Ejercicio 4

Se desea realizar un circuito que convierta un numero binario de 4 bits en su complemento a dos.

- Exprese el valor de cada bit de salida en funcion de los minterminos de los bits de entrada.
- Exprese el valor de cada bit de salida en forma simplificada.
- Dibuje el circuito logico resultante utilizando compuertas AND, OR, NOT.
- Implemente el circuito resultante en Verilog.

Para obtener el complemento a dos de un numero binario se invierte el valor de cada una de sus cifras, es decir, se realiza el complemento a uno, y luego se le suma uno al numero resultante de la inversion.

Su utilidad principal se encuentra en las operaciones matematicas con numeros binarios. En particular, la resta de numeros binarios se facilita enormemente utilizando el complemento a dos: la resta de dos numeros binarios puede obtenerse sumando al minuendo el complemento a dos del sustraendo.

Ademas, llamaremos mintermino m_i a aquel que se forma multiplicando (AND logico) todas las variables, negando aquellas que valen 0 en la combinacion para la cual queremos que el mintermino valga 1. Para N variables booleanas, existen 2^N mintermino, uno para cada posible combinacion de ellas.

A continuacion se realiza la tabla de verdad para un numero binario de 4 bits. Donde a cada numero binario $(x_1x_2x_3x_4)$ le corresponde su respectivo complemento a dos a la salida $(f_1f_2f_3f_4)$.

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1	f_2	f_3	f_4	m_i
0	0	0	0	0	0	0	0	m_0
0	0	0	1	1	1	1	1	m_1
0	0	1	0	1	1	1	0	m_2
0	0	1	1	1	1	0	1	m_3
0	1	0	0	1	1	0	0	m_4
0	1	0	1	1	0	1	1	m_5
0	1	1	0	1	0	1	0	m_6
0	1	1	1	1	0	0	1	m_7
1	0	0	0	1	0	0	0	m_8
1	0	0	1	0	1	1	1	m_9
1	0	1	0	0	1	1	0	m_{10}
1	0	1	1	0	1	0	1	m_{11}
1	1	0	0	0	1	0	0	m_{12}
1	1	0	1	0	0	1	1	m_{13}
1	1	1	0	0	0	1	0	m_{14}
1	1	1	1	0	0	0	1	m_{15}

Table 1: Complemento a dos $(f_1f_2f_3f_4)$ del bit de entrada $(x_1x_2x_3x_4)$

Se expresa la salida como funcion de los minterminos. Para expresar la funcion en minterminos tomamos donde la funcion sea 1 y unimos los minterminos con sumas:

$$f_1(m_i) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8$$

$$f_2(m_i) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12}$$

$$f_3(m_i) = m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14}$$

$$f_4(m_i) = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 + m_{11} + m_{13} + m_{15}$$

Se reemplaza por los valores de entrada,

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \\
f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \\
f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\overline{x_4} \\
f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\overline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3x_4
\end{aligned}
$$

Finalmente, utilizando mapas de Karnaugh, se simplifican las ecuaciones. Los mapas de Karnaugh reducen la necesidad de hacer calculos extensos para la simplificacion de expresiones booleanas.

El mapa de Karnaugh consiste en una representacion bidimensional de la tabla de verdad de la funcion a simplificar. Puesto que la tabla de verdad de una funcion de N variables posee 2^N filas, el mapa K correspondiente debe poseer tambien 2^N cuadrados. Las variables de la expresion son ordenadas en funcion de su peso y siguiendo el codigo Gray, de manera que solo una de las variables varia entre celdas adyacentes. La transferencia de los terminos de la tabla de verdad al mapa de Karnaugh se realiza de forma directa, albergando un 0 o un 1, dependiendo del valor que toma la funcion en cada fila.

En la Figura 1 podemos observar el mapa de Karnaugh de f_1 con cuatro conjuntos encerrados por distintos colores:

• La funcion del conjunto amarillo se produce porque se observa que ninguna x_i varia durante su conjunto. Como x_2, x_3 y x_4 no varian pero valen 0, entonces obtenemos como funcion del conjunto $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$.

• La funcion del conjunto rojo se produce al observar que x_1 y x_2 no varian. Sin embargo, como $x_1$es cero, obtenemos como funcion del conjunto $\overline{x_1}x_2$.

• En el caso del conjunto verde, x_1 y x_3 no varian pero x_1 es cero, por lo que resulta $\overline{x_1}x_3$.

• Finalmente, en el conjunto azul, x_1 y x_4 no varian pero x_1 es cero, por lo que resulta $\overline{x_1}x_4$.

De esta manera,

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}x_3 + \overline{x_1}x_4 = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}(x_2+x_3+x_4)$$

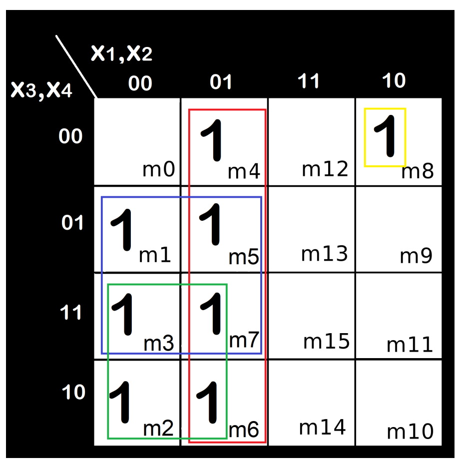

Figure 1: Mapa de Karnaugh $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$

El analisis para los siguientes casos se realiza de la misma manera, pero no sera detallado. Solo se procedera a mostrar las funciones simplificadas y sus respectivos mapas de Karnaugh.

Para f_2,

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\overline{x_3 x_4} + \overline{x_2}x_3 + \overline{x_2}x_4 = x_2\overline{x_3 x_4} + \overline{x_2}(x_3 + x_4)$$

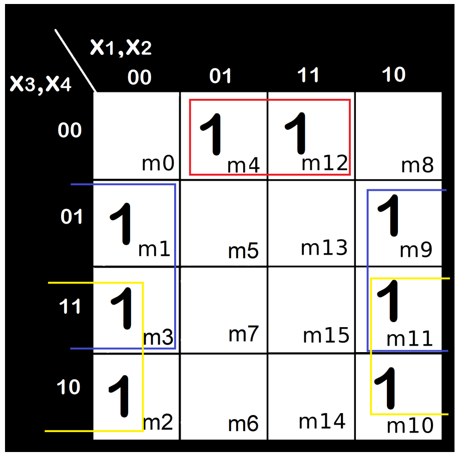

Figure 2: Mapa de Karnaugh $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Para f_3,

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_3}x_4 + x_3\overline{x_4}$$

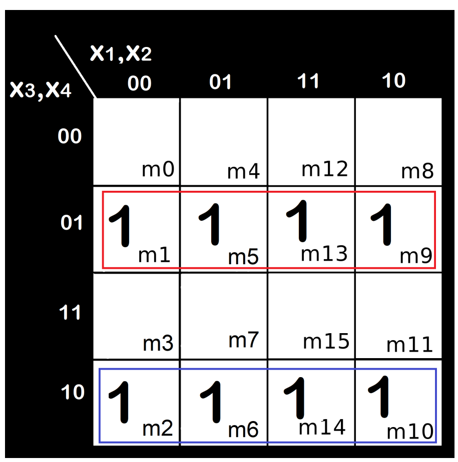

Figure 3: Mapa de Karnaugh $f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Para f_4,

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$$

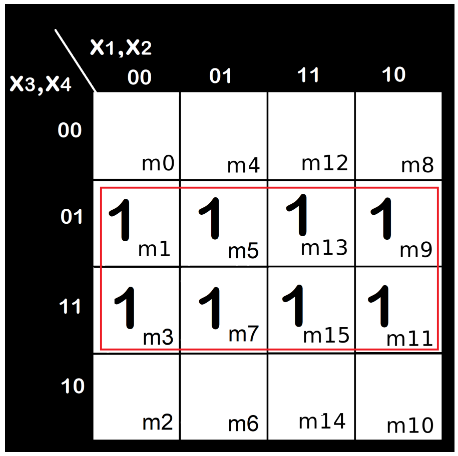

Figure 4: Mapa de Karnaugh $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$

El circuito logico resultante se muestra en la Figura 5, donde los Xi corresponden a la entrada y los Fi a la salida del circuito. Respetando la consigna, solo se utilizaron compuestas NOT, AND y OR.

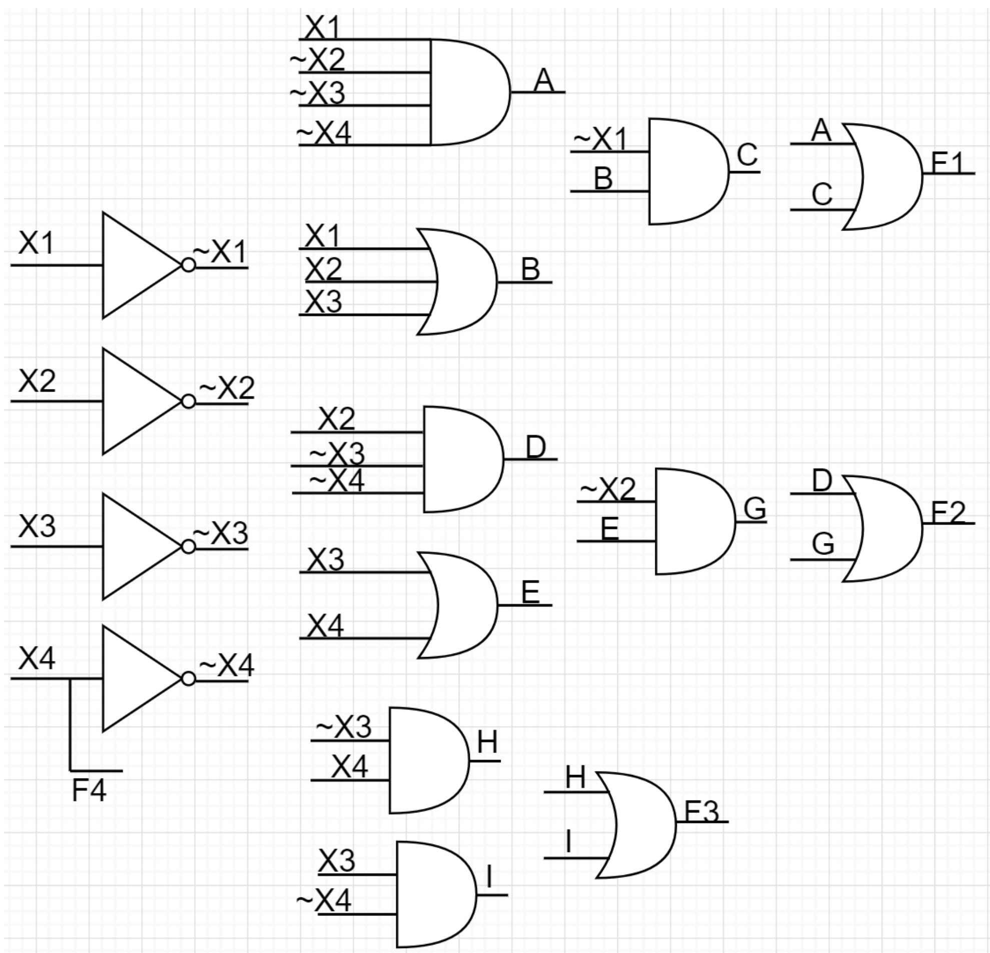

Figure 5: Circuito resultante realizado en draw.io