

GYMNASE DE RENENS

TRAVAIL DE MATURITE 2020

# GRAPHES DANS LE PLAN ET COLORATION

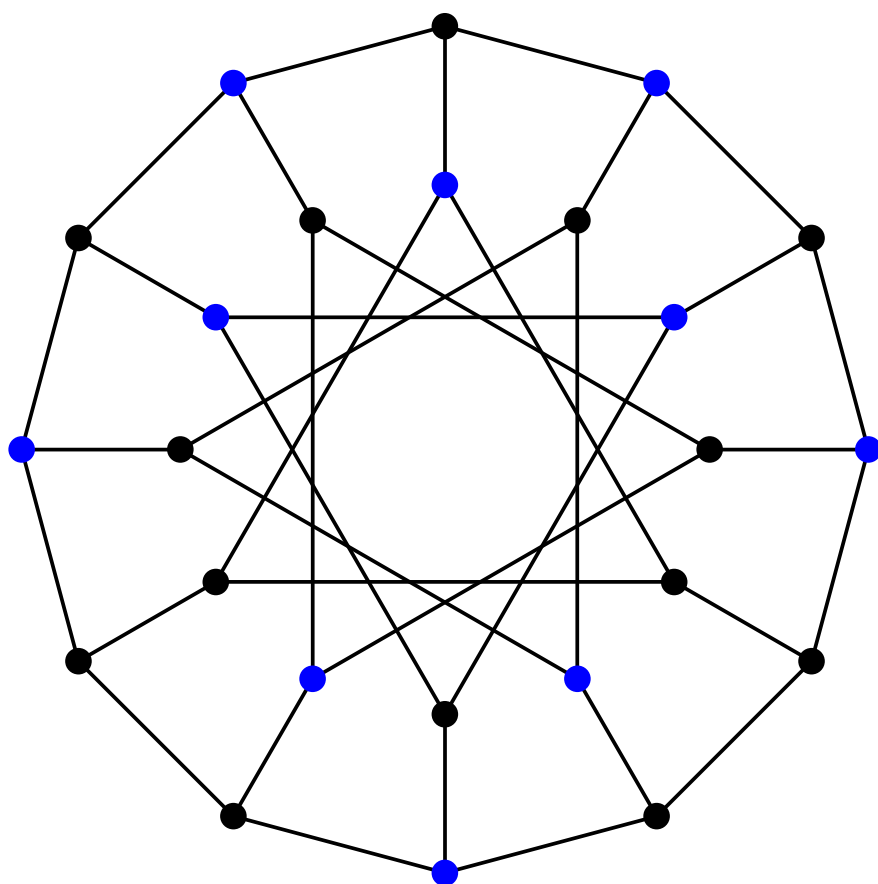
Répondant  
M. Moustakis

Laurent COSTA et Thomas MULLER

Renens, novembre 2019 - décembre 2020

# Graphes dans le plan et coloration

Thomas Muller & Laurent Costa



# Préface

L'objectif de ce travail est de présenter le théorème de Kuratowski ainsi que le théorème des quatre couleurs. Il est séparé en deux parties. On trouve dans la première partie les définitions de base de la théorie des graphes et la preuve du théorème de Kuratowski.

La deuxième partie contient la preuve du théorème des quatre couleurs.

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>0 Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Graphes non-orientés dans le plan</b>	<b>3</b>
1.1 Sous-graphes, cycles et arbres . . . . .	5
1.2 Formule d'Euler . . . . .	8
1.3 Théorème de Jordan . . . . .	9
1.4 Théorème de Kuratowski . . . . .	11
<b>2 Coloration de graphes</b>	<b>19</b>
2.1 Théorème des quatre couleurs . . . . .	19
2.2 Conjecture de Hugo Hadwiger . . . . .	23
2.3 Théorème de Brooks . . . . .	24
<b>3 Applications</b>	<b>26</b>
3.1 Sudokus . . . . .	26
3.2 Fréquences radios . . . . .	26
3.3 Système de navigations . . . . .	27
<b>Bibliographie</b>	<b>29</b>
<b>A Illustrations</b>	<b>30</b>

## 0 Introduction

Un graphe peut être représenté comme des points et des traits qui les relient. On peut les dessiner dans le plan, l'espace, sur une sphère, un cylindre, un tore et bien d'autres figures. On peut aussi donner un sens aux traits. Ces graphes sont appelés *orientés*. Dans ce travail, nous nous intéresserons seulement aux graphes non-orientés dans le plan.

## 1 Graphes non-orientés dans le plan

**Définition 1.1.** Un *graphe* non orienté  $G = (V, E)$  est défini par deux ensembles :

- Un ensemble  $V$  non vide de sommets que l'on notera  $v$  ;
- Un ensemble  $E$  d'arêtes qui ont pour extrémités les sommets de l'ensemble  $V$ . On notera  $e = \{v_p, v_q\}$  les éléments de  $E$ , où  $v_p$  et  $v_q$  sont des éléments de  $V$  représentant les extrémités de l'arête. Deux sommets  $v_p, v_q$  sont *adjacents* ou *voisins*, s'il existe  $e = \{v_p, v_q\}$  dans  $E$ . Un sommet  $v$  est *incident* à une arête  $e$  si  $v$  est une extrémité de  $e$ .

**Définition 1.2.**

1. Une *boucle* dans un graphe non orienté  $G = (V, E)$  est une arête  $\{v_p, v_q\}$  où  $v_p = v_q$ .
2. Un *multigraphe* est un graphe où pour une paire de sommets, il peut exister plusieurs arêtes.
3. Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *simple* s'il n'est pas un multigraphe et qu'il ne comporte pas de boucle.

Comme nous n'étudierons pas de graphes non-simples ni de graphes orientés dans le cadre de ce travail, nous écrirons simplement graphe au lieu de graphe simple non-orienté.

**Définition 1.3.** Un graphe  $G = (V, E)$  est *planaire* si on peut le représenter dans le plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.

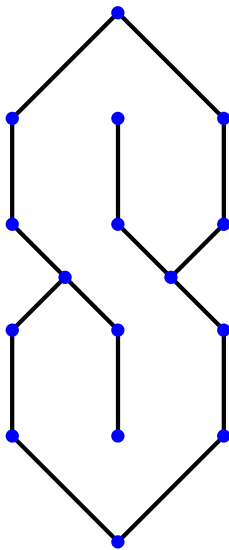


FIGURE 1 – Graphe planaire

**Définition 1.4.** Soit  $G = (V, E)$  ainsi que  $v$  et  $w$  deux éléments de  $V$ . On appelle *chaîne* toute suite finie consécutive d'arêtes reliant  $v$  à  $w$  et on la note  $\mu(v, w)$ . On note aussi  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  où chaque paire de sommets  $\{v_p, v_{p+1}\}$  est une arête pour tout  $p = 1, \dots, n-1$ . Une chaîne est dite *simple* si pour tout  $p, q = 1, \dots, n-1$  et  $p \neq q$  on a  $\{v_p, v_{p+1}\} \neq \{v_q, v_{q+1}\}$ . C'est à dire qu'elle ne passe pas deux fois par une même arête. Une chaîne est *élémentaire* si pour tout  $p, q = 1, \dots, n-1$  on a  $v_p \neq v_q$ . C'est à dire qu'elle ne passe pas deux fois par un même sommet.

**Définition 1.5.** Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *connexe* si pour toute paire de sommets  $v, w$  de  $V$ , il existe une chaîne  $\mu(v, w)$  reliant les sommets  $v$  et  $w$ .

**Définition 1.6.** Un graphe à  $n$  sommets est dit *complet* si pour toute paire de sommets  $v, w$  de  $V$ ,  $e = \{v, w\}$  est dans  $E$ . On notera alors  $K_n$ .

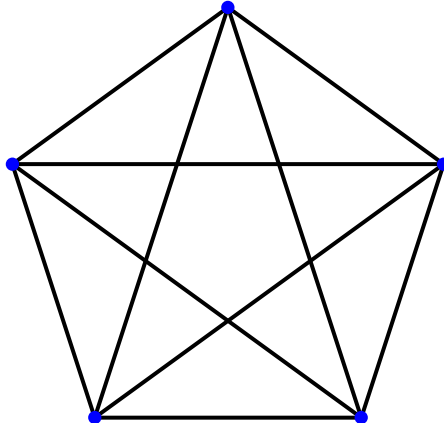


FIGURE 2 – Graphe complet  $K_5$

**Définition 1.7.** Un graphe est dit *biparti* si son ensemble de sommets  $V$  peut être séparé en deux ensembles  $U$  et  $W$  disjoints tel que tout arête  $e$  dans  $E$  ait une extrémité dans  $U$  et l'autre dans  $W$ .

Un graphe est *biparti complet* s'il est biparti et si pour toute paire de sommet  $(u, w)$  de  $U \times W$ , l'arête  $e = \{u, w\}$  est dans  $E$ . On notera alors  $K_{m,n}$ , où  $m$  est le nombre de sommets de l'ensemble  $U$  et  $n$  le nombre de sommets de l'ensemble  $W$ . À noter que le cas  $m = n$  est possible.

**Exemple 1.** *L'énigme des maisons* est un parfait exemple de graphe biparti. La question est la suivante : Il y a trois maisons qui ont chacune besoin d'eau, d'électricité et de gaz. Pour cela on les relie avec des câbles et des canalisations à trois usines dont la première fournit l'électricité, la deuxième l'eau et la troisième le gaz. Pour des raisons de sécurité, les câbles ne doivent pas se croiser.

On voit bien qu'on a un ensemble de sommets séparés et deux sous-ensembles disjoints, les sommets "maisons" et les sommets "usines". Ce graphe illustre le graphe  $K_{3,3}$ .

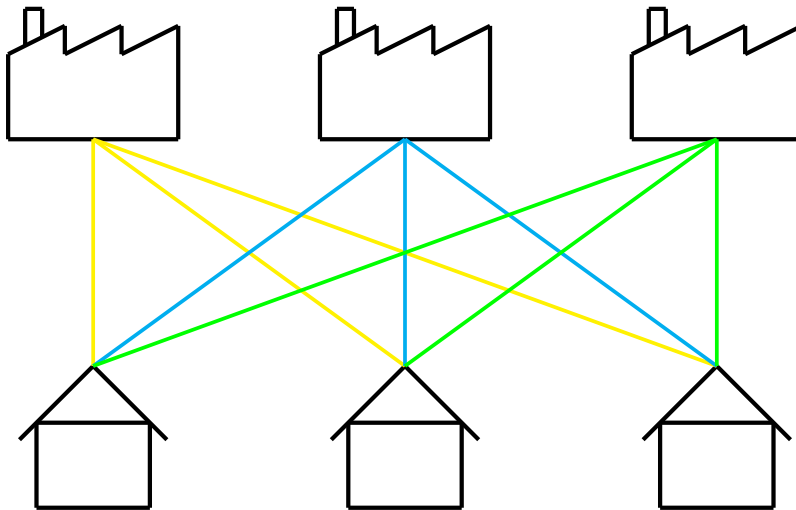


FIGURE 3 – Trois maisons et trois usines

**Définition 1.8.**

1. Le *degré* d'un sommet  $v$  est le nombre d'arêtes connectées à ce sommet. On le note  $\deg(v)$ .
2. Le *degré maximal* d'un graphe  $G = (V, E)$ , noté  $\Delta(G)$  est le nombre

$$\max_{v \in V} \deg(v).$$

3. Le *degré minimal* d'un graphe  $G = (V, E)$ , noté  $\delta(G)$  est le nombre

$$\min_{v \in V} \deg(v).$$

4. Le *degré moyen* d'un  $G = (V, E)$ , noté  $\deg(G)$  est le nombre

$$\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{|V|}.$$

**Proposition 1.** Le degré moyen d'un graphe  $G = (V, E)$  est  $\deg(G) = \frac{2 \cdot |E|}{|V|}$ .

*Démonstration.*

$$\deg(G) = \frac{\sum_{v \in V} \deg(v)}{|V|} = \frac{2 \cdot |E|}{|V|}.$$

□

## 1.1 Sous-graphes, cycles et arbres

**Définition 1.9.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe, on appelle *graphe partiel* de  $G$  le graphe  $G_1 = (V, E')$  où  $E' \subset E$ . Si  $V' \subset V$ , alors  $G_2 = (V', E(V'))$  est un *sous-graphe* de  $G$ , où  $E(V')$  est l'ensemble des arêtes de  $E$  tel que leurs deux extrémités appartiennent à  $V'$ .

Ainsi,  $G_1$  est obtenu en enlevant un certain nombre d'arêtes à  $G$  (fini ou non) et  $G_2$  est obtenu en enlevant un certain nombre de sommets à  $G$  ainsi que toutes les arêtes incidentes aux sommets enlevés.

$G_2$  peut également être obtenu en contractant une arête  $\{u, w\}$ , c'est à dire que les extrémités de celle-ci sont fusionnées en un sommet  $v$  et que tous les sommets voisins de  $u$  et  $w$  sont désormais reliés à  $v$ .

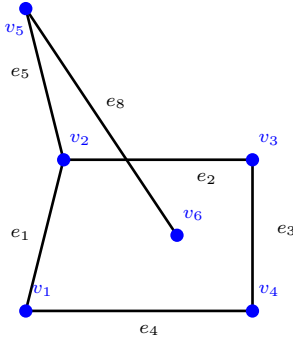


FIGURE 4 – Graphe partiel  $G_1$

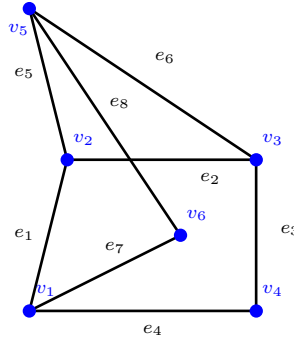


FIGURE 5 – Graphe  $G$

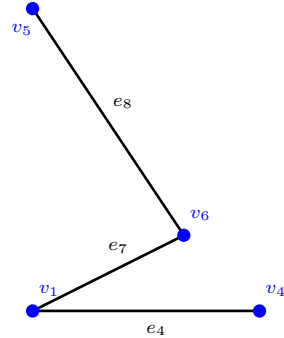


FIGURE 6 – Sous-graphe  $G_2$

Le graphe au centre est  $G = (V, E)$ , où  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  et  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ .

Le graphe de gauche  $G_1 = (V, E')$ , où  $E' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_8\}$  est le graphe partiel de  $G$ .

Le graphe de droite  $G_2 = (V', E(V'))$ , où  $V' = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$  et  $E(V') = \{e_4, e_7, e_8\}$  est le sous-graphe de  $G$ .

Si  $H$  est un sous-graphe de  $G$ , on dit que  $G$  *contient*  $H$  ou que  $H$  est *contenu* dans  $G$ .

**Définition 1.10.** Un *cycle* est une chaîne  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , où  $\{v_1, v_n\}$  est une arête. Un cycle est dit *simple* si la chaîne qui le définit est simple et il est dit *élémentaire* si la chaîne qui le définit est élémentaire.

La *longueur* d'un cycle est le nombre d'arêtes que comporte le cycle. Ce cycle est dit *pair* si la longueur est un nombre pair et *impair* sinon.

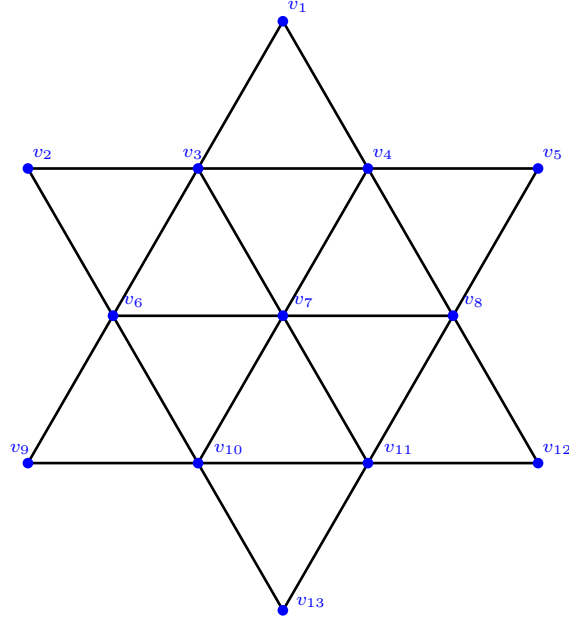


FIGURE 7 – Un graphe comportant des cycles

**Exemple 2.** Dans la Figure 7, on peut observer de nombreux cycles. Par exemple, on peut trouver les cycles  $\{v_1, v_3, v_2, v_6, v_7, v_4\}$  et  $\{v_3, v_6, v_{10}, v_{11}, v_8, v_4\}$ .

**Proposition 2.** Soit  $G = (V, E)$  un cycle. Alors  $G$  est biparti si et seulement si  $G$  est de longueur paire.

*Démonstration.* Soit  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}\}$  un cycle de longueur paire. En séparant les sommets d'indices pairs et les sommets d'indices impairs en deux sous-ensembles de  $V$ , on trouve une structure de graphe biparti. Soit maintenant un cycle  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  biparti ainsi que  $U$  et  $W$  deux sous-ensembles disjoints de  $V$ . Prenons le sommet  $v_1$  qui est dans  $U$  et qui est relié à  $v_2$  et  $v_n$  qui sont dans  $W$ . Comme le cycle est biparti, un nombre pair d'arêtes est nécessaire pour relier  $v_2$  et  $v_n$ . Donc le cycle est pair.  $\square$

**Corollaire 1.** Un graphe biparti ne contient pas de cycle impair.

**Définition 1.11.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et fini. Une arête  $e \in E$  est un *isthme* ou un *pont* si le graphe  $G - \{e\}$  est non-connexe. Si  $H = (V', E')$  est un sous-graphe partiel de  $G$  tel qu'il soit connexe et que pour tout  $u \in V - V'$ , il n'existe pas de  $v \in V'$  tel que  $\{u, v\} \in E$ , alors il s'agit d'une *composante* connexe de  $G$ . Le nombre de composantes connexes de  $G$  est noté  $\omega(G)$ .

**Définition 1.12.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et fini. La *subdivision* de tout  $e \in E$  est l'opération qui consiste à remplacer  $e$  par une chaîne de longueur 2, avec un sommet interne ajouté au graphe. L'opération inverse, le *lissage* d'un sommet  $v \in V$  incident à deux arêtes  $e_1, e_2 \in E$ , consiste à supprimer  $v$  et de remplacer  $e_1$  et  $e_2$  par l'arête  $e$  dont les extrémités sont les deux autres extrémités de  $e_1$  et  $e_2$  respectivement. La *subdivision* du graphe  $G$  est le graphe  $H$  que l'on construit grâce à une série de subdivisions sur les arêtes de  $G$ . On dit alors que les graphes  $G$  et  $H$  sont *homéomorphes*.

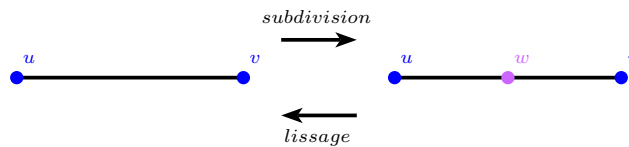


FIGURE 8 – Lissage et subdivision de l'arête  $uv$



**Définition 1.13.** Un *arbre* est un graphe connexe qui ne comporte pas de cycle. Dans un arbre, un sommet de degré 1 est appelé une *feuille*. Une *forêt* est un ensemble d'arbres non connectés.

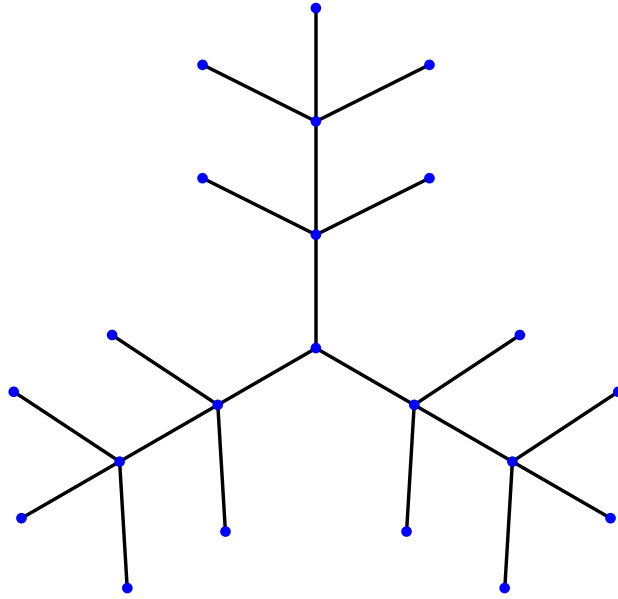


FIGURE 9 – Un arbre

**Proposition 3.** *Tous les arbres ont au moins une feuille.* [1][2]

*Démonstration.* Premièrement, on doit montrer que tout arbre à  $n$  sommets possède  $n - 1$  arêtes. On procède par récurrence sur  $n$  le nombre de sommets. Prenons un sommet sans arête, c'est bien un arbre. Supposons maintenant que  $n > 1$  et que l'affirmation est vraie pour tout  $i < n$ , c'est à dire que pour tout  $i < n$ , un arbre à  $i$  sommets possède  $i - 1$  arêtes.

Prenons un arbre sur  $n$  sommets, choisissons une de ses arêtes  $e$  et supprimons-la. Le graphe résultant n'est plus connexe : sinon rajouter l'arête  $e$  provoquerai un cycle. De plus chacune des parties du graphe est connexe : sinon l'arbre original ne serait pas connexe non plus. Supposons que ces parties connexe contiennent respectivement  $m$  et  $n - m$  sommets. Par hypothèse de récurrence, elles ont  $m - 1$  et  $n - m - 1$  arêtes. Ainsi le nombre total d'arêtes de l'arbre original est  $1 + (m - 1) + (n - m - 1) = n - 1$ .

Maintenant, montrons que tout arbre  $G$  possède au moins une feuille.

Soit  $G$  un arbre à  $n$  sommets. On suppose par l'absurde que  $G$  n'a aucune feuille. Cela implique que  $\deg(G) \geq 2$ . Or, par la Proposition 1,

$$2 \leq \deg(G) = \frac{2 \cdot |E|}{|V|} = \frac{2 \cdot (n - 1)}{n} = 2 - \frac{1}{n} \quad (1)$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc tout arbre possède au moins une feuille.  $\square$

**Proposition 4.** *Un arbre est un graphe biparti.*

*Démonstration.* Soit  $G = (V, E)$  un arbre. On travaille par récurrence sur le nombre  $n$  de ses sommets. Si  $n = 2$ ,  $G$  est simplement composé d'une arête et de sa paire de sommets que l'on peut aisément séparer en deux ensembles  $U$  et  $W$ .

Supposons maintenant qu'un arbre à  $n$  sommets soit biparti et prouvons que c'est également le cas pour un arbre à  $n + 1$  sommets. Par la Proposition 3, il existe dans cet arbre une feuille  $v$ . En la retirant avec l'arête qui lui est incidente, on obtient un arbre à  $n$  sommets qui est biparti par hypothèse de récurrence. En rajoutant la feuille  $v$ , on retrouve un graphe biparti.  $\square$

## 1.2 Formule d'Euler

Euler a beaucoup apporté en théorie des graphes, notamment la *formule d'Euler*, composante essentielle des graphes planaires, liant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire.

**Définition 1.14.** Une *face*  $f$  de  $G = (V, E)$  est une région du plan délimitée par un ensemble d'arêtes de  $E$  et qui n'en contient pas. On note  $F(G)$  l'ensemble des faces de  $G$ .

**Théorème 1** (Formule d'Euler). [3] Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire connexe,  $\sigma$  son nombre de sommets,  $\epsilon$  son nombre d'arêtes et  $\rho$  le nombre de faces. Alors

$$\sigma - \epsilon + \rho = 2.$$

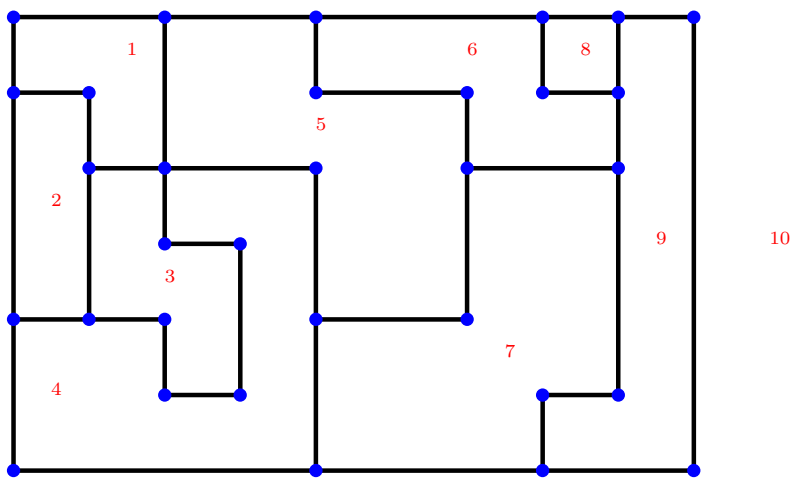


FIGURE 10 – Graphe planaire

On compte dans cet exemple 32 sommets, 40 arêtes et 10 faces.

$$\sigma = 32$$

$$\epsilon = 40$$

$$\rho = 10$$

On a bien

$$\sigma - \epsilon + \rho = 32 - 40 + 10 = 2$$

## 1.3 Théorème de Jordan

Afin de prouver la formule d'Euler, nous avons besoin de prouver qu'un "trait" continu - c'est à dire sans lever le crayon - et qui ne se coupe pas sépare le plan en deux parties. C'est ce qu'énonce le théorème de Jordan.

Le théorème de Jordan est un théorème s'appliquant dans le domaine de la topologie, qui n'est pas un sujet de ce travail. Par conséquent, les définitions relatives à la topologie dans cette section seront adaptées afin de ne pas sortir du cadre initialement fixé.

Toutefois, il est possible de l'appliquer à la théorie des graphes dans le plan. En géométrie planaire, une *courbe* désigne les figures usuelles du plan, telles que les droites, les segments et les *lignes polygonales*. Celles-ci sont une suite finie de segments qui sont eux-mêmes des arêtes.

**Définition 1.15.** Une *ligne polygonale* est une chaîne dont chaque arête est représentée par un segment.

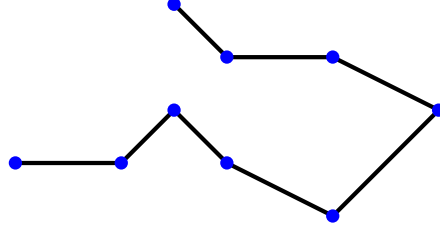


FIGURE 11 – Une ligne polygonale

**Définition 1.16.** Un *lacet* est une ligne polygonale où la chaîne qui la définit est un cycle. Le lacet est dit *simple* si le cycle est élémentaire.

**Théorème 2** (Théorème de Jordan). *Un lacet simple dans le plan découpe le plan en deux faces dont une est bornée et l'autre non.*[4]

*Démonstration.* Pour montrer ce théorème, nous allons colorier le plan comme suit :

Prenons n'importe quel lacet simple et sélectionnons un point  $P$  qui n'appartient pas au lacet. On choisit maintenant une direction  $\vec{d}$  du plan et on trace la demi-droite qui part de  $P$  et qui va dans la direction choisie. Si celle-ci ne passe pas par un sommet du lacet, on compte le nombre de points d'intersections entre le lacet et la demi-droite. Si celui-ci est pair, on colorie  $P$  en rouge, et sinon on le colorie en vert. Si la demi-droite passe par un sommet du lacet, on change de direction tel qu'elle ne passe pas par un sommet, puis on colorie  $P$  comme décrit au-dessus. Il existera toujours une telle direction  $\vec{d}$ . En effet, le lacet a un nombre fini de sommets, par conséquent, la demi-droite peut passer par les points des arêtes sans passer par un sommet. De plus, la direction choisie n'influence pas la parité du nombre d'intersections, car chaque sommet est incident à exactement deux arêtes (puisque c'est un cycle). Par conséquent, la demi-droite peut passer à gauche ou à droite d'un sommet sans que la parité du nombre de points d'intersection ne change.

On reproduit cela sur tous les points du plan (Figure 12). On s'aperçoit au final que l'intérieur du lacet est colorié en vert et l'extérieur en rouge (Figure 13).  $\square$

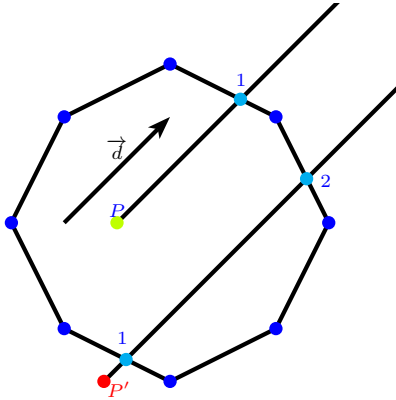


FIGURE 12 – Coloration des points du plan

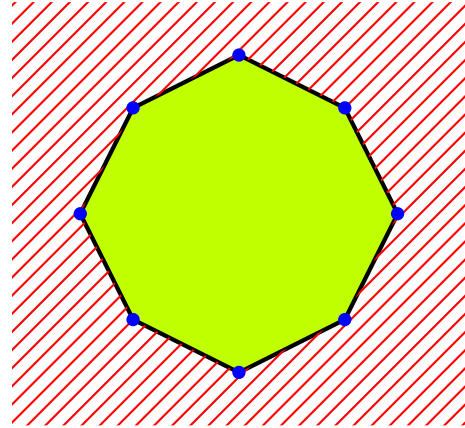


FIGURE 13 – Plan séparé en deux faces par un cycle

**Remarque 1.** Il est important de noter qu'en topologie, les lacets simples ne se limitent pas à des cycles élémentaires finis. Un cercle, qui pourrait être représenté par un nombre infini de sommets, sépare aussi le plan en deux parties connexes. Ceci implique que cette démonstration ne suffit pas à prouver le théorème de Jordan pour tout les lacets simples existants, mais elle est suffisante pour un cycle élémentaire fini.

**Corollaire 2.** *Un graphe  $G = (V, E)$  est une forêt si et seulement si  $\rho = 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $G = (V, E)$  une forêt. Puisqu'elle n'a pas de cycle, on sait par le théorème de Jordan que  $G$  n'a qu'une face. De même, si  $G$  est un graphe à une face, alors le théorème de Jordan nous garantit qu'il n'existe pas de cycles dans  $G$ . Donc  $G$  est une forêt.  $\square$

**Lemme 1.** *Tout graphe planaire connexe peut s'obtenir en ajoutant des arêtes à un arbre [3].*

*Démonstration.* On suppose d'abord que le graphe est connexe et n'a qu'une face. C'est donc un arbre par le corollaire 2 et le lemme est vérifié.

Supposons maintenant que tout graphe connexe à  $n \geq 2$  faces vérifie le lemme et montrons que cela est toujours vrai pour un graphe à  $n + 1$  faces. Puisqu'il existe plusieurs faces, alors le théorème de Jordan nous garantit l'existence d'au moins un cycle. Choisissons un de ces cycles, retirons une des arêtes de ce cycle et appelons la  $e$ . On trouve un graphe à  $n$  faces, qui par hypothèse de récurrence, a été construit en ajoutant des arêtes à un arbre. Rajouter l'arête  $e$  initialement retirée donne le graphe initial.  $\square$

*Démonstration de la formule d'Euler.* On démontre la formule par récurrence pour un arbre à  $n$  sommets. S'il n'y a qu'un sommet, on a  $\sigma - \epsilon + \rho = 1 - 0 + 1 = 2$  et le Théorème 1 est vérifié.

Prenons maintenant un arbre à  $n + 1$  sommets en supposant qu'un arbre à  $n$  sommets vérifie la formule. La Proposition 3 garantit l'existence d'au moins une feuille. En retirant cette feuille et l'arête, on obtient un sous-graphe qui est un arbre à  $n$  sommets. En ajoutant cette feuille et cette arête, le nombre de sommets et d'arêtes augmentent chacun de 1, et donc le Théorème 1 est toujours vérifié.

Démontrons maintenant le Théorème 1 pour un graphe planaire connexe à  $n$  faces. Si  $\rho = 1$ , le théorème est vérifié par la première récurrence. On suppose maintenant que tout graphe planaire connexe à  $n$  faces vérifie le Théorème 1 et montrons que cela implique qu'un graphe planaire connexe à  $n + 1$  faces vérifie aussi la formule d'Euler. Par le Lemme 1, il est possible de retirer une arête pour que le graphe ait  $n$  faces. Par hypothèse de récurrence, le Théorème 1 est vérifié sur le nouveau graphe. En ajoutant l'arête précédemment retirée, le nombre de faces et d'arêtes augmente de 1 sans modifier le nombre de sommets. Par conséquent, le Théorème 1 est vérifié sur un graphe planaire à  $n + 1$  faces.  $\square$

## 1.4 Théorème de Kuratowski

Les démonstrations dans cette section sont empruntées aux documents de Xu et de Radcliffe sur la démonstration du théorème de Kuratowski. [5] [6]

Un des résultats importants dans la théorie des graphes est le théorème de Kuratowski car il permet d'assurer qu'un graphe soit planaire. Commençons donc à poser les définitions et les résultats nécessaires à la démonstration de ce théorème.

**Théorème 3.** [5] Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et fini. Alors,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\epsilon.$$

*Démonstration.*  $\forall v \in V$  et  $\forall e \in E$ , on pose  $n(v)$  l'ensemble des arêtes adjacentes à  $v$  et  $m(e)$  l'ensemble des extrémités de  $e$ . Ainsi,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{e \in E} \left( \sum_{v \in m(e)} 1 \right) = \sum_{e \in E} 2 = 2\epsilon.$$

□

**Définition 1.17.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et fini. Le *graphe dual*  $G' = (V', E')$  de  $G$  est construit comme suit : chaque sommet  $v' \in V'$  correspond à une face  $f \in F$  de  $G$ , et chaque deux sommets  $v'$  et  $w'$  de  $V'$  forment une arête de  $E'$  si et seulement si les faces correspondantes à  $v'$  et  $w'$  de  $F$  sont adjacentes dans  $G$ .

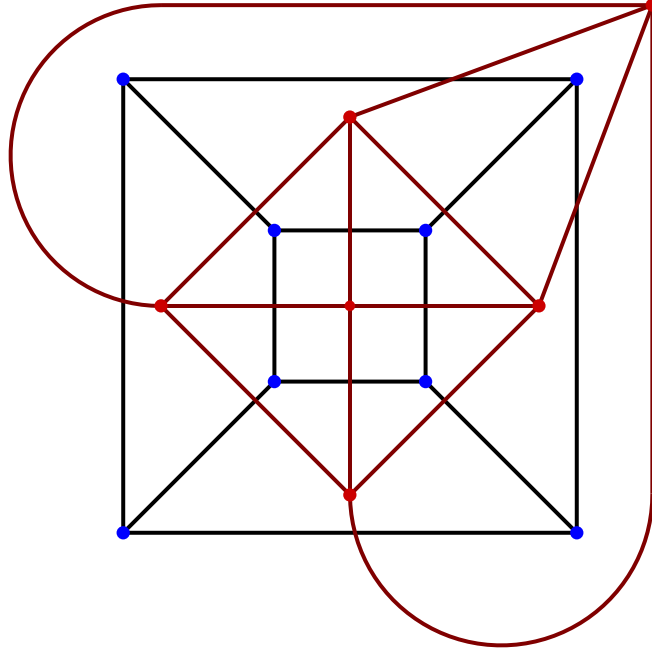


FIGURE 14 – Un graphe dessiné en bleu et son dual en rouge

**Théorème 4.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire simple et fini et  $F$  l'ensemble des faces de  $G$ . Alors, on a

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2\epsilon,$$

où  $\deg(f)$  est le nombre d'arêtes adjacentes à la face  $f$  dans  $G$ . [5]

*Démonstration.* Considérons le graphe dual  $G' = (V', E')$  de  $G$ . Par le Théorème 3, on sait que

$$\sum_{v' \in V'} \deg(v') = 2\epsilon'.$$

Par définition du dual d'un graphe, on a que  $\forall f \in F$ ,  $\deg(f) = \deg(v')$ , et  $\epsilon = \epsilon'$ . Ainsi,

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = \sum_{v' \in V'} \deg(v') = 2\epsilon' = 2\epsilon.$$

□

**Corollaire 3.** [5] Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple et fini tel que  $\sigma \geq 3$ . Alors,

$$\epsilon \leq 3 \cdot \sigma - 6.$$

*Démonstration.*  $\forall f \in F$ , il y a trois cas :

1. Si la face  $f$  est délimitée par un cycle, on sait que  $G$  est simple et que la taille minimale d'un cycle est de trois, donc  $\deg(f) \geq 3$ ;
2. Si la face  $f$  est adjacente à des arêtes et à un cycle, alors  $\deg(f) > 3$ ;
3. Si la face  $f$  n'est pas délimitée par un cycle, alors il existe au minimum deux ponts sur la frontière de  $f$ . Sinon, le reste de la limite doit être un cycle, ce qui contredit la condition du cas. Ainsi,  $\deg(f) \geq 4 > 3$ .

Par conséquent,  $\forall f \in F$ ,

$$\sum \deg(f) \geq 3\rho.$$

Ce qui implique par le Théorème 4 que

$$\sum_{f \in F} \deg(f) = 2\epsilon \geq 3\rho \iff \rho \leq \frac{2}{3}\epsilon \iff \sigma - \epsilon + \rho \leq \sigma - \epsilon + \frac{2}{3}\epsilon$$

et par la formule d'Euler, on obtient

$$2 \leq \sigma - \frac{1}{3}\epsilon \iff \epsilon \leq 3\sigma - 6.$$

□

**Corollaire 4.**  $K_5$  n'est pas planaire. [5]

*Démonstration.* On a que,

$$\epsilon(K_5) = 10 > 3\sigma(K_5) - 6 = 9.$$

□

**Corollaire 5.**  $K_{3,3}$  n'est pas planaire. [5]

*Démonstration.* Supposons par l'absurde qu'il existe une représentation planaire de  $K_{3,3}$ . On voit que la taille minimale d'un cycle dans  $K_{3,3}$  est de 4, ce qui implique que si  $f \in F(K_{3,3})$ , alors  $\deg(f) \geq 4$ . On a donc par le Théorème 4

$$4\rho \leq \sum_{f \in F} \deg(f) = 2\epsilon = 18.$$

Comme  $\rho \in \mathbb{N}$ , on a  $\rho \leq 4$  et enfin par la formule d'Euler,

$$2 = \sigma - \epsilon + \rho \leq \sigma - \epsilon + 4 = 6 - 9 + 4 = 1.$$

Ce qui n'est pas possible. Ainsi,  $K_{3,3}$  n'est pas planaire.

□

Maintenant que nous avons montré que les graphes  $K_5$  et  $K_{3,3}$  ne sont pas planaires. Nous avons encore besoin de quelques résultats et de définitions pour pouvoir faire la preuve du théorème de Kuratowski.

**Définition 1.18.** On appelle *coupe de sommets* le sous-ensemble  $V' \subseteq V$  dont la suppression rend  $G - V'$  non connexe (où toutes les arêtes incidentes aux sommets de  $V'$  sont également supprimées). La *connectivité* de  $G$ , que l'on note  $\kappa(G)$ , est la taille minimale d'une coupe de sommet. Le graphe  $G$  est dit *k-connexe* si  $k = \kappa(G)$ .

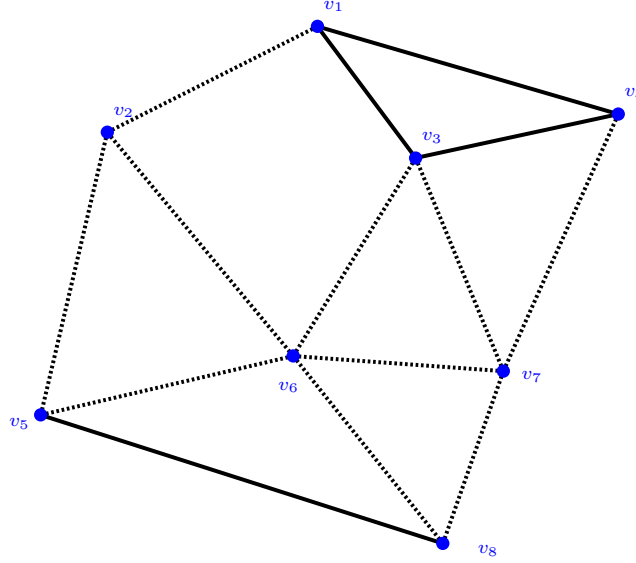


FIGURE 15 – Un graphe 3-connexe

**Exemple 3.** Sur la Figure 15, on peut voir un graphe  $G = (V, E)$  qui est 3-connexe car la taille minimum d'une coupe de sommet de  $G$  est de 3. En effet, la coupe de sommets  $V' = \{v_2, v_6, v_7\}$  est de taille trois et rend le graphe  $G - V'$  non connexe (il est séparé en deux parties : l'arête  $\{v_5, v_8\}$  et le sous-graphe partiel  $H = (\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_8\}, E')$  où  $E' = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_8\}\}$ ).

**Lemme 2.** *Tous les sous-graphes partiels d'un graphe  $G = (V, E)$  planaire sont planaires. [6]*

*Démonstration.* Si  $G$  est planaire, alors il existe une représentation graphique planaire de  $G$ . Ainsi, pour tout sous-graphe partiel  $G' = (V', E')$  de  $G$ , on peut retrouver tout  $v' \in V'$  et tout  $e' \in E'$  dans la représentation graphique de  $G$ , ce qui nous permet de construire la représentation graphique de  $G'$ , qui est aussi planaire.  $\square$

**Lemme 3.** *Un graphe  $G$  est planaire si et seulement si toutes les subdivisions de  $G$  sont planaires. [6]*

*Démonstration.* Supposons que  $G$  soit planaire. On voit assez facilement que si  $G$  est un graphe planaire, et que l'on subdivise  $G$  pour obtenir un graphe  $H$ , alors la représentation graphique de  $H$  est également planaire car aucune arête n'a été ajoutée.

Considérons à présent une subdivision planaire de  $G$ . En lissant les arêtes subdivisées, on retrouve le graphe  $G$ . On trouve ainsi une représentation graphique de  $G$  et par conséquent,  $G$  est planaire.  $\square$

**Définition 1.19.** Soit  $G$  un graphe. Un *bloc*  $B$  est un sous-graphe partiel maximal de  $G$  tel que  $B$  est  $k$ -connexe avec  $k \geq 2$ . C'est-à-dire que  $B$  est un graphe qui ne possède pas de coupe de sommet d'ordre 1 (si on lui enlève un de ses sommets, il reste connexe), mais si on lui ajoute un sommet de  $G$ , alors il possède une coupe de sommet d'ordre 1.

**Lemme 4.** *Soit  $G$  un graphe 2-connexe, avec  $u$  et  $v$  des sommets de  $G$ . Alors il existe un cycle dans  $G$  qui contient  $u$  et  $v$ . [6]*

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence sur la distance entre  $u$  et  $v$ .

Commençons donc avec la distance  $d(u, v) = 1$ , qui n'arrive que dans le cas où  $u$  et  $v$  sont adjacents. Remarquons que  $\deg(v) \neq 1$ , car sinon  $\{u\}$  serait une coupe de sommet de  $G$  (voir Figure 16). Ainsi,  $v$  doit avoir

un autre voisin  $w$ . Considérons le graphe  $G - \{v\}$ . Notons que le graphe est encore connexe par définition d'un graphe 2-connexe, et qu'il y a ainsi une chaîne  $P$  dans  $G - \{v\}$  entre  $w$  et  $u$ . De plus, cette chaîne ne peut pas contenir le sommet  $v$  car il a été enlevé du graphe. En ajoutant l'arête  $\{v, w\}$  à  $P$ , on trouve un cycle contenant  $u$  et  $v$ .

Supposons maintenant que ce résultat soit vrai pour tous sommets  $u, v$  séparés par une distance d'au plus  $d - 1$ , et montrons ce résultat pour deux sommets  $u, v$  tels que  $d(u, v) = d$ . Posons  $Q$  la chaîne reliant  $u$  et  $v$ , et prenons le sommet  $w$  adjacent à  $v$  dans  $Q$ . On remarque que  $d(u, w) = d - 1$  et par hypothèse de récurrence on sait qu'il existe un cycle  $C$  dans  $G$  contenant  $u$  et  $w$ . Si  $v \in C$ , on a fini, car le cycle  $C$  contient  $u$  et  $v$ . Sinon,  $v$  apparaît en dehors du cycle. Puisque  $G - \{w\}$  est connexe, il existe une chaîne  $P$  reliant  $u$  à  $v$  qui ne contient pas  $w$ . Notons  $R$  une chaîne dans  $C$  reliant  $u$  à  $w$ . On obtient ainsi un cycle  $P \cup \{w, v\} \cup R$  contenant  $u$  et  $v$ .  $\square$

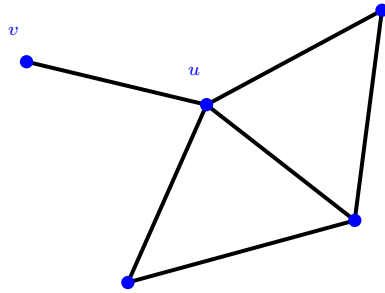


FIGURE 16 – Un graphe 1-connexe

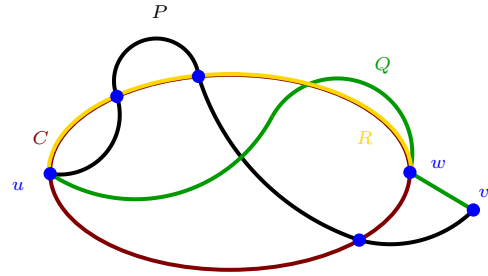


FIGURE 17 – Le cycle  $C$  et les chaînes  $P, Q$  et  $R$ .

**Remarque 2.** Notons que sur la Figure 17, les lignes représentent des chaînes et pas des arêtes uniques. Dans le théorème de Kuratowski, pour plus de lisibilité, nous allons continuer à illustrer par des lignes les chaînes et les arêtes des graphes. De plus, lorsque nous aurons affaire à des représentations graphiques de graphes, nous parlerons de leur structure de base, c'est-à-dire leur forme générale, sans forcément illustrer tous leurs sommets et toutes leurs arêtes.

Nous avons maintenant énoncé et prouvé tous les résultats nécessaires à la démonstration du théorème de Kuratowski.

**Théorème de Kuratowski.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe fini dans le plan. Alors,  $G$  est un graphe planaire si et seulement s'il ne contient pas de subdivision des graphes  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . [6]

*Démonstration du théorème de Kuratowski.* Supposons que  $G$  possède une subdivision de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  comme sous-graphe partiel. Alors par le Lemme 2 et le Lemme 3,  $G$  n'est pas planaire.

Nous voulons montrer que tout graphe  $G$  non-planaire contient une subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$ . Supposons par l'absurde qu'il existe un graphe non-planaire qui ne contient ni une subdivision de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$  comme sous-graphe partiel. Parmi tous les graphes satisfaisant cette condition, choisissons un graphe minimal  $G$  tel que tout graphe avec moins d'arêtes ou moins de sommets satisfait le théorème.

Établissons une stratégie pour démontrer ce théorème :

1. Nous allons énoncer et prouver trois affirmations qui nous permettront de connaître la structure de base de  $G$ .
2. Nous allons ensuite construire une représentation graphique de la structure du graphe  $G - \{e\}$ , le graphe  $G$  auquel on a enlevé l'arête  $e$ .
3. Avec cette représentation graphique planaire, nous allons remettre l'arête  $e$  et retrouver la structure de soit  $K_5$ , soit  $K_{3,3}$ .

**Affirmation 1.**  $G$  doit être 2-connexe.



*Démonstration de l'affirmation 1.* Par le Lemme 2, on sait que tous les sous-graphes partiels d'un graphe planaire sont planaires. Ainsi, si  $G$  est non-planaire, il doit contenir un bloc  $B$  non-planaire. Si  $B$  est un sous-graphe partiel de  $G$  tel que  $G \neq B$ , alors  $B$  est un graphe non-planaire ne contenant pas de subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  et étant plus petit que  $G$ , ce qui contredirait la minimalité de  $G$ . Ainsi,  $G$  doit être un bloc, ce qui implique par la définition de bloc que  $G$  est 2-connexe. □

Nous savons donc maintenant que  $G$  ne contient pas de sommet  $u$  dont la suppression rendrait  $G - \{u\}$  non-connexe. Montrons également que  $G$  ne peut pas contenir de sommet de degré 1 ou 2.

**Affirmation 2.**  $G$  ne contient pas de sommet de degré plus petit ou égal à 2.

*Démonstration de l'affirmation 2.* Montrons premièrement que  $G$  ne contient pas de sommet de degré 1. En effet, si  $u \in G$  était un tel sommet, alors la suppression du sommet adjacent à  $u$  rendrait  $G$  non-connexe, ce qui contredirait l'affirmation 1.

Montrons maintenant que  $G$  ne peut pas contenir de sommet de degré 2. Supposons donc au contraire que  $G$  contienne un sommet  $u$  avec  $\deg(u) = 2$ . Il y a donc deux sommets  $v$  et  $w$  adjacents à  $u$  et on obtient deux cas :

1. Si  $v$  est adjacent à  $w$ , considérons le graphe  $H$  obtenu en enlevant  $u$  à  $G$ . Par minimalité de  $G$ ,  $H$  doit être planaire. Trouvons une représentation graphique planaire de  $H$  et ajoutons ensuite la chaîne  $\{v, u, w\}$  à côté de l'arête  $\{v, w\}$  comme illustré dans la Figure 18. On trouve ainsi une représentation graphique planaire de  $G$ , ce qui est contradictoire.
2. Si  $v$  n'est pas adjacent à  $w$ , en lissant le sommet  $u$  on obtient l'arête  $\{v, w\}$  ainsi qu'un graphe  $H$ . Remarquons que  $H$  est plus petit que  $G$ , et par minimalité de  $G$ , on sait qu'il est planaire. Trouvons une représentation graphique planaire de  $H$ , et subdivisons l'arête  $\{v, w\}$  pour retrouver  $G$ . Par le Lemme 3,  $G$  est planaire, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Dans les deux cas, nous aboutissons à une contradiction. Ainsi, tout sommet de  $G$  est de degré plus grand ou égal à 3. □

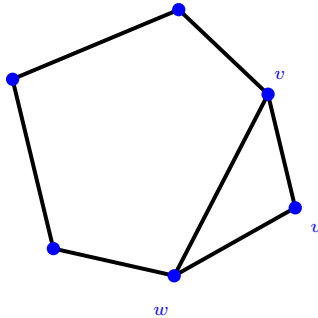


FIGURE 18 – Un graphe  $G$  illustrant l'affirmation 2

**Affirmation 3.** Il existe dans  $G$  une arête  $e$  telle que  $G - \{e\}$  est 2-connexe.

*Démonstration de l'affirmation 3.* Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas d'arête  $e$  tel que  $G - \{e\}$  soit 2-connexe. Alors, pour toute arête  $e$ , il existe un sommet  $w$  de  $G$  dont la suppression rendrait  $G - \{e, w\}$  non connexe. Soient donc  $H_1, H_2, \dots, H_k$  les composantes connexes créées par la suppression d'une arête  $e$  et du sommet  $w$  correspondant.

Construisons les graphes  $M_1, M_2, \dots, M_k$  tel que  $M_i = H_i \cup \{e, w\}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . Par minimalité de  $G$ ,  $H_1, H_2, \dots, H_k$  sont planaires, et donc  $M_1, M_2, \dots, M_k$  aussi. On construit un graphe en collant les  $M_1, M_2, \dots, M_k$  en fusionnant tous les sommets  $w$  et toutes les arêtes  $e$  de sorte à ce que le sommet  $w$  et l'arête  $e$  relient les  $M_1, M_2, \dots, M_k$ . Ce graphe est planaire et il s'agit d'une représentation graphique planaire de  $G$ .

Ceci est en contradiction avec notre hypothèse initiale. Ainsi  $G$  doit avoir une arête  $e$  tel que  $G - \{e\}$  soit 2-connexe.

□

Par l'affirmation 3, il existe une arête  $e$  dans  $G$  tel que  $G - \{e\}$  soit 2-connexe. Soit  $H = G - \{e\}$ , le sous-graphe partiel de  $G$  obtenu en enlevant l'arête  $e$  d'extrémités  $u$  et  $v$ . Par minimalité de  $G$ ,  $H$  est planaire. De plus, par le Lemme 4, il existe au moins un cycle dans  $H$  qui contient les sommets  $u$  et  $v$ . Formons une représentation graphique du cycle  $C$  dans  $H$  satisfaisant les conditions suivantes :

- $C$  contient  $u$  et  $v$  ;
- le nombre de faces à l'intérieur de  $C$  dans sa représentation graphique est maximal parmi toutes les représentations graphiques des cycles contenant  $u$  et  $v$  dans  $H$  ;

Écrivons ce cycle  $C$  comme  $\{u = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v, v_{k+1}, \dots, v_l, v_0\}$ . Notons que  $k \geq 2$  car  $u$  et  $v$  ne sont pas adjacents dans  $H$ . Nous faisons les observations suivantes :

- Il n'y a pas de chaîne reliant deux sommets de  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  qui est extérieure à  $C$ .
- Il n'y a pas de chaîne reliant deux sommets de  $\{v_k, v_{k+1}, \dots, v_l\}$  qui est extérieure à  $C$ .

Ces deux observations sont démontrées de la même manière, par conséquent nous ne montrerons que la première. Considérons le graphe  $G$  de la Figure 19, où l'on suppose par l'absurde qu'il existe une chaîne  $P$  extérieure à  $C$  reliant les sommets  $v_i$  et  $v_j$ . Nous pourrions donc construire le cycle  $C'$  qui contient  $u$  et  $v$  comme  $\{v_0, v_1, \dots, v_i, P, v_j, \dots, v_l, v_0\}$ . On remarque que le cycle  $C'$  contient toutes les faces de  $C$  et au moins une autre. Ceci contredirait la propriété maximale de  $C$ . On montre la seconde observation exactement de la même manière, en construisant une chaîne  $P'$  reliant deux sommets de  $\{v_k, v_{k+1}, \dots, v_l\}$ .

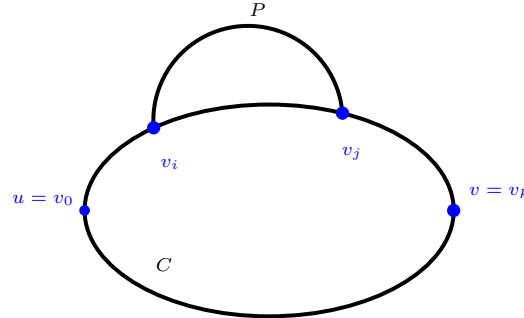


FIGURE 19 – Une chaîne  $P$  comme décrite dans les observations, reliant deux sommets entre  $u$  et  $v$ .

- La structure de base du graphe  $H$  possède donc une structure obstructive à l'intérieur et à l'extérieur du cycle  $C$  comme illustré dans les Figures 21, 22, 23 et 24.

Pour démontrer ceci, supposons par l'absurde que soit la structure à l'extérieur de  $C$ , soit la structure à l'intérieur de  $C$  n'existe pas. Supposons sans perte de généralité que c'est la structure interne qui n'existe pas. Alors, dans cette représentation graphique de la structure de  $H$ , on peut remettre l'arête  $e$  en reliant  $u$  et  $v$  pour retrouver le graphe  $G$  comme sur la Figure 20. On trouve que  $G$  a une représentation graphique planaire, ce qui est contradictoire. Ainsi, la structure de base de  $H$  est l'une de celles illustrées aux Figures 21 à 24.

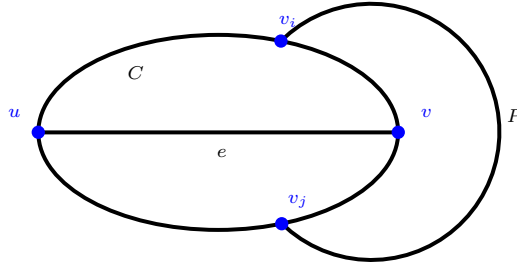


FIGURE 20 – Le graphe  $G$  si  $H$  ne possédait pas de structure obstructive interne.

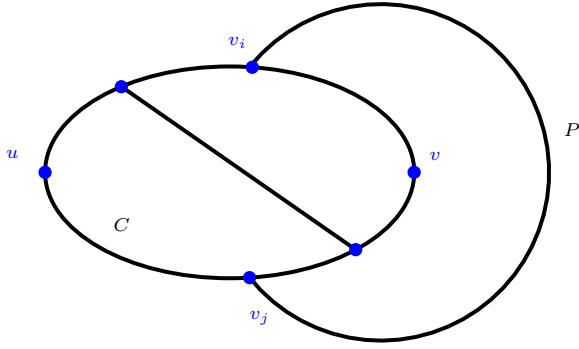


FIGURE 21

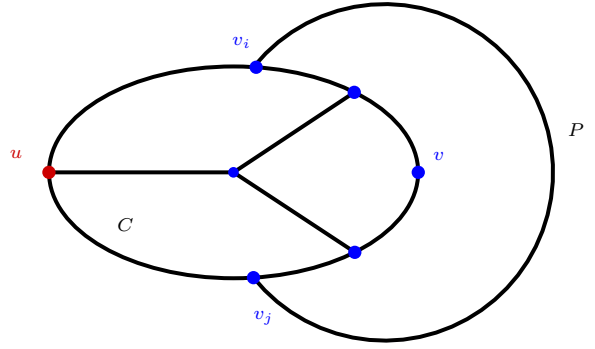


FIGURE 22

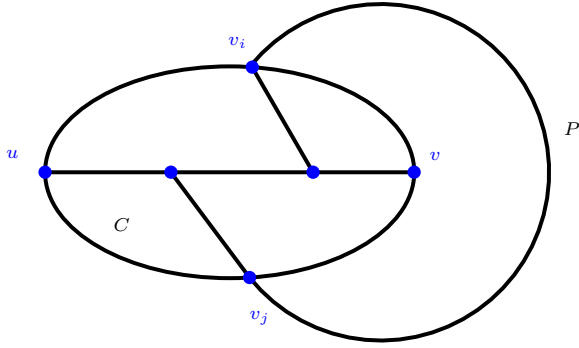


FIGURE 23

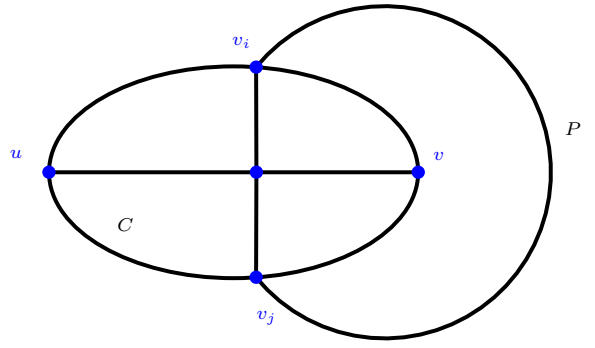


FIGURE 24

Voici les structures possibles qui nous empêchent de représenter l'arête  $\{u, v\}$  dans la représentation graphique de  $H$ . On remarque que le sommet  $u$  est de couleur différente dans la Figure 22. Cette structure existe de plusieurs manières différentes, en choisissant  $u$ ,  $v_i$ ,  $v$  ou  $v_j$  comme le sommet de couleur rouge, et en posant les deux autres sommets d'une manière symétrique à l'opposé du premier sommet. Toutes ces possibilités se traitent de la même manière, donc nous traiterons seulement le cas de la Figure 22.

On remarque que dans les quatre cas, en remettant l'arête  $\{u, v\}$  pour retrouver le graphe  $G$ , nous trouverons une subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  dans  $G$  (comme illustré dans les Figures 25 à 28). Pour plus de simplicité et de visibilité, nous avons enlevé les noms des sommets et utilisé des couleurs pour mettre en évidence les structures recherchées.

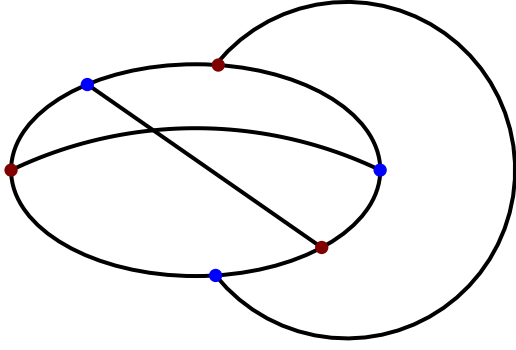


FIGURE 25

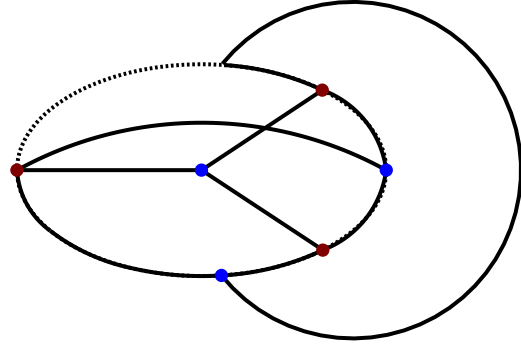


FIGURE 26

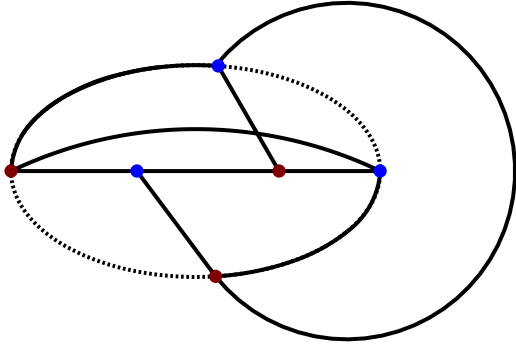


FIGURE 27

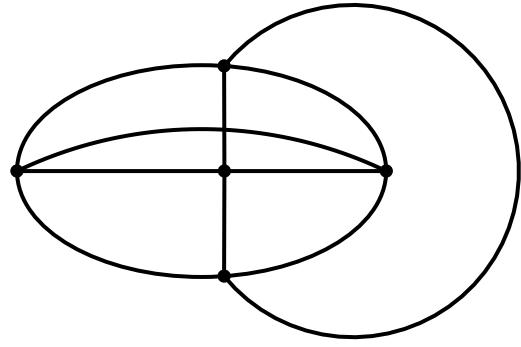


FIGURE 28

On trouve ici les sous-graphes partiels de  $G$  qui sont des subdivisions de  $K_{3,3}$  ou de  $K_5$ . On voit grâce aux couleurs que les graphes des Figures 25, 26 et 27 sont des subdivisions de  $K_{3,3}$ . En effet les deux ensembles de sommets disjoints sont représentés en bleu et en rouge. La Figure 28 est une subdivision du graphe complet  $K_5$ .

Nous sommes donc arrivés à une contradiction. Nous avons montrés que  $G$  doit contenir un sous-graphe partiel qui est une subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$ . Ainsi notre hypothèse initiale est fausse : Il n'y a pas de graphe non-planair qui ne contient pas de subdivision de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  comme sous-graphe partiel. Ce qui conclut la démonstration du théorème de Kuratowski.

□

## 2 Coloration de graphes

Le premier problème de ce qu'on appelle aujourd'hui la coloration de graphe, fut la coloration de la carte des comtés d'Angleterre. Francis Guthrie, le mathématicien qui a pensé à ce problème, remarque que seulement 4 couleurs sont nécessaires. Il postule alors la *conjecture des quatre couleurs*. Le frère de Guthrie transmet cette question à son professeur de mathématiques, Auguste de Morgan de l'University College de Londres. Celui-ci transmettra le problème à William Rowan Hamilton en 1852. En 1879, Arthur Cayley évoqua ce thème lors d'un colloque de la London Mathematical Society. C'est cette même année que la première démonstration de cette conjecture fut publiée par Alfred Kempe, lui donnant le nom de *Théorème des quatre couleurs*.

Cependant, en 1890, le mathématicien Percy John Heawood trouve une erreur dans la preuve de Kempe. Mais avec les idées de celui-ci, il parvient à montrer le *Théorème des cinq couleurs*, qui presque comme son homologue à quatre couleurs, énonce que cinq couleurs ou moins sont nécessaires à la coloration d'une carte.

C'est en 1976, que le théorème des quatre couleurs fut démontré pour de bon par deux mathématiciens, Kenneth Appel et Wolfgang Haken, réutilisant les idées d'Heawood et Kempe. Cette preuve est la première à utiliser massivement l'ordinateur, car sans celui-ci, montrer ce résultat aurait été très long [7].

Dans cette section, nous introduisons les notions indispensables au thème de la coloration de graphe. Nous démontrerons le *Théorème des cinq couleurs*, puis nous verrons en quoi montrer le *Théorème des quatre couleurs* sans aide informatique est difficilement réalisable. Nous présenterons la *conjecture de Hadwiger* et nous finirons par montrer le *Théorème de Brooks*.

Pour colorier un graphe, il y a deux règles : la première est que chaque sommet doit être colorié par une couleur. La seconde est que pour deux sommets reliés par une arête, chacun doit être de couleur différente. En particulier deux sommets qui ne sont pas reliés peuvent être de même couleur.

En coloration des graphes, il est impossible de travailler avec des boucles, car sinon un sommet devrait avoir une couleur différente de lui-même, ce qui n'a aucun sens. De plus, comme avoir deux sommets reliés par plusieurs arêtes ne change pas la coloration du graphe, nous n'analyserons pas de multigraphe et travaillerons donc qu'avec des graphes simples.

**Définition 2.1.** Une *coloration* d'un graphe  $G = (V, E)$ , est une fonction  $c : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$  qui associe à tout sommet  $v$  de  $V$  une couleur, un élément de l'ensemble d'indices de couleurs  $\{1, 2, \dots, n\}$ , tel que  $c(v) \neq c(w)$  pour tout  $\{v, w\} \in E$ .

Avec cette définition, deux colorations sont distinctes si l'on échange simplement les indices des couleurs. Prenons la paire de sommets  $\{u, w\}$  reliés par une arête et choisissons la couleur 1 = rouge, et la couleur 2 = bleu. Soit  $f$  une fonction qui colorie  $u$  en rouge et  $w$  en bleu et  $g$  qui colorie  $u$  en bleu et  $w$  en rouge. La différence entre  $f$  et  $g$  est simplement la permutation de couleur bleu-rouge, mais elles sont considérées comme distinctes. Or, pour la plupart des problèmes de coloration, le but est de déterminer le nombre minimal de couleur nécessaires et on ne souhaite pas différencier de telles colorations. On préfère donc généralement la définition suivante, qui ne distingue pas deux colorations à permutation d'indices près.

**Définition 2.2.** Un *stable* de  $G = (V, E)$ , est un sous ensemble de  $V$  tel que tous les sommets soient deux-à-deux non-adjacents. Une *coloration* de  $G$  est une partition de  $V$  en stables.

**Définition 2.3.** Le *nombre chromatique* d'un graphe  $G = (V, E)$ , noté  $\chi(G)$ , est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à la coloration de celui-ci. Si  $G = (V, E)$  est coloriable en  $k$  couleurs, on dit que  $G$  est *k-coloriable*.

**Remarque 3.** Un graphe 2-coloriable est un graphe biparti.

### 2.1 Théorème des quatre couleurs

Les démonstrations des deux théorèmes de cette partie sont tirée d'une vidéo Youtube du vidéaste El Ji [8]. Afin d'utiliser ce que nous savons sur la coloration de graphes, nous devons créer un lien entre cartes et graphes. Guthrie coloriait les comtés d'Angleterre en fonction des frontières. C'est à dire que si deux faces d'une carte ont une frontière commune, alors chacune doit être coloriée différemment de l'autre. Comme dans un graphe où deux sommets reliés par une arête doivent chacun avoir une couleur distincte de l'autre. Cela nous permet d'imaginer cette connexion entre graphes et cartes. On a un sommet pour chaque face et une arête entre les sommets qui représentent deux faces qui ont une frontière commune. Deux faces qui n'ont qu'un sommet en commun ne sont pas adjacentes. On peut comparer cela au graphe dual de la Figure 14.

**Définition 2.4.** Une *région* d'une carte est une union de faces. Une région est *connexe* si elle ne contient qu'une face.

**Exemple 4.** Sur la carte de la Suisse, le canton de Vaud et le canton de Fribourg ne sont pas connexes. En effet, la ville d'Avenches fait partie du canton de Vaud mais est entièrement entourée par le canton de Fribourg. De même, le village d'Estavayer-le-Lac fait partie du canton de Fribourg mais est entouré par le canton de Vaud. En revanche, chacune des 12 régions françaises est connexe.

**Remarque 4.** Comme le théorème des quatre couleurs est vrai seulement sur des cartes dont les régions sont connexes, nous écrirons simplement régions au lieu de régions connexes.

**Lemme 5.** Pour tout graphe planaire  $G = (V, E)$ , il existe un sommet  $v$  tel que  $\deg(v) \leq 5$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $G$  soit planaire, et que pour tout  $v \in V$ ,  $\deg(v) \geq 6$ .

Par le Théorème 3, on a  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\epsilon \geq 6 \cdot \sigma$ , ce qui implique que  $\epsilon \geq 3 \cdot \sigma$ . Or par le Corollaire 3, on a  $\epsilon \leq 3 \cdot \sigma - 6$ , ce qui contredit l'hypothèse de départ.  $\square$

**Remarque 5.** Ceci implique directement que toute carte possède au moins une région qui est adjacente à au plus cinq régions.

**Définition 2.5.** Une *composante de Kempe* est construite comme suit : On choisit une couleur  $a$  et une région de cette couleur. On choisit une deuxième couleur  $b$  et on prend toutes les régions de couleur  $b$  adjacentes à la première région choisie. Ensuite on prend toutes les régions de couleur  $a$  adjacentes à celles de couleur  $b$  prises auparavant. On répète ce processus jusqu'à que les régions de couleur  $a$  n'aient plus de régions adjacentes de couleur  $b$ , et de même jusqu'à que les régions de couleur  $b$  n'aient plus de régions adjacentes de couleur  $a$ . Toutes ces régions mises ensemble forment ce qu'on appelle une *composante de Kempe*  $a - b$ . Par exemple si la couleur  $a$  est rouge et la  $b$  est bleue, on appellera cela une composante de Kempe rouge-bleue.

La particularité de cet objet est que l'on peut échanger les couleurs au sein de la composante et toujours avoir une coloration valide. Les Figures 45 et 46 en annexe illustrent cet exemple.

**Remarque 6.** Une composante de Kempe  $a - b$  peut contenir une seule région de couleur  $a$ , si celle-ci n'a pas de région adjacente de couleur  $b$ .

**Théorème 5** (Théorème des cinq couleurs). *Toute carte est coloriable par au plus 5 couleurs.*[8]

*Démonstration.* On travaille par récurrence sur le nombre de régions de la carte. Si celle-ci à 5 régions ou moins, alors 5 couleurs au plus sont nécessaires. Supposons maintenant qu'une carte à  $n$  régions est 5-coloriable et prouvons-le pour une carte à  $n + 1$  régions. Par le Lemme 5, il existe une région  $X$  à 5 frontières ou moins et retirons-la. Cela nous donne une carte à  $n$  régions qui est 5-coloriable par hypothèse de récurrence. On a 3 cas possibles :

1.  $X$  a 4 régions adjacentes ou moins. Donc une des cinq couleurs est disponible pour la colorier.
2.  $X$  a 5 régions adjacentes dont deux ont une même couleur. Donc une des cinq couleurs est libre.
3.  $X$  a 5 régions adjacentes et chacune est coloriée différemment.

Dans le troisième cas, on choisit une des cinq régions adjacentes ainsi qu'une des 4 autres couleurs que celle qui colorie la région que l'on a choisie. On construit la composante de Kempe de ces deux couleurs avec la région sélectionnée. Si la composante ne contient pas d'autre région adjacente à  $X$ , alors on procède à un échange des deux couleurs au sein de la composante de Kempe et on retrouve une carte similaire au cas 2. Si la composante retenue contient deux régions adjacentes à  $X$ , on ne peut pas procéder à un échange de couleurs au sein de la composante. Dans ce cas, on cherche une autre composante de Kempe qui contient exactement une région adjacente à  $X$ . Il en existe toujours une.

En effet, soient  $X_1, X_2, X_3, X_4$  et  $X_5$  - notées dans un ordre circulaire. On colorie  $X_i$  avec la couleur  $i$  de l'ensemble de couleur  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . On distingue deux cas :

1. Si  $X_1$  et  $X_3$  appartiennent à une même composante de Kempe, on trouve une chaîne de régions de couleurs 1 et 3 autour de  $X_2$  ou bien autour de  $X_4$  ou  $X_5$ . Par conséquent, la région  $X_2$  ne peut pas être dans une même composante de Kempe que  $X_4$  ou  $X_5$ . On a donc quatre composantes de Kempe au sein desquelles on peut échanger les couleurs.
  - La composante de Kempe 2 - 4 qui contient  $X_2$ .

- La composante de Kempe 2 – 5 qui contient  $X_2$ .
- La composante de Kempe 2 – 4 qui contient  $X_4$ .
- La composante de Kempe 2 – 5 qui contient  $X_5$ .

On suit un raisonnement analogue dans le cas où les régions  $X_1 - X_4$ ,  $X_2 - X_4$ ,  $X_2 - X_5$  ou  $X_3 - X_5$  appartiennent à une même composante de Kempe.

2.  $X_1$  et  $X_2$  appartiennent à une même composante de Kempe. Si  $X_3$  n'est pas dans la même composante que  $X_1$  ou  $X_2$ , alors on peut prendre soit la composante de Kempe 1 – 3 qui contient  $X_3$  ou la composante 2 – 3 qui contient  $X_3$ . Dans le cas contraire, il existe une chaîne de couleurs de régions 1 et 3 qui relie  $X_1$  et  $X_3$  et on retrouve le même cas qu'au point 1. Si les régions  $X_2 - X_3$ ,  $X_3, X_4$ ,  $X_4 - X_5$  ou  $X_1 - X_5$  appartiennent à une même composante de Kempe, on suit le même raisonnement.

On en conclut que toute carte et par conséquent tout graphe planaire est coloriable par au plus cinq couleurs.  $\square$

La première démonstration publiée par Kempe pour le théorème des quatre couleurs est celle présentée ci-dessus mais pour quatre couleurs au lieu de cinq. Seulement, Heawood trouve une erreur dans la démonstration en trouvant un contre-exemple dans lequel on ne peut pas procéder à un échange de couleurs. La Figure 47 en annexe illustre ce contre-exemple.

**Théorème 6** (Théorème des quatre couleurs). *Toute carte est coloriable par au plus 4 couleurs.* [8]

Au lieu d'essayer de démontrer directement le théorème des quatre couleurs, Appel et Haken ont procédé par l'absurde en supposant qu'il existait des cartes 5-coloriables. Cependant, même dans l'hypothèse où le théorème des quatre couleurs est faux, il existe des cartes 4-coloriables - une carte à 4 régions par exemple. Ils ont considéré une carte 5-coloriable et lui ont retiré des régions jusqu'à trouver une carte 4-coloriable. Il y a donc forcément un moment où il y a une carte 5-coloriable qui est devenue une carte 4-coloriable lorsqu'on lui a retiré une région. On appelle cette carte 5-coloriable *minimale*.

De telles cartes ne possèdent aucune région qui possède 4 régions adjacentes ou moins. En effet, supposons par l'absurde qu'une telle région  $X$  existe et soient  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  - notées dans un ordre circulaire. On colorie la région  $X_i$  avec la couleur  $i$  de l'ensemble de couleurs  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Retirons maintenant la région  $X$ . Par hypothèse de minimalité, on obtient une carte 4-coloriable. On distingue deux cas :

1.  $X_1$  et  $X_3$  appartiennent à une même composante de Kempe. Dans ce cas, il existe une chaîne de couleurs qui passe autour de  $X_2$  ou autour  $X_4$ . Par conséquent  $X_2$  et  $X_4$  n'appartiennent pas à une même composante de Kempe. Il y a donc deux composantes de Kempe - que je ne vais pas détailler - au sein desquelles on peut procéder à un échange de couleurs pour colorier  $X$ . On suit un raisonnement analogue si  $X_2$  et  $X_4$  appartiennent à une même composante de Kempe.
2.  $X_1$  et  $X_2$  appartiennent à une même composante de Kempe. Si  $X_3$  n'est pas dans la même composante que  $X_1$  ou  $X_2$ , alors on peut prendre soit la composante de Kempe 1 – 3 qui contient  $X_3$  ou la composante 2 – 3 qui contient  $X_3$ , puis échanger les couleurs et colorier  $X$ . Dans le cas contraire, il existe une chaîne de couleurs de régions 1 et 3 qui relie  $X_1$  et  $X_3$  et on retrouve le même cas qu'au point 1. Si  $X_2 - X_3$ ,  $X_3, X_4$  ou  $X_4 - X_1$  appartiennent à une même composante de Kempe, on suit un raisonnement analogue.

On en conclut qu'une carte 5-coloriable minimale ne contient pas de régions avec 4 régions adjacentes ou moins. Appel et Haken ont établi une liste de *configurations* - des bouts de cartes - et ont montré que toute carte 5-coloriable minimale contenait au moins une de ces configurations. Il faut maintenant montrer que chaque configuration est *réductible*. C'est à dire que l'on peut remplacer la configuration par une autre configuration plus petite, dite *réduite* (on retire des régions). Par hypothèse de minimalité, on obtient une carte 4-coloriable. On ajoute et on colorie une par une les régions retirées, jusqu'à retrouver la carte 5-coloriable initiale. À chaque étape, on montre que l'on peut colorier la région ajoutée sans avoir recours à une cinquième couleur, et on procède de cette manière jusqu'à retrouver la configuration initiale et donc la carte 5-coloriable minimale. Or, puisqu'à chaque fois que l'on ajoute une région, il ne faut que 4 couleurs, la carte 5-coloriable minimale sera 4-coloriable, ce qui contredira l'hypothèse de départ.

Cependant, la coloration de la configuration réduite ne dépend pas seulement des régions à l'intérieur de la configuration, mais aussi du reste la carte. Par conséquent, il faut montrer que la configuration est réductible pour toutes les colorations possibles de la configuration. De plus, la liste de configurations établie par Appel et Haken contient 1478 éléments. Montrer qu'elles sont toutes réductibles pour toutes les colorations possibles est un travail colossal.

C'est ici qu'intervient l'ordinateur en montrant que toutes les configurations sont réductibles pour chacune des colorations possibles.

Nous allons montrer qu'une des régions de cette liste est réductible pour une coloration que nous aurons choisie. La Figure 29 représente le Losange de Birkhoff, qui est une de ces configurations.

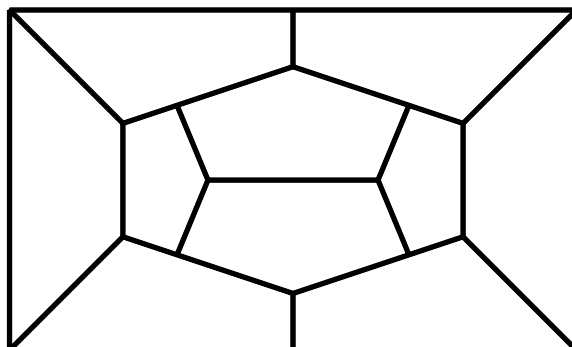


FIGURE 29 – Losange de Birkhoff

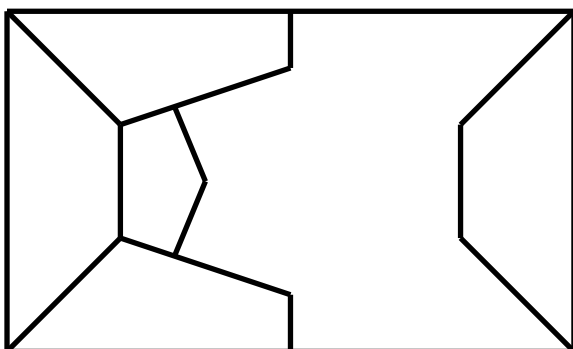


FIGURE 30 – Forme réduite du losange de Birkhoff

La Figure 30 est la forme *réduite* du losange de Birkhoff, qui est la configuration avec laquelle on pourra colorier le losange de Birkhoff.

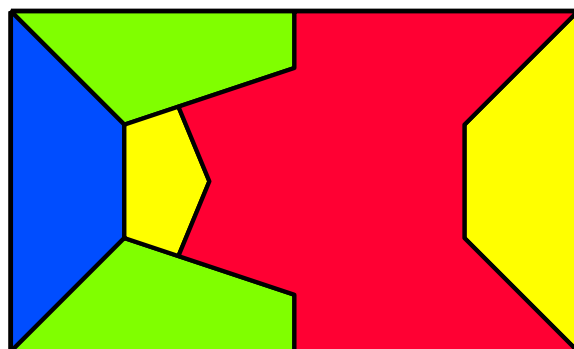


FIGURE 31 – Coloration de la forme réduite

La carte qui contient cette forme réduite est 4-coloriable par hypothèse de minimalité de la carte initiale. On colorie aisément cette forme réduite avec 4 couleurs, comme montré à la Figure 31.

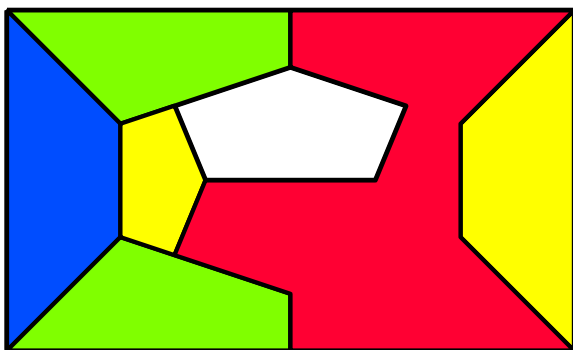


FIGURE 32  
On ajoute une région qui appartient au losange de Birkhoff.

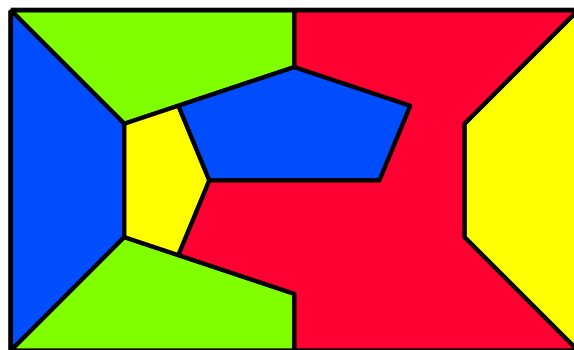


FIGURE 33  
Celle-ci a moins de 3 régions adjacentes, donc on peut la colorier.



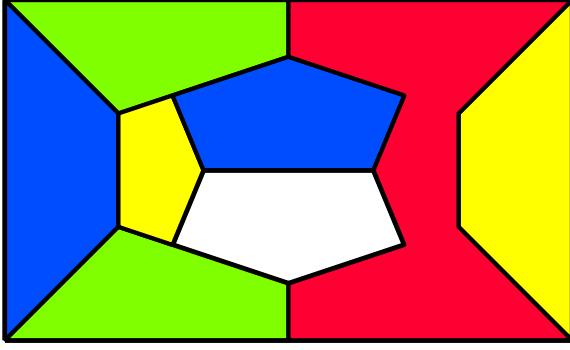


FIGURE 34

On rajoute une autre région en-dessous ce celle précédemment ajoutée. Elle a 4 régions adjacentes. On procède à un échange de couleurs jaune-rouge, qui est possible car la petite région jaune à gauche de la figure n'a pas de région rouge adjacente.

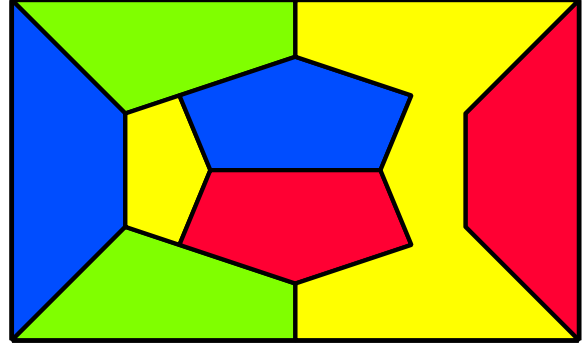


FIGURE 35

On colorie donc la région en rouge, car celle-ci s'est libérée suite à l'échange de couleur.

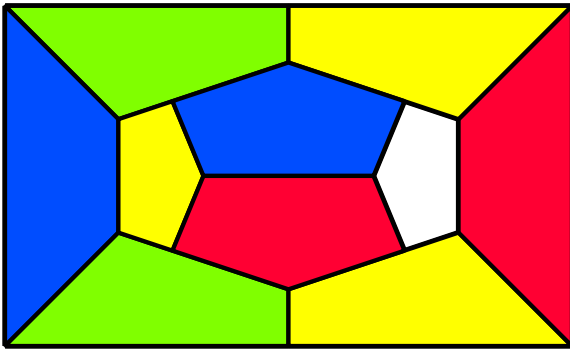


FIGURE 36

On insère enfin la dernière région qui possède 5 régions adjacentes.

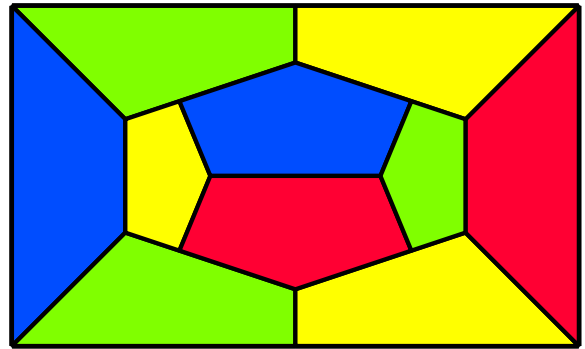


FIGURE 37

Puisque 4 des régions adjacentes font partie d'une même composante de Kempe, il y a forcément une des 4 couleurs qui est libre.

On a montré que le losange de Birkhoff est réductible pour une certaine coloration.

*Démonstration du théorème des quatre couleurs.* Supposons par l'absurde qu'il existe une carte 5-coloriable mais pas 4-coloriable. On retire des régions de cette carte jusqu'à avoir une carte 5-coloriable minimale. Cette nouvelle carte obtenue contient une des 1478 configurations de la liste. Remplaçons la configuration par sa forme réduite. Par hypothèse de minimalité, on a une carte 4-coloriable. Mais comme chaque configuration est réductible, on peut retrouver la carte initiale et la colorier avec 4 couleurs, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc toute carte est 4-coloriable.  $\square$

**Remarque 7.** Malheureusement, le théorème des quatre couleurs n'est pas très utile pour les cartographes car les régions ne sont souvent pas connexes. Nous avons déjà vu l'exemple des villes d'Avenches et d'Estavayer-le-Lac. Il en existe d'autres comme l'Oblast de Kaliningrad en Europe où la Guyane française à l'échelle mondiale. De plus, on colorie les lacs, mers et océans en bleu afin de les différencier des territoires. Ils représentent une région non connexe et le théorème des quatres couleurs est inapplicable.

## 2.2 Conjecture de Hugo Hadwiger

**Théorème 7** (Conjecture de Hugo Hadwiger). *Soit  $n$  le plus grand entier tel que  $K_n$  est un sous-graphe partiel de  $G = (V, E)$ . Alors  $\chi(G) \leq n$ .* [9]

Ce résultat est une conjecture car seuls les cas pour  $n \leq 5$  ont été démontrés.

*Démonstration.* Si  $n = 1$ ,  $G$  est un sommet et on vérifie trivialement la conjecture. Si  $n = 2$ , alors  $G$  ne comporte pas de cycles donc c'est un arbre. Par la Proposition 4,  $G$  est biparti et par conséquent 2-coloriable. Le cas  $n = 3$  est facile. Les graphes qui demandent 3 couleurs sont des graphes non-bipartis, qui contiennent obligatoirement un cycle impair, que l'on peut contracter en un cycle de longueur 3, qui est le graphe  $K_3$  précisément.

Il a été prouvé que les cas  $n = 4, 5$  pouvaient se ramener au théorème des quatre couleurs. Cette partie étant trop longue et assez complexe, nous la laisserons de côté. □

## 2.3 Théorème de Brooks

La démonstration du théorème de Brooks est tirée de l'article Wikipédia sur le sujet [10].

Il donne une relation entre le nombre chromatique et le degré maximal d'un graphe.

**Définition 2.6.** Un graphe  $G = (V, E)$  est *biconnexe* si pour tout sommet  $v \in V$ , le graphe  $G - \{v\}$  est connexe. Un *point d'articulation* est un sommet  $v$  tel que  $G - \{v\}$  n'est pas connexe.

**Remarque 8.** Un graphe biconnexe est un graphe  $k$ -connexe, où  $k \geq 2$ .

**Définition 2.7.** Un graphe  $G = (V, E)$  est *régulier* si tous les sommets ont le même degré. Si  $G$  est régulier et que  $\deg(v) = k$  pour tout  $v$ , on dit que  $G$  est  $k$ -régulier.

**Proposition 5.**  $\chi(K_n) = n$ .

*Démonstration.* Travaillons par récurrence sur  $K_n$ . Si  $n = 1$ ,  $K_1$  est un sommet et  $\chi(G) = 1$ .

Supposons maintenant que  $\chi(K_n) = n$ . Prenons un sommet supplémentaire  $u$  et relierons-le aux autres, de manière à construire  $K_{n+1}$ . Si l'on veut colorer  $u$ , aucune des  $n$  couleurs déjà utilisées n'est disponible car ce sommet est relié à tous les autres. Si bien qu'une couleur supplémentaire est nécessaire et on a  $\chi(K_{n+1}) = n + 1$ .

Par conséquent,  $\chi(K_n) = n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Proposition 6.** Soit  $G = (V, E)$  un cycle. S'il est impair, alors  $\chi(G) = 3$ . Sinon  $\chi(G) = 2$ .

*Démonstration.* Supposons que  $G$  soit un cycle impair. Écrivons-le comme  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}\}$  et commençons à le colorier. On choisit une couleur  $a$  pour  $v_1$ , et une autre couleur  $b$  pour  $v_2$ .  $v_3$  n'est pas relié à  $v_1$ , on peut donc le colorier avec  $a$ . Procédons de même avec  $v_4$  en le coloriant avec  $b$ . On répète ce schéma jusqu'à colorier  $v_{2n-1}$  avec  $a$  et  $v_{2n}$  avec  $b$ . Le sommet  $v_{2n+1}$  est relié à  $v_1$  qui est colorié avec  $a$  et à  $v_{2n}$  qui est colorié avec  $b$ . Une troisième couleur  $c$  est donc nécessaire.

Si  $G$  est un cycle pair, alors  $G$  est biparti par la Proposition 2, il est 2-coloriable. □

**Lemme 6.** Soit  $G$  un graphe non complet et connexe. Alors il existe trois sommets  $u, v$  et  $w$  tels que  $u$  et  $w$  sont reliés à  $v$ , mais tels que  $u$  et  $w$  ne soient pas voisins [10].

*Démonstration.* Puisque  $G$  n'est pas complet, il existe deux sommets  $u$  et  $w$  qui ne sont pas reliés. De plus  $G$  est connexe, donc il existe une chaîne  $\{v_0 = u, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = w\}$  qui relie  $u$  et  $w$ . Prenons le  $i$  maximum tel que  $v_i$  soit relié à  $u$ . Le sommet  $v_i$  à  $u$  et  $v_{i+1}$ , mais  $u$  n'est pas relié à  $v_{i+1}$ . □

**Théorème 8** (Théorème de Brooks). [10] Soit  $G = (V, E)$  un graphe non-complet, qui n'est pas un cycle impair et  $\Delta(G)$  son degré maximal. Alors  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

Si  $G$  est un graphe complet ou est un cycle impair, alors  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ .

**Remarque 9.** Nous allons prouver le Théorème 8 pour les graphes connexes alors que celui-ci ne se limite pas qu'à cette famille de graphes. En effet, si un graphe  $G = (V, E)$  n'est pas connexe, on peut le séparer en sous-graphes  $G_1, G_2, \dots, G_n$  tel que chaque  $G_i$  soit connexe. On sait que  $\chi(G_i) \leq \Delta(G_i)$ , on peut donc dire

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq n} \chi(G_i) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \Delta(G_i) = \Delta(G).$$

*Démonstration.* Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe et  $\Delta(G)$  son degré maximal. Nous avons 3 cas ;

1.  $G$  est complet ;
2.  $G$  est un cycle impair ;

3.  $G$  n'est ni complet ni un cycle impair.

Pour commencer, supposons que  $G$  soit complet. Puisque chaque sommet de  $K_n$  est relié à chacun des  $n - 1$  autres sommets, on a  $\Delta(K_n) = n - 1$ . De plus, par la Proposition 5, on sait que  $\chi(K_n) = n$ . On a donc bien  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ .

Supposons à présent que  $G$  soit un cycle impair. On sait que  $\Delta(G) = 2$  et que  $\chi(G) = 3$  par la Proposition 6, ce qui nous permet de vérifier l'égalité.

Maintenant supposons que  $G$  ne soit ni complet ni un cycle impair. On distingue de nouveau 3 cas ;

i.  $G$  est non-régulier.

ii.  $G$  est régulier et non-biconnexe.

iii.  $G$  est régulier et biconnexe.

- i. Soit  $G$  un graphe non-régulier, à  $n$  sommets et de degré maximal  $\Delta(G)$ . Comme  $G$  n'est pas régulier, il existe un sommet de degré  $k$  inférieur à  $\Delta(G)$ , nommons-le  $u_n$ . Considérons les sommets adjacents à  $u_n$ . On les nomme  $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}$ . On considère ensuite les sommets adjacents à  $u_{n-1}$  qui n'ont pas encore été nommés et on les appelle  $u_{n-k-1}, u_{n-k-2}, \dots$ . On examine ensuite les sommets voisins de  $u_{n-2}$  qui ne sont pas nommés et on les nomme en suivant la numérotation utilisée. On poursuit de cette manière jusqu'à renommer tous les sommets. Ensuite, on colorie les sommets  $u_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , en commençant par le sommet  $u_1$  et en finissant par le sommet  $u_n$ . À chaque étape, le sommet  $u_i$  est relié à un sommet  $u_j$  avec  $i < j$  qui n'est pas colorié. Il y a donc toujours au maximum  $\Delta(G) - 1$  sommets coloriés adjacents à  $u_i$ . Si tous les sommets de  $u_i$  sont coloriés différemment, alors on colorie  $u_i$  avec une nouvelle couleur, sans dépasser  $\Delta(G)$ . Le sommet  $u_n$ , étant de degré strictement inférieur à  $\Delta(G)$ , aura toujours une des  $\Delta(G)$  couleurs disponible.
- ii. Soit  $G$  un graphe régulier et non-biconnexe. Cette dernière propriété implique que  $G$  possède au moins un point d'articulation. On démultiplie le point d'articulation afin de séparer  $G$  en deux graphes connexes.

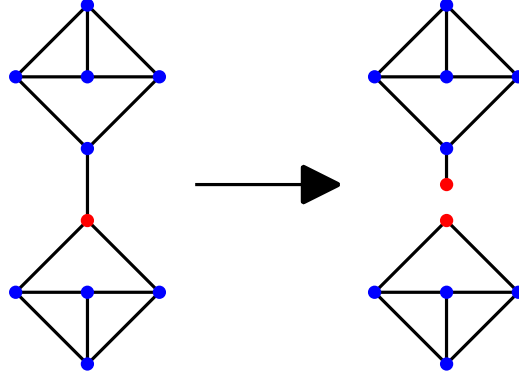


FIGURE 38 – Démultiplication du point d'articulation

Les deux nouveaux graphes obtenus sont non-réguliers et on les colorie avec la méthode utilisée au point i. Si les deux sommets issus de la démultiplication du point d'articulation sont de même couleur, alors on peut les contracter afin d'obtenir une coloration du graphe initial. Sinon, on peut procéder à un échange de couleur au sein d'un des deux graphes de sorte à ce que ces deux sommets soient de même couleur.

- iii. On exclut les cas où  $\Delta(G) < 3$ . En effet, de tels graphes sont soit des graphes complets, soit des cycles. Soit  $G$  un graphe régulier, biconnexe, avec  $\Delta(G) \geq 3$  et  $|V(G)| > 3$ . Par le Lemme 6, il existe trois sommets  $v_1, v_2$  et  $v_3$  tels que  $\deg(v_1) \geq 3$ ,  $v_2$  et  $v_3$  soient reliés à  $v_1$  et tels que  $v_2$  et  $v_3$  ne soient pas reliés ensemble. Nous supposons sans démontrer qu'il existe aussi  $v_2$  et  $v_3$  tels que  $G - \{v_2, v_3\}$  soit connexe. On peut donc colorier  $v_2$  et  $v_3$  de la même couleur. On renomme  $v_1$  en  $u_n$ , et on numérote les sommets de  $G - \{v_2, v_3\}$  comme décrit au point i. On colorie les sommets  $u_i$  en commençant par  $u_1$  et en finissant par  $u_n$ . Comme précédemment, chaque sommet est adjacent à au plus  $\Delta(G) - 1$  sommets coloriés. Quand on arrive à  $u_n$ , deux de ses sommets adjacents sont de même couleur. Donc une des  $\Delta(G)$  couleurs utilisées est libre.

□

### 3 Applications

Dans cette section on présente des problèmes communs qui peuvent être résolus en utilisant des graphes ou la coloration de graphes.

#### 3.1 Sudokus

Le sudoku est un jeu où l'on a une grille de  $9 \times 9$  cases, que l'on sépare en 9 carrés de  $3 \times 3$  cases. On veut numéroter chaque case avec un nombre entre 1 et 9, tel que deux cases qui appartiennent à une même ligne, une même colonne ou un même carré  $3 \times 3$  soient numérotées différemment. On peut représenter un sudoku comme un graphe où pour chaque paire de cases qui appartiennent à une même ligne, colonne ou carré  $3 \times 3$  on a deux sommets reliés par une arête. On choisit une couleur pour chacun des neuf nombres, puis on colorie les sommets en fonction des numéros déjà présents sur le sudoku. Nous ne dessinerons pas le graphe d'un sudoku de taille  $9 \times 9$ , car on peinerait à distinguer les différentes arêtes, étant donné le nombre élevé de celles-ci. On peut appliquer ce schéma pour n'importe quelle taille de sudoku et le résoudre.

Voici un sudoku de taille  $4 \times 4$  avec sa représentation graphique.

3		4	
	2		
		3	
1			

FIGURE 39 – Un sudoku  $4 \times 4$

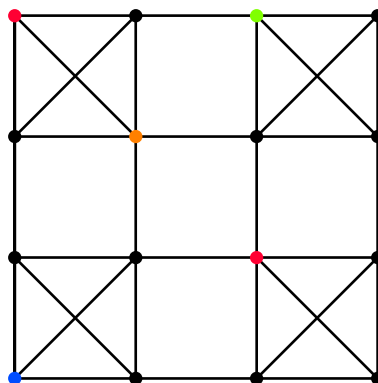


FIGURE 40 – Graphe d'un sudoku  $4 \times 4$

**Remarque 10.** À la Figure 40, on considère que deux sommets sur un même segment sont reliés par une arête afin de simplifier le dessin.

Le plus grand graphe complet que l'on trouve dans le graphe est  $K_4$ , et par la conjecture de Hadwiger, il est 4-coloriable. Il n'est cependant pas planaire, car tous les sommets sont de degré 7, ce qui est une contradiction avec le Lemme 5. Par le théorème de Kuratowski,  $K_{3,3}$  est contenu dans le graphe. On l'obtient de la façon suivante ;

1. On contracte l'arête  $\{v_5, v_6\}$  en un sommet  $u$ .
2. On contracte l'arête  $\{u, v_7\}$  en un sommet  $u'$ .
3. On contracte l'arête  $\{v_8, v_9\}$  en un sommet  $w$ .
4. On contracte l'arête  $\{w, v_{10}\}$  en un sommet  $w'$ .

Les sommets  $v_1, v_2$  et  $u'$  sont tous reliés aux sommets  $v_2, v_4$  et  $w'$ . C'est le graphe  $K_{3,3}$ . On résout facilement le sudoku en coloriant les sommets non coloriés de la Figure 40.

#### 3.2 Fréquences radios

Deux stations radio ne peuvent pas émettre d'ondes à la même fréquence et en même temps si elle sont trop proches. En effet, dans le cas contraire, le récepteur capte deux informations simultanément et ne pourra rien retransmettre. On peut créer un graphe avec un sommet pour chaque station et une arête entre deux stations qui sont trop proches.

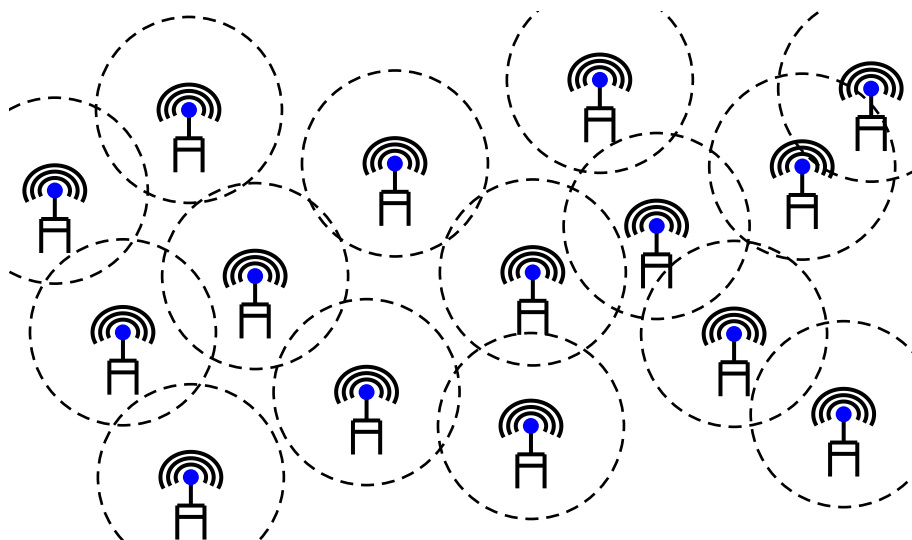


FIGURE 41 – Stations radio

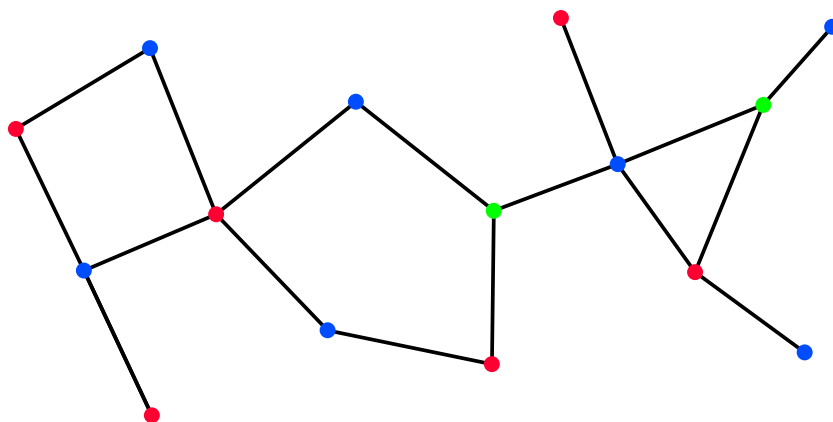


FIGURE 42 – Graphe des fréquences radio

Deux sommets d'une même couleur peuvent émettre en même temps et à une même fréquence - à noter que la répartition des sommets de la Figure 42 n'est pas unique. On attribue donc une fréquence à chaque groupe de stations ayant une même couleur et chaque poste peut émettre sans risquer une coupure chez l'auditeur.

**Remarque 11.** Le modèle des Figures 41 et 42 est inspiré d'un travail de Michel Rigo [11].

### 3.3 Système de navigations

Les applications telles que Google Maps ou Plans utilisent un système de navigation, un système qui calcule le chemin à prendre entre deux points donnés, généralement le plus court. On peut calculer ce chemin à l'aide d'un graphe, avec un sommet pour chaque intersection entre deux routes et une arête pour deux intersection reliés par une route. Il faut aussi au préalable calculer le temps nécessaire pour parcourir la distance entre deux sommets. Ensuite on demande à un ordinateur de calculer l'itinéraire le plus court entre les deux points voulus.

**Remarque 12.** Ce modèle ne fonctionne que s'il n'y a pas de chemins à sens unique, car on suppose que chaque route peut être parcourue dans les deux sens. Cependant, s'il existe un chemin à sens unique, on peut toujours utiliser des graphes orientés.

**Exemple 5.** Un élève arrive à la gare de Renens et souhaite aller au gymnase. Malheureusement, il ne connaît pas le chemin. Il demande donc à Google Maps de l'aider. On a à la Figure 43 une carte des routes à Renens entre la gare et le gymnase avec le graphe qui la représente. On a les points de départ et d'arrivée en vert.



FIGURE 43 – Plan des routes de Renens [12]

Le chemin indiqué par Google Maps est le chemin orange à la Figure 44.



FIGURE 44 – Chemin le plus court entre la gare de Renens et le gymnase

**Remarque 13.** Le plan de la Figure 43 ne contient pas l'intégralité des routes de la ville de Renens. Nous n'en avons simplement pas besoin pour cet exemple. Cependant, le chemin indiqué à la Figure 44 est bien celui indiqué par Google Maps.

## Références

- [1] Mathématiques discrètes, Chapitre 3 : Théorie élémentaire des graphes, p. 8, [https://algo.epfl.ch/\\_media/en/courses/2011-2012/chap3\\_2011.pdf](https://algo.epfl.ch/_media/en/courses/2011-2012/chap3_2011.pdf)
- [2] Stefanie Kosuch, Théorie des graphes, IFIPS cours 1 p.2/ cours 3 p.1, [http://www.kosuch.eu/fr/stefanie/enseignement/tdg\\_CM1.pdf](http://www.kosuch.eu/fr/stefanie/enseignement/tdg_CM1.pdf), [http://www.kosuch.eu/fr/stefanie/enseignement/tdg\\_CM3.pdf](http://www.kosuch.eu/fr/stefanie/enseignement/tdg_CM3.pdf)
- [3] Wikipédia, Graphe planaire, Section 3.1, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe\\_planaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_planaire)
- [4] El Ji, "Deux (deux ?) minutes pour ... le théorème de Jordan", 0 :28-1 :35/6 :30-7 :39 <https://youtu.be/343uIM0pqSE>
- [5] Yifan Xu, Kuratowski's Theorem, 28 août 2017
- [6] Mary Radcliffe, Math 228 : Kuratowski's Theorem <http://www.math.cmu.edu/~mradclif/teaching/228F16/Kuratowski.pdf>
- [7] Wikipédia, Théorème des quatre couleurs, Section 1, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_des\\_quatre\\_couleurs](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_quatre_couleurs)
- [8] El Ji, "Deux (deux ?) minutes pour ... le théorème des 4 couleurs, 4 :46 - 10 :13 <https://youtu.be/WbAgfT79t6w>
- [9] Wikipédia, Hadwiger conjecture, [https://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger\\_conjecture\\_\(graph\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Hadwiger_conjecture_(graph_theory))
- [10] Wikipédia, Théorème de Brooks, Sections 1/ 3.1/ 3.2/ 3.3/ 3.4, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_Brooks](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Brooks)
- [11] Michel Rigo, Les couleurs des Maths, p.34-41, [https://orbi.uliege.be/bitstream/2268/244725/1/couleurs\\_des\\_maths.pdf](https://orbi.uliege.be/bitstream/2268/244725/1/couleurs_des_maths.pdf)
- [12] Google Earth, Ville de Renens, <https://earth.google.com/web/@46.53487109,6.57890159,413.66233139a,881.77044425d,35y,-0.00000279h,3.57928493t,Or>

## A Illustrations

Dans cette section, on trouve les illustrations trop spacieuses nuisant à la bonne lecture de ce travail.

### Composante de Kempe

La définition d'une composante de Kempe se trouve à la page 20.

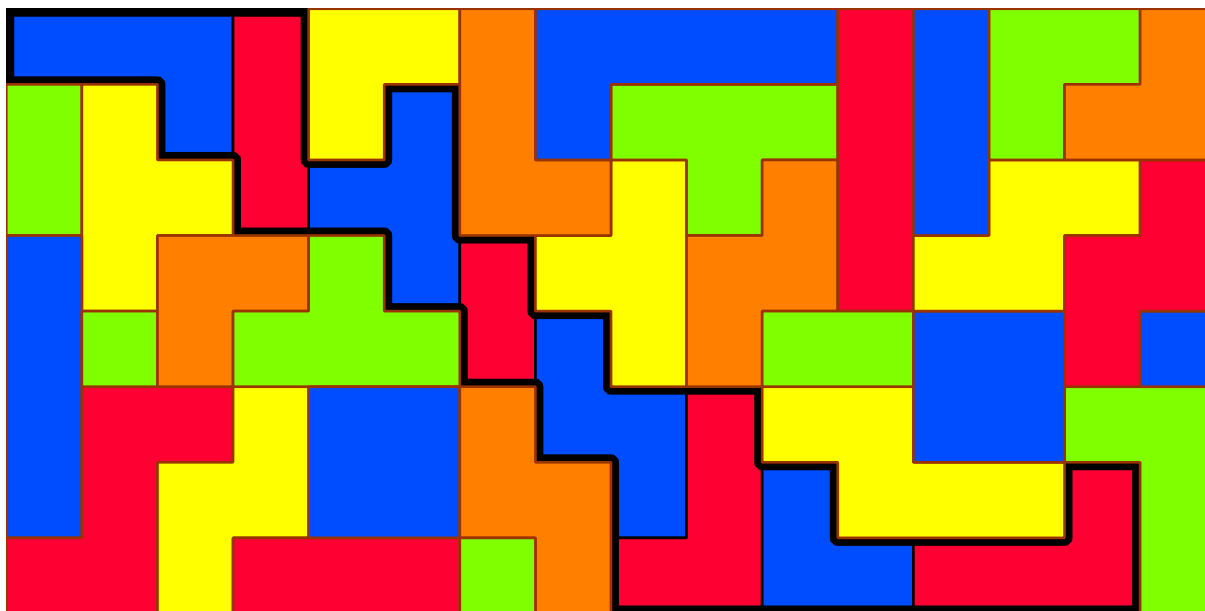


FIGURE 45 – Composante de Kempe bleu-rouge d'une carte

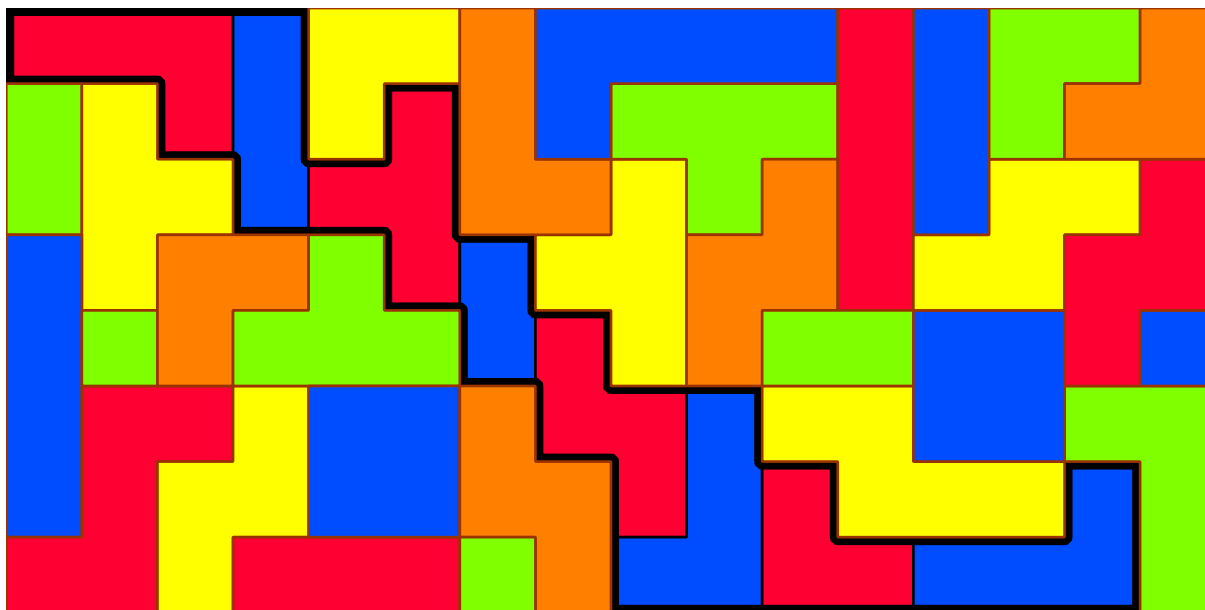


FIGURE 46 – Échange de couleurs au sien d'une composante de Kempe bleu-rouge d'une carte



## Contre-exemple de Heawood

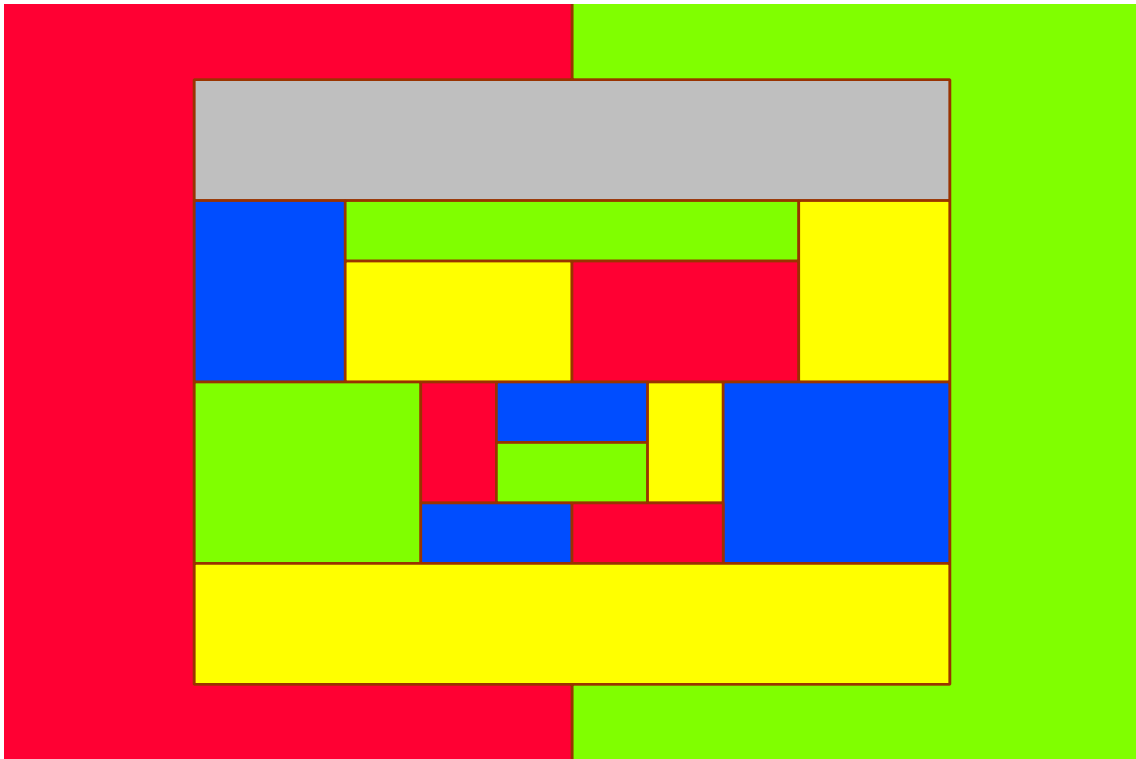


FIGURE 47 – Contre-exemple de Heawood

Il n'est pas possible de colorier la région grise simplement avec un échange de couleurs.