一、大数定律

1、切比雪夫不等式

$P(|X-EX|<\varepsilon)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

(1) Def：EX与DX存在，$\forall\varepsilon>0$，$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$

证：$P(|X-EX|\geq\varepsilon)=\int_{|X-EX|\geq\varepsilon}f(x)dx\leq\int_{|X-EX|\geq\varepsilon}\frac{(X-EX)^2}{\varepsilon^2}f(x)dx$

$(X-EX)^2\geq\varepsilon^2$

$\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(X-EX)^2}{\varepsilon^2}f(x)dx=\frac{DX}{\varepsilon^2}$

例1：白细胞 $EX=7300$，$\sqrt{DX}=700$，求 $P(5200<X<9400)\geq$?

解：$\varepsilon=2100$. $P(|X-7300|<2100)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}=\cdots$

例2：$EX=\mu$，$DX=\sigma^2>0$，求 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}$

解：$P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq\frac{DX}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}$

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

则 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}=1-P\{-3<\frac{X-\mu}{\sigma}<3\}=2-2\Phi_0(3)\approx 0.0027$

2、切比雪夫大数定律

(1) 依概率收敛：$x_n\xrightarrow{P}a$

不一定所有的x_n都在ε的范围内，只要保证极限为1就行

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$P\{|x_n-a|<\varepsilon\}=1$，$\lim_{n\to\infty}P\{|x_n-a|<\varepsilon\}=1$

(2) 伯努利大数定律

n重伯努利实验，A发生了m_n次，p概率，$\frac{m_n}{n}$频率，证 $\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{m_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1$

证：$m_n\sim B(n,p)$　$E(m_n)=np$.　$D(m_n)=np(1-p)$

$E(\frac{m_n}{n})=p$.　$D(\frac{m_n}{n})=\frac{p(1-p)}{n}$

$1\geq P(|\frac{m_n}{n}-p|<\varepsilon)\geq 1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\xrightarrow{n\to\infty}1.\Rightarrow\cdots=1.$

另一种表达(独立同分布)

令 $X_i=\begin{cases}1, & 发生\\ 0, & 不发生\end{cases}$ $EX_i=p$, $DX_i=p(1-p)$, $\frac{m_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$p=E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$，所以 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$

(3) 切大定

$X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 是不相关的变量，EX_i 和 DX_i 都存在，方差有界 $(DX_i\le M)$

$\forall\varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=1$

均值　　期望的均值

(4) 辛钦定理.

$X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，$EX_i=\mu$，方差无要求，

$\forall\varepsilon>0$，$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}$

二、中心极限定理

1. 现象由大量相互独立的因素影响

大量独立同分布的变量和的极限分布是正态分布

2. 定：$X_1,\ldots,X_n,\ldots$ 独立同分布 $EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2>0$ 且有上界

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\le x\right)=\Phi_0(x)$$

令 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $EY=n\mu$，$DY=n\sigma^2$

对于标准化 $\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\sim N(0,1)$，$Y\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

独立

例1：顾客100人，消费金额 $U[0,60]$，求消费总额 >3500 的概率

解：设 X_i 为第 i 个顾客的额，则 $EX_i=30$，$DX_i=60^2/12=300$ $D(\sum X_i)=\sum DX_i$

设 Y 为总额，$EY=100EX_i=3000$，$DY=100\cdot DX_i=3\times10^4$ → 没有平方的!!

$$P(Y>3500)=P\left(\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}>\frac{3500-3000}{100\sqrt{3}}\right)=1-\Phi_0(2.887)$$

3、利-拉，上面的二项分布形式

$Y_n\sim B(n,p)$，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right)=\Phi_0(x)$$

$Y_n=\sum X_i$ $X_i=\begin{cases}1, & 发生\\0, & 不发生\end{cases}$