Chương 5. Trị Riêng - Véc tơ Riêng

GV. Nguyễn Hữu Hiệp

Bộ môn toán Ứng dụng, Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh, 268 Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh.

E-mail: nguyenhuuhiep@hcmut.edu.vn

17th April 2023

Ví dụ 1.

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là phép đối xứng qua mặt phẳng $(P) : x + 2y - 3z = 0$.

(P) có cặp véc tơ chỉ phương $\{a = (2; -1; 0); b = (3; 0; 1)\}$
và véc tơ pháp tuyến là $n = (1; 2; -3)$.

Ta có $f(n) = -1.n \to$ ta nói $n = (1; 2; -3)$ là véc tơ riêng (VTR) của f ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1$.

Ta có $f(a) = 1.a, f(b) = 1.b \to$ ta nói a và b là các VTR của f ứng với TR $\lambda_2 = 1$

Ta có $f(2n) = 2f(n) = -1.2n \to 2n$ cũng là VTR ứng với TR $\lambda_1 = -1$

$f(2a + 3b) = 2f(a) + 3f(b) = 1.(2a + 3b) \to 2a + 3b$ cũng là VTR ứng với TR $\lambda_2 = 1$

$f(a + n) = f(a) + f(n) = a - n$ không cùng phương với $a + n$. Vậy $a + n$ không là VTR của f.

Định nghĩa(TR-VTR)

Cho $A \in M_n(K)$. Nếu có một véc tơ $x \neq 0$ và một số $\lambda \in K$ thoả

$$Ax = \lambda x$$

thì ta nói x là véc tơ riêng ứng với trị riêng λ của ma trận A.

Chú ý

- Ma trận vuông mới có TR và VTR.
- VTR bảo toàn phương qua phép nhân ma trận. VTR phải khác 0.
- TR là hệ số tỷ lệ tương ứng: có thể thực hoặc phức.
- Một ma trận có thể có nhiều TR và VTR.

Tính chất

Cho x là VTR của ma trận $A \in M_n$ ứng với TR λ

- A có TR $\lambda = 0$ khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.
- x là VTR của A^k ứng với TR λ^k. Tổng quát với đa thức $f(x)$ bất kỳ, x cũng là VTR của $f(A)$ ứng với TR $f(\lambda)$.
- Nếu x, y là 2 VTR ứng với 1 TR λ thì $\alpha x + \beta y$ cũng là VTR của A ứng với TR λ.
- Nếu A khả nghịch thì x cũng là VTR của A^{-1} ứng với TR $\dfrac{1}{\lambda}$

Ví dụ 2.

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ và $u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Véc tơ nào là VTR của A. Chỉ rõ TR tương ứng.

Ta có:

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4u.$$

Suy ra u là VTR ứng với TR $\lambda = -4$.

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Suy ra v không là VTR của A.

Ví dụ 3.

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \lambda_0 = -1$ có là TR của A hay không?

Xét $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ thỏa $Ax = \lambda_0 x$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ 6x_1 + 5x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \end{cases}$$

Suy ra $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$ là các VTR ứng với TR -1.

Phương pháp tìm TR và VTR

Giả sử λ là TR của ma trận vuông A, tức là $\exists x \neq 0$.

$$Ax = \lambda x \iff \boxed{(A - \lambda I)x = 0 \iff \det(A - \lambda I) = 0}$$

- $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng.
- Bội của nghiệm λ trong $P_A(\lambda)$ được gọi là bội đại số (BĐS) của λ
- Không gian con $E_\lambda = \{x \in K_n | (A - \lambda I)x = 0\}$ được gọi là không gian con riêng ứng với TR λ
- $\dim(E_\lambda)$ gọi là bội hình học(BHH) của λ.
- Tính chất

$$\boxed{1 \leq BHH(\lambda) \leq BDS(\lambda)}$$

Ví dụ 4.

Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả TR và VTR của A.

Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$

$$P(\lambda) = |-1 - \lambda 3$$

24-$\lambda = \lambda^2 - 3\lambda - 10 \Rightarrow \; TR : \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -2 & (BDS = 1) \\ \lambda_2 = 5 & (BDS = 1). \end{array}\right.$ $\lambda_1 = -2$, giải hệ

$(A + 2I)x = 0 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -t \end{cases}$

KG con riêng $E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow BHH(-2) = 1.$

Ví dụ 5.

Cho $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả TR và VTR của A.

TR $\left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -2 & (BDS = 1) \\ \lambda_2 = 5 & (BDS = 1). \end{array}\right.$

KG con riêng $E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow BHH(-2) = 1.$

Tương tự, với $\lambda_2 = 5 \Rightarrow E_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow BHH(5) = 1$

Ví dụ 6.

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả TR và VTR của A.

Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 57\lambda + 72 \Rightarrow TR : \left[\begin{array}{l} \lambda = 3(BDS(3) = 2) \\ \lambda = 8(BDS(8) = 1) \end{array}\right.$.

$\lambda = 3 \Rightarrow$ cơ sở của E_3 là $\{(2; 1; 0)^T, (3; 0; -2)^T\}$

$\lambda = 8 \Rightarrow$ cơ sở của E_8 là $\{(1; 1; 2)^T\}$

Hai ma trận đồng dạng

Hai ma trận vuông $A, B \in M_n$ gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận khả nghịch $P \in M_n$ thỏa

$$A = PBP^{-1}.$$

Tính chất

Cho 2 ma trận $A, B \in M_n$ đồng dạng. Khi đó

- $r(A) = r(B)$
- $\det(A) = \det(B)$
- $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$
- Cùng tập trị riêng.
- BHH và BĐS của mỗi trị riêng bằng nhau.

Chéo hoá ma trận

Cho $A \in M_n(K)$ gọi là chéo hoá được nếu A đồng dạng với một ma trận chéo, tức là tồn tại ma trận chéo D và ma trận khả nghịch P sao cho $A = PDP^{-1}$

Định lý

Cho ma trận $A \in M_n$, các mệnh đề sau tương đương

- A chéo hoá được.
- A có n véc tơ riêng ĐLTT
- Cho mỗi TR λ của $A: BHH(\lambda) = BDS(\lambda)$.

Hơn nữa, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ gồm các TR trên đường chéo

và $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$ có các cột là các cơ sở của E_λ tương ứng.

Để chéo hoá, ta cần chỉ ra ma trận chéo D và ma trận khả nghịch P: $A = PDP^{-1}$

Điều này tương đương với tìm TR và VTR của ma trận A.

Ví dụ 7.

Chéo hoá ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ (nếu được).

$P(\lambda) = |1 - \lambda 4$

66-$\lambda = \lambda^2 - 7\lambda - 18 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -2, & BDS(-2) = 1 \\ \lambda_2 = 9, & BDS(9) = 1 \end{array} \right.$.

$$\lambda_1 = -2 : \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad BHH(-2) = 1.$$

$$\lambda_2 = 9 : \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow E_9 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad BHH(9) = 1$$

Ví dụ 8.

Chéo hoá ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (nếu được).

$P(\lambda) = |3 - \lambda - 1$
11-$\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = 2, \qquad BDS(2) = 1.$

$\lambda = 2$, giải hệ $(A - 2I)x = 0$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad BHH(2) = 1 < BDS(2).$$

Vậy A không chéo hoá được.

Ví dụ 9.

Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (nếu được).

Đa thức đặc trưng của ma trận cấp 3

$$\boxed{P_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det(A).}$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & (\text{BDS}=1) \\ \lambda_2 = -2 & (\text{BĐS}=2). \end{array}\right.$$

$\lambda_2 = -2$, giải hệ $(A + 2I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad BHH(-2) = 1 < BDS(-2)$$

Ví dụ 10.

Biết $A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ có một TR $\lambda = 6$.

a/ Tìm m, b/ Chéo hoá A c/ Tính A^{21}. d/ Tìm $B \in M_2(R) : B^3 = A$.

a/ Vì A có TR $\lambda = 6$ nên $\det(A - 6I) = 0 \iff |m3$
$25 = 0 \iff m = 0$

.

Ví dụ 10(tt).

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b/ Chéo hoá A c/ Tính A^{21} d/ Tìm $B \in M_2(R) : B^3 = A$.

b/ Đa thức đặc trưng của ma trận cấp hai

$$\boxed{P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)}$$

$$P_A(\lambda)\lambda^2 - 5\lambda - 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1, & BDS = 1 \\ \lambda_2 = 6, & BDS = 1 \end{array} \right. .$$

$$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle : BHH = 1 = BDS.$$

Ví dụ 10(tt).

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} : A = PDP^{-1}$$

c/ Tính A^{21} d/ Tìm $B \in M_2(R) : B^3 = A$.

c/ $A^{21} = PD^{21}P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{21} & 0 \\ 0 & 6^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

d/ Ta có $B^3 = A = PDP^{-1} \Rightarrow P^{-1}B^3P = D \iff (P^{-1}BP)^3 = D$

$$\Rightarrow P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{6} \end{pmatrix} \iff B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ví dụ 11.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & m \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ có 1 VTR là $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a/ Tìm m. b/ Chéo hoá A c/ Tính A^{22} d/ Tìm $B \in M_2(R) : B^3 = A$.

a/ Giả sử λ là TR ứng với VTR $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ta có $Ax = \lambda x$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & m \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} m \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ \lambda = 3. \end{cases}$$

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

b/ Chéo hóa $A = PDP^{-1}$: $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c/ $A^{22} = PD^{22}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

d/ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt[3]{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

TR-VTR của ánh xạ tuyến tính

Cho KGVT n chiều X trên trường số K và phép biến đổi tuyến tính $f : X \to X$. Véc tơ $x \neq 0$ và số $\lambda \in K$ gọi là VTR và TR của f nếu

$$f(x) = \lambda x.$$

f gọi là chéo hoá được nếu tồn tại một cơ sở B sao cho ma trận của f là ma trận chéo

Gọi A là ma trận của f trong cơ sở chính tắc: $f(x) = Ax$.
TR và VTR của ma trận A và f là giống nhau.

Định lý

Cho pbđtt $f : X \to X$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là A. Khi đó

- TR và VTR của ma trận A và f là giống nhau.
- f chéo hoá được khi và chỉ khi f có n VTR độc lập tuyến tính.
- Gọi $B = \{v_1; v_2; ..; v_n\}$ là cơ sở gồm các VTR. Khi đó, ma trận của f trong cơ sở B là ma trận chéo

$$A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

trong đó, $\lambda_k, k = 1.., n$ là các TR tương ứng với các VTR $v_k, k = 1, 2.., n$.

NX: f chéo hoá được $\iff$ A chéo hoá được. Các tính chất về TR, VTR của f được xác định tương tự như ma trận.

Ví dụ 10.

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1; x_2) = (-x_1 + 3x_2; 4x_1 + 3x_2)$. Chéo hoá f nếu được.

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 15 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = -3, & BDS = 1 \\ \lambda_2 = 5, & BDS = 1 \end{array}\right.$

$E_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, BHH = 1 = BDS.$

Vậy f chéo hoá được. Chọn cơ sở $B = \{(3; -2), (1; 2)\}$. Suy ra

$$A_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 11.

Cho axtt $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, biết

$$f(1;1;1) = (1;-7;9), f(1;0;1) = (-7;4;-15), f(1;1;0) = (-7;1;-12).$$

Chéo hóa f (nếu được).

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = f(E)E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -7 \\ -7 & 4 & 1 \\ 9 & -15 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 8 & 8 \\ 12 & -11 & -8 \\ -36 & 24 & 21 \end{pmatrix}$$

Phương trình đặc trưng

$$-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 : BDS = 1 \\ \lambda_2 = -3 : BDS = 2. \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 8 & 8 \\ 12 & -11 & -8 \\ -36 & 24 & 21 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 1 : BDS(1) = 1, \lambda_2 = -3, BDS(-3) = 2.$$

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, BHH(1) = 1. \qquad E_{-3} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, BHH(-3) = 2 = BDS.$$

Vậy f chéo hoá được. Đặt $B = \{(1,-1,3),(2,1,0),(2,0,1)\}$

$$\Rightarrow A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 12.

Cho axtt $f : R^3 \longrightarrow R^3$ có ma trận trong cơ sở $E = \{(1;1;2),(1;2;1),(1;1;1)\}$ là $A_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Chéo hoá f nếu được.

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là $A = EA_EE^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 4 \\ -21 & 12 & 6 \\ -24 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

Trị riêng $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

$$E_0 = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_2 = \left\langle v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_4 = \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Vì BHH=BĐS nên f chéo hoá được.

Chọn cơ sở $E = \{v_1; v_2; v_3\} \Rightarrow A_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ví dụ 13.

Cho axtt $f: R^3 \longrightarrow R^3$ biết f có 3 TR là $2, 1, 0$ và 3 VTR tương ứng là $(1; 1; 1), (1; 2; 1), (1; 1; 2)$. Tìm $f(x)$.

Theo giả thiết ta có:

$$f(1;1;1) = 2(1;1;1) = (2;2;2), \quad f(1;2;1) = 1.(1;2;1), \quad f(1;1;2) = 0.$$

Đặt $E = \{(1;1;1), (1;2;1), (1;1;2)\}$. Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = f(E).E^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vậy $[f(x_1; x_2; x_3)] = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - 2x_3 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$

Ví dụ 14.

Cho $f : R^3 \to R^3$ là phép đối xứng qua mặt phẳng $(P) : x + 2x_2 + 3x_3 = 0$.
a/ Chéo hoá f nếu được. b/ Tìm $f(x_1; x_2; x_3)$

a/ (P) có cặp vtcp là $\{a = (2; -1; 0), b = (3; 0; -1)\}$ và vtpt là $n = (1; 2; 3)$

Xét cơ sở $E = \{a; b; n\}$: $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \\ f(n) = -n \end{cases} \Rightarrow A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b/ $[f(x)] = A[x] = E^{-1}AEx =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_1 - 2x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 15

Giải phương trình vi phân $\begin{cases} x_1'(t) = -x_1 + 2x_2 \\ x_2'(t) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$

Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Hệ trở thành $X' = AX$.

Chéo hoá $A = PDP^{-1}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = [P_1 \quad P_2]$.

Đặt $X = PY \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = -y_1 + 3y_2 \end{cases}$,

hệ trở thành

$PY' = PDP^{-1}.PY \iff Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = -2y_1 \\ y_2' = 5y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = C_1 e^{-2t} \\ y_2 = C_2 e^{5t} \end{cases}, C_1, C_2 \in$

Suy ra

$$X = PY = [P_1 \quad P_2] \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Xét hệ phương trình vi phân $X' = A.X$. Giả sử A chéo hoá thực được

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$$

Khi đó, nghiệm của hệ vi phân là

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} P_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} P_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} P_n, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 16

Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x_1'(t) = x_1 + 3x_2 \\ x_2'(t) = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ trị riêng $\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1(BDS = 1) \\ \lambda_2 = 7(BDS = 1) \end{array}\right.$

$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, BHH(-1) = 1$ và $E_7 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, BHH(7) = 1$

Nghiệm của hệ là

$$X = C_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 17

Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2 + 2x_3 \\ x_2'(t) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_3'(t) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ trị riêng $\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1(BDS = 1) \\ \lambda_2 = -2(BDS = 1) \\ \lambda_3 = 4(BDS = 1) \end{array}\right.$

$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,, E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, và $E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Nghiệm của hệ là $X = C_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \end{pmatrix}, C_K \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 18

Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ nếu được.

Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$.

Trị riêng $\left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \text{(BĐS=1)} \\ \lambda_2 = -2 & \text{(BĐS=2)}. \end{array} \right.$

$\lambda_1 = 1$, giải hệ $(A - 1I)x = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha.$$

$\lambda_2 = -2$, giải hệ $(A + 2I)x = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta.$$

Cơ sở E_{-2} là $\left\{ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ và BHH=2=BĐS.

Vậy A chéo hóa được: $P^{-1}AP = D$ với

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 19

Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ nếu được.

Đa thức đặc trưng: $P(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Trị riêng $\left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & (\text{BĐS}=1) \\ \lambda_2 = -2 & (\text{BĐS}=2). \end{array} \right.$

$\lambda_2 = -2$, giải hệ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vì $BHH = 1 < BDS = 2$ nên A không chéo hóa được.

Ví dụ 20

Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & m \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ có một TR $\lambda = -2$.

a/ Tìm m b/ Chéo hóa A nếu được c/ Tìm $B \in M_3(R) : B^3 = A$.

a/ A có TR $\lambda = -2 \iff \det(A - (-2)I) = 0$

$\iff |-123$

10m

-155$= 0 \iff 21 - 7m = 0 \iff m = 3$.

b/ Với $m = 3$ suy ra $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 19\lambda + 14 \Longrightarrow TR \begin{cases} \lambda_1 = -2 : BDS = 1 \\ \lambda_2 = -1 BDS = 1 \\ \lambda_3 = 7 BDS = 1 \end{cases}.$$

A có 3 TR phân biệt nên chéo hóa được.

$\lambda_1 = -2$. Giải hệ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} \alpha.$

$\lambda_2 = -1$. Giải hệ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \alpha.$

$\lambda_3 = 7$. Giải hệ $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \alpha.$

Ta viết $A = PDP^{-1}$, trong đó

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

c/Tìm B ở dạng $B = PD'P^{-1}$. Ta cần tìm D' sao cho $B^3 = A$

$$\Longleftrightarrow PD'^3P^{-1} = PDP^{-1} \Longleftrightarrow D'^3 = D.$$

Chọn $D' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{7} \end{pmatrix}$. Khi đó, ma trận B là

$$B = PD'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ví dụ 21.

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & m & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm m để $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ là VTR của A. Với m vừa tìm được, hãy chéo hóa A nếu được.

x là VTR của A nếu tồn tại số λ thỏa $Ax = \lambda x$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & m & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\lambda \\ -m - 4 = -\lambda \\ -1 = -\lambda. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Vậy với $m = -3$ thì x là VTR ứng với TR $\lambda = 1$

Lúc này, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \Longrightarrow TR\ \lambda = 1 : BDS = 3.$

Với $\lambda = 1$, giải hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Rõ ràng $r = 1 \Longrightarrow BHH = 3 - r = 2 < BDS$. Vậy A không chéo hóa được.

Ví dụ 22

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & m & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm m để $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ là VTR của A. Với m vừa tìm được, hãy chéo hóa A nếu được.

x là VTR của A nếu tồn tại số λ thỏa $Ax = \lambda x$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & m & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5 = 5\lambda \\ -m - 4 = -\lambda \\ -1 = -\lambda. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Vậy với $m = -3$ thì x là VTR ứng với TR $\lambda = 1$

Lúc này, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \Longrightarrow TR\ \lambda = 1 : BDS = 3.$

Với $\lambda = 1$, giải hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Rõ ràng $r = 1 \Longrightarrow BHH = 3 - r = 2 < BDS$. Vậy A không chéo hóa được.

Ví dụ 23

Tìm ma trận vuông có TR là $2, -3, 1$ và có VTR tương ứng là

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A có 3 VTR v_1, v_2, v_3 ĐLTT nên chéo hóa được

$$A = PDP^{-1}$$

trong đó

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -7 & 7 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 24

Chéo Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, biết

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 10x_2 - 5x_3, 2x_1 + 14x_2 + 2x_3, -4x_1 - 8x_2 + 6x_3).$$

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. Trị riêng $\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 10 \end{array}\right.$

$E_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$, $BHH(5) = 1$ và $E_{10} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $BHH(10) = 2$.

$BHH = BDS \Rightarrow f$ chéo hoá được.

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ví dụ 25

Chéo hoá $f : R^3 \longrightarrow R^3$, biết ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1;1;1),(1;1;2),(1;2;1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 14 & 25 & 14 \end{pmatrix}$

Ma trận của f trong CS chính tắc $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 8 \\ 12 & -3 & 19 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Trị riêng

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 3(BDS = 1) \\ \lambda = 6(BDS = 2) \end{array}\right.$$

$$E_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow BHH(6) = 1 < BDS(6).$$

Ví dụ 26

Giải hệ vi phân $\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1 + 5x_2 \\ x_2'(t) = 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$

Ví dụ 27

Giải hệ vi phân $\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1 + x_2 \\ x_2'(t) = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$

Ví dụ 28

Giải hệ vi phân $\begin{cases} x_1'(t) = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2'(t) = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ x_3'(t) = 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \end{cases}$

Ví dụ 29

Giải hệ vi phân $\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2'(t) = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ x_3'(t) = 3x_1 + 1x_2 \end{cases}$

THANK YOU FOR ATTENTION