gemäß Modell C, in welchem Jahr ab 1970 gerechnet die Summe aller jährlichen Rohstoffverbrauchsmengen 10^{15} Tonnen überschreitet.

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

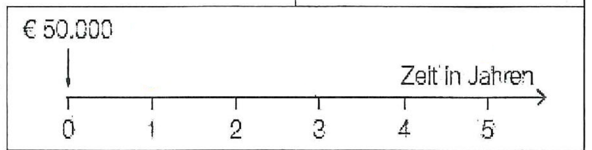
3 Erbschaft

a) *(3P)* Armin erhält ein Erbe in der Höhe von € 50.000.-, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.

Die Höhe der Auszahlungen Z kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50000 = \frac{20000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}.$$

- Lies den zugehörigen Jahreszinssatz ab und notiere das Ergebnis in nebenstehendem Kästchen.
- Veranschauliche alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nebenstehenden Zeitachse



- Berechne die Höhe der Auszahlungen Z und notiere das Ergebnis in nebenstehendem Kästchen.

b) *(3P)* Jutta hat € 50.000.- geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3% p.a. an. In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000.- vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund $\frac{50000-20000}{60} = 500$ abheben kann.

- Begründe, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500.- sind.
- Berechne den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz und notiere das Ergebnis in nebenstehendem Kästchen.
- Berechne die Höhe der tatsächlichen Monatsraten und notiere das Ergebnis in nebenstehendem Kästchen.

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

4 Beweise die Euler`sche Identität: $e^{j \cdot x} = \cos x + j \cdot \sin x$

a) *(2P)* Entwickle zunächst $\cos x$ in eine Potenzreihe (Entwicklung als Taylorreihe bis zur 6.Ordnung).

b) *(2P)* Entwickle weiters $\sin x$ in eine Potenzreihe (durch Ableitung des Ergebnisses aus a)).

c) *(2P)* Entwickle weiters e^x in eine Potenzreihe (Entwicklung als Taylorreihe bis zur 6.Ordnung).).

d) *(2P)* Setze zuletzt als Argument der Exponentialfunktion $j \cdot x$ und führe damit den Beweis durch.

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

8

5 Taylorreihe:

a) *(2P)*

- Entwickle $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ als Taylorreihe bis zur 5.Ordnung um die Stelle 0 und notiere das Ergebnis in untenstehendem Feld.

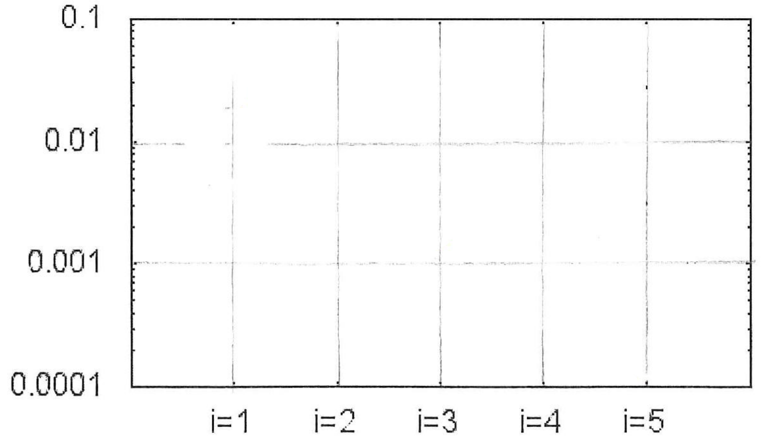
b) *(4P)*

- Ermittle die Taylorpolynome $s_i\ (i=1,2,\ldots,5)$, werte sie konkret für $x=0.3$ aus und notiere die Ergebnisse in untenstehenden Feldern. Ermittle außerdem $\frac{1}{\sqrt[3]{0.7}}$ exakt und notiere auch $\left|\frac{1}{\sqrt[3]{0.7}}-s_i(0.3)\right|$

	$s_i(0.3)$	$\left\lvert\frac{1}{\sqrt[3]{0.7}}-s_i(0.3)\right\rvert$
s_1		
s_2		
s_3		
s_4		
s_5		

c) *(2P)*

- Trage die Ergebnisse (d.h. die Absolutwerte der Differenzen von exaktem Wert und dem i-ten Taylorpolynom) in nachstehendem Diagramm ein.



- Interpretiere das Diagramm.

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.