参数估计：已知总体分布，样本，求参

一、点估计

1、矩估计法

(1) def：　总体的矩 ⟵ 样本的矩　　　原点矩

一阶 ⟵ 一阶　　$A_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$

二阶 ⟵ 二阶　　$A_2=\frac{1}{n}\sum X_i^2$

例1. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是样本，用矩估计 μ 和 σ^2

解：总体一阶 $EX=\mu$，样本一阶 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$，因此 $\hat{\mu}=\overline{X}$

总体二阶 $EX^2=DX+(EX)^2=\sigma^2+\mu^2$

样本二阶 $A_2=\frac{1}{n}\sum X_i^2$

所以 $\hat{\sigma}^2=A_2-\bar{\mu}=\frac{1}{n}\sum X_i^2-\overline{X}=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^2=B_2$ 二阶中心矩

展开可以推回去，$\overline{X}$看作常数

例2. $X\sim P(\lambda)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，估λ

解：$\hat{\lambda}=\overline{X}$，$\hat{\lambda}=B_2$　　　有多少个参数，就要用多少阶

这个更好

例3：$X\sim U[\theta_1,\theta_2]$，$(X_1\cdots X_n)$，估$\theta_1$，$\theta_2$

解：
$$\begin{cases}\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)=\overline{X}\\ \frac{(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)^2}{12}+\frac{(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)^2}{4}=A_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3B_2}\\ \hat{\theta}_2=\overline{X}+\sqrt{3B_2}\end{cases}$$

2、极大似然估计

1) 总体的概率(密度)函数
2) 写似然函数 $L(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$
3) 两边取 ln
4) 两边求导, $=0$, 求出参数

例1：总体 $X\sim P(\lambda)$，$(X_1,X_2,\dots,X_n)$ 样本，求 λ 的极大似然估计

解：总体的概率函数为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(k=0,1,2,\cdots)$

$P(X=x_1)\ P(X=x_2)\cdots$

取每个样本的观测值

则 λ 的极大似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$$

观测值，已知

$$=\frac{\lambda^{x_1+x_2+\cdots+x_n}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(\lambda)=-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i!+(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ln\lambda-n\lambda$$

$$\frac{d(\ln L(\lambda))}{d\lambda}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\lambda}-n=0\Rightarrow\lambda=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\bar{X}$$

例2：改成 $X\sim Exp(\lambda)$

解：$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & else.\end{cases}$，$L(\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_n)}$

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda(x_1+\cdots+x_n)$$

$$\frac{d(\ln L(\lambda))}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-(x_1+\cdots+x_n)=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\bar{X}}$$

例3：改成 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$L(\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-n\mu}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \mu = \bar{X}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = B_2$$

记得是对平方求导

3、点估计的优良性准则

(1) 无偏性　$E\hat{\theta} = \theta$　估计的值以真实值为期望

总体 X，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

① $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计，　$E\bar{X}=\mu$

② 样本方差 S^2 是 σ^2 的无偏估计，$ES^2=\sigma^2$

$\frac{1}{n-1}$

③ 未修正的样本方差 S_0^2 是 σ^2 的有偏估计，

④ $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$g(\hat{\theta})$ 不一定是 $g(\theta)$ 的无偏估计

⑤ $\hat{\mu} = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$，$\Sigma C_i = 1$，则 $\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计.

加权

(2) 有效性．估计值的方差越小越好

例1：总体 X，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

取 $\hat{\mu} = \begin{cases} X_1，此时\ EX_1=\mu\ (无偏)，DX_1=\sigma^2 \\ \bar{X}。此时\ E\bar{X}=\mu，\ D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}\ 更小\ ✓ \end{cases}$

例2：取 $\hat{\mu} = \begin{cases} \sum a_i X_i，其中 \sum a_i = 1，求得 D\hat{\mu} = \sigma^2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \geq \frac{\sigma^2}{n} \\ \bar{X}，D\hat{\mu} = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$

需证 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+\cdots+a_n^2)$
$1=$

(3) 相合性（一致性） 取的样本越多越好

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1$$

二、区间估计

区间长度
以概率多少

1、置信区间

$P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = 1-\alpha$ $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$

置信度 求

置信度：$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 能套住 θ 的概率

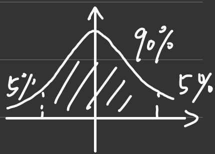
2、枢轴变量

(1) def：① $I = I(T, \theta)$，分布 F_I 已知且与 θ 无关

T 已知的，θ 未知参数

② 给定 $1-\alpha$，确定 F 的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数，上 $(1-\frac{\alpha}{2})$ 分位数 这样可使区间长度最短

$$P(V_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq I(T,\theta) \leq V_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \Rightarrow \theta \text{的区间}$$



3、一个正态总体 均值和方差的区间估计

(1) 总体 σ^2 已知，估计 $\mu \longrightarrow U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ 已知，与 θ 无关

给定 $1-\alpha$，可直接查表得到 $U_{\frac{\alpha}{2}}$ 和 $U_{1-\frac{\alpha}{2}} = -U_{\frac{\alpha}{2}}$

$$-U_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq U_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \bar{X} - \frac{\sigma U_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma U_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

估计

μ	σ^2已知	$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$	$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$
μ	σ^2未知	$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$	$\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$
σ^2	μ已知	$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\underset{\overline{X}}{\mu})^2\sim\chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$
σ^2	μ未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

求

μ σ^2已知 $\overline{X}\sim(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N$

μ σ^2未知 $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

σ^2 μ已知 $\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

σ^2 μ未知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ $S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\overline{X})^2$ $\sim\chi^2(n-1)$

$\mu_1-\mu_2$ σ_1^2, σ_2^2 已知

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$\mu_1-\mu_2$ σ_1^2 σ_2^2 未知，使用 S_1，S_2

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w^2=\frac{(n-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{n+m-2}$$