Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

1 Gegeben ist eine Gleichung, nach der eine physikalische Größe durch andere gemessene Größen berechnet werden kann. In der folgenden Tabelle findest Du in der linken Spalte die Ausgangsdaten für eine Fehlerrechnung, wie sie bei konkreten Messungen auftreten.

a) *(4P)*

$$\rho = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot d^2 \cdot h}$$

- Ermittle zunächst die Einheit des Messergebnisses ρ unter der Voraussetzung, dass Du nur SI-Grundeinheiten (ohne Vorsilben) verwendest.
- Notiere in der rechten Spalte jene Werte, mit der Du eine konkrete Fehlerrechnung durchführen würdest, wenn Du nur SI-Grundeinheiten (ohne Vorsilben) verwendest.

Anmerkung: Die Rechnung ist nicht konkret auszuführen).

Einheit von ρ	
$m = 200\,g \pm 10\,g$	
$d = 0.2\,m \pm 10\,\%$	
$h = 10\,cm \pm 10\,mm$	

1 Gegeben ist eine Gleichung, nach der eine physikalische Größe durch andere gemessene Größen berechnet werden kann. In der folgenden Tabelle findest Du in der linken Spalte die Ausgangsdaten für eine Fehlerrechnung, wie sie bei konkreten Messungen auftreten.

b) *(4P)*

$$\rho = \frac{R \cdot r^2 \cdot \pi}{l}$$

- Ermittle zunächst die Einheit des Messergebnisses ρ unter der Voraussetzung, dass Du nur SI-Grundeinheiten (ohne Vorsilben) verwendest.
- Notiere in der rechten Spalte jene Werte, mit der Du eine konkrete Fehlerrechnung durchführen würdest, wenn Du nur SI-Grundeinheiten (ohne Vorsilben) verwendest.

Anmerkung: Die Rechnung ist nicht konkret auszuführen).

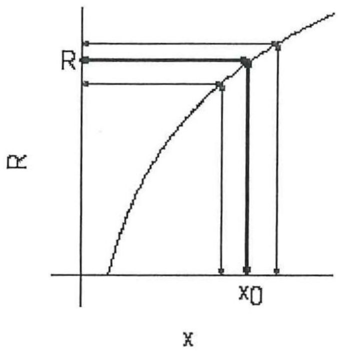
Einheit von ρ	
$r = 2\,mm \pm 1\,\%$	
$l = 2\,m \pm 0.1\,cm$	
$R = 200\,m\Omega \pm 1\,\mu\Omega$	

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

2 Gaußsche Fehlerrechnung:

Für ein Resultat R(x,y) ergibt sich, ausgehend von den Messwerten $x = x_0 + \Delta x$ und $y = y_0 + \Delta y$, als Unsicherheit des Gesamtresultates

$$\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial x} \cdot \Delta x\right| + \left|\frac{\partial R}{\partial y} \cdot \Delta y\right|$$



a) *(2P)* In nebenstehender Skizze ist der Zusammenhang zwischen einem Einzelmessergebnis und dem Gesamtergebnis exemplarisch dargestellt.

- Kreuze die zutreffenden Aussagen an:

O	Wenn die Unsicherheit des Gesamtresultates ΔR größer wird, dann fällt $R(x,y)$.
O	Wenn die Unsicherheit der Einzelmessung Δx größer wird, dann steigt die Unsicherheit des Gesamtresultates ΔR.
O	Wenn die Unsicherheit der Einzelmessung Δx kleiner wird, dann steigt die Unsicherheit des Gesamtresultates ΔR.
O	Wenn $\frac{\partial R}{\partial x}$ größere Werte in (x_0, y_0) annimmt, dann steigt die Unsicherheit des Gesamtresultates ΔR.
O	Wenn $\frac{\partial R}{\partial x}$ kleinere Werte in (x_0, y_0) annimmt, dann fällt die Unsicherheit der Einzelmessung Δx.

b) *(1P)* Aus der berechneten Unsicherheit des Gesamtresultates ΔR können weitere Maße für Fehler berechnet werden.

- Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht:

Wenn die ____1____ Abweichung ΔR durch das Resultat $R(x,y)$ dividiert wird, erhält man die ____2____. Unsicherheit.

1		2	
absolute	O	absolute	O
relative	O	relative	O
mittlere	O	mittlere	O
momentane	O	momentane	O
prozentuelle	O	prozentuelle	O

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

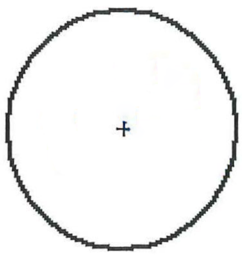
3 Das Elastizitätsmodul E von Festkörpern kann durch die Messung der Dichte ρ und der Schallgeschwindigkeit c im Festkörper bestimmt werden: $c = \sqrt{E/\rho}$.

$\rho = (11.34 \pm 0.1)\ \mathrm{kg/dm^3}$

$c = 1300\ \mathrm{m/s} \pm 1\%$

(Anm.: Blei)

a) *(1P)*	•	Ermittle zunächst die Einheit von E unter der Voraussetzung, dass Du nur SI-Grundeinheiten) verwendest.
b) *(1P)*	•	Berechne E unter Voraussetzung der obigen Messergebnisse.
c) *(1P)*	•	Berechne den absoluten Messfehler von E.
d) *(1P)*	•	Berechne den relativen Messfehler von E.
e) *(1P)*	•	Ermittle die relativen Anteile der Fehler der zugrunde liegenden Messgrößen am Fehler von E.
f) *(1P)*	•	Stelle diese graphisch im vorgegebenen Tortendiagramm dar.



Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Notwendige Bedingungen:	Hinreichende Bedingungen:
$f_x = 0$	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ und $f_{xx} < 0$: Maximum
$f_y = 0$	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ und $f_{xx} > 0$: Minimum

4 Extremwertberechnung:
Gegeben sei nebenstehende Funktion $f(x,y)$.

$$f(x,y) = \frac{12}{(3-x)} + \frac{2}{(1-y)} - 3 \cdot x - 8 \cdot y + 16$$

a) *(1P)*

- Gib die Definitionsmenge an

b) *(4P)* Für die gegebene Funktion erfüllt der Punkt $(1|0,5)$ die notwendigen Bedingungen.

- Überprüfe nachweislich, dass der gegebene Punkt die notwendigen Bedingungen erfüllt.
- Stelle nachweislich fest, ob der gegebene Punkt die hinreichenden Bedingungen erfüllt.
- Kreuze als Folgerung der obigen Überprüfungen an, um welchen besonderen Punkt der Funktion es sich handelt:

O	Maximum
O	Minimum
O	Sattelpunkt

- Gib den Punkt mit allen notwendigen Koordinaten an

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Achtung: Bitte gib bei Regressionsrechnungen den Befehl zur Ermittlung der Ausgleichsfunktion vollständig an!

5 Wohnungen:

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends am Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

a) *(4P)* Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband die Mietpreise in Euro pro m^2 für Wohnungen bis zu $60m^2$ mit gutem Wohnwert erhoben.

Ende des Jahres	Mietpreis in € pro m^2
2003	8,10
2004	7,90
2006	8,50
2007	8,80
2009	9,60
2010	9,70
2012	10,80

Der Mietpreis in € pro m^2 soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

- Ermittle mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wähle t=0 für das Ende des Jahres 2003.
- Interpretiere den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang
- Ermittle mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m^2 für das Ende des Jahres 2018.

b) *(4P)*

- Bestimme als Vergleich diejenige quadratische Regressionsfunktion, die den Mietpreis in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt, wobei für t=0 das Jahr 2003 gewählt werden soll
- Interpretiere den Wert des Achsenabschnitts der Ausgleichsfunktion aus (b) im gegebenen Sachzusammenhang.
- Ermittle mithilfe der Ausgleichsfunktion aus (b), in welchem Jahr der Mietpreis pro m^2 einen Wert von 15€ überschreiten wird.

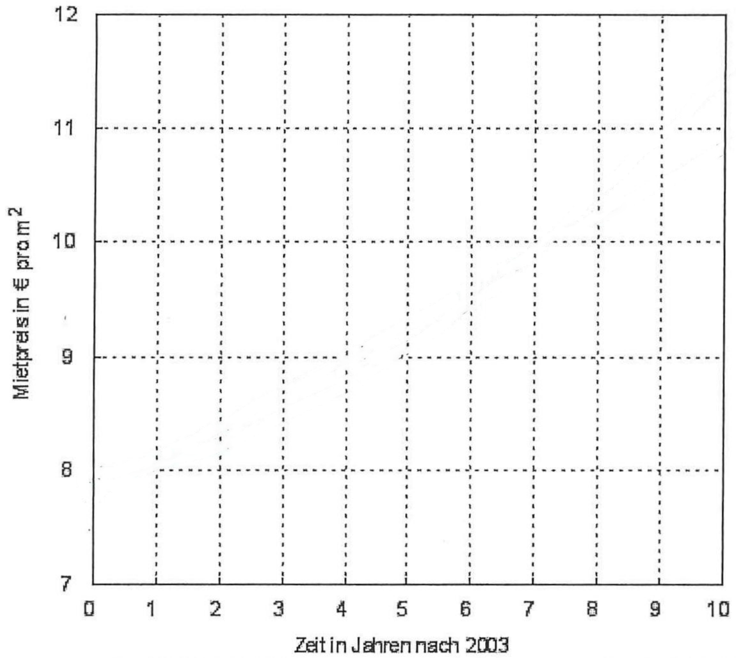
c) *(2 P)*

- Bestimme als Vergleich diejenige exponentielle Regressionsfunktion, die den Mietpreis in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt, wobei für t=0 das Jahr 2003 gewählt werden soll.

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

d) *(2 P)*

- Stelle die lineare Ausgleichsfunktion und die quadratische Ausgleichsfunktion im nachstehenden Diagramm dar.



e) *(2P)*

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t... Zeit in Jahren2003

B(t)... Mietpreis zur Zeit t in € pro m²

- Interpretiere die Bedeutung des Parameters 7,77 im gegebenen Sachzusammenhang

- Interpretiere die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang

Hinweis: Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Achtung: Bitte gib bei Regressionsrechnungen den Befehl zur Ermittlung der Ausgleichsfunktion vollständig an!

6 Fließgeschwindigkeiten:

Die Fließgeschwindigkeit in offenen oder geschlossenen Gewässern hängt von der Querschnittsform des Gerinnes, vom Fließgefälle sowie vom Material des Gerinnes ab. Sie variiert innerhalb des Querschnitts, daher gibt man sie als Durchschnittswert an.
Für die rechnerische Ermittlung der mittleren Fließgeschwindigkeit von Gerinnen eignet sich die Formel nach Manning-Strickler:

$$v_m = k_{st} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

v_m... Mittlere Fließgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde (m/s)

k_{st}... Proportionalitätskonstante $\left(m^{\frac{1}{3}}/s\right)$ (für die Gerinnerauheit)

R... Hydraul. Radius (m) $= \dfrac{\text{vom Wasser durchflossener Querschnitt in } m^2}{\text{benetzter Umfang in m}}$

I... Fließgefälle $= \dfrac{\text{Höhe in m}}{\text{Länge in m}}$

Ein Wasserversorgungsunternehmen zeichnet in einem Intervall von 900 Sekunden (s) die durch unterschiedliche Durchflussmengen schwankende Fließgeschwindigkeit v_m in einem Wasserzuleitungsrohr (Durchmesser $d = 0{,}6\ m$) auf.

Zeit ab Beginn des Beobachtungszeitraums in s	0	180	360	540	720	900
Fließgeschwindigkeit in m/s	1,2	3,4	4,3	4,1	3,0	1,8

a) *(2P)*
- Ermittle mithilfe der Daten der Tabelle eine Ausgleichsfunktion 3.Grades, die den Verlauf der Fließgeschwindigkeit in diesem Zeitintervall beschreibt.

b) *(2P)*
- Entwickle mit dieser Polynomfunktion und mithilfe der Integralrechnung eine Formel für das während des Beobachtungszeitraumes fließende Wasservolumen
  Hinweis: $V = A \cdot v_m(t) \cdot t$
- Berechne das Wasservolumen und runde es auf Kubikmeter genau.