תכונות בסיסיות של מרחבי הסתברות ומאורעות

טענה- דה מורגן – אם $A_1,\dots,A_n$ מאורעות(או אינסוף מאורעות) אז $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n}((A_i)^c)$ וגם $(\bigcap_{i=1}^{n}(A_i))^c = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

טענה – יהיו $A_1,\dots,A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i)$

וזה שווה $= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i) - \sum_{i,j=1,\ i<j}^{n}\mathbb{P}(A_i\cap A_j) + \cdots$

טענה- חסם האיחוד – $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$ (גם עבור $n=\infty$)

טענה - אם $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אחיד וA מאורע $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

מספרי רמזי

הגדרה- המספר $R(t,s)$ הוא כמות הקודקודים המינימלית n כך שלכל צביעה של קשתות הגרף השלם על n קודקודים באדום וכחול קיימים t קודקודים שכל הקשתות ביניהן צבועות אדום או קיימים s קודקודים שכל הקשתות ביניהם צבועות בכחול. **משפט רמזי-** $R(t,s)$ סופי לכל t,s

חסם עליון ל$R(t,t)$ – צריך להראות שבכל צביעה של קשתות הגרף על n קודקודים קיימים t קודקודים עם הקשתות ביניהן חד-גוניות, אז $R(t,t)\le n$ ידוע כי $R(t,t) \le c\cdot\frac{4^t}{\sqrt{t}}$

חסם תחתון ל$R(t,t)$ – צריך למצוא צביעה ספציפית של קשתות על n קודקודים כך שאין t קודקודים שכל הקשתות ביניהם מונוכרומטיות ואז $R(t,t) > n$, ידוע כי $R(t,t) > 2^{\frac{t}{2}}$

מרחבי הסתברות מותנים

הגדרה- יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות וB מאורע כך ש $\mathbb{P}(B)>0$ אזי $(\Omega,\mathbb{P}(\cdot|B))$ הינו מרחב הסתברות מותנה בB כאשר $\forall w\in\Omega.\ \mathbb{P}(w|B) = \begin{cases}0, & w\notin B\\ \frac{\mathbb{P}(w)}{\mathbb{P}(B)}, & w\in B\end{cases}$ לכן $\mathbb{P}(A|B) = \sum_{w\in A}\mathbb{P}(w|B)$. אם $\mathbb{P}(B)>0$ אז $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

טענה- יהיו $B_1,\dots,B_n\subseteq\Omega$ מאורעות זרים ו $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, כמו כן $\mathbb{P}(B_i)>0$ לכל $1\le i\le n$ ויהי A מאורע כלשהו אז:

נוסחת ההסתברות השלמה- $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)\cdot\mathbb{P}(A|B_i)$ **חוק בייז –** $\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\cdot\mathbb{P}(A|B_j)}{\sum_{i=1,\ i\neq j}^{n}\mathbb{P}(B_i)\cdot\mathbb{P}(A|B_i)}$

טענה- כלל השרשרת – יהיו $A_1,\dots,A_n$ מאורעות ונניח ש $\mathbb{P}(A_1,\dots,A_{n-1})>0$ אז מתקיים כי $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$

אי תלות מותנה – נאמר שA,B,C מאורעות ו$\mathbb{P}(C)>0$, אז A,B ב"ת במרחב ההסתברות המותנה בC אם $\mathbb{P}(A\cap B|C) = \mathbb{P}(B|C)\cdot\mathbb{P}(B|C)$

מרחבי מכפלה

הגדרה- יהי $(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ $1\le i\le n$ מרחבי הסתברות אזי מרחב המכפלה שלהם מוגדר כך: $(\Omega,\mathbb{P}) = \otimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ כאשר $\Omega = \Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$ ו $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(w_i)$

טענה – לכל i ומאורע $A_i\subseteq\Omega_i$ אם נגדיר $\bar{A} = \Omega_1\times\ldots A_i\times\ldots\times\Omega_n$ אז $\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}_i(A_i)$

טענה- $\bar{A_1},\dots,\bar{A_n}$ ב"ת ב$(\Omega,\mathbb{P})$. **מסקנה-** $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A_i}) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\bar{A_i})$

למות $e^{\pm x} \ge 1\pm x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

$e^{-x-2x^2} \le 1-x$ לכל $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

אי תלות

הגדרה- מאורעות A,B הם ב"ת אם $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ שקול $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$

הגדרה1- מאורעות $A_1,\dots,A_n$ הם ב"ת אם לכל תת-קבוצה $I\subseteq[n]$ שקיימת $|I|\ge 2$ מתקיים $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$

שקול- מאורעות $A_1,\dots,A_n$ הם ב"ת אם מתקיימים השוויונות $\mathbb{P}(B_1\cap\ldots\cap B_n) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(B_i)$ לכל אפשרות שבה כל אחד מהB_i הוא A_i או A_i^c

משתנים מקריים –

הגדרה- יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ מ$S\to\Omega$ אזי ניתן לחשוב על $X_1,\dots,X_n$ כעל משתנה אחד $(X_1,\dots,X_n):\Omega\to S^n$ שמקבל ערכים בS^n ומוגדר ע"י $(X_1,\dots,X_n)(w) = (X_1(w),\dots,X_n(w))\in S^n$

הגדרה- יהיו $X_1,\dots,X_n:\Omega\to S$ מ"מ וT ו $f:S^n\to T$ אז המ"מ $Y = f(X_1,\dots,X_n)$ מוגדר כמשתנה המקרי המקבל ערכים בT ע"י $Y(w) = f(X_1(w),\dots,X_n(w))$

הגדרה- $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת אם $\mathbb{P}(X_1=k_1,\dots,X_n=k_n) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i=k_i)$.

אי תלות של משתנים מקריים

טענה- אם $A_1,\dots,A_n$ מאורעות ו$X_i = 1_{A_i}$ מ"מ אז $A_1,\dots,A_n$ ב"ת אם ורק אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת

טענה- $X_1,\dots,X_n$ ב"ת $\Leftrightarrow$ X_1 ב"ת ב$(X_2,\dots,X_n)$ וגם $(X_2,\dots,X_n)$ ב"ת

טענה- אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת עבור $n\ge 3$ אז גם $X_2,\dots,X_n$ ב"ת ובאינדוקציה כל תת אוסף של X_i ב"ת

טענה- יהיו $X_1,X_2:\Omega\to S$ ב"ת, תהי S' קבוצה ו$f:S\to S'$ אז $f(X_1),X_2$ ב"ת

מסקנה- אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת וf פונקציה אז גם $f(X_1,\dots,X_k),X_{k+1},\dots,X_n$ ב"ת

מסקנה- אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת וf_i פונקציות אז $f_1(X_1),\dots,f_n(X_n)$ ב"ת

מסקנה- יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת, $X_i:\Omega\to S_i$ ויהיו $E_1,\dots,E_n$ קבוצות כך ש$E_i\subseteq S_i$ אז $\mathbb{P}(X_1\in E_1,\dots,X_n\in E_n) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\in E_i)$

התפלגויות

הגדרה- יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ מ$S\to\Omega$ אזי $\mu_{(X_1,\dots,X_n)}$ היא התפלגות על S^n ומוגדרת על ידי : $\mu_{(X_1,\dots,X_n)}(k_1,\dots,k_n) = \mathbb{P}(X_1=k_1,\dots,X_n=k_n)$ זאת ההתפלגות המשותפת של $X_1,\dots,X_n$. בהקשר זה ההתפלגות של כל מספר כלשהו של X_i תקרא ההתפלגות השולית

משפט – (התכנסות התפלגות בינומית להתפלגות פואסונית) תהי $(p_n)_{n\ge1}$ סדרת הסתברויות המקיימת $n\cdot p_n\to\lambda>0$. לכל $k\ge 0$ מתקיים הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

הגדרה (קונבולוציה)- בהינתן זוג מ"מ ממשיים X,Y ב"ת ההתפלגות של $X+Y$ מוגדרת ע"י $\mathbb{P}(X+Y=a) = \sum_x\mathbb{P}(X=a)\cdot\mathbb{P}(Y=a-x)$. לכן אם $X\sim Bin(n,p), Y\sim Bin(m,p)$ אז $X+Y\sim Bin(n,p)$, אם $X\sim Bin(\lambda), Y\sim poi(\mu)$ אז $X+Y\sim poi(\lambda+\mu)$

הגדרה – בהינתן זוג התפלגויות μ_1,μ_2 על קבוצות כלשהן s_1,s_2 כל התפלגות משותפת על $(s_1\times s_2)$ נקראת צימוד של μ_1,μ_2

טענה- אם $X:\Omega_1\to S, Y:\Omega_2\to S$ מ"מ (על מרחבי הסתברות שונים) ו $f:S\to S'$ אז אם X,Y שווי התפלגות אז $f(X),f(Y)$ שווי התפלגות

טענה- יהיו X,Y מ"מ (על אותו מרחב הסתברות) אז לכל k קבוע מתקיים: $|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)| \le \mathbb{P}(X\neq Y)$

טענה- יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת כאשר $X_i\sim Bern(p)$ אז המ"מ $S_n = \sum_{i=1}^{n}X_i$ מקיים $S_n\sim Bin(n,p)$

תוחלת

הגדרה- יהי X מ"מ, נגדיר $X^- = \begin{cases}-X(w), X(w)\le 0\\ 0, else\end{cases}$ ו $X^+ = \begin{cases}X(w), X(w)\ge 0\\ 0, else\end{cases}$

X^+,X^- מ"מ אי שלילים כך ש $X = X^+ - X^-$ וגם $|X| = X^+ + X^-$. כעת:

א. תוחלת סופית – אם $E(X^+),E(X^-)<\infty$ אז $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$ ובמקרה זה גם $E(X) = \sum_{w\in\Omega}\mathbb{P}(w)\cdot X(w)$ וטור זה מתכנס בהחלט

ב. תוחלת אינסופית- אם $E(X^+)=\infty, E(X^-)<\infty$ אז $E(X)=\infty$ ובאופן דומה להפך

ג. תוחלת לא מוגדרת – אם $E(X^+)=\infty, E(X^-)=\infty$ אז $E(X)$ לא מוגדרת

טענה- אם X מ"מ אי שלילי אז $E(X) = \sum_{k\in Supp(\mu_X)}\mathbb{P}(X=k)\cdot k$

טענה- אם X מ"מ בעל תוחלת סופית אז $E(X) = \sum_{k\in Supp(\mu_X)}\mathbb{P}(X=k)\cdot k$ והטור מתכנס בהחלט. בכיוון השני אם הטור מתכנס בהחלט אז $E(X)$ סופית ושווה לטור

משפט- יהי X,Y מ"מ בעלי תוחלת ו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$

טענה - אם X,Y מ"מ ממשיים המקיימים $\mathbb{P}(X\le Y)=1$ והתוחלת של X,Y מוגדרות אז $E(X)\le E(Y)$. אם $E(X),E(Y)<\infty$ אז שוויון מתקיים אם ורק אם $\mathbb{P}(X=Y)=1$

טענה- יהי $X:\Omega\to S$ אם $f:S\to[0,\infty)$ אז $E(f(X)) = \sum_{k\in Supp(\mu_X)}\mathbb{P}(X=k)f(k)$

טענה- יהי $X:\Omega\to S$ אם $f:S\to\mathbb{R}$ אז $E(f(X))$ סופית אם ורק אם $\sum_{k\in Supp(\mu_X)}\mathbb{P}(X=k)f(k)$ מתכנס בהחלט ואז הטור שווה ל$E(f(X))$

טענה- יהיו X,Y מ"מ ממשיים ב"ת. אם X,Y אי שליליים או שלשניהם תוחלת סופית אז התוחלת של $X\cdot Y$ מוגדרת ומתקיים $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$

טענה- $E(X)$ סופית אם ורק אם $E(|X|)$ סופית

שונות

הגדרה- יהי X מ"מ בעל תוחלת סופית, אזי השונות של X היא $Var(x) = E\left[(X-E(X))^2\right]$ וסטיית התקן של X היא $Std(X) = \sqrt{Var(X)}$, השונות מוגדת לכל מ"מ עם $E(X)<\infty$ אבל יכולה להיות אינסוף

טענה- יהיו $X_1,\dots,X_n$ בעלי שונות סופית אזי $Var(\sum_{i=1}^{n}X_i) = \sum_{i=1}^{n}Var(X_i) + \sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$, מסקנה – אם הם ב"ת אז שונות הסכום היא סכום השונויות כי $Cov(X_i,X_j)=0$

תכונות בסיסיות של שונות (X מ"מ בעל שונות סופית)

טענה- $Var(X)\ge 0$ וכן $Var(X)=0$ אם ורק אם $\mathbb{P}(X=E(X))=1$

טענה- יהי $a\in\mathbb{R}$ אז $Var(aX) = a^2Var(X)$, $Std(aX) = |a|\cdot Std(X)$, $Var(a+X) = Var(X)$

טענה- $Var(X) = E(X^2)-(E(X))^2$ (גם כאשר ידוע מראש רק ש X בעל תוחלת סופית)

שונות משותפת((X,Y) מ"מ בעלי שונות סופית)

הגדרה-השונות המשותפת היא $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

הגדרה- X,Y בעלי מתאם חיובי אם $Cov(X,Y)>0$, מתאם שלילי אם $Cov(X,Y)<0$ ובלתי מתואמים אם0

טענה- אם X,Y בעלי שונות סופית אז גם $E[(X-Y)^2], E[(X+Y)^2], E[|XY|]$ בעלי שונות סופית

מסקנה- אם X,Y בעלי שונות סופית אז $Cov(X,Y)$ מוגדרת וסופית

מסקנה- אם X,Y בעלי שונות סופית אז $Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$

טענה- אם X,Y ב"ת אז $Cov(X,Y)=0$ כלומר הם בלתי מתואמים

טענה- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$, אם $a,b\in\mathbb{R}$ אז $Cov(aX,bY) = a\cdot b\cdot Cov(X,Y)$

טענה- אם Z מ"מ בעל שונות סופית אז $Cov(Z+X,Y) = Cov(X,Y)+Cov(Z,Y)$

תוחלת מותנה

הגדרה- יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, X מ"מ בעל תוחלת סופית המוגדר עליו וA מאורע כך ש$\mathbb{P}(A)>0$. התוחלת של X בהינתן A מוגדרת להיות: $\mathbb{E}[X|A] = \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega|A) = \sum_{k\in Supp(X)}k\cdot\mathbb{P}(X=k|A)$.

הגדרה- יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, X,Y מ"מ המוגדרים עליו כך שX בעל תוחלת סופית. התוחלת של X בהינתן Y הינה המשתנה המקרי כך שלכל $\omega\in\Omega$;מוגדרת להיות: $\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \mathbb{E}[X|Y=Y(\omega)]$. אם $\mathbb{P}(Y=Y(\omega))=0$ אז צד ימין לא מוגדר היטב ומתקיים $\mathbb{E}[X|Y](\omega)=0$

משפט- יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות, X,Y מ"מ המוגדרים עליו כך שX בעל תוחלת סופית אז מתקיים $\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X\cdot 1_A]}{\mathbb{P}(A)}$ ו $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}[X|Y=k]\cdot\mathbb{P}(Y=k)$ כמו כן $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$

טענה- $\mathbb{E}[aX_1+bX_2|Y] = a\mathbb{E}[X_1|Y]+b\mathbb{E}[X_2|Y]$ ו $\mathbb{E}[X\cdot f(Y)|Y] = f(Y)\mathbb{E}[X|Y]$

טענה- אם X,Y ב"ת אז $\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y]=\mathbb{E}[X])=1$

משפט הגבול המרכזי –

יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת ש"ה ובעלי שונות סופית, המ"מ המוגדר $\widehat{S_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\cdot Var(X_1)}}$ (אז $\mathbb{E}[\widehat{S_n}]=0, Var(\widehat{S_n})=1$) מתכנס בהתפלגות להתפלגות גאוסיינית כלומר לכל $-\infty\le a<b\le\infty$ ממשיים מתקיים $\mathbb{P}(a\le\widehat{S_n}\le b)\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

מקדם מתאם

הגדרה- עבור מ"מ X,Y בעלי שונות סופית ולא קבועים נגדיר את מקדם המתאם $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{Std(X)\cdot Std(Y)}$

תכונות מקדם המתאם $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$ **וגם** $\rho(X+a,Y) = \rho(X,Y)$ לכל $a\in\mathbb{R}$ ו $\rho(aX,Y) = \frac{a}{|a|}\rho(X,Y)$ עבור $a\neq 0$ **וגם** $\rho(X,X)=1$ **וגם** $Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow \rho(X,Y)=0$

משפט- $|\rho(X,Y)|\le 1$ **וגם** אם $\rho(X,Y)=1$ אז קיימים $a>0, b\in\mathbb{R}$ כך ש $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$ **וגם** אם $\rho(X,Y)=-1$ אז קיימים $a<0, b\in\mathbb{R}$ כך ש $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$

אי שיוויונות מרקוב וצ'בישב

טענה- אם X מ"מ אי שלילי אז לכל $t>0$ מתקיים $\mathbb{P}(X\ge t)\le\frac{\mathbb{E}[X]}{t}$

טענה- אם X מ"מ בעל תוחלת ושונות סופיים אז לכל $t>0$ מתקיים $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X|\ge t)\le\frac{Var(X)}{t^2}$

משפט – (החוק החלש של המספרים הגדולים) יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת וש"ה בעלי שונות סופית אז לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mathbb{E}[X_1]\right|>\varepsilon\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$

מה זה	Var(X)	E[X]	distribution	Support	התפלגות
מטילים מטבע עם הסתברות p לעץ וסופרים כמה הטלות עד העץ הראשון	$(1-p)/p^2$	$1/p$	$(1-p)^{k-1}\cdot p$	$\{1,2,\dots\}$	$Geom(p)$ - גיאומטרית
מטילים מטבע עם הסתברות p ל1 ו $1-p$ ל-0	$p(1-p)$	p	$p(0)=1-p, p(1)=p$	$\{0,1\}$	$Bern(p)$-ברנולי
מבצעים n ניסויים בלתי תלויים של הטלת מטבע וסופרים כמה תוצאות 1 יצאו.	$np(1-p)$	np	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$\{0,\dots,n\}$	$Bin(n,p)$ - בינומי
הסתברות שווה לכל מספר בתוּמך	$(b-a)^2/12$	$(a+b)/2$	$1/(n-m+1)$ בתומך	$[m,n]$	$Uniform$ - אחידה
כמה הטלות מטבע צריך לבצע עד r הצלחות (כולל)	$\frac{pr}{(1-p)^2}$	$\frac{pr}{1-p}$	$\binom{k+r-1}{k}(1-p)^r p^k$	$\{0,1,\dots\}$ - מספר ההצלחות	$NB(r,p)$- בינומית שלילית
באוכלוסיה בגודל N יש D פריטים מיוחדים, ודוגמים ממנה n פריטים, המשתנה סופר כמה פריטים מיוחדים יש בדגימה	$n\cdot\frac{D}{N}\cdot\frac{(N-D)}{N}\cdot\frac{(N-n)}{N-1}$	$\frac{nD}{N}$	$\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}/\binom{N}{n}$	$\{\max(0,n+D-N),\dots,\min(n,D)\}$	היפר גאומטרית - $HG(N,D,n)$
מספר הצלחות בתהליך בינומי עם $n\to\infty, p\to 0$ ו $\lambda = np$ קבוע	λ	λ	$e^{-\lambda}\cdot\lambda^k/k!$	$\{0,1,\dots\}$	$Poi(\lambda)$- פואסון

__אי שוויון צ'בישב החד צדדי__ – יהי X מ"מ בעל תוחלת μ ושונותσ, מתקיים אזי $\mathbb{P}(X-\mu\geq\lambda)\begin{cases}\leq\frac{\sigma}{\sigma+\lambda^2}, & \lambda>0\\ \geq 1-\frac{\sigma}{\sigma+\lambda^2}, & \lambda<0\end{cases}$, __הוכחה –__ נניח ש $\lambda>0$, נגדיר $Y=X-\mu$, כלומר $\mathbb{E}[Y]=0, Var(Y)=\sigma$, לכל $u\geq 0$ מתקיים $\frac{\sigma+u^2}{(\lambda+u)^2}=\frac{\mathbb{E}[(Y+u)^2]}{(\lambda+u)^2}\leq\mathbb{P}((Y+u)^2\geq(\lambda+u)^2)\leq\mathbb{P}(Y+u\geq\lambda+u)=\mathbb{P}(Y\geq\lambda)=\mathbb{P}(X-\mathbb{E}[X]\geq\lambda)$ (האי שוויון האחרון נובע ממרקוב) נבחר $u=\frac{\sigma}{\lambda}$ ונקבל $\mathbb{P}(X-\mathbb{E}[X]\geq\lambda)\leq\frac{\sigma}{\lambda^2+\sigma}$, אם $\lambda>0$, במקרה של $\lambda<0$ נסמן $\alpha=-\lambda$ ולכל $u\geq 0$ נקבל $\frac{\sigma}{\lambda^2+\sigma}=\frac{\sigma}{\alpha^2+\sigma}\geq\mathbb{P}(-Y>\alpha)=\mathbb{P}(X-\mathbb{E}[X]<\lambda)$, לכן מעיקרון המשלים נקבל $\mathbb{P}(X-\mathbb{E}[X]\geq\lambda)=1-\frac{\sigma}{\lambda^2+\sigma}$

__שרשראות מרקוב__ -נתונים מרחב מצבים S , התפלגות התחלתית μ על S, מטריצת מעבר P שהיא מטריצה $S\times S$ כך שלכל $x,y\in S$ מתקיים $P(x,y)\geq 0$ ו $\sum_{y\in S}P(x,y)=1$ אזי שרשרת המרקוב עד זמן n היא סדרת המ"מ $X_1,\dots X_n$ המקיימים $\mathbb{P}(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n)=\mu(X_0)\mathbb{P}(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(x_{n-1},x_n)$

__תכונת מרקוב-__ יהי $k\geq 1$ תהי $V\subseteq S^k$ יהיו $X_k,\dots X_n\in S$ אזי לכל התפלגות התחלתית μ כל עוד $\mathbb{P}_\mu(X_k=x_k,(x_0,\dots,x_{k-1})\in V)>0$ מתקיים (__סימון-__ עבור μ שבו $\mu(x)=1$ נסמן $\mathbb{P}_x$ באופן זהה עבור תוחלת)$\mathbb{P}_\mu(X_{k+1}=x_{k+1},\dots,X_n=x_n|X_k=x_k,(x_0,\dots,x_{k-1})\in V)=\mathbb{P}_{x_k}(X_1=x_{k+1},\dots,X_{n-k}=x_n)$

__למה-__ תהי μ התפלגות התחלתית ותהי μ_t ההתפלגות לאחר t צעדים(התפלגות X_t) אז $\mu_t=\mu\cdot P^t$

__הגדרה-__ התפלגות π על S נקראת סטציונרית אם $\pi\cdot P=\pi$ כלומר $\forall x\in S.\,\mathbb{P}_\pi(X_1=x)=\pi(x)$

__משפט-__ לכל שרשרת מרקוב קיימת התפלגות סטציונרית

__טענה-__ ישנה תת סדרה (t_k) כך ש $\lim_{k\to\infty}\pi_{t_k}(x)=\pi$ לכל $x\in S$ כך ש π סטנציונרית

__הגדרה-__ שרשרת מרקוב נקראת אי – פריקה אם לכל $x,y\in S$ קיים $t\geq 1$ (התלוי בx,y) כך ש $\mathbb{P}_x(X_t=y)>0$

__הערה-__ $P^t(x,y)$ היא הסתברות המעבר מx ל y בt צעדים

__משפט-__ אם שרשרת מרקוב אי פריקה אז ההתפלגות הסטציונרית יחידה.

__הגדרה-__ למשוואה $P\cdot f=f$ כאשר P מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב וf וקטור עמודה הפתרון נקרא פונקציה הרמונית. אנו חושבים בהקשר זה על הווקטור f כפונקציה $f:S\to\mathbb{R}$

__טענה-__ תהי $f:S\to\mathbb{R}$ (f וקטור עמודה) אז לכל $x\in S$ מתקיים $(P\cdot f)(x)=\mathbb{E}_x[f(X_1)]$

__מסקנה-__ לכל $f:S\to\mathbb{R}$ ו$t\geq 1$ מתקיים $(P^t\cdot f)(x)=\mathbb{E}_x[f(X_t)]$

__מסקנה-__ עבור הילוך מקרי פשוט על גרף, f הרמונית $\Leftrightarrow$ בכל קודקוד x הערך של f הוא ממוצע הערכים בשכני x

__הגדרה (שרשרת הפיכה)-__ אם לשרשרת יש התפלגות π שמקיימת $\pi_v\cdot P(v,w)=\pi_w\cdot P(w,v)$ לכל $v,w\in S$ אז נאמר שהשרשרת הפיכה

__טענה-__ במקרה של שרשרת הפיכה π היא התפלגות סצטיונרית

__משפט-__ אם השרשרת אי פריקה , אז לכל התפלגות התחלתית μ יש התכנסות ממוצעת כלומר $\forall y\in S.\,\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\mathbb{P}_\mu(X_s=y)=\pi(y)$

__הגדרה-__ עבור מצב $x\in S$, תהי $T(x)=\{t\geq 1|\mathbb{P}_x(X_t=x)>0\}$ זמני החזרה האפשריים ל x נגדיר את __המחזור של x__ להיות הgcd של $T(x)$. השרשרת נקראת __חסרת מחזור__ אם לכל $x\in S$ מחזור 1

__משפט – (המשפט הארגודי)-__ עבור שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור, לכל התפלגות התחלתית μ יש התכנסות נקודתית כלומר $\forall y\in S.\,\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}_\mu(X_t=y)=\pi(y)$

__למה-__ בשרשרת מרקוב אי פריקה המחזור של כל המצבים זהה

__מסקנה-__ שרשרת מרקוב אי פריקה חסרת מחזור אם קיים $x\in S$ כך שהמחזור של x הוא 1

__טענה-__ עבור שרשרת מרקוב אי פריקה וחסרת מחזור קיים $r\geq 1$ שלא תלוי בx,y כך שלכל $x,y\in S$ $\mathbb{P}_x(X_r=y)$

__טענה-__ יהי $G=(V,E)$ גרף ללא לולאות עצמיות וללא קשתות כפולות. נסמן דרגה של קודקוד $v\in V$ ב $\deg(v)$, לכל קודקוד בגרף קיימים $q_v,p_v\geq 0$ כך ש $p_v+\deg(v)\cdot q_v=1$, עבור שרשרת מרקוב המוגדרת עם $S=V$ ו מטריצת מעבר $P_{v,w}=\begin{cases}p_v, & v=w\\ q_v, & \{v,w\}\in E\\ 0, & otherwise\end{cases}$ יש התפלגות סטציונרית π מהצורה הבאה - $\pi_v=\frac{c}{q_v}$ כאשר $c>0$ קבוע שמבטיח ש $\sum_v\pi_v=1$, במקרה של הילוך מקרי פשוט $\forall x\in S.\,\pi(x)=\frac{\deg(x)}{\sum_{y\in S}\deg(y)}$ כי $q_v=\frac{1}{\deg(v)}$

__הגדרה (שרשראות לידה ומוות)-__ אוסף המצבים הוא $S=\{0,\dots,n\}$, מותר רק לעבור בין מצב i למצב $i+1$ בהסתברות p_i או למצב i בהסתברות r_i או ל$i-1$ בהסתברות q_i כך ש $q_i+r_i+p_i=1$ ו $q_0=p_n=0$

__טענה-__ כל שרשרת לידה ומוות הפיכה ביחס להתפלגות הסטציונרית המוגדרת כך: $w_0=1, w_k=\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{q_{j-1}}{q_j}\right)$ ואז $\pi_k=c\cdot w_k$ עבור קבוע נרמול $c>0$