



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO®

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
Instituto Tecnológico de la Costa Grande  
*Departamento de Metal- Mecánica*



***TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO***  
***Instituto Tecnológico de la Costa Grande***  
***Departamento de Metal-Mecánica***

---

---

***CURSO BÁSICO DE ALGEBRA***

---

---

*ING. JUAN CARLOS BAHENA LINOS*

*M. C. TOMAS MUÑOZ VERA*

*ING. JOSE RIOS SANTIAGO*

*29 de Julio de 2019*



### ***Objetivo del curso:***

*Reafirmar en los aspirantes a ingresar a las carreras de ingeniería los conocimientos requeridos de Álgebra, para desempeñarse de manera eficiente en los cursos posteriores de Matemáticas y materias a fines a dicha ciencia, en el nivel superior.*

### **CONTENIDO**

<b>I</b>	<b>INTRODUCCIÓN A LA ARITMETICA</b>	<b>3</b>
1.1	El sistema de los números reales y sus propiedades	3
1.2	Ubicación en la recta numérica	5
1.3	Operaciones aritméticas con números racionales	7



1.4	Operaciones con signos de agrupación	12
1.5	El orden o jerarquía de las operaciones	14
2	INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA	16
2.1	Exponentes y radicales	16
2.2	Reducción de términos semejantes	21
2.3	Operaciones algebraicas	25
2.3.1	Suma	25
2.3.2	Resta	26
2.3.3	Multiplicación	27
2.3.4	División de monomio entre monomio	30
3	PRODUCTOS NOTABLES	35
3.1	Cuadrado de un Binomio $(a+b)^2$	35
3.2	Cuadrado de un Trinomio $(a+b+c)^2$	36
3.3	Binomios conjugados y caso especial de binomios conjugados	39
3.4	Binomios con término común	40
3.5	Cubo de un Binomio	42
4	FACTORIZACIÓN	45
4.1	Factores comunes	45
4.2	Diferencia de cuadrados	46
4.3	Trinomio cuadrado perfecto	48
4.4	Trinomio de la forma $x^2+bx+c$	51
4.5	Trinomio de la forma $ax^2+bx+c$	52
5	ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO Y SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS	54
5.1	Conceptos Generales	54
5.2	Método de reducción para ecuaciones lineales	55
5.3	Método por Sustitución	56
5.4	Método por Igualación	57
5.5	Método por Determinantes	58
5.6	Resolución de ecuaciones cuadráticas	60
6	TRIGONOMETRIA	63
6.1	Funciones Trigonométricas	63
6.2	Circulo Trigonométrico	65

## 1 INTRODUCCIÓN A LA ARITMETICA

### 1.1 El sistema de los números reales y sus propiedades

Antes de iniciar nuestro estudio del sistema de los números reales recordemos algo de la notación de conjuntos. A manera de definición consideraremos a un conjunto como una colección arbitraria de objetos. Sin embargo, la mayoría de los conjuntos con los que trataremos consisten de objetos con alguna similitud, aunque distintos. Por ejemplo, el conjunto de los dígitos decimales consiste de la



colección de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9. Si usamos el símbolo  $D$  para denotarlo, entonces podemos escribir

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

en forma de lista. En esta notación, las llaves  $\{ \}$  se usan para encerrar los objetos, o elementos, en el conjunto. Otra manera de denotar un conjunto es usando la notación constructiva, con la cual el conjunto  $D$  de dígitos decimales se escribe como

$$D = \{ x \mid x \text{ es un dígito decimal} \},$$

que se lee " $D$  es el conjunto de todos los  $x$  tales que  $x$  es un dígito decimal".

### Ejemplo

(i)  $P = \{ x \mid x \text{ es un dígito decimal par} \} = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}.$

(ii)  $S = \{ x \mid x \text{ es un número primo} \} = \{ 2, 3, 5, 7, \dots \}.$

Los tres puntos significan que se sigue indefinidamente de la manera indicada.

Los **números reales** se representan por símbolos tales como

$$-23, 0, -2.5, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 0.321, \pi, \sqrt{-6}, \dots$$

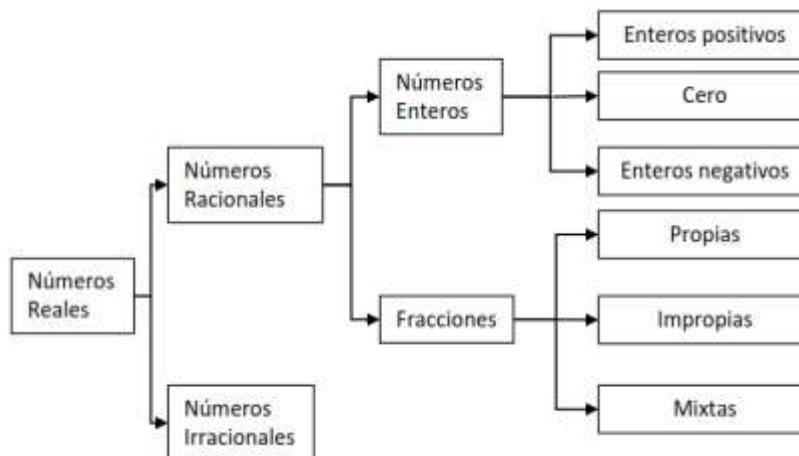
El conjunto de los números que nos sirven para contar, los **números naturales**, es el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . El conjunto de los **enteros** es el conjunto  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Un **número racional** es un número que puede ser expresado como un cociente  $a/b$  de dos números enteros, donde el entero  $b$  no puede ser 0. Ejemplos de números racionales son

$$\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{24}{100}$$

Ya que  $\frac{a}{1} = a$  para cualquier entero  $a$ , todo entero es también un número racional. Los números reales que no son racionales se llaman **irracionales**. Ejemplos de números irracionales son los números  $\sqrt{2}$  y  $\pi$ .

Los números reales pueden representarse como **decimales**. Los números racionales tienen representación decimal finita, o bien, representación decimal infinita periódica.

Por ejemplo,  $\frac{3}{4} = 0.75$ , la cual termina; y  $\frac{10}{11} = 0.909090 \dots$ , en el cual la cadena de dígitos de 90 se repite indefinidamente. Los números irracionales tienen una expansión decimal infinita no periódica. Por ejemplo,  $\sqrt{2} = 1.414213 \dots$  y  $\pi = 3.14159 \dots$ . En la práctica, los números irracionales generalmente se representan con aproximaciones. Usaremos el símbolo  $\cong$  (que se lee "aproximadamente igual") para escribir  $\sqrt{2} \cong 1.414213 \dots$  y  $\pi \cong 3.14159$ .



### Propiedades

Los números reales (  $R$  ) son un conjunto cerrado para la suma y la multiplicación, lo que significa que la suma o multiplicación de números reales da como resultado otro número real. De lo anterior se desprenden las siguientes propiedades:

Propiedad	Suma	Multiplicación	Ejemplos
Cerradura	$a + b \in R$	$a \cdot b \in R$	$3 + 5 = 8 \in R$ $(2)(-3) = -6 \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$ $(2)\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)(2)$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$	$\sqrt{5} + (3 + 4) = (\sqrt{5} + 3) + 4$ $3 \cdot (2 \cdot 5) = (3 \cdot 2) \cdot 5$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	$5 + 0 = 5$ $7 \cdot 1 = 7$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	$2 + (-2) = 0$ $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac$		$2(7 + 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$ $5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 5(4 + 8)$

### 1.2 Ubicación en la recta numérica

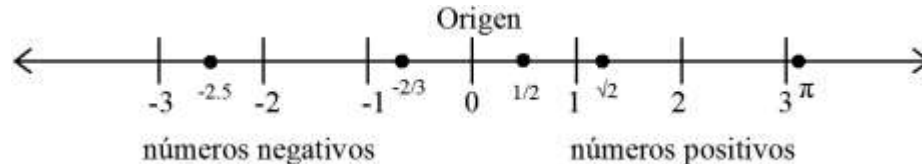
Los números reales se representan geoméricamente por medio de puntos en la recta numérica. Se llama recta numérica a una línea en la cual están determinados:

- un punto  $O$  que se denomina origen y corresponde al número real cero



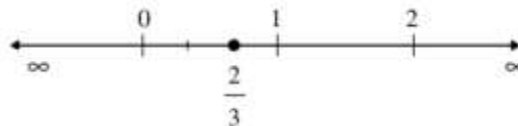
- una dirección positiva que se indica con una flecha, y una dirección negativa
- una escala para medir longitudes

En general, la recta numérica se representa en posición horizontal, considerando positiva la dirección hacia la derecha del punto  $O$ . De esta manera los números que corresponden a los puntos a la derecha de  $O$  en la figura son los números reales positivos, mientras que los que corresponden a puntos a la izquierda de  $O$  son los números reales negativos. El cero no es positivo ni negativo.

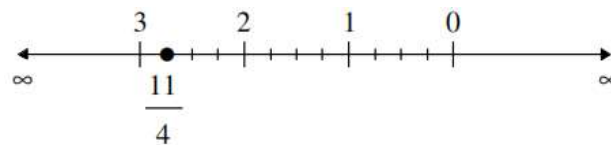


Para ubicar la fracción  $\frac{a}{b}$  en la recta numérica, se divide cada unidad en el número de partes que indica el denominador  $b$  y se toman las partes que indica el numerador  $a$ .

Para localizar en la recta numérica el número  $\frac{2}{3}$ , se divide la unidad en 3 partes iguales y se toman 2.



Graficando la fracción  $-2\frac{3}{4}$  en la recta numérica, se convierte la fracción mixta a fracción impropia  $-2\frac{3}{4} = -\frac{11}{4}$ , ahora se divide en 4 partes iguales a las unidades que se encuentran a la izquierda del 0 y se toman 11 de esas divisiones.



## Taller de ejercicios

1.- Escriba 10 elementos que pertenezcan al conjunto indicado:

- a) Naturales                      b) Enteros                      c) Racionales                      d) Irracionales



2.- Establezca a que conjunto pertenecen los siguientes números.

a)  $\{0, -11.53, \frac{22}{8}, 0.436, \sqrt{16}, 5.9\overline{8}, -\frac{4}{5}\}$

b)  $\{0.33387..., -\pi, \sqrt{2}, e, -\sqrt{3}, \}$

3.- Indique que propiedad de R se utiliza en cada expresión.

a)  $3 + (12 + 5) = (3 + 12) + 5$

b)  $6 + 4(2) = 4(2) + 6$

c)  $8(-6 + \frac{2}{3}) = 8(-6) + 8(\frac{2}{3})$

d)  $(17 \cdot 23)59 = 17(23 \cdot 59)$

e)  $(2 + x)7z = 7z(2 + x)$

f)  $1(\frac{3}{2k}) = \frac{3}{2k}$

g)  $49c + 7d = 7d + 49c$

h)  $26x^2 + 4x = 2x(13x + 2)$

i)  $5w(\frac{1}{5w}) = 1$

j)  $19ab + 0 = 19ab$

k)  $7l(4m + 2n) = 28lm + 14ln$

l)  $24 + (3s + a) = (24 + 3s) + a$

4.- Grafica en la recta numérica las siguientes fracciones:

a)  $\frac{5}{8}$

b)  $-\frac{9}{4}$

c)  $-\frac{2}{6}$

d)  $\frac{9}{5}$

e)  $\frac{5}{9}$

f)  $\frac{8}{12}$

g)  $1\frac{1}{5}$

h)  $-2\frac{1}{3}$

i)  $-1\frac{2}{6}$

j)  $-2\frac{5}{10}$

### 1.3 Operaciones aritméticas con números racionales

En la suma y resta con **igual denominador**, se suman o restan los numeradores y se escribe el denominador en común.

Por ejemplo al efectuar la operación  $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$ , se tiene que:

Se suman los numeradores, el resultado tiene como denominador 4 y la fracción resultante se simplifica.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+2+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ por lo tanto, el resultado de la operación es } \frac{3}{2}$$

Al realizar la operación  $\frac{7}{9} - \frac{5}{9}$ , el denominador de las fracciones es el mismo, por lo tanto, se restan únicamente los numeradores y el resultado tiene el mismo denominador

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9} \text{ Por consiguiente, el resultado es } \frac{2}{9}$$

Cuando se tiene  $1\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 2\frac{1}{5}$ , se convierten las fracciones mixtas en fracciones impropias y se efectúan las operaciones.

$$1\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 2\frac{1}{5} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5} - \frac{11}{5} = \frac{8+4-11}{5} = \frac{1}{5} \text{ el resultado es } \frac{1}{5}$$

Cuando se realiza la suma y resta con **diferente denominador**, se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, también conocido como común denominador, éste se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador. Los números que resultan se suman o se restan para obtener el resultado final.

Por ejemplo, al efectuar  $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6}$ , el mínimo común múltiplo de los denominadores es 6, se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerador, posteriormente se suman los resultados de los productos.

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{(3)(3) + (2)(1) + (1)(2)}{6} = \frac{9+2+2}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6} \text{ Por tanto, el resultado de la suma es } \frac{13}{6} \text{ o } 2\frac{1}{6}$$

Al realizar  $3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ , se convierten las fracciones mixtas a fracciones impropias, enseguida se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores y se realiza el procedimiento para obtener el resultado.

$$3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{19}{6} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{19-9+2}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Taller de ejercicios





1.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

2.  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

3.  $\frac{5}{10} + \frac{3}{2}$

4.  $\frac{7}{24} + \frac{11}{30}$

5.  $\frac{8}{26} + \frac{15}{39}$

6.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

7.  $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

8.  $\frac{5}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{18}$

9.  $\frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{1}{16}$

10.  $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$

11.  $\frac{5}{12} - \frac{7}{24}$

12.  $\frac{11}{64} - \frac{5}{8}$

13.  $\frac{7}{5} + \frac{8}{35} - \frac{9}{21}$

14.  $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{10}$

15.  $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{11}{12}$

16.  $\frac{7}{12} + \frac{3}{8} - \frac{1}{20}$

17.  $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20}$

18.  $3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

19.  $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}$

20.  $\frac{4}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$

21. Juan compró en el supermercado  $\frac{1}{2}$  kg de azúcar,  $\frac{3}{4}$  kg de harina y 1 kg de huevo, estos productos los colocó en una bolsa, ¿cuántos kilogramos pesa dicha bolsa?

22. Dos calles tienen las siguientes longitudes:  $2\frac{2}{5}$  y  $1\frac{3}{4}$  de kilómetro, ¿cuál es la longitud total de ambas?

23. Al nacer un bebé pesó  $2\frac{1}{4}$  kilogramos, en su primera visita al pediatra éste informó a los padres que el niño había aumentado  $\frac{1}{2}$  kilogramo; en su segunda visita observaron que su aumento fue de  $\frac{5}{8}$  de kilogramo. ¿Cuántos kilos pesó el bebé en su última visita al médico?

24. Luis, Jorge y Adán se organizan para realizar una tarea: Luis se compromete a hacer la mitad y Jorge hará la octava parte, ¿qué fracción de la tarea le corresponde a Adán?

*Matemáticas Simplificadas, Ejercicio 34, pág. 54, solución pág. 1445*



Para realizar el **producto de números racionales**, en esta operación se multiplican los numeradores y los denominadores. En caso de que existan fracciones mixtas, se deben convertir a fracciones impropias y posteriormente realizar los productos.

Al efectuar  $\frac{2}{5} \times \frac{1}{6}$ , se aplica el procedimiento descrito y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2 \times 1}{5 \times 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Para resolver  $3\frac{2}{4} \times 4\frac{1}{6}$ , se convierten las fracciones mixtas a impropias y se efectúa el producto.

$$3\frac{2}{4} \times 4\frac{1}{6} = \frac{14}{4} \times \frac{25}{6} = \frac{350}{24} = \frac{350 \div 2}{24 \div 2} = \frac{175}{12} = 14\frac{7}{12}$$

En el caso de **divisiones**, se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el numerador de la fracción resultante, a continuación se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el producto es el denominador de la fracción resultante.

$$\frac{\overset{a}{a}}{\underset{d}{b}} \div \frac{\overset{c}{c}}{\underset{d}{d}} = \frac{\overset{a}{b}}{\underset{d}{c}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Por ejemplo al realizar la operación  $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ , se aplican los pasos y se simplifica el resultado

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12} = \frac{10 \div 2}{12 \div 2} = \frac{5}{6}$$

Al realizar  $4\frac{2}{5} \div 2\frac{3}{4}$

Se convierten las fracciones mixtas en impropias y se efectúa la división.

$$4\frac{2}{5} \div 2\frac{3}{4} = \frac{22}{5} \div \frac{11}{4} = \frac{22 \times 4}{5 \times 11} = \frac{88}{55} = \frac{88 \div 11}{55 \div 11} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$



## Taller de ejercicios

1.  $\frac{2}{5} \times \frac{10}{8}$

2.  $\frac{5}{4} \times \frac{2}{7}$

3.  $\frac{3}{4} \times 2\frac{3}{5}$

4.  $3\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}$

5.  $1\frac{3}{5} \times 4\frac{5}{8}$

6.  $\frac{1}{5} \times \frac{9}{4} \times \frac{12}{6}$

7.  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$

8.  $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$

9.  $2 \times 7\frac{3}{5} \times 1\frac{6}{19} \times \frac{3}{4}$

10.  $1\frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times 2\frac{2}{5} \times 2\frac{1}{2}$

11.  $\frac{5}{12} \div \frac{5}{6}$

12.  $\frac{7}{8} \div \frac{21}{16}$

13.  $\frac{4}{3} \div \frac{5}{30}$

14.  $\frac{28}{7} \div \frac{4}{5}$

15.  $2\frac{2}{3} \div \frac{4}{15}$

16.  $1\frac{4}{5} \div \frac{13}{10}$

17.  $\frac{11}{9} \div 3\frac{2}{3}$

18.  $5\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{6}$

19.  $5\frac{5}{8} \div 3\frac{3}{4}$

20.  $1\frac{11}{13} \div 8$

21. El costo de un kilogramo de azúcar es de \$8, ¿cuál es el precio de  $3\frac{3}{4}$  kg?

22. La velocidad de un automóvil es de 100 kilómetros por hora, ¿qué distancia recorre en un tiempo de  $2\frac{3}{4}$  horas?

23. Francisco compró  $8\frac{2}{3}$  kilogramos de jamón con \$156, ¿cuál es el costo de un kilogramo?

24. Una familia de 6 integrantes consume diariamente  $1\frac{1}{2}$  litros de leche, si todos ingieren la misma cantidad. ¿Cuánto toma cada uno?



## 1.4 Operaciones con signos de agrupación

Se realizan las operaciones que se encuentran dentro de un signo de agrupación, posteriormente éstos se suprimen, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Al efectuar  $2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

Se efectúan las operaciones que encierran los paréntesis, los resultados se multiplican por las cantidades de fuera y se simplifican para sumarse después y obtener el resultado final.

$$2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{5-2}{4}\right) + 3\left(\frac{3-2}{6}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{6}{4} + \frac{3}{6} = \frac{6}{4} + \frac{3}{6} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

¿Cuál es el resultado de  $\frac{5}{4} \div \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$ ?

Se efectúa la suma, el resultado se simplifica y después se realiza la división para obtener el resultado de la operación propuesta.

$$\frac{5}{4} \div \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{4} \div \left(\frac{2+1}{6}\right) = \frac{5}{4} \div \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{5 \times 2}{4 \times 1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Al realizar  $\left(1\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$ , se realizan las restas, después la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\left(1\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{14-9}{12}\right)\left(\frac{5-2}{10}\right) = \left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{15}{120} = \frac{15 \div 15}{120 \div 15} = \frac{1}{8}$$

### Fracciones complejas

Se llama así a la fracción que está formada por una serie de operaciones subsecuentes con fracciones.

Efectuar  $\frac{1+\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}}$ ; primero se efectúan las operaciones  $1+\frac{3}{4}$  y  $1+\frac{1}{8}$ , sus resultados se dividen y se simplifican para obtener el resultado

$$\frac{1+\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{4+3}{4}}{\frac{8+1}{8}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{8 \times 7}{9 \times 4} = \frac{8}{9} = \frac{8 \div 4}{9 \div 4} = \frac{2}{9}$$

Al realizar  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2-\frac{1}{4}}}}$ , se inicia con la operación  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  y las subsecuentes hasta obtener el resultado.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2-\frac{1}{4}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8-1}{4}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{4}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{7}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{7}}} = \frac{1}{1+\frac{7}{11}} = \frac{1}{\frac{18}{11}} = \frac{11}{18}$$



## Taller de ejercicios

$$1. \frac{3}{7}(2) - \frac{5}{14}(4)$$

$$2. \frac{3}{4}(3) + 1\frac{1}{2}$$

$$3. \frac{3}{8}(4-2) + \frac{5}{16}(8-4)$$

$$4. \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$5. \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$6. \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 2\frac{1}{3}\right)$$

$$7. \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(3 - 2\frac{1}{2}\right)$$

$$8. \left(5\frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{12}{17}\right)$$

$$9. \left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{7} - \frac{3}{14}\right)$$

$$10. \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)$$

$$11. \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2} - 3}}$$

$$12. 1 + \frac{2}{3 + \frac{5}{1 - \frac{1}{3}}}$$

$$13. 3 + \frac{2}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

$$14. 2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}$$

$$15. \frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{1 + \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{9}{40}$$

$$16. \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + 2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$17. \frac{2 + \frac{1}{3} + \frac{1 - \frac{1}{4}}{3}}{\frac{1}{\frac{2}{4} - \frac{4}{3}} + \frac{1}{5}} \times \left(\frac{2}{7} \div \frac{4}{19}\right)$$



## 1.5 El orden o jerarquía de las operaciones

**Paso 1** Realiza las operaciones dentro de símbolos de agrupación. Los **símbolos de agrupación** son paréntesis ( ), corchetes [ ], símbolos de valor absoluto || y la barra de fracción.

**Paso 2** Simplifica las expresiones con exponentes.

**Paso 3** Realiza la multiplicación y la división según ocurren de izquierda a derecha.

**Paso 4** Realiza la suma y la resta según ocurren de izquierda a derecha.

Al simplificar:  $12 - 24(8 - 5) \div 2^2$ , se tiene:

$$1 \text{ Realizar las operaciones dentro de los símbolos de agrupación } = 12 - 24(3) \div 2^2$$

$$2 \text{ Simplifica las expresiones con exponentes } = 12 - 24(3) \div 4$$

$$3 \text{ Realiza la multiplicación y la división según ocurren de izquierda a derecha } = 12 - 72 \div 4 \\ = 12 - 18$$

$$4 \text{ Realiza la suma y la resta según ocurren de izquierda a derecha } = -6$$

Simplifica la siguiente expresión  $6 \div [4 - (6 - 8)] + 2^2$

$$1 \text{ Simplifica dentro de los símbolos de agrupación } = 6 \div [4 - (-2)] + 2^2$$

$$2 \text{ Simplifica las expresiones con exponentes } = 6 \div 6 + 2^2$$

$$3 \text{ Multiplica y divide de izquierda a derecha } = 6 \div 6 + 4 \\ = 1 + 4$$

$$4 \text{ Suma y resta de izquierda a derecha } = 5$$

Simplifica  $36 \div (8 - 5)^2 - (-3)^2 \cdot 2$

Aplicando los cuatro pasos, se tiene:

$$= 36 \div (3)^2 - (-3)^2 \cdot 2$$

$$= 36 \div 9 - 9 \cdot 2$$

$$= 4 - 9 \cdot 2$$

$$= 4 - 18$$

$$= -14$$



## Taller de ejercicios

1.  $4 - 8 \div 2$
2.  $3 \cdot 2^2 - 3$
3.  $2(3 - 4) - (-3)^2$
4.  $16 - 32 \div 2^2$
5.  $24 - 18 \div 3 + 2$
6.  $6 + \frac{16 - 4}{2^2 + 2} - 2$
7.  $24 \div \frac{3^2}{8 - 5} - (-5)$
8.  $4(-8) \div [2(7 - 3)^2]$
9.  $16 - 4 \cdot \frac{3^3 - 7}{2^3 + 2} - (-2)^2$
10.  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \div \frac{3}{5}$
11.  $96 \div 2[12 + (6 - 2)] - 3^3$
12.  $-2^2 + 4[16 \div (3 - 5)]$
13.  $16 \div 2 - 4^2 - (-3)^2$
14.  $0.3(1.7 - 4.8) + (1.2)^2$
15.  $(1.65 - 1.05)^2 \div 0.4 + 0.8$

## 2 INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

### 2.1 Exponentes y radicales

Los exponentes enteros proporcionan una manera abreviada de representar multiplicaciones repetidas de un mismo número.

Si  $a$  es un número real y  $n$  es un entero positivo, entonces el símbolo representa el producto de  $n$  factores de  $a$ . Esto es,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a,$$

donde se entiende que  $a^1 = a$ . Por consiguiente,  $a^2 = a \cdot a$ ,  $a^3 = a \cdot a \cdot a$ , y así sucesivamente. En la expresión  $a^n$ ,  $a$  se llama la **base** y  $n$  es llamado el **exponente**, o potencia. Leemos  $a^n$  como " $a$  elevado a la potencia  $n$ " o como " $a$  a la  $n$ -ésima potencia". Usualmente leemos  $a^2$  como " $a$  cuadrada" y  $a^3$  como " $a$  cúbica".

Debemos tener cuidado cuando usamos paréntesis en conjunción con exponentes. Por ejemplo,

$$-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16,$$

mientras que  $-(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Note la diferencia: el exponente se aplica al número o expresión entre paréntesis que le preceda.

Definimos

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{si } a \neq 0 \text{ y } n \text{ es un entero positivo}$$

Con estas definiciones, el símbolo  $a^n$  se define para cualquier entero  $n$ .

Las siguientes propiedades se llaman las leyes de los exponentes, y pueden demostrarse usando las definiciones anteriores.

En la lista,  $a$  y  $b$  son números reales, y  $m$  y  $n$  son enteros.





### Leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ si } a \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ si } b \neq 0$$

Ejemplo: Simplifique cada expresión aplicando las leyes de los exponentes.

(a)  $x^5 x^{-1}$  (b)  $(a^2 b^{-3})^2$  (c)  $\frac{x^8}{x^4}$   
(d)  $\frac{y^2}{y^8}$  (e)  $\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-4}$  (f)  $4m^0$  (g)  $(4m)^0$

Solución

(a)  $x^5 x^{-1} = x^{5+(-1)} = x^{5-1} = x^4$

(b)  $(a^2 b^{-3})^2 = (a^2)^2 (b^{-3})^2 = a^{(2)(2)} b^{(-3)(2)} = a^4 b^{-6}$

(c)  $\frac{x^8}{x^4} = x^{8-4} = x^4$

(d)  $\frac{y^2}{y^8} = y^{2-8} = y^{-6}$

(e)  $\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-4} = \frac{(x^{-2})^{-4}}{(y^3)^{-4}} = \frac{x^8}{y^{-12}}$

(f)  $4m^0 = 4(1) = 4$

(g)  $(4m)^0 = 1$

Escriba cada expresión de modo que todos los exponentes sean positivos.

(a)  $\frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y}$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  (b)  $\frac{xy}{x^{-1} - y^{-1}}$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ .

Solución

(a)  $\frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} = \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{y^{-2}}{y} = x^{5-3} y^{-2-1} = x^2 y^{-3} = \frac{x^2}{y^3}$

(b)  $\frac{xy}{x^{-1} - y^{-1}} = \frac{xy}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{xy}{\frac{y-x}{xy}} = \frac{(xy)(xy)}{y-x} = \frac{x^2 y^2}{y-x}$



La inversa de elevar al cuadrado es encontrar la **raíz cuadrada**.

Por ejemplo, ya que  $6^2 = 36$  y  $(-6)^2 = 36$ , los números 6 y -6 son raíces cuadradas de 36. El símbolo  $\sqrt{\quad}$  llamado el **radical**, se usa para denotar la raíz cuadrada **principal**. De este modo,  $\sqrt{36} = 6$

Los siguientes comentarios son de gran utilidad:

1. Los números negativos no tienen raíces cuadradas (en el sistema de los números reales), porque el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

Por ejemplo,  $\sqrt{-4}$  no es un número real, porque no existe ningún número real cuyo cuadrado sea -4.

2. La raíz cuadrada principal de 0 es 0, ya que  $0^2 = 0$ . Esto es,  $\sqrt{0} = 0$

3. La raíz cuadrada de un número positivo es positiva.

4. Si  $c \geq 0$ , entonces  $(\sqrt{c})^2 = c$

En general, tenemos  $\sqrt{a^2} = |a|$

La **n-raíz principal** de un número real  $a$ , simbolizada  $\sqrt[n]{a}$ , se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ significa } a = b^n$$

Donde  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ , si  $n$  es par; o  $a$  y  $b$  cualesquiera número reales si  $n$  es impar.

Note que si  $a$  es negativa y  $n$  es par, entonces  $\sqrt[n]{a}$  no está definida. Cuando la raíz  $n$ -ésima principal de un número está definida, ésta es única. Al símbolo  $\sqrt[n]{a}$  se le llama **radical**; al entero  $n$  se le llama **índice**, y  $a$  es el **radicando**.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ porque } 8 = 2^3$$

$$\sqrt[5]{64} = 2, \text{ porque } 64 = 2^6$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ porque } -8 = (-2)^3$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}, \text{ porque } \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

## Propiedades de los radicales

Sean  $n \geq 2$  y  $m \geq 2$  números enteros positivos, y sean  $a$  y  $b$  números reales.

Suponiendo que todos los radicales están definidos, tenemos las siguientes propiedades:

$$\sqrt[n]{ab} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejemplos:

$$(a) \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$(b) \sqrt[3]{8x^4} = \sqrt[3]{8} \sqrt[3]{x^4} = 2 \sqrt[3]{x^3 x} = 2 \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x} = 2x \sqrt[3]{x}$$

$$(c) \sqrt{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[6]{x^7} = \sqrt[6]{x^6 x} = \sqrt[6]{x^6} \sqrt[6]{x} = |x| \sqrt[6]{x}$$

$$(d) \sqrt[3]{\frac{8x^5}{27y^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 x^3 x^2}{3^3 y^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2x}{3}\right)^3 \frac{x^2}{y^2}} = \frac{2x}{3} \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}$$

$$(e) \frac{\sqrt{x^5 y}}{\sqrt{x^3 y^3}} = \sqrt{\frac{x^5 y}{x^3 y^3}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \left|\frac{x}{y}\right|$$



## Taller de ejercicios

En los Ejercicios 1 al 10 simplifique cada expresión.

1.  $3^0$
2.  $(-4)^{-2}$
3.  $\left(\frac{2}{3}\right)^2$
4.  $(-0.008)^{\frac{2}{3}}$
5.  $\sqrt{32}$
6.  $(-8)^{\frac{4}{3}}$
7.  $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$
8.  $(2^7 \cdot 3^{-4})(2^{-5} \cdot 3^4)$
9.  $4^{-2} \cdot 4^3$
10.  $\frac{3^{-2} \cdot 5^3}{3 \cdot 5}$

En los Ejercicios 11 al 20 simplifique cada expresión de manera que no aparezcan exponentes negativos.

11.  $x^0 y^2$
12.  $\frac{x^{-2} y}{xy^2}$
13.  $\frac{(2x^2)(3x^3)}{(x^2)^3}$
14.  $\frac{(2x^2)^3}{4x^4}$
15.  $\left(\frac{1}{6}a^5\right)(-3a^2)(4a^7)$
16.  $(2x^2y^5)(6x^{-3}y)\left(\frac{1}{3}x^{-1}y^3\right)$
17.  $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right)$
18.  $(4a^2b)^4\left(\frac{-a^3}{2b}\right)^5$
19.  $\frac{(x^6y^3)^{-\frac{1}{3}}}{(x^4y^2)^{-\frac{1}{2}}}$
20.  $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

En los Ejercicios 21 al 24 escriba las expresiones en términos de exponentes racionales.

21.  $\sqrt[3]{x^4}$
22.  $\sqrt{x^5}$
23.  $\sqrt[3]{x^6 + y^6}$
24.  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$

En los Ejercicios 25 al 30 simplifique cada una de las expresiones.

25.  $\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}$
26.  $\sqrt{\frac{32x^3}{9x}}$
27.  $\sqrt[3]{\frac{3x^2y}{81x^5y^{-2}}}$
28.  $\sqrt{5x} \sqrt{20x^3}$
29.  $\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}} \sqrt[5]{\frac{4x^4}{y^2}}$
30.  $(\sqrt[3]{3}\sqrt{10})^4$



## 2.2 Reducción de términos semejantes

**Expresión algebraica:** Se conoce así a la combinación de números reales (constantes) y literales o letras (variables) que representan cantidades, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etc.

Ejemplos

$3a + 2b - 5$ , en esta expresión son constantes 3, 2, -5 y las variables son  $a$  y  $b$

$(z^2 + 8)(5z^4 - 7)$ , en esta expresión son constantes 8, 5 y 7, variables " $z$ " y 2, 4 exponentes

**Término algebraico:** Es un sumando de una expresión algebraica y representa una cantidad. A todo término algebraico se le denomina monomio y consta de: coeficiente, base(s) y exponente(s).

Ejemplos

Término	Coeficiente	Base(s)	Exponente(s)
$-8y^2$	-8	$y$	2
$-\frac{3}{4}(2x + 1)^{-2}$	$-\frac{3}{4}$	$2x + 1$	-2
$\frac{1}{2}mn^x$	$\frac{1}{2}$	$m, n$	1, $x$

**Términos semejantes:** Dos o más términos son semejantes cuando los mismos exponentes afectan a las mismas bases.

Ejemplos

$-7b$  con  $4b$                        $-8x^2y^3$  con  $7x^2y^3$                        $\frac{1}{6}abc^2$  con  $abc^2$

Regla de los signos:

multiplicación	$(+)(+) = +$	$(+)(-) = -$	$(-)(+) = -$	$(-)(-) = +$
división	$(+) \div (+) = +$	$(+) \div (-) = -$	$(-) \div (+) = -$	$(-) \div (-) = +$

Para simplificar expresiones que involucren términos semejantes, se suman o restan los coeficientes

Ejemplos:

1) Simplifica la expresión  $-7a + 3a$

Solución.- se agrupan los coeficientes y se realiza la operación que da como resultado:

$$-7a + 3a = (-7+3)a = -4a$$

2) ¿cuál es el resultado de simplificar la expresión  $-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2$ ?

Solución.- se agrupan los coeficientes y se realiza la operación que da como resultado:

$$-6xy^2 + 9xy^2 - xy^2 = (-6+9-1)xy^2 = 2xy^2$$



3) Reduce la expresión  $-10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b$

*Solución*

$$\begin{aligned} -10x^{2a}y^b + 5x^{2a}y^b - 6x^{2a}y^b + 11x^{2a}y^b &= (-10+5-6+11)x^{2a}y^b \\ &= 0x^{2a}y^b = 0 \end{aligned}$$

4) Simplifica la expresión  $7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z$

*Solución.- se agrupan los términos semejantes*

$$\begin{aligned} 7x - 3y + 4z - 12x + 5y + 2z - 8y - 3z &= 7x - 12x - 3y + 5y - 8y + 4z + 2z - 3z \\ &= (7-12)x + (-3+5-8)y + (4+2-3)z \\ &= -5x - 6y + 3z \end{aligned}$$

### Signos de agrupación

Los signos de agrupación se utilizan son: ( ), [ ], { },  $\overline{\quad}$  ; cuyos nombres respectivamente son: paréntesis, corchetes, llaves y vínculo.

Si el signo de agrupación está precedido por el signo "+", éste se suprime y las cantidades que están dentro de él conservan su signo. Si el signo de agrupación está precedido por el signo "-", éste se suprime y cambia el signo de cada una de las cantidades que se encuentran dentro de él.

### Ejemplos

1) Simplifica la expresión  $2x + \{- [5y + (3x - z) + 2 - (-x + y - \overline{z+4})] - (-x + y)\}$ .

Se suprime el vínculo:

$$\begin{aligned} 2x + \{- [5y + (3x - z) + 2 - (-x + y - \overline{z+4})] - (-x + y)\} \\ = 2x + \{- [5y + (3x - z) + 2 - (-x + y - z - 4)] - (-x + y)\} \end{aligned}$$

Se suprimen los paréntesis:

$$= 2x + \{- [5y + 3x - z + 2 + x - y + z + 4] + x - y\}$$

Se suprimen los corchetes:

$$= 2x + \{- 5y - 3x + z - 2 - x + y - z - 4 + x - y\}$$

Se suprimen las llaves:

$$= 2x - 5y - 3x + z - 2 - x + y - z - 4 + x - y$$

Se agrupan y reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned} &= 2x - 3x - x + x - 5y + y - y + z - z - 2 - 4 \\ &= -x - 5y - 6 \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es:  $-x - 5y - 6$



2) Simplifica la expresión

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left( 2x - \frac{2}{3}y - \left[ -x + \frac{1}{4}y - \overline{x-y} \right] \right) \right\} \\ & \frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left( 2x - \frac{2}{3}y - \left[ -x + \frac{1}{4}y - \overline{x-y} \right] \right) \right\} = \\ & = \frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left( 2x - \frac{2}{3}y - \left[ -x + \frac{1}{4}y - x + y \right] \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + \left( 2x - \frac{2}{3}y + x - \frac{1}{4}y + x - y \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2}x - \left\{ \frac{3}{4}x - 2y + 2x - \frac{2}{3}y + x - \frac{1}{4}y + x - y \right\} \\ & = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + 2y - 2x + \frac{2}{3}y - x + \frac{1}{4}y - x + y \\ & = -\frac{17}{4}x + \frac{47}{12}y \end{aligned}$$



## Taller de ejercicios

En los ejercicios del 1 al 10 simplifica

1.  $3x - 8x$

2.  $6a^2b + 7a^2b$

3.  $-6xy^2 - xy^2 - 3xy^2$

4.  $4xy^4z^3 - 4xy^4z^3$

5.  $-2a^2b + 12a^2b$

6.  $-3a + 5a - 10a$

7.  $-3x^2 + 2y^2 - 7 + 10x^2 - 12y^2 + 15$

8.  $x^{2a+1} - 3x^{3a-2} - 7x^{2a+1} - 4x^{3a-2} + 8x^{2a+1} + 12x^{3a-2}$

9.  $-3a^{m+5} + 10x^{m+2} + 2a^{m+5} - 3x^{m+2} - 8a^{m+5}$

10.  $-\frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + 5ab - 3a^2 - \frac{1}{2}ab$

En los ejercicios del 11 al 20 simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes.

11.  $2a + [a - (a + b)]$

12.  $3x - [x + y - \overline{2x + y}]$

13.  $2m - [(m - n) - (m + n)]$

14.  $4x^2 + [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (-3x^2 + y^2)]$

15.  $a + \{(-2a + b) - (-a + b - c) + a\}$

16.  $4m - [2m + \overline{n - 3}] + [-4n - 2m + 1]$

17.  $2a + \{-[5b + (3a - c) + 2 - (-a + b - c + 4)] - (-a + b)\}$

18.  $-[-3x + (-x - 2y - 3)] + \{-(2x + y) + (-x - 3) + 2 - x + y\}$

19.  $-[-(-a)] - [+(-a)] + \{-[-b + c] - [+(-c)]\}$

20.  $-\{-[-(-a + b)]\} - \{+[-(-b - a)]\} - a + b$





## 2.3 Operaciones algebraicas

### 2.3.1 Suma

Un polinomio es una expresión algebraica que consta de varios términos algebraicos.

En la suma los polinomios se escriben uno seguido del otro y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo:

1) Suma los siguientes polinomios  $5x^3 - 3x^2 - 6x - 4$ ;  $-8x^3 + 2x^2 - 3$ ;  $7x^2 - 9x + 1$

Los polinomios se escriben de la siguiente forma y se realiza la reducción de términos semejantes:

$$\begin{array}{rcccc}
 5x^3 & -3x^2 & -6x & -4 \\
 -8x^3 & +2x^2 & & -3 \\
 & 7x^2 & -9x & +1 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{rcccc}
 5x^3 & -3x^2 & -6x & -4 \\
 -8x^3 & +2x^2 & & -3 \\
 & 7x^2 & -9x & +1 \\
 \hline
 -3x^3 & +6x^2 & -15x & -6
 \end{array}$$

2) Efectuar la siguiente operación:  $(2x - 7y - 3z + 6) + (-9x + 4z) + (-x + 4y + z - 8)$

$$\begin{array}{rcccc}
 2x & -7y & -3z & +6 \\
 -9x & & +4z & \\
 -x & +4y & +z & -8 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{rcccc}
 2x & -7y & -3z & +6 \\
 -9x & & +4z & \\
 -x & +4y & +z & -8 \\
 \hline
 -8x & -3y & +2z & -2
 \end{array}$$

3) Realizar la siguiente operación:  $\left(\frac{1}{2}x^{a+1} - \frac{3}{4}y^{b-1} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{2}x^{a+1} + \frac{1}{3}y^{b-1} + \frac{1}{4}\right)$

Se acomodan en forma vertical los términos semejantes y se realiza la operación columna por columna:

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2}x^{a+1} - \frac{3}{4}y^{b-1} - \frac{1}{6} \\
 + \frac{3}{2}x^{a+1} + \frac{1}{3}y^{b-1} + \frac{1}{4} \\
 \hline
 2x^{a+1} - \frac{5}{12}y^{b-1} + \frac{1}{12}
 \end{array}$$



### 2.3.2 Resta

En esta operación es importante identificar el minuendo y el sustraendo, para posteriormente realizar la reducción de términos semejantes.

Ejemplos:

1.- Realiza la siguiente operación:  $(4a - 2b - 5c) - (3a - 5b - 7c)$

En este ejemplo  $(4a - 2b - 5c)$  representa al minuendo y  $(3a - 5b - 7c)$  al sustraendo. Se suprimen los paréntesis y se procede a efectuar la reducción de términos semejantes.

$$4a - 2b - 5c - 3a + 5b + 7c$$

Por consiguiente, el resultado de la resta es:  $a + 3b + 2c$

2.- De  $16x^2 - 7x - 8$  restar  $6x^2 - 3x + 6$

En este caso  $16x^2 - 7x - 8$  representa al minuendo y  $6x^2 - 3x + 6$  al sustraendo. Entonces al sustraendo se le cambia el signo y se acomodan los polinomios en forma vertical para realizar las operaciones entre los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 16x^2 - 7x - 8 \\ - 6x^2 + 3x - 6 \\ \hline 10x^2 - 4x - 14 \end{array}$$

3.- Resta  $-\frac{3}{4}a^2b - 6b^3 + 2a^3 - \frac{1}{2}ab^2$  de  $\frac{1}{3}a^3 - 2b^3 + \frac{1}{3}a^2b - ab^2$

En este caso el minuendo es  $\frac{1}{3}a^3 - 2b^3 + \frac{1}{3}a^2b - ab^2$  y el polinomio sustraendo al cual se cambia el signo y se ordena con respecto a los exponentes es:  $-\frac{3}{4}a^2b - 6b^3 + 2a^3 - \frac{1}{2}ab^2$

$$-\left(-\frac{3}{4}a^2b - 6b^3 + 2a^3 - \frac{1}{2}ab^2\right) = -2a^3 + \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + 6b^3$$

Se acomodan los polinomios y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^2b - ab^2 - 2b^3 \\ -2a^3 + \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + 6b^3 \\ \hline -\frac{5}{3}a^3 + \frac{13}{12}a^2b - \frac{1}{2}ab^2 + 4b^3 \end{array}$$



### 2.3.3 Multiplicación

Para multiplicar polinomio por polinomio se siguen los siguientes pasos en los siguientes ejemplos.

1.- Efectúa la siguiente operación:  $(5x^2 - 3x - 2)(4x - 3x^2 - 6)$ .

#### Solución

Se escriben los factores de la multiplicación en forma escalonada (como en las multiplicaciones aritméticas), y se ordenan los polinomios con respecto a los exponentes en forma ascendente o descendente, según se quiera.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline \end{array}$$

Se multiplica el primer término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline -15x^4 + 9x^3 + 6x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (-3x^2)(5x^2) = -15x^4 \\ (-3x^2)(-3x) = +9x^3 \\ (-3x^2)(-2) = +6x^2 \end{array}$$

A continuación se multiplica el segundo término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba y los resultados se colocan debajo de sus respectivos términos semejantes del primer resultado.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline -15x^4 + 9x^3 + 6x^2 \\ +20x^3 - 12x^2 - 8x \end{array} \quad \begin{array}{l} (4x)(5x^2) = 20x^3 \\ (4x)(-3x) = -12x^2 \\ (4x)(-2) = -8x \end{array}$$

Se repite el paso anterior para cada uno de los términos siguientes (si es que existe).

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline -15x^4 + 9x^3 + 6x^2 \\ +20x^3 - 12x^2 - 8x \\ -30x^2 + 18x + 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} (-6)(5x^2) = -30x^2 \\ (-6)(-3x) = 18x \\ (-6)(-2) = 12 \end{array}$$

Por último, se realiza la suma.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x - 2 \\ \times -3x^2 + 4x - 6 \\ \hline -15x^4 + 9x^3 + 6x^2 \\ +20x^3 - 12x^2 - 8x \\ -30x^2 + 18x + 12 \\ \hline -15x^4 + 29x^3 - 36x^2 + 10x + 12 \end{array}$$

Por consiguiente, el resultado es:  $-15x^4 + 29x^3 - 36x^2 + 10x + 12$



2.- Efectúa la siguiente operación:  $(5x^4y - 3x^2y^3 - 6xy)(3x^4y - 4x^2y^3 + 3xy)$ .

### Solución

Se acomodan los polinomios de manera vertical y se realiza el procedimiento descrito en el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{r}
 5x^4y - 3x^2y^3 - 6xy \\
 \times \quad 3x^4y - 4x^2y^3 + 3xy \\
 \hline
 15x^8y^2 - 9x^6y^4 - 18x^5y^2 \\
 + \quad \quad - 20x^6y^4 \quad \quad + 12x^4y^6 + 24x^3y^4 \\
 \quad \quad \quad + 15x^5y^2 \quad \quad - 9x^3y^4 - 18x^2y^2 \\
 \hline
 15x^8y^2 - 29x^6y^4 - 3x^5y^2 + 12x^4y^6 + 15x^3y^4 - 18x^2y^2
 \end{array}$$

Por tanto, el resultado es:  $15x^8y^2 - 29x^6y^4 - 3x^5y^2 + 12x^4y^6 + 15x^3y^4 - 18x^2y^2$

3.- ¿Cuál es el resultado de  $\left(\frac{5}{2}m^2 - 3mn + \frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m - \frac{1}{2}n\right)$ ?

### Solución

Este es un producto de un polinomio por un binomio, los resultados de los productos se acomodan de manera horizontal y se realizan las reducciones de términos semejantes.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{5}{2}m^2 - 3mn + \frac{1}{3}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m - \frac{1}{2}n\right) &= \frac{5}{3}m^3 - 2m^2n + \frac{2}{9}mn^2 - \frac{5}{4}m^2n + \frac{3}{2}mn^2 - \frac{1}{6}n^3 \\
 &= \frac{5}{3}m^3 - \frac{13}{4}m^2n + \frac{31}{18}mn^2 - \frac{1}{6}n^3
 \end{aligned}$$

El resultado de la operación es:  $\frac{5}{3}m^3 - \frac{13}{4}m^2n + \frac{31}{18}mn^2 - \frac{1}{6}n^3$



## Taller de ejercicios

Efectuar los siguientes productos

1.  $(x - 7)(x + 2)$
2.  $(m + 9)(m - 8)$
3.  $(-x + 2)(3 - x)$
4.  $(3x + 7)(x + 4)$
5.  $(2x - 5)(3x + 2)$
6.  $(5x - 4y)(5x + 4y)$
7.  $(3x + 2y)(3x - y)$
8.  $(n^2 + 4)(n^2 - 7)$
9.  $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$
10.  $\left(\frac{5}{3}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x - 3y\right)$
11.  $\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{3}x\right)\left(-\frac{4}{5}x - \frac{1}{2}y\right)$
12.  $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$
13.  $(x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$
14.  $(m^2 - mn + n^2)(m + n)$
15.  $(m^2 + mn + n^2)(m - n)$
16.  $(5x^2 - 7y^2 - 4xy)(3x - 2y)$
17.  $(4b^2 - 9a^2 - 4ab)(3a - 7b)$
18.  $(2a^3 - 3a + 4)(2a - 1)$
23.  $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{5}xy\right)\left(2y - \frac{3}{2}x\right)$
24.  $(m^{x-1} - n^{a-1})(m - n)$
25.  $(b^m - b^{m+1} + b^{m+2})(b + 1)$
26.  $(2x^{m+1} + x^{m+2} - x^m)(x^{m+3} - 2x^{m+1})$
27.  $(x^{a+2} - 2x^a + 3x^{a+1})(x^a + x^{a+1})$
28.  $(3x^2 - 5x - 2)(2x^2 - 7x + 4)$
29.  $(4x - 6x^2 - 9)(3x^2 + 2x + 1)$
30.  $(4x^3 - 2x^2y + 6xy^2)(x^2y - xy^2 - 2y^3)$
31.  $(m + n - p)(m - p - n)$
32.  $(2m - 3n + 5p)(n + 2p - m)$
33.  $(a + b - c)(a - b + c)$
34.  $(x^2 - 2x + 1)(x^4 - 2x^2 + 2)$
35.  $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)(6x^2 - 4x - 2)$
36.  $(x^m + x^{m+1} - x^{m+2})(x^m - x^{m+1} + x^{m+2})$
37.  $(2x^{2m+1} + 3x^{2m} - x^{2m-1})(x^2 + 2x + 1)$
38.  $(a^2b^2 - a^3b + a^4 - 3ab^3 + b^4)(a^2 - 2b^2 + ab)$
39.  $(3m^{a-2} - 2m^{a-1} + m^a)(m^2 + 2m - 1)$
40.  $(3x^{2a} + x^{2a+1} - 5x^{2a+2})(x^{3a-3} - 8x^{3a-2} - 6x^{3a-1})$



### 2.3.4 División de monomio entre monomio

#### Monomio entre monomio

Cuando se dividen monomios, primero se realiza la división de los coeficientes y después se aplica la ley de los exponentes para las bases. Si la división de los coeficientes no es exacta, entonces se deja especificada; si las bases no son iguales, entonces se deja expresado el cociente.

Ejemplo:

1.- Realiza la siguiente operación:  $\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c}$

Se dividen los coeficientes y las bases para obtener:  $\frac{-16a^5b^4c^6}{8a^2b^3c} = \frac{-16}{8}a^{5-2}b^{4-3}c^{6-1} = -2a^3bc^5$

2.- ¿Cuál es el resultado de  $\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c}$

La división de los coeficientes no es exacta, por tanto, se deja expresada como fracción, la cual se simplifica y se efectúa la división de las bases.

$$\frac{-10x^7y^6c}{-6x^2y^2c} = \frac{10}{6}x^{7-2}y^{6-2}c^{1-1} = \frac{5}{3}x^5y^4c^0 = \frac{5}{3}x^5y^4$$

3.- Realiza  $\frac{-xyz}{-xyz}$

Aplicando la ley de los signos para la división y se dividen las bases

$$\frac{-xyz}{-xyz} = x^{1-1}y^{1-1}z^{1-1} = x^0y^0z^0 = (1)(1)(1) = 1$$

#### Polinomio entre monomio

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, como se indica en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1.- Efectúa  $\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2}$

Se divide cada término del polinomio entre el monomio

$$\frac{2x^4-5x^3+x^2}{-x^2} = \frac{2x^4}{-x^2} - \frac{5x^3}{-x^2} + \frac{x^2}{-x^2} = -2x^{4-2} + 5x^{3-2} - x^{2-2} = -2x^2 + 5x - x^0 = -2x^2 + 5x - 1$$



2.- Determina el cociente de:  $\frac{16x^6y^5z-12x^4y^6z^2+6x^3y^9}{-4x^2y}$

Al aplicar los pasos del ejemplo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{16x^6y^5z}{-4x^2y} - \frac{12x^4y^6z^2}{-4x^2y} + \frac{6x^3y^9}{-4x^2y} &= -4x^{6-2}y^{5-1}z + 3x^{4-2}y^{6-1}z^2 - \frac{3}{2}x^{3-2}y^{9-1} \\ &= -4x^4y^4z + 3x^2y^5z^2 - \frac{3}{2}xy^8\end{aligned}$$

2.- ¿Cuál es el cociente de  $\frac{4x^{2m+1}+8x^{3m-2}-12x^{m+3}}{6x^{m-2}}$  ?

El monomio divide a cada uno de los términos que conforman el polinomio.

$$\begin{aligned}\frac{4x^{2m+1}}{6x^{m-2}} + \frac{8x^{3m-2}}{6x^{m-2}} - \frac{12x^{m+3}}{6x^{m-2}} &= \frac{4}{6}x^{(2m+1)-(m-2)} + \frac{8}{6}x^{(3m-2)-(m-2)} - \frac{12}{6}x^{(m+3)-(m-2)} \\ \frac{2}{3}x^{2m+1-m+2} + \frac{4}{3}x^{3m-2-m+2} - 2x^{m+3-m+2} &= \frac{2}{3}x^{m+3} + \frac{4}{3}x^{2m} - 2x^5\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es:  $= \frac{2}{3}x^{m+3} + \frac{4}{3}x^{2m} - 2x^5$

**División de Polinomio entre otro Polinomio:** A continuación se enlista los pasos a seguir para realizar esta operación.

Ejemplo:

1.- Efectúa la siguiente operación:  $\frac{3x^2-5x+2}{3x-2}$

Se colocan los polinomios como en la división con números reales, y se ordenan según convenga con respecto a los exponentes:

$$3x-2 \overline{) 3x^2-5x+2}$$

Se toma el primer término del dividendo, se divide entre el primer término del divisor y el resultado se coloca en la parte de arriba:  $\frac{3x^2}{3x} = x$

$$3x-2 \overline{) 3x^2-5x+2} \quad \begin{array}{r} x \\ \end{array}$$



Se multiplica el resultado de la división por cada uno de los términos del divisor; a cada resultado se le cambia el signo y se acomoda debajo del dividendo con su término semejante:

$$(x)(3x) = 3x^2; (x)(-2) = -2x$$

$$\begin{array}{r} 3x-2 \overline{) 3x^2 - 5x + 2} \\ \underline{-3x^2 + 2x} \phantom{+ 2} \end{array}$$

Se reducen los términos semejantes y se baja el siguiente término del dividendo, a la expresión resultante se le llama primer residuo.

$$\begin{array}{r} 3x-2 \overline{) 3x^2 - 5x + 2} \\ \underline{-3x^2 + 2x} \phantom{+ 2} \\ -3x + 2 \end{array}$$

Se repite el primer paso, es decir, se divide el primer término del primer residuo que resultó de la reducción anterior entre el primer término del divisor y se escribe el resultado arriba:  $\frac{-3x}{3x} = -1$

$$\begin{array}{r} 3x-2 \overline{) 3x^2 - 5x + 2} \\ \underline{-3x^2 + 2x} \phantom{+ 2} \\ -3x + 2 \end{array}$$

Se multiplica el resultado de la división anterior por cada uno de los términos del divisor y se escribe el resultado debajo de cada término semejante del residuo anterior (no olvides cambiar el signo):

$$(-1)(3x) = -3x; (-1)(-2) = 2$$

$$\begin{array}{r} 3x-2 \overline{) 3x^2 - 5x + 2} \\ \underline{-3x^2 + 2x} \phantom{+ 2} \\ -3x + 2 \end{array}$$

Se realiza la suma y si el residuo es cero como en el ejemplo, la división terminó; en caso contrario, se siguen los pasos anteriores hasta obtener cero como residuo o algún polinomio de grado menor al del divisor.

$$\begin{array}{r} 3x-2 \overline{) 3x^2 - 5x + 2} \\ \underline{-3x^2 + 2x} \phantom{+ 2} \\ -3x + 2 \\ \underline{3x - 2} \\ 0 \end{array}$$





2.- Efectúa la siguiente operación:  $\frac{5a^2-21b^2+8ab}{a+3b}$

Al emplear los pasos del ejemplo anterior:

$$\begin{array}{r} 5a - 7b \\ a + 3b \overline{) 5a^2 + 8ab - 21b^2} \\ \underline{- 5a^2 - 15ab} \phantom{- 21b^2} \\ - 7ab - 21b^2 \\ \underline{7ab + 21b^2} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{5a^2}{a} = 5a \rightarrow (5a)(a+3b) = 5a^2 + 15ab$$

$$\frac{-7ab}{a} = -7b \rightarrow (-7b)(a+3b) = -7ab - 21b^2$$

En una división de polinomios, si al dividendo le falta uno de sus términos, se deja indicado el espacio que ocupa dicho término o se escribe con coeficiente 0.

3.- ¿Cuál es el resultado de  $\frac{-2a+a^4-a^2-1}{a+a^2+1}$  ?

Se ordena tanto el dividendo como el divisor en orden decreciente con respecto a los exponentes y, en el caso del dividendo, se deja el espacio correspondiente al término de exponente 3:

$$a^2 + a + 1 \overline{) a^4 + 0a^3 - a^2 - 2a - 1}$$

Se realiza la división como en los ejemplos anteriores:

$$\begin{array}{r} a^2 - a - 1 \\ a^2 + a + 1 \overline{) a^4 + 0a^3 - a^2 - 2a - 1} \\ \underline{- a^4 - a^3 - a^2} \phantom{- 2a - 1} \\ - a^3 - 2a^2 - 2a \phantom{- 1} \\ \underline{a^3 + a^2 + a} \phantom{- 1} \\ - a^2 - a - 1 \\ \underline{a^2 + a + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{a^4}{a^2} = a^2 \rightarrow (a^2)(a^2 + a + 1) = a^4 + a^3 + a^2$$

$$\frac{-a^3}{a^2} = -a \rightarrow (-a)(a^2 + a + 1) = -a^3 - a^2 - a$$

$$\frac{-a^2}{a^2} = -1 \rightarrow (-1)(a^2 + a + 1) = -a^2 - a - 1$$



## Taller de ejercicios

Realiza las siguientes divisiones

1.  $\frac{x^2 + 2x}{x}$

2.  $\frac{8x^2y - 20x^3}{4x^2}$

3.  $\frac{2x^4 + 6x^3 - 8x^2}{2x^2}$

4.  $\frac{27m^4n^6 - 15m^3n^6 + 3mn^2}{3mn^2}$

5.  $\frac{28x^9y^6 - 49x^7y^3 - 7x^2y}{7x^2y}$

6.  $\left(\frac{1}{5}a^5b^7 - \frac{1}{4}a^4b^5 - a^3b^4\right) \div 6a^3b^2$

7.  $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

8.  $\frac{x^2 + 5xy + 6y^2}{x + 2y}$

9.  $\frac{x^2 - 4x - 12}{x + 2}$

10.  $\frac{m^2 - 11mn + 28n^2}{m - 7n}$

11.  $\frac{n^4 + 2n^2 - 48}{n^2 + 8}$

12.  $\frac{x^8 + 11x^4 + 18}{x^4 + 9}$

13.  $\frac{9x^2 - 6x - 35}{3x + 5}$

14.  $\frac{49m^2 - 56m + 15}{7m - 5}$

15.  $\frac{7m^2 - 31mn + 12n^2}{m - 4n}$

16.  $(x^3 - y^3) \div (x - y)$

17.  $(x^6 - 8y^6) \div (x^2 - 2y^2)$

18.  $\frac{x^3 + 48x - 64 - 12x^2}{x^2 + 16 - 8x}$

19.  $\frac{6x^4 - 8x^2 - x^3 + x + 2}{2x^2 - x - 1}$

20.  $\frac{4a^4 + 26a^3 - 79a^2 - 20a + 42}{a^2 + 8a - 6}$



### 3 PRODUCTOS NOTABLES

#### Definición

Los productos notables se obtienen con un simple desarrollo, sin necesidad de desarrollar el producto.

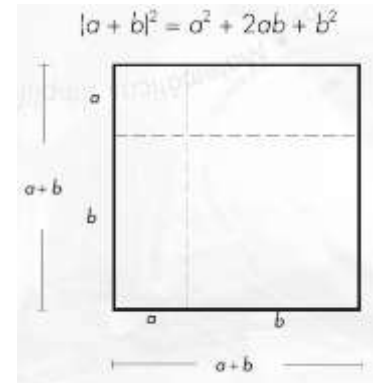
#### 3.1 Cuadrado de un Binomio $(a+b)^2$

El desarrollo de la suma de dos cantidades al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El desarrollo del cuadrado de una diferencia de dos cantidades, es igual a:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



#### Demostración

La expresión  $(a+b)^2$  es equivalente a  $(a+b)(a+b)$ , entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

#### Ejemplos:

1.- Desarrolla  $(x + 7)^2$

Al aplicar la regla general:

- ✓ El cuadrado del primer término:  $(x)^2 = x^2$
- ✓ El doble producto del primer término por el segundo:  $2(x)(7) = 14x$
- ✓ El cuadrado del segundo término:  $(7)^2 = 49$

Se suman los términos resultantes y se obtiene:  $x^2 + 14x + 49$

2.- ¿Cuál es el resultado al desarrollar  $(3m + 5n)^2$ ?

Se aplica la fórmula con  $3m$  como primer término y  $5n$  como segundo término

$$\begin{aligned} (3m + 5n)^2 &= (3m)^2 + 2(3m)(5n) + (5n)^2 \\ &= 9m^2 + 30mn + 25n^2 \end{aligned}$$



3.- Desarrolla  $\left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2$

Se sustituyen los términos en la fórmula y se efectúan las operaciones, para obtener:

$$\left(\frac{1}{2}a + 3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)(3) + (3)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{6}{2}a + 9 = \frac{1}{4}a^2 + 3a + 9$$

4.- Desarrolla  $(5m^{2x-3} + n^{4x})^2$

En este ejemplo los exponentes de las bases son expresiones algebraicas, entonces, al aplicar la fórmula, se obtiene:

$$\begin{aligned}(5m^{2x-3} + n^{4x})^2 &= (5m^{2x-3})^2 + 2(5m^{2x-3})(n^{4x}) + (n^{4x})^2 \\ &= 25m^{4x-6} + 10m^{2x-3}n^{4x} + n^{8x}\end{aligned}$$

5.- ¿Cuál es el resultado de desarrollar  $(4x^2 - 9y^3)^2$ ?

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$$\begin{aligned}&= (4x^2 - 9y^3)^2 = (4x^2)^2 - (9y^3)^2 + 2(4x^2)(-9y^3) \\ &= 16x^4 - 81y^6 - 72x^2y^3\end{aligned}$$

### 3.2 Cuadrado de un Trinomio $(a+b+c)^2$

El desarrollo de la expresión es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más los dobles productos de las combinaciones entre ellos.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

*Demostración*

La expresión  $(a+b+c)^2$  es equivalente a  $(a+b+c)(a+b+c)$ , entonces:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$

Al simplificar los términos semejantes:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$



### Ejemplos:

1.- Desarrollar  $(x + 2y + 3z)^2$

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}(x + 2y + 3z)^2 &= (x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(x)(2y) + 2(x)(3z) + 2(2y)(3z) \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz\end{aligned}$$

2.- Obtén el resultado de  $(4m - 7n - 5)^2$

El trinomio se expresa de la siguiente manera:  $(4m - 7n - 5)^2 = [4m + (-7n) + (-5)]^2$  y se aplica la fórmula para obtener como resultado:

$$\begin{aligned}(4m - 7n - 5)^2 &= (4m)^2 + (-7n)^2 + (-5)^2 + 2(4m)(-7n) + 2(4m)(-5) + 2(-7n)(-5) \\ &= 16m^2 + 49n^2 + 25 - 56mn - 40m + 70n\end{aligned}$$

3.- Desarrolla  $\left(\frac{1}{2}x^{m+1} + 2x^m + x^{m-1}\right)^2$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)^2 + (2x^m)^2 + (x^{m-1})^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)(2x^m) + 2\left(\frac{1}{2}x^{m+1}\right)(x^{m-1}) + 2(2x^m)(x^{m-1}) \\ = \frac{1}{4}x^{2m+2} + 4x^{2m} + x^{2m-2} + 2x^{2m+1} + x^{2m} + 4x^{2m-1} \\ = \frac{1}{4}x^{2m+2} + 2x^{2m+1} + 5x^{2m} + 4x^{2m-1} + x^{2m-2}\end{aligned}$$

4.- Resuelve  $(a^{x+1} - 2a^x - a^{x-1})^2$

$$\begin{aligned}&= (a^{x+1})^2 + (-2a^x)^2 + (-a^{x-1})^2 + 2(a^{x+1})(-2a^x) + 2(a^{x+1})(-a^{x-1}) + 2(-2a^x)(-a^{x-1}) \\ &= a^{2x+2} + 4a^{2x} + a^{2x-2} - 4a^{2x+1} - 2a^{2x} + 4a^{2x-1}\end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$= a^{2x+2} - 4a^{2x+1} + 2a^{2x} + 4a^{2x-1} + a^{2x-2}$$

## Taller de ejercicios

Desarrolla las siguientes expresiones

1.  $(x + 8)^2$
2.  $(m - 10)^2$
3.  $(a - 3)^2$
4.  $(4 - m)^2$
5.  $(y + 9)^2$
6.  $(x - 12)^2$
7.  $\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}\right)^2$
8.  $(x - 5)^2$
9.  $(4x^3 + 5y)^2$
10.  $(9a^3 - a^2b)^2$
11.  $(6mn^4 + 3m^5p)^2$
12.  $\left(1 - \frac{3}{4}xy\right)^2$
13.  $\left(\frac{1}{4}x - 2y^3\right)^2$
14.  $\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{4y}\right)^2$
15.  $(x + 2y + 3z)^2$
16.  $(3x - 2y + 1)^2$
17.  $(a + 6b - 5c)^2$
18.  $(a^2 + 5a + 4)^2$
19.  $(a^2 + 3a - 2)^2$
20.  $(2a - 3b + 1)^2$
21.  $(4m + 5n + p)^2$
22.  $(3x^2 + 2y^2 - 1)^2$
23.  $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + c\right)^2$
24.  $\left(\frac{1}{6}x - y + \frac{1}{4}\right)^2$
25.  $\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z}\right)^2$
26.  $(a^x - b^y + c^z)^2$
27.  $(a^{x+1} - 2a^x - a^{x-1})^2$
28.  $(6x^{3m-2} + 5y^{4m}z^3)^2$

### 3.3 Binomios conjugados y caso especial de binomios conjugados

Son de la forma  $(a+b)$   $(a-b)$  y su resultado es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades, como se ilustra en la fórmula:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Demostración; Se realiza el producto y se obtiene:  $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

#### Ejemplos:

1.- Desarrolla  $(x + 6)(x - 6)$

Ambos términos se elevan al cuadrado:

El cuadrado del término que no cambia de signo:  $(x)^2 = x^2$

El cuadrado del término que cambia de signo:  $(6)^2 = 36$

Finalmente, se realiza la diferencia y el resultado es:  $x^2 - 36$

2.- Resuelve  $(-2x^3 + 7)(-2x^3 - 7)$

Los binomios se expresan de la siguiente manera para aplicar la fórmula:

$$(-2x^3 + 7)(-2x^3 - 7) = [(-2x^3) + 7][(-2x^3) - 7] = (-2x^3)^2 - (7)^2 = 4x^6 - 49$$

3.- Desarrolla  $\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right)$

Se ordenan los términos y se aplica la fórmula para obtener:

$$\left(\frac{10}{3} - \frac{3m^4}{2}\right)\left(\frac{3m^4}{2} + \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3} - \frac{3m^2}{2}\right)\left(\frac{10}{3} + \frac{3m^2}{2}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{3m^2}{2}\right)^2 = \frac{100}{9} - \frac{9m^4}{4}$$

4.- Resuelve  $(5x^{2a-3} + y^{4m})(5x^{2a-3} - y^{4m})$

Al aplicar la formula se obtiene:

$$\begin{aligned}(5x^{2a-3} + y^{4m})(5x^{2a-3} - y^{4m}) &= (5x^{2a-3})^2 - (y^{4m})^2 \\ &= 25x^{4a-6} - y^{8m}\end{aligned}$$



### 3.4 Binomios con término común

Son de la forma  $(x+a)(x+b)$  y su resultado es un trinomio cuyo desarrollo es el cuadrado del término común, más la suma de los términos no comunes por el término común, más el producto de los no comunes.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

*Demostración*

*Se realiza el producto de los binomios:*

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

*Se agrupan los términos semejantes y se obtiene la fórmula:*

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

**Ejemplos:**

1.- Desarrolla  $(x - 6)(x + 4)$

*Se desarrolla el procedimiento descrito:*

- El cuadrado del término común:  $(x)^2 = x^2$
- La suma de los términos no comunes, multiplicada por el término común:  $(-6 + 4)(x) = -2x$
- El producto de los términos no comunes:  $(-6)(4) = -24$

*Se suman los términos anteriores y se obtiene como resultado:*  $(x - 6)(x + 4) = x^2 - 2x - 24$

2.- Efectúa  $(m - 3)(m - 5)$

*Al aplicar la fórmula, se obtiene:*  $(m - 3)(m - 5) = m^2 + (-3 - 5)m + (-3)(-5) = m^2 - 8m + 15$

3.- Resuelve  $(5x - 4)(5x - 2)$

$$\begin{aligned}(5x - 4)(5x - 2) &= (5x)^2 + (-4 - 2)(5x) + (-4)(-2) = \\ &= 25x^2 + (-6)(5x) + 8 \\ &= 25x^2 - 30x + 8\end{aligned}$$





## Taller de ejercicios

Desarrolla los siguientes productos

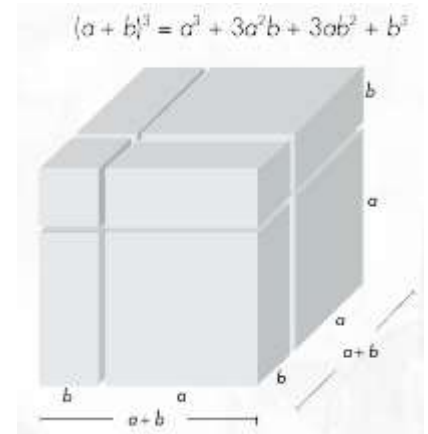
1.  $(x + 3)(x - 3)$
2.  $(a - 1)(a + 1)$
3.  $(b + 2)(b - 2)$
4.  $(k - 8)(k + 8)$
5.  $(3x + 5y)(3x - 5y)$
6.  $(4m - 9n)(4m + 9n)$
7.  $(2b - 3c)(3c + 2b)$
8.  $(6x^5 + 1)(6x^5 - 1)$
9.  $(3m^3 - 8)(3m^3 + 8)$
10.  $\left(\frac{3}{5}m + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}m - \frac{1}{2}\right)$
11.  $\left(\frac{7}{6}x^3 - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}\right)$
12.  $\left(\frac{1}{3}xy - z^6\right)\left(\frac{1}{3}xy + z^6\right)$
13.  $\left(3x^2 - \frac{1}{10}\right)\left(3x^2 + \frac{1}{10}\right)$
14.  $(3a^{x-4} + b^{3x})(3a^{x-4} - b^{3x})$
15.  $(8y^{2a-3} - 4x^{4a})(4x^{4a} + 8y^{2a-3})$
16.  $(3x^m + 4y^n)(3x^m - 7y^n)$
17.  $(x - 8)(x + 5)$
18.  $(m + 7)(m - 4)$
19.  $(x - 10)(x - 2)$
20.  $(x - 6)(x - 5)$
21.  $(x + 4)(x + 6)$
22.  $(n - 3)(n + 4)$
23.  $(4x - 5)(4x - 2)$
24.  $(1 - 3x)(2 - 3x)$
25.  $(4 + 5x)(6 + 5x)$
26.  $(2 - 7x)(2 + 6x)$
27.  $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{6}\right)$
28.  $\left(\frac{1}{3}m + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{3}m - \frac{1}{2}\right)$
29.  $\left(\frac{3}{4}y + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}y - \frac{5}{8}\right)$
30.  $\left(-xy + \frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{4} - xy\right)$
31.  $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{7}y\right)\left(\frac{3}{7}y - \frac{4}{5}x\right)$
32.  $\left(\frac{6}{5}x^2 - \frac{1}{4}y^2\right)\left(\frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{3}y^2\right)$



### 3.5 Cubo de un Binomio

Son de la forma  $(a+b)^3$ , su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y su desarrollo es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



#### Demostración

La expresión  $(a+b)^3$  es equivalente al producto  $(a+b)^2(a+b)$ , entonces:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

#### Ejemplos:

##### 1.- Desarrollar $(m + 5)^3$

Se obtiene cada uno de los términos que conforman al cubo perfecto:

- El cubo del primer término:  $(m)^3 = m^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo:  $3(m)^2(5) = 15m^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo:  $3(m)(5)^2 = 3(m)(25) = 75m$
- El cubo del segundo:  $(5)^3 = 125$

Estos resultados se suman y se obtiene:  $(m + 5)^3 = m^3 + 15m^2 + 75m + 125$

##### 2.- Resuelve $(x - 4)^3$

El binomio se expresa de la siguiente manera:  $(x - 4)^3 = (x + (-4))^3$ , se obtiene cada uno de los términos del cubo perfecto:

- El cubo del primer término:  $(x)^3 = x^3$
- El triple del cuadrado del primero por el segundo:  $3(x)^2(-4) = -12x^2$
- El triple del primero por el cuadrado del segundo:  $3(x)(-4)^2 = 3(x)(16) = 48x$
- El cubo del segundo:  $(-4)^3 = -64$

Estos resultados se suman y se obtiene:  $(x - 4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$



3.- Desarrolla  $(-2m - 3n)^3$

El binomio se representa como:  $(-2m - 3n)^3 = [(-2m) + (-3n)]^3$ , se aplica la regla general:

$$\begin{aligned} (-2m - 3n)^3 &= (-2m)^3 + 3(-2m)^2(-3n) + 3(-2m)(-3n)^2 + (-3n)^3 \\ &= (-8m^3) + 3(4m^2)(-3n) + 3(-2m)(9n^2) + (-27n^3) \\ &= -8m^3 - 36m^2n - 54mn^2 - 27n^3 \end{aligned}$$

El desarrollo del cubo de la diferencia de dos cantidades se obtiene con la fórmula:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Al utilizar la fórmula los términos se sustituyen con signo positivo.

**Ejemplo:**

¿Cuál es el resultado de  $(3x^4 - 2y^3)^3$

$$\begin{aligned} (3x^4 - 2y^3)^3 &= (3x^4)^3 - 3(3x^4)^2(2y^3) + 3(3x^4)(2y^3)^2 - (2y^3)^3 \\ &= 27x^{12} - 3(9x^8)(2y^3) + 3(3x^4)(4y^6) - 8y^9 \\ &= 27x^{12} - 54x^8y^3 + 36x^4y^6 - 8y^9 \end{aligned}$$



*Desarrolla los siguientes binomios al cubo*

1.  $(x - 1)^3$

5.  $(2x + 1)^3$

9.  $(3m^4 - 4m^3n)^3$

2.  $(m + 6)^3$

6.  $(3a - 4)^3$

10.  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

3.  $(x - 2)^3$

7.  $(2x + 3)^3$

11.  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

4.  $(a + 10)^3$

8.  $(1 - 4m)^3$

12.  $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)^3$



## 4 FACTORIZACIÓN

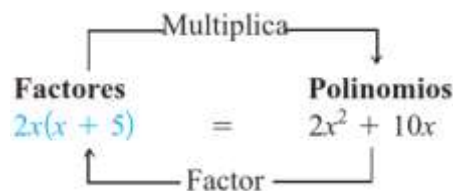
### Definición

Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

### 4.1 Factores comunes

#### Factor común

Es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica. La propiedad distributiva se utiliza para multiplicar factores de un polinomio. **Factorizar un polinomio** significa escribirlo como producto de otros polinomios.



En el ejemplo anterior,  $2x$  es el MCD (Máximo Común Divisor) de los términos  $2x^2$  y  $10x$ . Para este caso  $x+5$  es un factor de  $2x^2 + 10x$

#### Ejemplos:

1.- Factoriza  $x^6 - x^5 + x^2$

Para encontrar el factor común se toma la letra que se repite y de menor exponente ( $x^2$ ), después cada uno de los términos de la expresión algebraica se divide entre el factor común:

$$\frac{x^6}{x^2} = x^4 \qquad -\frac{x^5}{x^2} = -x^3 \qquad \frac{x^2}{x^2} = 1$$

El resultado se expresan de la siguiente manera:  $x^6 - x^5 + x^2 = x^2(x^4 - x^3 + 1)$

2.- Factoriza  $5x^3 - 35x^2 + 10x$

El MCD es  $5x$

$$\frac{5x^3}{5x} = x^2 \qquad -\frac{35x^2}{5x} = -7x \qquad \frac{10x}{5x} = 2$$

$$= 5x(x^2) + 5x(-7x) + 5x(2) \quad \text{por lo tanto el resultado es} \quad = 5x(x^2 - 7x + 2)$$



3.- Obtén la factorización de  $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$

Se busca el factor común de los coeficientes, que es el máximo común divisor de ellos y también se busca el factor común de las literales:

El MCD es 4 y al factor común literal es  $a^3b^2$

$$\begin{aligned}\frac{16a^6b^7c}{4a^3b^2} &= 4a^3b^5c & -\frac{12a^5b^2c^3}{4a^3b^2} &= -3a^2c^3 & \frac{20a^3b^{10}}{4a^3b^2} &= 5b^8 \\ & & & & \\ &= 4a^3b^2(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8)\end{aligned}$$

## 4.2 Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es de la forma  $a^2 - b^2$  y su factorización es:  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$   
Lo que da como resultado el producto de binomios conjugados.

### Ejemplos

1.- Factoriza la expresión:  $x^2 - 9$

Se extrae la raíz cuadrada del primer y segundo términos; los resultados se acomodan como se indica en la fórmula.

$$\sqrt{x^2} = x ; \sqrt{9} = 3$$

Finalmente, la factorización es:  $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

2.- Factoriza:  $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$

$$\text{Aplicando la fórmula se obtiene: } \frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$$

3.-¿Cuál es el resultado de factorizar  $x^{2a-4} - y^{6b}$ ?

Se expresan los exponentes de la siguiente manera:  $x^{2a-4} - y^{6b} = x^{2(a-2)} - y^{2(3b)}$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos términos:  $\sqrt{x^{2(a-2)}} = x^{a-2} \quad \sqrt{y^{2(3b)}} = y^{3b}$

Finalmente se obtiene:  $x^{2a-4} - y^{6b} = (x^{a-2} + y^{3b})(x^{a-2} - y^{3b})$

## Taller de ejercicios

En los ejercicios del 1 al 10 factorizar por termino común.

1.  $a^2 + a$

2.  $a^3b^2 - 2a^3b$

3.  $a^4 + a^3 - a^2$

4.  $18x^5 + 30x^4$

5.  $48x^2 - 12x^3 - 24x^4$

6.  $25b^2 + 35b^4 - 45b^5$

7.  $11ax - 121a^2x + 33a^3$

8.  $9a^5b - 12a^2b^3 + 15ab^2 - 18a^3b^4$

9.  $9x^2 + 6x + 3$

10.  $4x^4 - 8x^3 + 12x^2$

En los ejercicios del 11 al 20 factorizar por diferencia de cuadrados.

11.  $x^6 - 36$

12.  $16a^4b^6 - c^6$

13.  $x^2 - \frac{1}{4}$

14.  $x^2 - \frac{4}{81}$

15.  $x^2 - \frac{16}{49}$

16.  $x^4 - \frac{1}{16}$

17.  $49x^2 - \frac{16}{25}$

18.  $x^{6a} - y^{4b}$

19.  $a^{2x+6} - 9b^{6y}$

20.  $m^{4a+8} - 25$



### 4.3 Trinomio cuadrado perfecto

Se conoce así a toda expresión de la forma  $a^2 \pm 2ab + b^2$

Los Pasos para factorizar un trinomio cuadrado perfecto son los siguientes:

1. Para factorizar esta expresión, se debe verificar que los términos se encuentren ordenados con respecto a los exponentes de mayor a menor o viceversa.
2. Se extraen las raíces cuadradas de los términos extremos (primer y último términos):

$$\sqrt{a^2} = a \quad y \quad \sqrt{b^2} = b$$

3. Para comprobar que la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces: **comprobación =  $2ab$**

4. Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces éste es cuadrado perfecto y su factorización es igual al cuadrado de una suma o diferencia de las raíces cuadradas de los términos extremos.

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado del primer término —————  
 Dos veces el producto de los dos términos —————  
 Cuadrado del último término —————

Regla para factorizar un trinomio cuadrado perfecto

Trinomio cuadrado perfecto

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

=

$$(a + b)(a + b)$$

=

$$(a - b)(a - b)$$

=

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2$$

$$(a - b)^2$$

### Ejemplos

1.- Factoriza  $4x^2 - 20x + 25$

Sacamos raíz cuadrada del primero y el último término sean cuadrados:  $\sqrt{4x^2} = 2x$ ,  $\sqrt{25} = 5$

Se realiza el doble producto de las raíces:  $2(2x)(5) = 20x$

Por lo tanto según la regla, el resultado es:  $(2x - 5)^2$

2.- Factoriza la expresión:  $x^2 + 6x + 9$



Se obtienen las raíces cuadradas y se comprueba que el trinomio es cuadrado perfecto:

$$\sqrt{x^2} = x, \quad \sqrt{9} = 3 \quad \text{comprobación} = 2(x)(3) = 6x$$

Al tomar el signo del segundo término, la factorización es:  $(x + 3)^2$

3.- Factoriza  $4x^2 + 9x^2 - 12xy$

Se ordenan los términos de la forma siguiente:  $4x^2 + 9x^2 - 12xy = 4x^2 - 12xy + 9x^2$

Se extraen las raíces de los términos extremos y se verifica que el trinomio es cuadrado perfecto:

$$\sqrt{4x^2} = 2x, \quad \sqrt{9y^2} = 3y \quad \text{comprobación} = 2(2x)(3y) = 12xy$$

Finalmente se tiene que:  $(2x - 3y)^2$

4.- Factoriza la siguiente expresión:  $x^{\frac{1}{4}} + 4x^{\frac{1}{8}} + 4$

Se obtienen las raíces de los extremos y se comprueba:

$$\sqrt{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{(4)(2)}} = x^{\frac{1}{8}}, \quad \sqrt{4} = 2 \quad \text{comprobación} = 2\left(x^{\frac{1}{8}}\right)(2) = 4x^{\frac{1}{8}}$$

Por consiguiente, el trinomio es cuadrado perfecto y su resultado es:  $\left(x^{\frac{1}{8}} + 2\right)^2$

5.- Factoriza:  $3a - 2\sqrt{15ab} + 5b$

$$\sqrt{3a} \text{ y } \sqrt{5b} \quad \text{la comprobación} = 2(\sqrt{3a})(\sqrt{5b}) = 2\sqrt{(3a)(5b)} = 2\sqrt{15ab}$$

El resultado final será:  $(\sqrt{3a} - \sqrt{5b})^2$



## Taller de ejercicios

Factoriza las siguientes expresiones.

1.  $a^2 + 8a + 16$
2.  $m^2 - 10m + 25$
3.  $n^2 - 8n + 16$
4.  $x^2 - 6x + 9$
5.  $x^2 + 12x + 36$
6.  $9a^2 - 30a + 25$
7.  $36 + 121c^2 - 132c$
8.  $16a^2 + 24ab + 9b^2$
9.  $4a^2 - 20ab + 25b^2$
10.  $9a^2 + 6ab + b^2$
11.  $4a^2 - 12ab + 9b^2$
12.  $a^2 - 24x^2a^3 + 144x^4a^4$
13.  $100a^4 - 60a^2b + 9b^2$
14.  $a^8 + 36b^2c^2 + 12a^4bc$
15.  $121 + 198a^6 + 81a^{12}$
16.  $49x^6 - 70ax^3y^2 + 25a^2y^4$
17.  $400a^{10} + 40a^5 + 1$
18.  $x^8 + 18x^4 + 81$
19.  $\frac{y^2}{4} - yz + z^2$
20.  $1 + \frac{2}{3}p + \frac{p^2}{9}$
21.  $x^4 - x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$
22.  $\frac{1}{25} + \frac{25}{36}b^4 - \frac{b^2}{3}$
23.  $16m^6 - 2m^3n^2 + \frac{n^4}{16}$
24.  $9(a+x)^2 - 12(a+x) + 4$
25.  $4(1+m)^2 - 4(1+m)(n-1) + (n-1)^2$
26.  $9(a-b)^2 + 12(a-b)(a+b) + 4(a+b)^2$
27.  $(m+n)^2 - 2(m+n)(m-n) + (m-n)^2$
28.  $4a^2 - 4a(b-a) + (b-a)^2$
29.  $(m+a)^2 - 2(m+a)(a+b) + (a+b)^2$
30.  $x + 2\sqrt{2xy} + 2y$
31.  $ax + 4\sqrt{ax} + 4$
32.  $a^3 - 10a^{\frac{3}{2}} + 25$
33.  $x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 9$
34.  $16x^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{1}{4}} + 1$
35.  $m^{\frac{2}{3}} + 4m^{\frac{1}{3}} + 4$
36.  $\sqrt[3]{m^2} - 6\sqrt[3]{m} + 9$



#### 4.4 Trinomio de la forma $x^2+bx+c$

Esta expresión resulta del producto de binomios con término común. Para factorizarla se realizan los siguientes pasos, como en el ejemplo.

1.- Factoriza la expresión  $x^2 + 11x + 24$

i.- se extrae raíz cuadrada del término cuadrático y se coloca el resultado en ambos factores:

$$x^2 + 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$$

ii.- se coloca el signo del segundo término (+11x) en el primer factor y se multiplica el signo del segundo término por el del tercer término (+)(+)=+ para obtener el signo del segundo factor

$$x^2 + 11x + 24 = (x + \quad)(x + \quad)$$

iii.- se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término (24) y cuya suma sea igual al coeficiente del término central:

$$= (x + 8)(x + 3)$$

Finalmente la factorización es:  $(x + 8)(x + 3)$

2.- Factoriza la expresión  $m^2-13m+30$

$\sqrt{m^2} = m$  el primer signo es (-13m) “-” y el segundo (-)(+)= -, por lo tanto:  $(m - \quad)(m - \quad)$

Buscamos dos números que multiplicados den como resultado +30 y sumados -13, por lo cual serian;

$$(m - 10)(m - 3)$$

3.- Factoriza:  $x^2 - 18 - 7x$

Primero ordenamos los términos en forma descendente con respecto a los exponentes y se extrae la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$x^2 - 18 - 7x = x^2 - 7x - 18 = (x \quad)(x \quad)$$

Se coloca el signo en el primer factor, el cual es - y en el segundo factor es +, por lo cual nos queda:  $(x - \quad)(x + \quad)$

Buscamos dos números que multiplicados den como resultado -18 y sumados -7, por lo cual serian; - 9 y +2

Finalmente la factorización es:  $(x - 9)(x + 2)$



## 4.5 Trinomio de la forma $ax^2+bx+c$

En este trinomio el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.

**Ejemplos:**

1.- Factoriza la expresión  $6x^2 - 7x - 3$

Se ordenan los términos según la forma  $ax^2+bx+c$ , se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

$$\frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6}$$

La expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma  $x^2+bx+c$ .  
Buscamos dos números que multiplicados den como resultado -18 y sumados -7

$$\frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} = \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{6}$$

Se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la expresión

$$\frac{3(2x - 3) 2(3x + 1)}{6} = \frac{6(2x - 3)(3x + 1)}{6} = (2x - 3)(3x + 1)$$

2.- Factoriza la expresión:  $3x^2 - 5x - 2$

Se multiplica y se divide la expresión por 3, para que se transforme el numerador en una expresión de la forma:  $x^2+bx+c$

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{3(3x^2 - 5x - 2)}{3} = \frac{9x^2 - 5(3x) - 6}{3}$$

Se factoriza la expresión y se simplifica para obtener como resultado de la factorización:

$$= \frac{(3x - 6)(3x + 1)}{3} = \frac{3(x - 2)(3x + 1)}{3} = (x - 2)(3x + 1)$$

3.- Factoriza  $5 + 11x - 12x^2$



## Taller de ejercicios

Del 1 al 20 factoriza las siguientes expresiones de la forma  $x^2+bx+c$ .

- |                       |                           |                       |                             |                       |
|-----------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------------|-----------------------|
| 1. $x^2 + 3x + 2$     | 2. $y^4 - 6y^2 + 8$       | 3. $n^2 - 7n + 12$    | 4. $a^4 - 37a^2 + 36$       | 5. $x^2 + 7x + 6$     |
| 6. $a^2b^2 + ab - 12$ | 7. $a^2 + 10a + 24$       | 8. $y^6 - 5y^3 - 14$  | 9. $m^2 - 9m + 20$          | 10. $5 + 4b - b^2$    |
| 11. $x^2 - 5x + 4$    | 12. $y^4 + 7xy^2 - 60x^2$ | 13. $a^2 - 16a - 36$  | 14. $x^4y^4 - 2x^2y^2 - 99$ | 15. $x^2 - 18 - 7x$   |
| 16. $n^2 - 34n + 288$ | 17. $a^2 - 5ab - 50b^2$   | 18. $c^2 - 22c - 968$ | 19. $x^2 + xy - 56y^2$      | 20. $x^2 + 44x + 363$ |

Del 21 al 30 factoriza las siguientes expresiones de la forma  $ax^2+bx+c$ .

21.  $5m^2 + 13m - 6$
22.  $44z + 20z^2 - 15$
23.  $6y^2 + 7y + 2$
24.  $6y^4 + 5y^2 - 6$
25.  $4n^2 + 15n + 9$
26.  $6a^2b^2 + 5ab - 25$
27.  $7a^2 - 44a - 35$
28.  $6n^2 - 13mn - 15m^2$
29.  $20x^2 + 13x + 2$
30.  $15 + 2b^2 - 8b^4$

## 5 ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO Y SEGUNDO GRADO CON DOS INCÓGNITAS

## 5.1 Conceptos Generales

**Igualdad.** Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor.

*Ejemplos:*

$$2 + 3^2 = 25$$

$$(4)^2 + (3)^2 = 25$$

$$\sqrt{625} = 25$$

Entonces  $(2 + 3)^2$ ,  $(4)^2 + (3)^2$ ,  $\sqrt{625}$  son expresiones equivalentes ya que todas valen 25

**Ecuación.** Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud.

*Ejemplos:*

La fórmula  $v = \frac{d}{t}$  se utiliza para encontrar la velocidad constante de un móvil del que se conoce la distancia recorrida y el tiempo que empleó en recorrerla.

La fórmula  $A = \pi r^2$  se utiliza para encontrar el área de un círculo dada la longitud de su radio.

*También existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que se busca el valor de una variable o representan modelos matemáticos que resuelvan algún problema de la vida real.*

*Ejemplos:*

$$x + 2 = 8$$

$$x + y = 6$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\frac{4}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{5}{x+2}$$

Las ecuaciones están formadas de la siguiente manera: 1<sup>er</sup> miembro=2<sup>do</sup> miembro

**Solución de una ecuación.** La solución o soluciones de una ecuación son los valores que hacen que la igualdad se cumpla.

***Ejemplos:***

1. Para la ecuación  $x + 2 = 10$ , la solución es  $x = 8$ , ya que al sustituir con 8 a la literal  $x$ , se obtiene:  $8 + 2 = 10$
2. Para la ecuación  $x + y = 8$ , una solución es  $x = 3$ ,  $y = 5$ ; porque:  $3 + 5 = 8$
3. Para la ecuación  $x^2 - 4 = 0$ , las soluciones son:  $x = -2$ ,  $x = 2$  porque:

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$(2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

**Grado de una ecuación.** El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s).



### Ejemplos:

1. La ecuación  $2x + 3 = 5$ , es de primer grado, porque la incógnita tiene exponente 1
2. La ecuación  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2
3. La ecuación  $x + y = 6$ , es de primer grado, porque las variables tienen exponente 1

A las ecuaciones de primer grado se les llama lineales.

## 5.2 Método de reducción para ecuaciones lineales

Este método consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por algún número, de tal forma que al sumar las ecuaciones equivalentes que resultan, una de las variables se elimina para obtener una ecuación con una incógnita, y al resolverla se determina su valor, para posteriormente sustituirla en alguna de las ecuaciones originales y así obtener el valor de la otra incógnita.

### Ejemplos:

1.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$$

Se elige la variable a eliminar, en este ejemplo se toma  $x$ ; para eliminarla se necesita que los coeficientes de  $x$  de cada ecuación sean iguales y de distinto signo. La primera ecuación se multiplica por  $-3$  y la segunda se multiplica por  $2$ , posteriormente se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante.

$$\begin{array}{rcl} (2x + 5y = 19)(-3) & \Rightarrow & -6x - 15y = -57 \\ (3x - 4y = -6)(2) & & 6x - 8y = -12 \\ \hline & & -23y = -69 \\ & & y = \frac{-69}{-23} \\ & & y = 3 \end{array}$$

El valor de  $y = 3$  se sustituye en cualquiera de las ecuaciones, para obtener el valor de  $x$ .

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y = 19 & \Rightarrow & 2x + 5(3) = 19 \\ & & 2x + 15 = 19 \\ & & 2x = 19 - 15 \\ & & 2x = 4 \\ & & x = \frac{4}{2} \\ & & x = 2 \end{array}$$

Se puede comprobar el resultado al sustituir los valores obtenidos en la otra ecuación



### 5.3 Método por Sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables de cualquiera de las dos ecuaciones y sustituir dicho despeje en la ecuación restante, así resulta una ecuación de primer grado, la cual se resuelve para obtener el valor de una de las variables. Este primer valor se sustituye en el despeje para determinar el valor de la variable que falta.

#### Ejemplos:

1.- Determina los valores de  $x$  y  $y$  en el sistema: 
$$\begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$$

Despejamos  $x$  de la primera ecuación

$$3x - 4y = -11 \quad \Rightarrow \quad 3x = 4y - 11$$

$$x = \frac{4y - 11}{3}$$

Sustituimos el despeje en la otra ecuación y se resuelve la ecuación.

$$5x + 3y = 1 \quad \Rightarrow \quad 5\left(\frac{4y - 11}{3}\right) + 3y = 1 \quad \text{Se multiplica por 3}$$

$$5(4y - 11) + 9y = 3$$

$$20y - 55 + 9y = 3$$

$$20y + 9y = 3 + 55$$

$$29y = 58$$

$$y = \frac{58}{29}$$

$$y = 2$$

Se sustituye el valor de  $y=2$  en el despeje  $x = \frac{4y-11}{3}$

$$x = \frac{4(2) - 11}{3} = \frac{8 - 11}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Por lo tanto, los valores son: 
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$





## 5.4 Método por Igualación

En este método se elige una variable, la cual se despeja de ambas ecuaciones, los despejes se igualan y se resuelve la ecuación de primer grado que resulta. Por último, el valor que se obtiene se sustituye en cualquiera de los despejes para hallar el otro valor.

### Ejemplo:

1.- Determina el punto de intersección de las rectas:  $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 6y = -45 \end{cases}$

Despejamos  $x$  de ambas ecuaciones.

$$2x - 3y = 9$$

$$2x = 3y + 9$$

$$x = \frac{3y + 9}{2}$$

$$5x + 6y = -45$$

$$5x = -6y - 45$$

$$x = \frac{-6y - 45}{5}$$

Igualamos los despejes y resolvemos la ecuación

$$\frac{3y + 9}{2} = \frac{-6y - 45}{5}$$

$$5(3y + 9) = 2(-6y - 45)$$

$$15y + 45 = -12y - 90$$

$$15y + 12y = -90 - 45$$

$$27y = -135$$

$$y = \frac{-135}{27} = -5$$

El valor de  $y = -5$  se sustituye en cualquiera de los despejes

$$x = \frac{3y + 9}{2}$$

$$x = \frac{3(-5) + 9}{2} = \frac{-15 + 9}{2}$$

$$x = \frac{-6}{2} = -3$$

Por consiguiente el punto de intersección es  $(-3, -5)$



## 5.5 Método por Determinantes

1. **Determinante de  $2 \times 2$ .** Un determinante de  $2 \times 2$  es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ con } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

**Ejemplo:**

1.- Determina la solución del sistema:  $\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$

Aplicando la solución general, tenemos

$$\begin{array}{rclcl} a & & b & & c \\ 4x & - & y & = & -9 \\ 3x & + & 5y & = & -1 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-45 - 1}{20 + 3} = \frac{-46}{23} = -2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 27}{20 + 3} = \frac{23}{23} = 1$$

Por tanto, la solución es  $x = -2$ ,  $y = 1$ , las rectas son concurrentes



## Taller de ejercicios

*Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por los métodos mostrados:*

1. 
$$\begin{cases} 2x+y=-10 \\ x-3y=2 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x-2y=11 \\ x+5y=-17 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} 6r-5t=-11 \\ 7t-8r=15 \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} 4a+5b=-3 \\ -7b+3a=-13 \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} 8p-3q=8 \\ 2p+9q=15 \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} 3p-2q=-5 \\ 2p+q=-1 \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} 7p-3q=-28 \\ 5q-4p=16 \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ -5b-6a=-9 \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} 12u-16v=24 \\ 3u-4v=6 \end{cases}$$

10. 
$$\begin{cases} 6u-3v=7 \\ 8u-5v=10 \end{cases}$$

11. 
$$\begin{cases} 2x+y=9 \\ 8x+4y=36 \end{cases}$$

12. 
$$\begin{cases} x+3y=4 \\ -4x-12y=8 \end{cases}$$



## 5.6 Resolución de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática también se llama ecuación de **segundo grado**.

Para resolver ecuaciones cuadráticas, se puede utilizar la propiedad del producto cero. Recuerda que el principio del producto cero expresa que si el producto de dos factores es cero, entonces por lo menos uno de los factores debe ser cero.

$$\text{Si } a \cdot b = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0$$

### Ejemplo:

1.- Resuelve la ecuación cuadrática por factorización  $2x^2 - x = 1$

Esta es la ecuación cuadrática

$$2x^2 - x = 1$$

La escribimos en forma general

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Factorizamos el lado izquierdo

$$(2x + 1)(x - 1) = 0$$

si  $(2x + 1)(x - 1) = 0$ , entonces

$$2x + 1 = 0 \quad x - 1 = 0$$

Resolviendo cada ecuación para  $x$ .

$$2x = -1 \quad x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto la solución es:  $-\frac{1}{2}$  y 1

2.- Resuelve  $x^2 = 10x - 25$

Esta es la ecuación cuadrática

$$x^2 = 10x - 25$$

La escribimos en forma general

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Factorizamos el lado izquierdo

$$(x - 5)(x - 5) = 0$$

Sea cada factor igual a 0.

$$x - 5 = 0 \quad x - 5 = 0$$

Resolviendo cada ecuación para  $x$ .

$$x = 5 \quad x = 5$$

Por lo tanto, 5 es una **raíz doble** de la ecuación.

*Procedimiento para la resolución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas.*

- 1. Las dos ecuaciones se multiplican por un número, de tal forma que al efectuar la suma de las ecuaciones equivalentes, se elimina una de las dos incógnitas.*
- 2. Se resuelve la ecuación de segundo grado que se obtuvo en el punto anterior.*
- 3. Para concluir, las raíces obtenidas se evalúan en alguna de las dos ecuaciones originales, para obtener los puntos de intersección.*

**Ejemplo:**

1.- Resuelve el 
$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31 \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

*Al aplicar el método de reducción, se multiplica por 3 la segunda ecuación,*

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 3y^2 & = & 31 \\ 9x^2 - 3y^2 & = & 9 \\ \hline 10x^2 & = & 40 \end{array}$$

*al resolver la ecuación, se determina que,  $x = 2$  o  $x = -2$*

*Estos resultados se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones dadas para encontrar el valor de  $y$ .*

$$\text{Si } x = 2, \quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\text{Si } x = -2, \quad y = \sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{3(2)^2 - 3} = \sqrt{12 - 3} = \sqrt{9} = \pm 3$$

*Por lo cual las soluciones son:  $(2,3)$ ,  $(2,-3)$ ,  $(-2,3)$  y  $(-2,-3)$*



*Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$1. \begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} xy = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 7p - 3q = -28 \\ 5q - 4p = 16 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} -w^2 + wz - z^2 + 7 = 0 \\ w = 2z - 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} b^2 + 3a^2 = 57 \\ -a^2 - 3b^2 = -43 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 9x^2 - 2y^2 = 1 \\ 9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} a^2 - b^2 = -28 \\ a^2 + b^2 = 36 \end{cases}$$



## 6 TRIGONOMETRIA

### 6.1 Funciones Trigonométricas

A las razones que existen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se les llama funciones o razones trigonométricas.

#### Definiciones

**Seno de un ángulo.** Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

**Coseno de un ángulo.** Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

**Tangente de un ángulo.** Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

**Cotangente de un ángulo.** Es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.

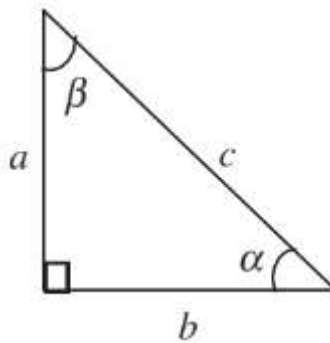
**Secante de un ángulo.** Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

**Cosecante de un ángulo.** Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

*Nota:* los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice.

#### Ejemplo:

1.- En el siguiente triángulo determina los catetos opuesto y adyacente para cada uno de los ángulos agudos.

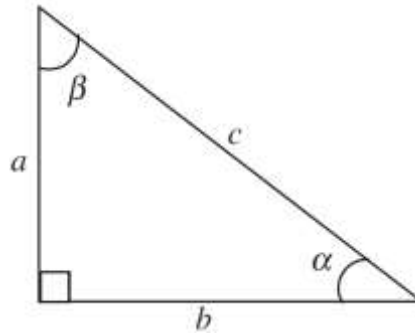


Para el ángulo  $\alpha$ :  
cateto opuesto =  $a$   
cateto adyacente =  $b$   
hipotenusa =  $c$

Para el ángulo  $\beta$ :  
cateto opuesto =  $b$   
cateto adyacente =  $a$   
hipotenusa =  $c$



2.- Obtén las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo:



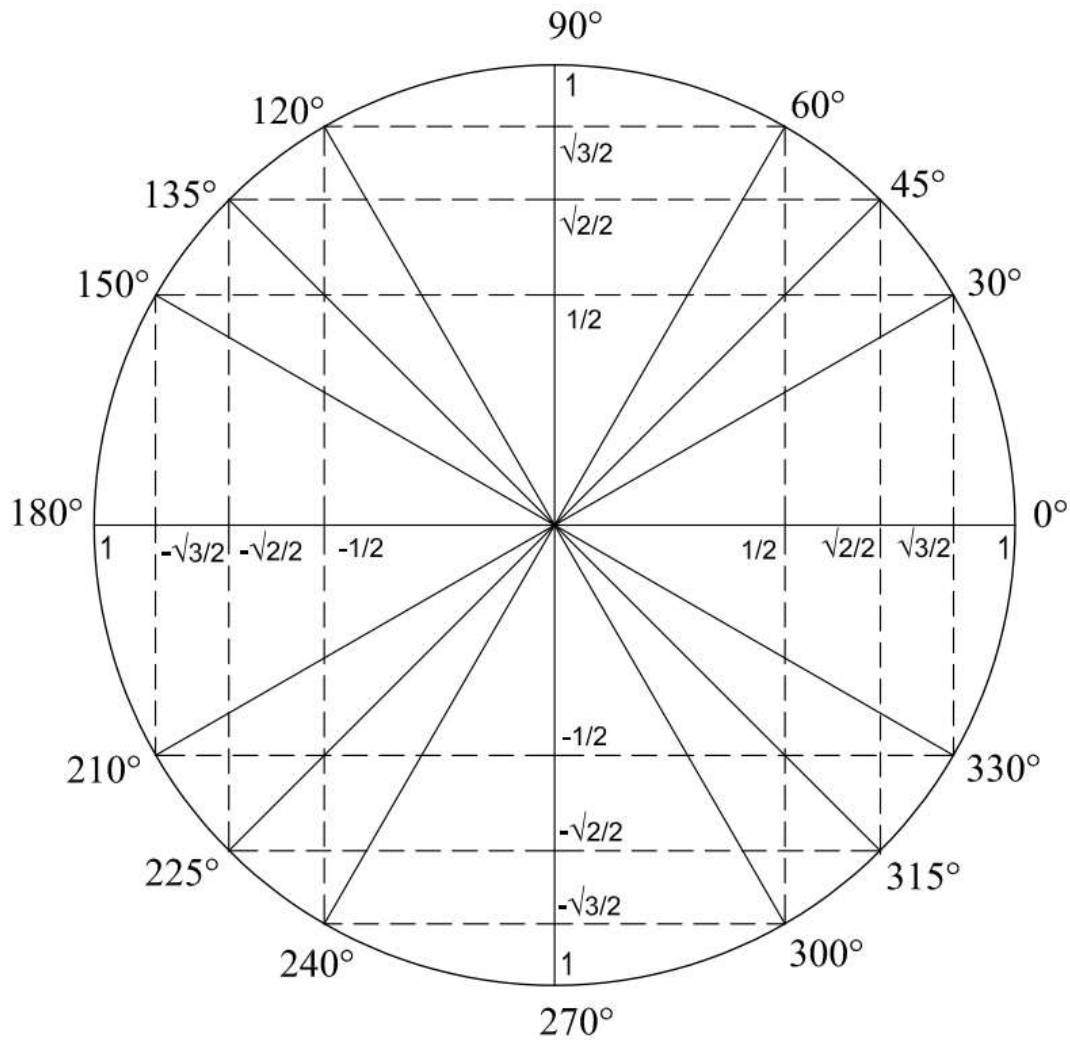
Según el triángulo, se tiene:

Funciones de $\alpha$ :		Funciones de $\beta$ :	
$\left[ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \frac{a}{c} \\ \text{cos } \alpha = \frac{b}{c} \\ \text{tan } \alpha = \frac{a}{b} \\ \text{ctg } \alpha = \frac{b}{a} \\ \text{sec } \alpha = \frac{c}{b} \\ \text{csc } \alpha = \frac{c}{a} \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right.$	$\begin{array}{c} \swarrow \\ \nwarrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \\ \swarrow \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \beta = \frac{b}{c} \\ \text{cos } \beta = \frac{a}{c} \\ \text{tan } \beta = \frac{b}{a} \\ \text{ctg } \beta = \frac{a}{b} \\ \text{sec } \beta = \frac{c}{a} \\ \text{csc } \beta = \frac{c}{b} \end{array} \right]$





## 6.2 Círculo Trigonométrico



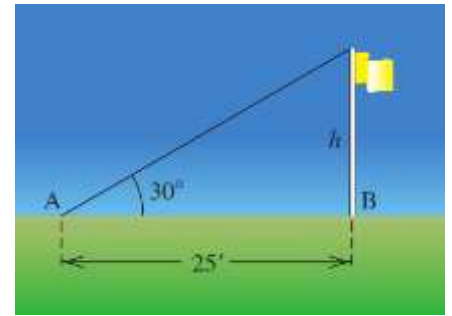
$\theta$ (radianes)	$\theta$ (grados)	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\text{tan } \theta$	$\text{cot } \theta$	$\text{sec } \theta$	$\text{csc } \theta$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$



### Ejemplo:

#### 1.- Hallar la altura de un asta de bandera

Un topógrafo observa que en un punto A, situado al nivel del suelo a una distancia de 25.0 pies de la base B de un asta de bandera, el ángulo entre el suelo y el extremo superior del poste es de  $30^\circ$ . Calcule la altura  $h$  del poste al décimo de pie más cercano.



Usemos una función trigonométrica que relacione esos dos lados ( $h$  y  $25'$ ), es decir,  $\tan$  o  $\cot$ . Por lo general es más fácil resolver el problema si seleccionamos la función para la cual la variable está en el numerador.

Por tanto, tenemos

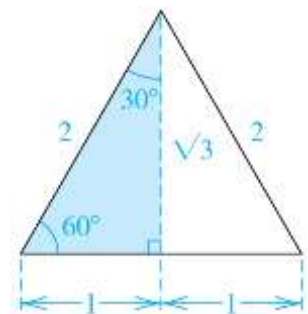
$$\tan 30^\circ = \frac{h}{25} \text{ o bien, lo que es equivalente, } h = 25 \tan 30^\circ$$

Usaremos el valor de  $\tan 30^\circ$  de la tabla anterior

$$h = 25 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 14.4 \text{ ft}$$

#### 2.- Encuentre los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a $\theta$ : (a) $\theta=60^\circ$ , (b) $\theta=30^\circ$ y (c) $\theta=45^\circ$

Considere un triángulo equilátero con lados de longitud 2. La mediana de un vértice al lado opuesto biseca el ángulo en ese vértice, como se ilustra con una línea interrumpida en la figura. Por el teorema de Pitágoras, el lado opuesto a  $60^\circ$  en el triángulo rectángulo sombreado tiene longitud  $\sqrt{3}$ .



Usando las fórmulas para las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, obtenemos los valores correspondientes a  $60^\circ$  y a  $30^\circ$  como sigue:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

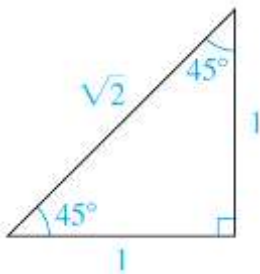
$$\tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{csc} 30^{\circ} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\sec 30^{\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Para hallar los valores para  $\theta=45^{\circ}$ , podemos considerar un triángulo rectángulo isósceles cuyos dos lados iguales tienen longitud 1, como se ve en la figura. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es  $\sqrt{2}$  por tanto los valores correspondientes para  $45^{\circ}$  son como sigue:



$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{\circ}$$

$$\tan 45^{\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{csc} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45^{\circ}$$

$$\cot 45^{\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

### Referencia Bibliográfica

- ✓ *Matemáticas Simplificadas, Segunda Edición; Editorial PEARSON, Colegio Nacional de Matemáticas*
- ✓ *Álgebra Elemental, Richard N, Aufmann, 8ª Edic.*
- ✓ *Álgebra, Dr. Aurelio Baldor, Nueva Edic.*

*Solución*

## 2.1

[illegible]