

---

## Trabajo Práctico de Laboratorio N° 1

---

*Grupo 5:*

Matías LARROQUE  
Leg. 56597

Lucero Guadalupe FERNANDEZ  
Leg. 57485

Manuel MOLLÓN  
Leg. 58023

Ezequiel VIJANDE  
Leg. 58057

*Profesor:*

Kevin DEWALD

Entregado: 6 de Septiembre de 2018

## 1. EJERCICIO 2

### 1.1. INTRODUCCIÓN

Se tiene una función dada por:

$$f(d, c, b, a) = \prod (M_0, M_1, M_5, M_7, M_8, M_{10}, M_{14}, M_{15})$$

A partir de esto se construyó la siguiente tabla de verdad, completando únicamente los máxterminos de aquellos estados en los que la función valía 0, ya que éstos son los que nos serán de utilidad:

Cuadro 1.1: Tabla de verdad de la función dada.

i	$d = X_1$	$c = X_2$	$b = X_3$	$a = X_4$	$f = ()$	$M_i$
0	0	0	0	0	0	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4$
1	0	0	0	1	0	$X_1 + X_2 + X_3 + \overline{X_4}$
2	0	0	1	0	1	-
3	0	0	1	1	1	-
4	0	1	0	0	1	-
5	0	1	0	1	0	$X_1 + \overline{X_2} + X_3 + \overline{X_4}$
6	0	1	1	0	1	-
7	0	1	1	1	0	$X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_3} + \overline{X_4}$
8	1	0	0	0	0	$\overline{X_1} + X_2 + X_3 + X_4$
9	1	0	0	1	1	-
10	1	0	1	0	0	$\overline{X_1} + X_2 + \overline{X_3} + X_4$
11	1	0	1	1	1	-
12	1	1	0	0	1	-
13	1	1	0	1	1	-
14	1	1	1	0	0	$\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3} + X_4$
15	1	1	1	1	0	$\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3} + \overline{X_4}$

De esta manera, la función está dada por productos de sumas de las variables (máxterminos).

### 1.2. SIMPLIFICACIÓN APLICANDO ÁLGEBRA BOOLEANA

Se tiene entonces:

$$f(d, c, b, a) = M_0 * M_1 * M_5 * M_7 * M_8 * M_{10} * M_{14} * M_{15} \quad (1.1)$$

Que es equivalente a:

$$f(d, c, b, a) = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) * (X_1 + X_2 + X_3 + \overline{X_4}) * (X_1 + \overline{X_2} + X_3 + \overline{X_4}) * (X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_3} + \overline{X_4}) * (\overline{X_1} + X_2 + X_3 + X_4) * (\overline{X_1} + X_2 + \overline{X_3} + X_4) * (\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3} + X_4) * (\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3} + \overline{X_4}) \quad (1.2)$$

Utilizando la propiedad del álgebra booleana  $(x + y)(x + \overline{y}) = x$  sobre los pares de términos  $(M_0, M_1); (M_5, M_7); (M_8, M_{10}); (M_{14}, M_{15})$  se llegó a la siguiente expresión simplificada.

$$f(d, c, b, a) = (X_1 + X_2 + X_3) * (\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3}) * (X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_4}) * (\overline{X_1} + X_2 + X_4) \quad (1.3)$$

Cuadro 1.2: Mapa de Karnaugh de la función dada.

$x_1, x_2$		00	01	11	10
$x_3, x_4$	00	$M_0$	$M_4$	$M_{12}$	$M_8$
	01	$M_1$	$M_5$	$M_{13}$	$M_9$
	11	$M_3$	$M_7$	$M_{15}$	$M_{11}$
	10	$M_2$	$M_6$	$M_{14}$	$M_{10}$

→

$x_1, x_2$		00	01	11	10
$x_3, x_4$	00	0	1	1	0
	01	0	0	1	1
	11	1	0	0	1
	10	1	1	0	0

### 1.3. SIMPLIFICACIÓN APLICANDO MAPAS DE KARNAUGH

Nos es de interés para simplificar aplicando mapas de Karnaugh aquellos máxterminos en los que la función vale 0, agrupándolos de a 8, 4, 2 ó 1, según se pueda e intentando que los grupos sean lo más grande posible. Si tomamos 4 grupos de a 2 verticales, como muestra la tabla

Figura 1.1: Mapa de Karnaugh de la función dada.

$x_1, x_2$		00	01	11	10
$x_3, x_4$	00	0	1	1	0
	01	0	0	1	1
	11	1	0	0	1
	10	1	1	0	0

Aquellos seleccionados de manera unitaria en la última columna se tomaron como un grupo de 2. Con ésto en cuenta, se puede notar lo siguiente de cada pareja:

- En el primer grupo de la primera columna, las variables  $X_1, X_2$  y  $X_3$  valen 0 y no cambian; sí lo hace  $X_4$ .
- En el segundo grupo, en la segunda columna, las variables que no cambian son  $X_1, X_2$  y  $X_4$ ;  $X_1$  vale 0, y  $X_1$  y  $X_2$  valen 1, de manera contraria, sí cambia  $X_3$ .
- En el tercer grupo de ceros,  $X_1, X_2$  y  $X_3$  no cambian y valen 1; notamos que  $X_4$  sí modifica su valor.
- En el cuarto grupo en la última columna,  $X_1, X_2$  y  $X_4$  mantienen su valor; con  $X_1$  valiendo 1, y  $X_2, X_4, 0$ ;  $X_3$  sí modifica su valor.

Para realizar entonces la simplificación, recordemos que queremos productos de sumas tal que la función sea nula. En el caso del primer grupo, la manera de lograrlo es  $X_1 + X_2 + X_3$ , ya que sólo cuando las tres variables valen cero simultáneamente, este término valdrá cero; como  $X_4$  cambia su valor no nos es de interés para la expresión. De manera

análoga para el segundo grupo, podemos lograr que valga cero únicamente con  $X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_4}$ . El hecho de negar las variables se debe a que estas valen 1, y se quiere lo contrario. Para el tercer grupo, el cero se consigue como  $\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3}$ , las tres variables valen 1, por eso se niegan. Con el cuarto y último grupo, la nulidad se consigue con  $\overline{X_1} + X_2 + X_4$ .

Si se combinan los términos, terminamos con la siguiente expresión:

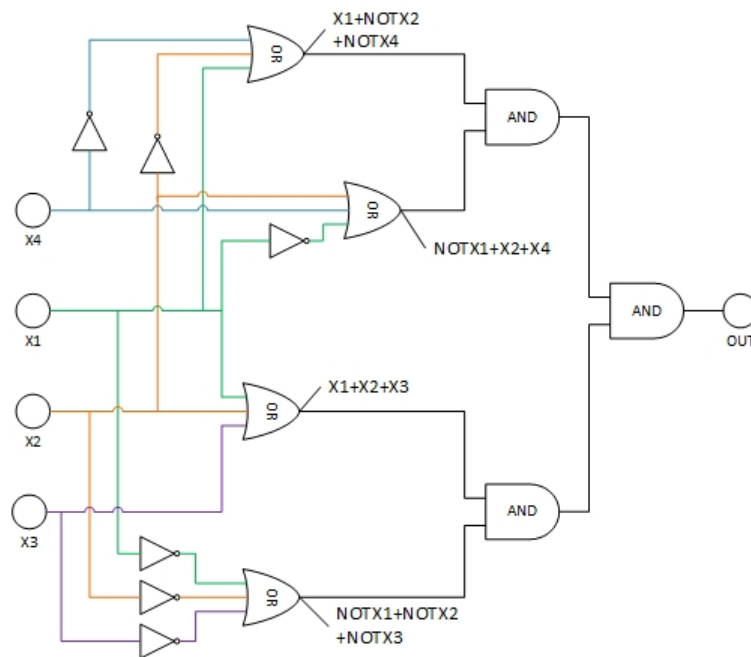
$$f(d, c, b, a) = (X_1 + X_2 + X_3) * (X_1 + \overline{X_2} + \overline{X_4}) * (\overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3}) * (\overline{X_1} + X_2 + X_4) \quad (1.4)$$

ES fácil ver que la expresión es idéntica a la simplificación con el álgebra booleana. Vale agregar que tomando los grupos más grandes posibles al hacer la simplificación con mapas de Karnaugh se llega a la expresión más simplificada posible. Esto verifica también que con el álgebra booleana se pudo reducir la función a su mínima expresión.

#### 1.4. CIRCUITO LÓGICO RESULTANTE

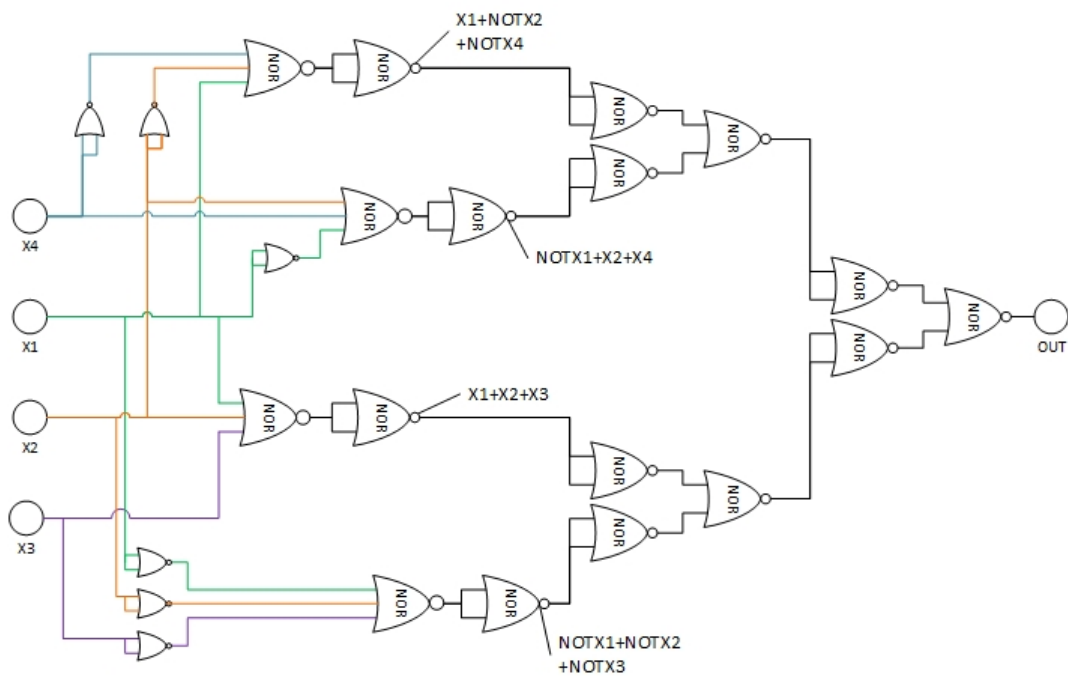
##### 1.4.1. UTILIZANDO COMPUERTAS AND, OR, NOT.

Para implementar el circuito lógico, simplemente se tuvo en cuenta la expresión simplificada y se utilizaron compuertas AND, OR, y NOT cuando se requerían.



##### 1.4.2. UTILIZANDO COMPUERTAS NOR.

En este caso se utilizó la compuerta universal NOR para crear las compuertas necesarias (AND, OR y NOT). De esta manera, se utiliza un número mayor de compuertas, pero universales. El circuito resultante se muestra a continuación:



## 2. EJERCICIO 4

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Para implementar un circuito que convierta un número binario de 4 bits en su complemento a dos se empezó pensando este circuito como una caja negra con 4 entradas y 4 salidas:

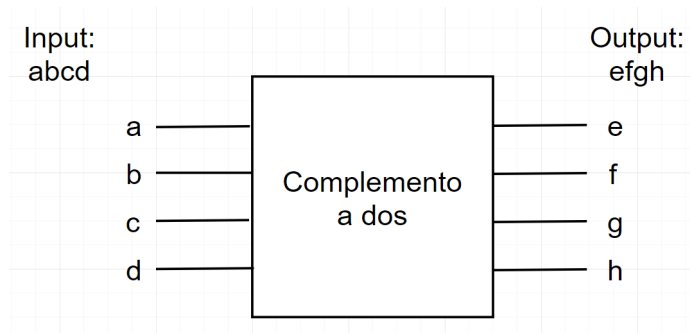


Figura 2.1: Caja Negra Complemento a 2

A su vez, sabemos que el complemento a dos se realiza aplicando el complemento a uno y luego sumando uno al resultado. Por lo que se puede representar mediante el siguiente conjunto de cajas negras":

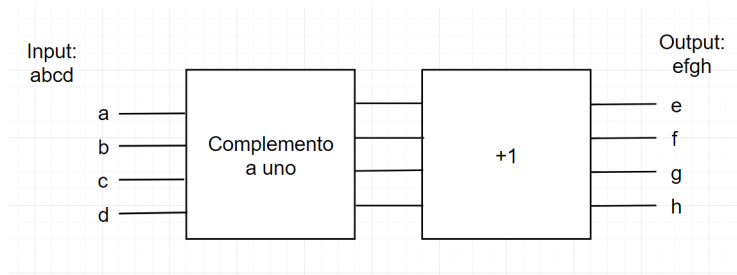


Figura 2.2: Caja Negra Complemento a 2

La salida tras el complemento a uno sabemos que es cada bit negado, es decir que atraviesan una compuerta NOT. De esta manera a la salida del complemento a uno que se obtiene es:  
Ahora lo único que falta es sumarle uno.

## 2.2. EXPRESIÓN DE LA SALIDA EN MINTÉRMINOS

La expresión de la salida queda determinada por las entradas a través de la siguiente fórmula deducida en la introducción:

$$\begin{array}{r} \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \\ +0001 \\ \hline e f g h \end{array}$$

Para la creación de las tablas de valor se debe observar que el output de cada bit depende del resultado de el input de los bits menos significativos que con el que se está trabajando. Para el BMS la tabla de verdad es muy simple y no vale la pena el uso de mintérminos por lo que se verá a continuación:

Cuadro 2.1: Tabla para bit h

$\overline{d}$	1	h
1	1	0
0	1	1

Fácilmente de la tabla se puede observar que h resulta ser la entrada negada. Por lo que resulta la primera relación de entrada-salida:

$$h(d) = \overline{\overline{d}} \quad (2.1)$$

Para la salida correspondiente al bit g la tabla de verdad es de la siguiente manera: Al escribir la salida en función de los mintérminos se llega a la siguiente expresión:

$$g(c, d) = \overline{\overline{c}}\overline{\overline{d}} + \overline{\overline{c}}\overline{\overline{d}} \quad (2.2)$$

Ahora para el bit f se requiere una tabla de verdad de tres variables ya que ahora depende del carry causado por las variables de entrada c y d: Al escribir la salida en función de los mintérminos se llega a la siguiente expresión:

Cuadro 2.2: Tabla para bit g

$\bar{c}$	$\bar{d}$	<b>g</b>
0	0	0
0	1	1 ( $m_1$ )
1	0	1 ( $m_2$ )
1	1	0

Cuadro 2.3: Tabla para bit f

$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$	<b>f</b>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1 ( $m_3$ )
1	0	0	1 ( $m_4$ )
1	0	1	1 ( $m_5$ )
1	1	0	1 ( $m_6$ )
1	1	1	0

$$f(b, c, d) = m_3 + m_4 + m_5 + m_6$$

$$f(b, c, d) = \bar{\bar{b}}\bar{c}\bar{d} + \bar{\bar{b}}\bar{c}d + \bar{\bar{b}}c\bar{d} + \bar{\bar{b}}cd$$

(2.3)

Para el bit e la tabla de verdad es la siguiente: Al escribir la salida en función de los mintérminos se llega a la siguiente ex-

Cuadro 2.4: Tabla para bit e

$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$	<b>e</b>
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1 ( $m_6$ )
0	1	1	1	1 ( $m_7$ )
1	0	0	0	1 ( $m_8$ )
1	0	0	1	1 ( $m_9$ )
1	0	1	0	1 ( $m_{10}$ )
1	0	1	1	1 ( $m_{11}$ )
1	1	0	0	1 ( $m_{12}$ )
1	1	0	1	1 ( $m_{13}$ )
1	1	1	0	1 ( $m_{14}$ )
1	1	1	1	0

presión:

$$e(a, b, c, d) = m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14}$$

$$e(a, b, c, d) = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}d + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} + \overline{a}\overline{b}cd + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}bcd \quad (2.4)$$

### 2.3. SIMPLIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES RESULTANTES

Para reducir las 4 expresiones resultantes procedemos a utilizar la propiedad:

Lo cual da como resultado las 4 siguientes ecuaciones:

$$h = d$$

$$g = c\overline{d} + \overline{c}d$$

$$f = b\overline{c}\overline{d} + \overline{b}cd + \overline{b}c\overline{d} + \overline{b}cd$$

$$e = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}bcd + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}b\overline{c}\overline{d} + \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}bcd + \overline{a}bcd$$

De estas cuatro expresiones las primeras son irreducibles. Pero es posible reducir la tercera y la cuarta con el uso de las siguientes propiedades:

$$a + a = a$$

$$a + \overline{a} = 1$$

$$ab + cb = b(a + c)$$

La primera propiedad significa que puedo sumar uno de los mintérminos a la expresión que esta no se verá afectada si ese mintérmino ya pertenecía a la expresión. Con la segunda expresión puedo sacar 'factor común' los términos que difieran en una variable y su complemento de manera que al hacer el factor común quede de la forma  $f(a, b, \dots)(z + \overline{z})$  y así utilizar la tercera propiedad que simplifica esa expresión a  $f(a, b, \dots)$ . De esta manera las ecuaciones se simplifican a su forma final que es de la siguiente manera:

$$h = d$$

$$g = c\overline{d} + \overline{c}d$$

$$f = b\overline{c}\overline{d} + \overline{b}c + \overline{b}d$$

$$e = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{c}d + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b$$

### 2.4. CIRCUITO RESULTANTE

Al implementar las expresiones halladas en la sección anterior con compuertas AND, OR y NOT se llega al siguiente circuito:



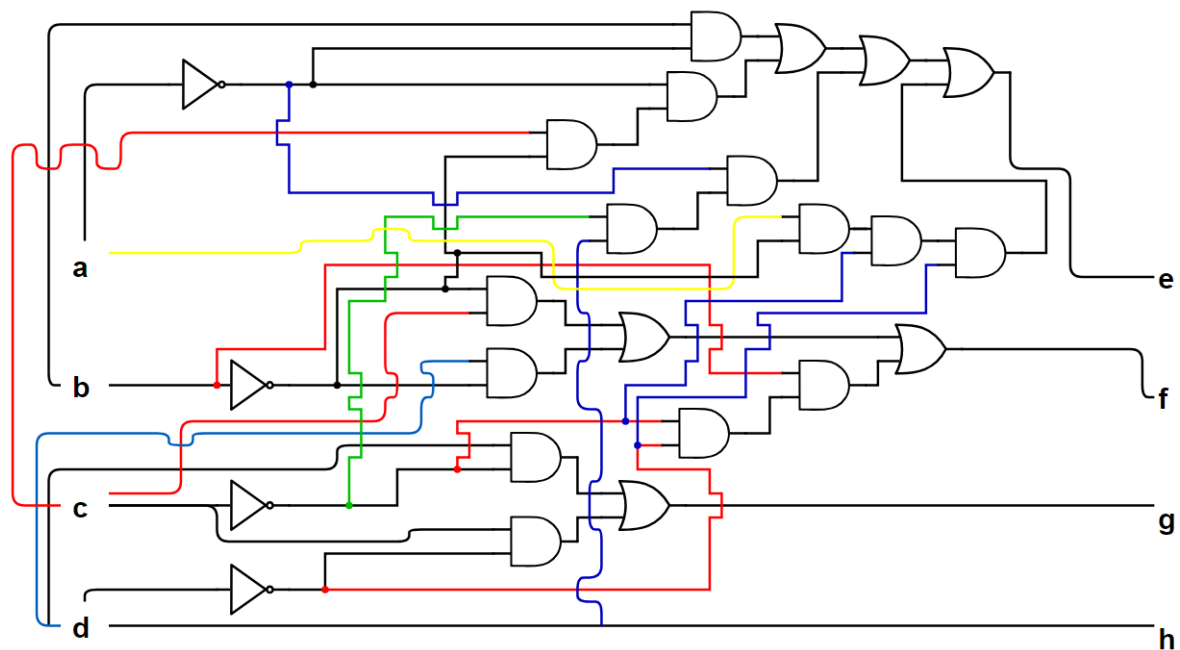


Figura 2.3: Circuito de conversión a complemento a dos

### 3. EJERCICIO 5

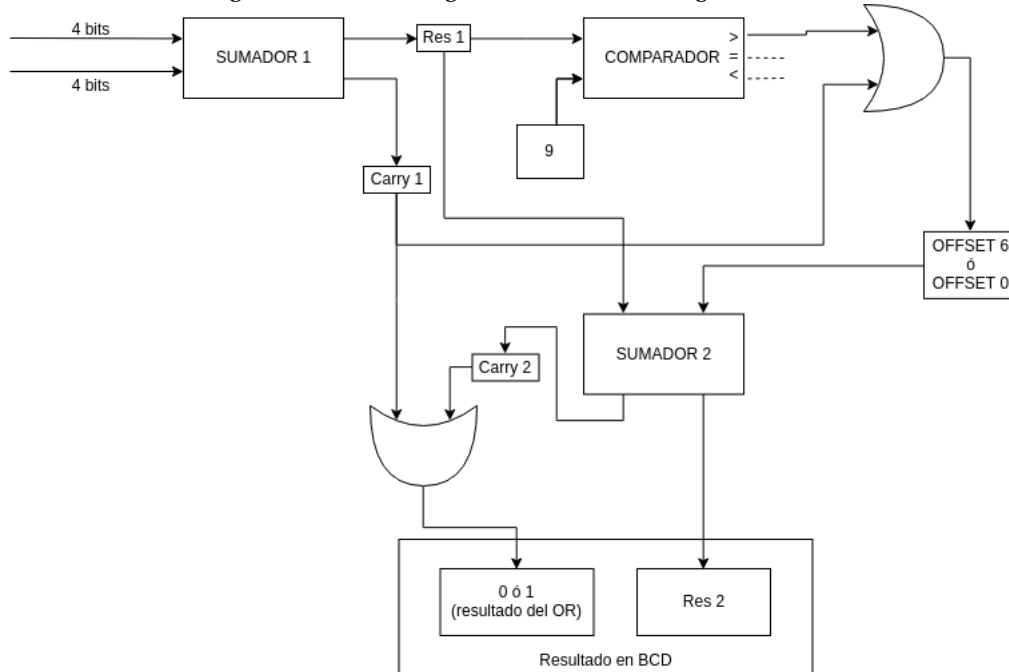
#### 3.1. INTRODUCCIÓN

Se implementó un sumador de dos números de un dígito en formato BCD, expresando la salida como un número de dos dígitos, también en formato BCD. Para esto, primero se realizó un análisis sobre la suma BCD, y luego se implementó en un circuito. Se tienen entonces dos números en BCD, que son dos dígitos menores a 9 (pues están en formato BCD). Se realiza una suma convencional en binario. Seguidamente se compara con 9, ya que si la suma es menor a 9, está representado automáticamente en BCD. Si la suma es menor a 9, se le debe sumar un offset de 6 para obtener un 1 en el dígito más significativo, y así, el resultado final. El offset de 6 se debe a que en binario, se puede representar como máximo el número 15; en BCD, por otro lado, hasta el 9. La diferencia entre ambos es de 6, por lo que si queremos que  $9+1=10$  ( $10_{10} = 10000_2$ ), tenemos que sumarle

#### 3.2. CIRCUITO LÓGICO

Con este razonamiento, se realizó la siguiente implementación:

Figura 3.1: Circuito lógico del sumador de dígitos BCD.



Se puede ver de manera sencilla la lógica que se siguió para el sumador pedido. El resultado final serán dos nibbles. El nibble más significativo es el OR entre los carry de ambos sumadores, que se relaciona con la comparación de si la suma convencional en binario da mayor a 9 o no. Por último el nibble menos significativo es el resultado del sumador 2, es decir, la suma en binario con el offset, que es +6 ó 0; siendo 0 si el Sumador 1 no da mayor a 9).

## 4. EJERCICIO 6

### 4.1. INTRODUCCIÓN

Se implementó una ALU con las siguientes operaciones: suma, resta, AND bit a bit  
aciones: SUMA, RESTA, AND, OR, NOT, XOR, Complemento a dos, Shift Left

### 4.2. CIRCUITO LÓGICO